МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет "Запорізька політехніка"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та розрахунково-графічні завдання
для самостійної роботи
студентів технічних спеціальностей
та усіх форм навчання
з дисципліни

"ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ"

2023

Методичні вказівки та розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей та усіх форм навчання з дисципліни “Теорія ймовірностей” / Укл.: Д. І. Анпілогов, Ю. В. Мастиновський, Т. І. Левицька, І.С. Пожуєва – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 74 с.

Укладачі: Д. І. Анпілогов, доцент, к.т.н.
Ю. В. Мастиновський, професор, к.т.н.
Т. І. Левицька, доцент, к.т.н.
І. С. Пожуєва, доцент, к.т.н.

Експерт
спеціальності: М.М. Касьян, доцент, к.т.н.

Рецензент: Н.О. Нечипоренко, доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Т. І. Левицька, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК
факультету КНТ ЗНТУ
Протокол № 9 від 28.04.2023

Затверджено на засіданні кафедри
прикладної математики ЗНТУ
Протокол № 8 від 28.04.2023

ЗМІСТ

Вступ

Методичні вказівки складені у відповідності до програми з курсу теорії ймовірностей багатоступеневої підготовки фахівців і призначені для студентів факультетів КНТ та РЕТ всіх форм навчання.

У вказівках приведені основні теоретичні відомості, які необхідні для виконання завдань. Наведено приклади розв'язування задач типового варіанту.

Індивідуальні завдання містять 20 варіантів, по 14 задач в кожному. Варіант обирається за номером у списку навчальної групи. Якщо номер перевищує 20, то варіант дорівнює номер в списку мінус 20.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Алгебра подій

Теорія ймовірностей вивчає моделі експериментів з випадковими результатами. Явище, яке відбувається під час проведення випробування, називають *подією.* Події позначають великими буквами латинського алфавіту: A, B, C, … .

При математичній формалізації випадкового експерименту відправним пунктом є поняття простору елементарних подій (позначається Ω), який пов'язаний з даним експериментом. Під цим розуміють множину взаємовиключних подій таку, що результатом експерименту є один і тільки один результат. Будь-яка підмножина даної множини Ω інтерпретується як подія. Сукупність усіх подій, що спостерігаються, складає поле подій для даного експерименту.

Говорять, що подія А відбулася, якщо результатом експерименту є елементарна подія ω, що належить А ($\omega \in$ А). Подію, яка відбувається при досліді неминуче, називають *достовірною (U,* вона збігається з усією безліччю Ω. Подію, яка напевне не може відбуватися при випробуванні, називають *неможливою (V),* вона збігається с порожньою множиною $\varnothing$. Подію, яка може відбутися або не відбутися в результаті випробування, називають *випадковою.*

Дві події А і В називають *сумісними (несумісними),* якщо в результаті експерименту можливо (неможливо) їхнє спільне здійснення. Тобто дві події *несумісні*, якщо настання однієї з них виключає можливість настання іншої при тому самому випробуванні. Іншими словами, події А і В є сумісними, якщо відповідні множини А і В мають спільні елементи, і несумісними в протилежному випадку.

Події називаються *єдино можливими*, якщо при випробуванні одна з них і тільки одна настане обов’язково. Такі події утворюють *повну групу подій.*

Дві несумісні і єдино можливі події називаються *протилежними*. Подію, протилежну події A, позначають через $\overline{A}$.

Оскільки події ототожнюються з множинами, то над подіями можна робити всі операції, що здійснюються над множинами. Зокрема:

$A \subset B$ – подія В відбувається всякий раз, як відбувається подія А;

$C=A+B$ – подія, що складається в тому, що відбулося хоча б одна з двох подій А або В;

$C=A \cdot B$ – подія, що складається в спільному здійсненні А і В.

A-B – подія, що складається в тім, що А відбувається, а В не відбувається.

$B=\Omega$-A - протилежна подія, що відбувається в тому випадку, коли А не відбувається В= $\overline{A}$.

Події А і В несумісні, якщо $A \cdot B=V$.

Приклад 1.1.1

Експеримент складається в підкиданні два рази гральної кістки. Кубик має 6 граней з номерами 1,2,3,4,5,6, при цьому він падає на ту або іншу грань. Описати для цього випробування простір елементарних подій і вказати підмножини, що відповідають наступним подіям: А – два рази випало те саме число, В – сума номерів на гранях, що випали, не перевищує 4.

Розв'язок

Позначимо ω_{ij} – подія, яка складається в тому, що на кубику випала перший раз грань з числом рівним i, а другий раз - рівним j.

Тоді:

$$\Omega=\{ \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, ..., \omega_{63}, \omega_{64}, \omega_{65}, \omega_{66} \};$$

$$A=\{ \omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{44}, \omega_{55}, \omega_{66} \}; \quad B=\{ \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{31} \}.$$

Приклад 1.1.2

Гральна кістка підкидається один раз. Результат, що спостерігається - число, що випало на верхній грані. Подія А = {число на верхній грані кратне трьом}, В = {число очок непарне}, С = {випало число більше трьох}. З'ясувати зміст наступних подій: $E_1 = \overline{B}, E_2 = \overline{C}, E_3 = A \cdot B, E_4 = A + B$.

Розв'язок

Подія E_1 полягає в тому, що число очок парне; E_2 полягає в тому, що число очок, яке випало не більше трьох; E_3 полягає в тому, що число очок, що випали, кратне трьом і непарне, тобто випало три очка; E_4 полягає в тому, що число очок кратне трьом або непарне, тобто випала одна з цифр: 1, 3, 5 або 6.

1.2 Означення ймовірності події

Для кількісного опису міри невизначеності настання тої або іншої події, що спостерігається, вводиться числова функція P(A), яка має назву *ймовірність події A.* Ця функція задовольняє трьом аксіомам (*аксіоматичне визначення ймовірності*):

1) $0 \le P(A) \le 1$,

2) $P(\Omega)=1$,

3) для будь-якої скінченої або нескінченої послідовності подій, що спостерігаються $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, що $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \ne j$, $P(\sum A_k) = \sum P(A_k)$.

Якщо множина Ω складається з n рівноможливих елементарних подій, то ймовірністю події A *в класичному сенсі* називають відношення кількості m сприятливих для цієї події результатів випробування до кількості n всіх можливих результатів випробування:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Відповідно, ймовірність достовірної події дорівнює 1, ймовірність неможливої події дорівнює 0, ймовірність випадкової події задовольняє подвійну нерівність $0 < p < 1$.

Нехай здійсненню деякої події A сприяють m результатів при n випробуваннях. Тоді здійсненню події $\overline{A}$ сприяють решта $(n-m)$ результатів. Тоді

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1.$$

Нехай d – частина області D, і випробування полягає в киданні точки всередину області D навмання. Нехай випадкова подія A – потрапляння точки всередину d. Ймовірністю події A *в геометричному сенсі* називають відношення:

$$p(A)=\frac{S_d}{S_D},$$

де S_d, S_D – міри областей d, D відповідно (довжини, площі або об'єми для одновимірного, двовимірного і тривимірного випадків відповідно).

Нехай деякий дослід повторюють n разів, і при цьому випадкова подія A відбулась m разів. Відносною частотою події A називають відношення $w(A)=\frac{m}{n}$. Ймовірністю події A *в статистичному сенсі* називають границю:

$$p(A)=\lim_{n\to\infty} w(A).$$

Для знаходження m і n в формулі визначення ймовірності події за класичним означенням часто використовуються формули *комбінаторики*. Якщо дана множина A={$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$}, то *розміщенням (сполученням)* з n елементів по k називається будь-яка *упорядкована* (*неупорядкована*) множина k елементів множини A. При k=n розміщення називається *перестановкою* з n елементів.

Число сполучень обчислюється за формулою: $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Число розміщень обчислюється за формулою: $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Число сполучень з повтореннями за формулою: $\overline{C_n^k}=C_{n+k-1}^k$.

Число розміщень з повторюваннями за формулою: $\overline{A_n^k}=n^k$.

Приклад 1.2.1

В урні п'ять чорних і чотири білих кулі. З урни навмання вибирається одна куля. Побудувати для цього експерименту простір елементарних подій і знайти ймовірність події A={вийнято білу кулю}.

Розв'язок

Перенумеруємо кулі в урні від 1 до 9: перші чотири кулі - білі, останні п'ять - чорні: Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9}; A={1,2,3,4}. Елементарні події рівноможливі. Оскільки вони несумісні й утворюють повну групу подій, то ймовірність події A знаходиться за формулою: P(A)=m/n=4/9.

Приклад 1.2.2

У партії з дев'яти виробів три бракованих. З партії навмання вибирається чотири вироби. Скільки різних наборів з чотирьох виробів можна скласти? Яка ймовірність, що серед навмання обраних чотирьох виробів два виявляться бракованими?

Розв'язок

Число різних наборів з чотирьох виробів: $n=C_9^4=126$. Подія A={серед обраних виробів два бракованих}. Число елементів множини A дорівнює числу можливих способів відібрати два бракованих вироби з трьох бракованих і два доброякісних вироби із шести доброякісних: $m= C_3^2 \cdot C_6^2=3 \cdot 15=45$; P(A)=m/n=45/126=5/14.

Приклад 1.2.3

Множина складається з дев'яти перших літер англійського алфавіту. Експеримент складається у виборі без повернення чотирьох літер і запису слова в порядку надходження літер. Скільки слів з чотирьох літер може бути отримано в даному експерименті? Яка ймовірність того, що навмання складене слово буде закінчуватися літерою *a*?

Розв'язок

Число всіх слів, складених з чотирьох літер, дорівнює числу елементарних упорядкованих підмножин з дев'яти елементів, тобто $n=A_9^4=3024$. Нехай подія A={навмання складене слово з чотирьох літер закінчується літерою *a*}. Число елементів підмножини A дорівнює числу способів розмістити на три місця, які залишилися вільнимі, по одному символу з восьми (символ *a* виключений з розгляду, оскільки його місце вже визначене). Таким чином, $m=A_8^3=336$, а P(A)=m/n=336/3024=1/9.

1.3 Теореми множення і додавання ймовірностей

Сумою двох подій A і B називають подію C, яка полягає в тому, що з подій A і B відбувається принаймні хоча б одна. Використовують позначення $C = A + B$.

Добутком двох подій A і B називають подію C, яка полягає в тому, що одночасно відбувається і подія A, і подія B. Використовують позначення $C = A \cdot B$. Дві події називаються *незалежними*, якщо ймовірність однієї з них не залежить від настання або ненастання другої.

Теорема додавання ймовірностей. Якщо події A і B несумісні, тобто $A \cdot B = \varnothing$, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Якщо події A і B сумісні то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

З правила додавання ймовірностей випливає: якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несумісні й утворюють повну групу, то сума їхніх ймовірностей дорівнює одиниці. Зокрема, дві протилежні події несумісні й утворюють повну групу, якщо $P(A)+P(B)=1$. Звідсіля маємо $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Теорема множення ймовірностей. $P(AB)=P(A) \cdot P(B/A)$, де $P(B/A)$ – умовна ймовірність, тобто ймовірність події B за умови, що A - відбулося; якщо події A і B незалежні, то $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$.

Для незалежних подій виконується рівність $P(B/A)=P(B)$.

Приклад 1.3.1

Винищувач і бомбардувальник починають повітряний бій. Першим стріляє винищувач і попадає в бомбардувальник з ймовірністю 0,2. Якщо бомбардувальник не збитий, то, стріляючи по винищувачу, збиває його з ймовірністю 0,3. Якщо винищувач не збитий, то він продовжує атаку і попадає в бомбардувальник з ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що в повітряному бою буде збитий бомбардувальник.

Розв'язок

Позначимо події:

A - збитий бомбардувальник;

A_1 - збитий бомбардувальник першою чергою винищувача;

A_2 - збитий бомбардувальник другою чергою винищувача;

A_3 - бомбардувальник збив винищувача.

Використовуючи алгебру подій і теореми додавання та множення ймовірностей, отримуємо:

$A = A_1 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_3} \cdot A_2$;

$P(A_1)=0,2$, $P(A_2)=0,4$, $P(A_3)=0,3$;

$$P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_3}\cdot A_2\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)\cdot P\left(A_2\right)=(1-0{,}2)\cdot(1-0{,}3)\cdot 0{,}4=0{,}224;$$
$$P(A)=P\left(A_1\right)+P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_3}\cdot A_2\right)=0{,}424.$$

Приклад 1.3.2

В урні 20 куль, з них чотири червоних, вісім - синіх, сім - зелених і одна біла. Яка ймовірність того, що в перший раз буде вийнята червона куля (подія А), у другий раз - синя (подія В) і в третій - зелена (подія С), якщо витягнуті з урни кулі назад не повертаються.

Розв'язок

Треба знайти ймовірність події $A\cdot B\cdot C$. Формула для її знаходження має вигляд

$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot(C/AB)$.

Ймовірність того, що спочатку буде вийнята червона куля, дорівнює $P(A)=4/20=1/5$. Ймовірність витягнути синю кулю за умови, що спочатку з урни була вийнята червона - $P(B/A)=8/19$, тому що в урні залишилося 19 куль. Ймовірність витягнути з урни зелену кулю, після того як були витягнуті червона і синя кулі - $P(C/AB)=7/18$. Звідси $P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)=1/5\cdot 8/19\cdot 7/18\approx 0{,}033$.

1.4 Формула повної ймовірності і формула Байєса

Формула повної ймовірності. Нехай $A_1, A_2,\ldots, A_n$ утворюють повну групу подій (гіпотези), і нехай подія В відбувається обов'язково з одним із A_i. (подія $D=\sum_{i=1}^{n} A_i$ є достовірною). Оскільки $B=B\cdot D=\sum_{i=1}^{n} B\cdot A_i$, тоді ймовірність події В обчислюється за формулою:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+\ldots+P(A_n)P(B/A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).$$

Приклад 1.4.1

Є три шухляди. У першій шухляді 3 білих і 3 чорних кулі, у другій - 5 білих і 1 чорна, у третій - 1 біла і 5 чорних. Навмання вибираємо шухляду і виймаємо з неї кулю. Визначити ймовірність того, що вийнята куля біла.

Розв'язок

Позначимо події наступним чином: A_i – обрана i-а шухляда, B – обрана біла куля. Тоді маємо:

$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$, $P(B/A_1)=3/6$, $P(B/A_2)=5/6$, $P(B/A_3)=1/6$.

Використовуючи формулу повної ймовірності, одержуємо:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Формула Байєса. Нехай A_1, A_2, …, A_n утворюють повну групу подій, і нехай подія B відбувається обов'язково з одним з A_i. Нехай подія B відбулася. Тоді ймовірність того, що вона відбулася саме з A_k дорівнює:

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B/A_i)}.$$

Формулу Байєса називають також формулою переоцінки ймовірностей гіпотез.

Приклад 1.4.2

Умова з попереднього приклада. Якщо вийняли білу кулю, то яка ймовірність того, що вона вийнята із третьої шухляди?

Розв'язок

Використовуючи формулу Байєса, знаходимо:

$$P(A_3/B)=\frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)}=\frac{1/3\cdot 1/6}{1/2}=\frac{1}{9}.$$

1.5 Формули Бернуллі та Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа

Нехай деяка подія A при одноразовому випробуванні відбувається з імовірністю p (і не відбувається з імовірністю $q=1-p$ відповідно). Схема Бернуллі полягає в багаторазовому проведенні досліду при постійному значенні p. Формула Бернуллі відповідає на запитання: «Чому дорівнює ймовірність того, що при n

дослідах подія A відбудеться k разів $\left(0 \le k \le n\right)$?». ***Формула Бернуллі*** має вигляд:

$$P_n\left(k\right) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$ – кількість сполучень із n елементів по k (кількість способів обрати k елементів із тих n елементів, які є в наявності). Зазначимо, що $\sum_{k=0}^{n} P_n\left(k\right) = 1$.

Число k_0, при якому ймовірність $P_n\left(k_0\right)$ досягає найбільшого значення, задовольняє нерівність

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Його називають *найімовірнішим числом появи події* A.

Приклад 1.5.1

Монета підкидається п'ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не більш двох разів.

Розв’язок

У даній задачі кількість іспитів n=5, а кількість успіхів (випаде герб) – m≤2. Нам необхідно знайти суму наступних ймовірностей: герб не випаде жодного разу – $P_5(0)$, герб випаде один раз – $P_5(1)$, герб випаде два рази – $P_5(2)$, тобто:

$$P_5(m \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) =$$

$$= C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Формула Бернуллі надає точне значення ймовірності k появи події A при n випробуваннях. Але при великих значеннях n, k використання цієї формули утруднене. Тому користуються іншими формулами, які надають наближене значення цієї ймовірності. По перше, такою наближеною формулою є ***локальна теорема Лапласа***: якщо ймовірності p, q не є близькими ні до нуля, ані до одиниці, то:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функція Гаусса; $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\varphi(x)$ парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для неї є таблиці. При $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$. Наведена формула дає добре наближення, якщо n достатньо велике, p та q не дуже близькі до нуля, $npq > 9$.

Приклад 1.5.3

Ймовірність успіху у кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть рівно 85 випробувань?

Розв'язок

За умовою $n = 300, \quad k = 85, \quad p = 0{,}25$, тоді $q = 1 - p = 0{,}75$,

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{85 - 300 \cdot 0{,}25}{\sqrt{300 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{10}{7{,}5} = 1{,}33,$$

$$P_{300}(85) \approx \frac{1}{7{,}5} \varphi(1{,}33) = \frac{0{,}1647}{7{,}5} = 0{,}0219.$$

По друге, якщо число p є близьким до нуля (A – рідкісна подія), то користуються ***формулою Пуассона***:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np.$$

Приклад 1.5.2

Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти ймовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5000 пострілів.

Розв'язок

За умовою: $n = 5000, \quad p = 0{,}001$, отже:

$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$.

$P(k \geq 2) = 1 - P(0 \leq k \leq 1) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} \approx 0{,}95957.$

Узагальнення постановки питання в схемі Бернуллі звучить так: «Знайти ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться не менше k' разів і не більше k'' разів». Відповідь на це питання надається ***інтегральною теоремою Лапласа***:

$$P_n\left(k', k''\right) \approx \int_{x'}^{x''} \varphi\left(x\right) dx = \Phi\left(x''\right) - \Phi\left(x'\right),$$

де $x' = \frac{k' - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k'' - np}{\sqrt{npq}}$ – межі інтегрування;

$\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ – функція Лапласа.

При розрахунках використовують непарність функції: *$\Phi(-x) = -\Phi(x)$,* $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(-x) = -0{,}5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$, а також табличні значення. Наведена формула дає добре наближення, якщо n достатньо велике, p та q не дуже близькі до нуля, $npq > 9$. Для всіх значень $x \geq 5$ можна вважати $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Приклад 1.5.4

Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t зі 100 приладів вийде з ладу не менше 20.

Розв'язок

За умовою:

$n = 100, \quad k' = 20, \quad k'' = 100, \quad p = 0{,}1, \quad q = 1 - p = 0{,}9$

$$\frac{k'' - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{90}{3} = 30$$

$$\frac{k' - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{10}{3} = 3{,}3$$

$$P_{100}(20;100) \approx \Phi(30) - \Phi(3,3) = 0,5 - 0,4995 = 0,0005.$$

1.6 Випадкові величини

Випадковою називають величину X, яка в результаті досліду може набувати того або іншого значення x, $X=X(\omega)$ є функція елементарної події ω, яка належить множині Ω. (Наприклад, кількість очок, яка випала на грані гральної кості; кількість викликів на автоматичній телефонній станції; дальність польоту снаряда і т.д.) Множина можливих значень випадковою величини X складається з усіх значень, які приймає функція X(ω). Деякі з випадкових величин можуть набувати дискретних значень, решта - довільних значень з певного інтервалу. Перші величини є *дискретними*, другі – *неперервними* випадковими.

Будемо говорити, що про випадкову величину відомо усе, якщо можна перелічити всі значення випадкової величини в експерименті або вказати інтервал її значень, а також перелічити ймовірності, з якими приймаються кожне значення або вказати ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з будь-якого інтервалу. Інакше кажучи, необхідно задати закон розподілу випадкової величини.

Дискретну випадкову величину X характеризують *законом розподілу*, який кожному значенню x_i ставить у відповідність ймовірність $p_i = P\left(X = x_i\right)$ його реалізації. Закон розподілу можна задати за допомогою таблиці, яка містить два рядки (в першому – значення x_i в порядку зростання, в другому – відповідні значення p_i), її називають *рядом розподілу* дискретної випадкової величини, вона має наступний вигляд:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1)$$

а також *аналітично* (у виді формул) і *графічно*. Кусочно-лінійний графік, побудований за цією таблицею, називають *багатокутником розподілу*.

Приклад 1.6.1

Задати закон розподілу числа випадання герба в п'ятьох киданнях монети.

Розв'язок

X - число випадань герба. Ймовірності обчислюються за формулою Бернуллі:

$$p_5(0)=C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32},\qquad p_5(1)=C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32},$$

$$p_5(2)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{32},\qquad p_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32},$$

$$p_5(4)=C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32},\qquad p_5(5)=C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{32}.$$

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3	4	5
P	$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$

Аналогом до закону розподілу у випадку неперервної випадкової величини є *щільність ймовірності* $f\left(x\right)$, яка дорівнює ймовірності dw потрапляння значення x всередину інтервалу dx в розрахунку на одиницю довжини цього інтервалу: $f\left(x\right)=\frac{dw}{dx}$.

1.7 Функції розподілу і щільності розподілу і їх властивості

Подія $\left(X<x\right)$ є випадковою і тому характеризується ймовірністю $P\left(X<x\right)$. Функцію $F\left(x\right)=P\left(X<x\right)$ називають *інтегральною функцією розподілу* випадкової величини. Вона має наступні *властивості*:

1. $0\le F(x)\le 1$;

2. $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$ (*ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал* $[a;b)$);
3. $P(X \ge x) = 1 - F(x)$;
4. якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$ (*тобто функція* $F(x)$ *є неспадною)*;
5. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Для дискретної випадкової величини X, що може приймати значення $x_1, \cdots, x_n$:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i < x} p_i$$

де підсумування поширюється на ті індекси i, для яких $x_i < x$.

Приклад 1.7.1

Нехай випадкова величина задана таблицею:

X	1	4	8
p	0.3	0.1	0.6

Знайти функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

Розв'язок

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 1 \\ 0.3 & при\ 1 < x \le 4 \\ 0.4 & при\ 4 < x \le 8 \\ 1 & при\ x > 8 \end{cases}$$

На рис.1 відображено функцію розподілу.

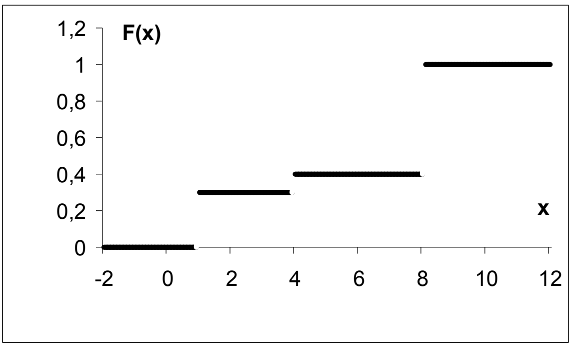

Рис. 1

Якщо розглядається неперервна випадкова величина *X*, то її функцію розподілу можна подати у вигляді

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,,$$

де *f*(*x*) – деяка функція, яку називають *щільністю розподілу* ймовірностей.

Якщо *F(x)* диференційовна і похідна її обмежена, то випадкова величина неперервна і має щільність розподілу ймовірностей

$$f(x)=F'(x).$$

Основні *властивості* щільністю розподілу ймовірностей (її іноді називають *диференціальною функцією розподілу*):

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$;

2. $P\{a \leq x \leq b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx\,,\ P(X = a) = 0$;

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (оскільки подія $-\infty < X < +\infty$ є достовірною).

Зазвичай щільність імовірності задана кусочно. Тому при використанні цієї умови враховують адитивність інтегралу Рімана: інтервал $x \in (-\infty; +\infty)$ розбивають на окремі підінтервали, на яких щільність імовірності задана аналітично.

Дискретний аналог умови 3: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ як імовірність достовірної події.

1.8 Числові характеристики випадкових величин

Випадкові величини, крім законів розподілу, можуть також описуватися числовими характеристиками, серед яких розрізняють характеристики положення (*математичне сподівання, мода, медіана* та ін.) і характеристики розсіювання (*дисперсія, середньоквадратичне відхилення, різні моменти розподілу вище першого* та ін.).

Модою $M_0(X)$ називається значення випадкової величини Х, для якого щільність розподілу ймовірностей максимальна, тобто

$\max\limits_{x} f(x) = f(M_0(X))$ (для неперервних випадкових величин) або в якому випадкова величина має найбільшу ймовірність $\max\limits_{i} p_i$ (для дискретних випадкових величин).

Математичним сподіванням називається дійсне число, обумовлене в залежності від типу випадкової величини *X* формулою:

а) для дискретних:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ,$$

де x_i, p_i – значення з таблиці розподілу ймовірностей;

б) для неперервних:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx ,$$

де $f(x)$ – щільність ймовірності величини *X*.

Властивості математичного сподівання:

- $M(C) = C$, де $C = \text{const}$;
- $M(CX) = CM(X)$, де $C = \text{const}$, X – випадкова величина;
- $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$, де X, Y – випадкові величини;
- $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, де X, Y – незалежні випадкові величини.

Відхилення $(X - M(X))$ також є випадковою величиною, причому її математичне сподівання дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0 .$$

Тому мірою розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання вважають не відхилення, а дисперсію.

Дисперсією випадкової величини *X* називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання, яка за визначенням є:

$$D = M\left(\{X - M(X)\}^2\right).$$

Для дискретних випадкових величин дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i \,, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

де x_i, p_i – значення з таблиці розподілу ймовірностей.

Для неперервних випадкових величин:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \,.$$

Використовуючи властивості математичного сподівання, неважко отримати зручну формулу для обчислення дисперсії дискретної випадкової величини:

$$D(X) = M(X^2) - \{M(X)\}^2 ,$$

або в розширеному вигляді:

а) для дискретних випадкових величин

$$D(X) = \sum_{(i)} p_i x_i^2 - \left(\sum_{(i)} p_i x_i \right)^2 ;$$

б) для неперервних випадкових величин

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2 .$$

Властивості дисперсії:

– $D(C) = 0$, де $C = \text{const}$;

– $D(CX) = C^2 D(X)$, де $C = \text{const}$, X – випадкова величина;

– $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, де X, Y – незалежні випадкові величини.

Середнє квадратичне відхилення визначають як

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Воно має розмірність випадкової величини X і визначає деякий стандартний інтервал розсіювання.

Приклад 1.8.1

Маємо 7 радіоламп, серед яких 3 несправні. На зовнішній вигляд несправні не відрізняються від нових. Навмання беруться 4 радіолампи і вставляються в 4 патрона. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення числа радіоламп *X*, що будуть працювати.

Розв'язок

Випадкова величина X – число працюючих радіоламп, може приймати значення 1,2,3,4 з ймовірностями:

$$P_1=C_4^1\cdot C_3^3/C_7^4=4/35; \qquad P_2=C_4^2\cdot C_3^2/C_7^4=18/35;$$

$$P_3=C_4^3\cdot C_3^1/C_7^4=12/35; \qquad P_4=C_4^4/C_7^4=1/35;$$

Закон розподілу випадкової величини x має вигляд

X	1	2	3	4
P	4/35	18/35	12/35	1/35

Функція розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 1 \\ 4/35, & \text{якщо} \quad 1<x\le 2 \\ 22/35, & \text{якщо} \quad 2<x\le 3 \\ 34/35, & \text{якщо} \quad 3<x\le 4 \\ 1, & \text{якщо} \quad x>4 \end{cases}$$

Математичне сподівання:

$$M[X]=1\cdot 4/35+2\cdot 18/35+3\cdot 12/35+4\cdot 1/35=80/35\approx 2{,}28.$$

Дисперсія:

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=1^2\cdot 4/35+2^2\cdot 18/35+3^2\cdot 12/35+4^2\cdot 1/35-(2{,}28)^2\approx 0{,}49.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}49}=0{,}7.$$

Приклад 1.8.2

Дано функцію $f(x)=Ax^2e^{-2x}$ $(0\le x<+\infty)$. Визначити при якому значенні A функція *f(x)* буде функцією щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини. Знайти функцію розподілу *F(x),* ймовірність прийняття випадковою величиною значення з інтервалу (0;1/2), математичне сподівання випадкової величини.

Розв'язок

Скористаємося властивістю функції щільності розподілу ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad \int_{0}^{\infty} Ax^2 e^{-2x} dx = 1.$$

Для нашої задачі:

$$\text{A}=1/(\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x} dx\ )=4;$$

$$\text{F(x)}=\int_{0}^{x} 4\, x^2 e^{\text{-2x}} dx = 1\text{-e}^{\text{-2x}}(2\text{x}^2\text{+2x+1});$$

$$\text{P}(0<\text{x}<1/2)=\text{F}(1/2)–\text{F}(0)=1–\text{e}^{-1}(1/2+1+1)=1–5/(2\text{e});$$

$$M[X]=\int_{0}^{\infty} 4x^3 e^{-2x} dx = 3/2.$$

Нехай $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – незалежні випадкові величини, які мають однаковий закон розподілу і, відповідно, однакові математичне сподівання $a = M(X_i)$, дисперсію $D_0 = D(X_i)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma_0 = \sqrt{D_0}$. Нехай $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – випадкова величина, яка є їх середнім арифметичним. Використовуючи властивості математичного сподівання і дисперсії, маємо:

$$M(Y) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = \frac{1}{n}\cdot na = a\,,$$

$$D(Y) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D_0 = \frac{1}{n^2}\cdot nD_0 = \frac{D_0}{n}.$$

Відповідно, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{\frac{D_0}{n}}=\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

1.9 Основні закони розподілу дискретної випадкової величини

Біноміальний розподіл є одним з розподілів *дискретної* випадкової величини та відповідає схемі незалежних випробувань Бернуллі. Дискретною випадковою величиною X є кількість k появ деякої події A при n незалежних випробуваннях. Закон біноміального розподілу визначається формулою Бернуллі:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Через $p=P(A)$ позначена ймовірність появи події A при одноразовому випробуванні, також $q=1-p$. Математичне сподівання і дисперсія величини X дорівнюють:

$$M(X)=np, \qquad D(X)=npq.$$

Якщо в біноміальному розподілі кількість n виявляється дуже великою, а ймовірність p – дуже малою, то розрахунки за формулою Бернуллі стають дуже складними. Тому користуються однією з асимптотик формули Бернуллі. Вважатимемо, що $n\to\infty$ і $p\to 0$, але в такий спосіб, що $\lambda=np=\mathrm{const}$. Маємо

$$\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))\approx n^k,$$

бо цей добуток має k співмножників, які практично однакові (оскільки $p<<1$, то подія A є рідкісною, і тому $k<<n$, отже $(n-1)\approx(n-2)\approx\cdots\approx(n-(k-1))\approx n$). Крім того:

$$q^{n-k}=e^{\ln q^{(n-k)}}=e^{(n-k)\ln q}\approx e^{n\ln(1-p)}\approx e^{-np}$$

(знову врахували, що $k<<n$, тобто $n-k\approx n$, а також використали еквівалентність нескінченно малих $\ln(1+x)\sim x$, $x\to 0$, поклавши $x=-p$). Тоді

$$P_n(k) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{k!} \cdot n^k p^k e^{-np} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Цю асимптотику формули Бернуллі називають законом *розподілу Пуассона*, або ж *законом рідкісних подій*. Практично формулою Пуассона користуються, якщо величина $\lambda = np = \text{const} < 10$. Випадковою величиною X знову є кількість k появ деякої події A при n незалежних випробуваннях. Математичне сподівання і дисперсія величини X дорівнюють

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Ще одним видом розподілу дискретної випадкової величини є *геометричний розподіл*. Він також виникає в умовах схеми незалежних випробувань, але випробування повторюються (можливо, нескінченну кількість разів) до першої появи події A. Випадковою величиною X є кількість m випробувань, які необхідно провести, щоб, нарешті, одержати появу події A. Нехай імовірність появи події A при одноразовому випробуванні дорівнює p, і $q = 1 - p$. Необхідно, щоб спочатку подія A не настала при $(m-1)$ випробуваннях поспіль, і щоб вона потім настала при m-му випробуванні. Отже

$$p_m = pq^{m-1}.$$

Свою назву геометричний розподіл отримав за схожість з формулою m-го члену геометричної прогресії. Математичне сподівання і дисперсія величини X, розподіленої за геометричним законом, дорівнюють

$$M(X) = \frac{1}{p}, \qquad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Приклад 1.9.1.

Ймовірність відмовлення кожного приладу при іспиті не залежить від відмовлень інших приладів і дорівнює 0,2. Випробувано 5 приладів. Випадкова величина X – число приладів, що відмовили за час іспиту. Побудувати закон розподілу цієї випадкової величини. Знайти математичне сподівання, моду, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок

Випадкова величина X – число приладів, що відмовили, розподілена за біноміальним розподілом. Тоді за формулою Бернуллі:

$P\{x=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$, де $q=1-p$

Обчислимо ймовірності появи випадкової величини:

P(X=0)=0,85=0,3277

P(X=1)=5*0,2*0,84=0,4096

P(X=2)=C_5^2*0,22*0,83=0,2048

P(X=3)=C_5^3*0,23*0,82=0,0512

P(X=4)=C_5^4*0,24*0,8=0,0064

P(X=5)=0,25=0,0003

Заповнимо таблицю:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

Для біноміального розподілу:

$$M[X]=np; \qquad D[X]=npq.$$

Тобто:

M[x]=0,2*5=1;

D[x]=5*0,2*0,8=0,8;

$\sigma[x]=\sqrt{D[x]}=\sqrt{0.8}\approx 0{,}9.$

Мода M_0=1.

Приклад 1.9.2

При іспиті легованої сталі на зміст вуглецю ймовірність того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищить припустимий рівень, дорівнює p=0,01. Вважаючи, що випадкова величина розподілена за законом рідких явищ, обчислити, скільки в середньому необхідно випробувати зразків, щоб з ймовірністю p=0,95 зазначений ефект спостерігався принаймні k раз (розглянути випадок k=1,2).

Розв’язок

У цій задачі застосуємо закон Пуассона

$P\{x=m\}=(\lambda^m/m!)\cdot e^{-\lambda}$, де $\lambda=np$.

Ймовірність того, що випадкова величина з'явиться принаймні k раз, знаходиться по формулі:

$$P\{x \geq k\} = \sum_{i=k}^{n} (\lambda^i / i!) \cdot e^{-\lambda}$$

У випадку k=1:

$$P\{x \geq 1\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda^i / i!) \cdot e^{-\lambda}$$

Простіше розглянути ймовірність протилежної події:

$P\{x<1\}=P\{x=0\}=e^{-\lambda}=e^{-np}=e^{-0,01n}$,

Тоді:

$P\{x\geq1]=1-P\{x=0\}=1-e^{-0,01n}$,

$1-e^{-0,01n}\geq0,95$; $e^{-0,01n}\leq0,05$;

$n\geq-100\,ln0,05=299,6$.

Отже, потрібно випробувати число зразків ≥300, щоб зазначений ефект міг спостерігатися не менш одного разу.

Аналогічно при k=2:

$P\{x\geq2\}=1-(P\{x=0\}+P\{x=1\})=1-e^{-0,01n}-0,01e^{-0,01n}\geq0,95$

або $e^{-0,01n(1+0,01n)}\leq0,05$.

Розв’яжемо рівняння $e^{-0,01n(1+0,01n)}=0,05$ методом ітерацій. Скористаємося формулою:

$n_{i+1}=-100\,ln(0,05/(1+0,01n_i))=100\,ln((1+0,01n_i)/0,05)=100\,ln(20+0,2n_i)$

Візьмемо $n_0=100$

$n_1=100\,ln(20+0,2*100)=100\,ln40=368,8$;

$n_2=100\,ln(20+0,2*368,8)=454,07$;

$n_3=100\,ln(20+0,2*454,07)=470,8$

$n_4=100\,ln(20+0,2*470,8)=473,76$;

$n_5=100\,ln(20+0,2*473,76)=474,27$;

$n_6=100\,ln(20+0,2*474,27)=474,366$.

Отже, число проб ≥475.

1.10 Основні закони розподілу неперервної випадкової величини

Наведемо тепер приклади законів розподілу ***неперервних*** випадкових величин. Неперервна випадкова величина X має *рівномірний розподіл* на відрізку $[a\,;b]$, якщо щільність імовірності

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}$$

Математичне сподівання і дисперсія неперервної величини X, рівномірно розподіленої на відрізку $[a\,;b]$, дорівнюють

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \qquad D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Неперервна випадкова величина X має *показниковий* (*експоненціальний*) *розподіл* з параметром λ, якщо щільність ймовірності

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Математичне сподівання і дисперсія неперервної величини X, експоненціально розподіленої з параметром λ, дорівнюють

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Показниковий розподіл часто зустрічається в теорії масового обслуговування (наприклад, X - час чекання при технічному обслуговуванні або X - тривалість телефонних розмов, які щодня реєструються на телефонній станції) і в теорії надійності (наприклад, X - термін служби радіоелектронної апаратури).

Неперервна випадкова величина X має *нормальний розподіл* з параметрами a, σ, якщо щільність імовірності

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математичне сподівання і дисперсія неперервної величини X, нормально розподіленої з параметрами a, σ, дорівнюють:

$$M(X) = a, \qquad D(X) = \sigma^2.$$

Окремий частинний випадок виникає при $a = 0$, $\sigma = 1$. Одержуємо т.зв. *стандартний нормальний розподіл*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Цю функцію називають функцією Гаусса; її затабульовано. За допомогою заміни змінних $Y = \frac{X-a}{\sigma}$ нормально розподілену величину X з будь-якими параметрами розподілу a, σ можна звести до випадкової величини Y, яка має стандартний нормальний розподіл (з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$).

Її функція розподілу:

$$F(x)=0,5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=0,5+\Phi(x)$$ ($\Phi(x)$– функція Лапласа).

Для нормального розподілу ймовірність того, що *випадкова величина X потрапить на інтервал (α,β):*

$$P(X\in(\alpha,\beta))=\Phi((\alpha-a)/\sigma)-\Phi((\beta-a)/\sigma)$$

Для ймовірності влучення на симетричний щодо математичного сподівання інтервал, справедливою є формула

$$P\{|x-a|<\varepsilon\}=2\Phi(\varepsilon/\sigma).$$

Нормальний розподіл виникає тоді, коли величина *X* утворюється в результаті підсумовування великого числа незалежних випадкових доданків.

Приклад 1.10.1

При роботі ЕОМ у випадкові моменти виникають несправності. Час *t* роботи ЕОМ до першої несправності розподілений зп по показниковим законом з параметром λ: $\varphi(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ ($t>0$). При виникненні несправності вона миттєво виявляється та ЕОМ надходить у ремонт. Ремонт продовжується час t_0, після чого ЕОМ знову включається в роботу. Знайти щільність *f(t)* і функцію розподілу *F(t)* проміжку часу Z між двома сусідніми несправностями. Знайти його математичне сподівання і дисперсію. Знайти ймовірність того, що Z буде більше $2t_0$.

Розв'язок

$z=t+t_0$;

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & \text{при} \quad t>t_0;\\ 0, & \text{при } t<t_0;\end{cases}$$

$$F(t)=\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & \text{при} \quad t>t_0;\\ 0, & \text{при } t<t_0;\end{cases}$$

$M[Z]=1/\lambda+t_0$; $D[Z]=1/\lambda^2$; $P\{Z>2t_0\}=1–F(2t_0)=\lambda\, e^{-\lambda t_0}$.

Приклад 1.10.2

Бракування кульок для підшипників проводиться так: якщо кулька не проходить через отвір діаметра d_1, але проходить через отвір діаметра $d_2>d_1$, то її розмір вважається припустимим. Якщо яка-небудь з цих умов не виконується, то кулька бракується. Відомо, що діаметр кульки X є нормально розподілена випадкова величина з характеристиками $a=(d_1+d_2)/2$ і $\sigma=(d_2–d_1)/4$. Визначити ймовірність того, що кулька буде забракована.

Розв'язок

Інтервал (d_1,d_2) симетричний відносно a. За формулою:

$$P\{\,|X-a|<\varepsilon\}=2\Phi(\varepsilon/\sigma),$$

вважаючи $\varepsilon=(d_2–d_1)/2$, знаходимо ймовірність того, що кулька не буде забракована:

$$P\{|X-a|<(d_2–d_1)/2\}=2\Phi((d_2–d_1)/2\sigma).$$

Звідки отримуємо:

$$P=1–2\Phi((d_2–d_1)/2\sigma)=1–2\Phi(2(d_2–d_1)/(d_2–d_1))=$$

$$=1–2\Phi(2)=1–2\cdot 0{,}47725=1–0{,}9545=0{,}0455.$$

2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1

1. На 15 картках написали числа від 1 до 15. Навмання обирають одну картку. Позначимо події: A={вибране число більш ніж 5}, B={вибране число не більш ніж 12}, C={вибране непарне число}, D={вибране число кратне 3}. Описати наступні події $A \cdot B + D$, $(B+C) \cdot D \cdot A$.

2. Проводять експеримент, в результаті якого можуть наступити події A, B, C. Описати можливі випадки проведення експерименту з використанням операцій над цими подіями та протилежними до них $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$: 1) D={наступила тільки одна подія};2) E={наступило не менш ніж 2 події}; 3) F={не наступило 3 події}.

3. Введено в розгляд наступні події: A={обрано деталь першого сорту}, B={обрано деталь непофарбовану}, C={обрано деталь малого розміру}. Описати події: 1) обрано пофарбовану деталь першого сорту; 2) обрано непофарбовану деталь, яка є першого сорту або не мала; 3) обрали пофарбовану деталь не першого сорту.

4. Кинули три монети. Позначено події: A={перша монета впала гербом вгору}, B={друга монета впала гербом вгору}, C={третя монета впала гербом вгору}. Описати через ці події та протилежні до них наступні: 1) випали два герби; 2) жодної цифри не випало; 3) не більш ніж один герб випав.

5. Підкинули 2 монети. Позначимо події, які полягають в тому, що при підкиданні з'явилися: A={2 герби}, B={хоча б одна цифра}, C={жодної цифри}, D={1 герб}. Описати наступні події: BD+A, $\overline{D} \cdot \overline{A}$, $(C+\overline{D}) \cdot A$.

6. Через канал зв'язку передають 3 сигнали. Події полягають в наступному $A_i =${і-ий сигнал переданий без помилок} (і=1,2,3). Описати події: 1) прийнято один помилковий сигнал, 2) жодної помилки не було зроблено, 3)

хоча б один сигнал прийнято з помилкою, 4) описати подію $A_1+A_2A_3$.

7. Чотири студенти складають іспит. Подія $A_i=\{$і-ий студент склав іспит$\}$ (і=1,2,3,4). Описати події 1) перший студент склав іспит, а хоча б один з інших не склав, 2) не менш ніж 3 студенти склали іспит, 3) один студент не склав іспит.

8. Прилад складається з трьох вузлів. Подія $A_i=\{$і-ий вузол працює$\}$ (і=1,2,3). Опишіть наступний стан приладу: 1) хоча б один вузол працює; 2) жоден вузол не працює; 3) всі вузли працюють; 4) перший вузол не працює, а другий чи третій працює.

9. Чотири стрілка стріляють у одну ціль. $A_i=\{$і-ий стрілок влучив у ціль$\}$ (і=1,2,3,4). Описати події: 1) $A_1(A_2+A_3)A_4$, 2) $A_1+A_2+A_3+A_4$, 3) $\overline{A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4}$.

10. Екзаменаційний білет містить 2 теоретичних питання та одну задачу. Позначимо події: A={правильно відповісти на перше питання}, B={правильно відповісти на друге питання}, C={правильно розв'язати задачу}. В чому полягають події: 1) $A+B+C$, 2) $A\cdot\overline{B\cdot C}$, 3) $\overline{A}\cdot(B+C)$?

11. На 10 картках написали числа від 11 до 20. Навмання обирають одну картку. Позначимо події: A={вибране число не більш ніж 18}, B={вибране число більш ніж 12}, C={вибране парне число}, D={вибране число кратне 3}. Описати наступні події $A\cdot C\cdot D$, $(B+A)\cdot(D+\overline{C})$.

12. Проводять експеримент, в результаті якого можуть наступити події A, B, C. Описати можливі випадки проведення експерименту з використанням операцій над цими подіями та протилежними до них $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$: 1) D={відбулося тільки дві події};2) E={відбулося не менш ніж 1 подія}; 3) F={не відбулось жодної події}.

13. Кинули чотири монети. Позначено події: A={перша монета впала гербом вгору}, B={друга монета впала гербом вгору}, C={третя монета впала гербом вгору}, D={четверта

монета впала гербом вгору}. Описати через ці події та протилежні до них наступні: 1) випали три герби; 2) не випало двох цифр; 3) не більш ніж два герби випали.

14. Прилад складається з чотирьох вузлів. Подія $A_i=${і-ий вузол працює} (і=1,2,3,4). Опишіть наступний стан приладу: 1) три вузли працюють; 2) два вузла не працюють; 3) хоча б один вузол працює; 4) перший чи третій вузол не працює, а другий та четвертий працює.

15. Посадили три рослини. Маємо події: А={перша рослина зійшла}, В={друга рослина зійшла}, С={третя рослина зійшла}. Описати події: $A\cdot B\cdot\overline{C}$, $A+B+C$, AC, $(B+A)\cdot\overline{C}$.

16. Чотири стрілка стріляють у одну ціль. $A_i=${і-ий стрілок влучив у ціль} (і=1,2,3,4). Описати події: 1) $A_1A_2A_4$, 2) $(A_1+A_2)\cdot(A_3+A_4)$, 3) $\overline{A_1+A_2+A_3+A_4}$.

17. Екзаменаційний білет містить 2 теоретичних питання та 2 задачі. Позначимо події: А={правильно відповісти на перше питання}, В={правильно відповісти на друге питання}, С={правильно розв'язати першу задачу}, D={правильно розв'язати другу задачу}. Описати події: 1) розв'язати одну задачу та відповісти на одне питання, 2) відповісти хоча б на одне питання та розв'язати обидві задачі, 3) не відповісти на друге питання, та розв'язати хоча б одну задачу.

18. Через канал зв'язку передають 4 сигнали. Події полягають в наступному $A_i=${і-ий сигнал переданий без помилок} (і=1,2,3,4). Описати події: 1) прийнято два помилкових сигнали, 2) всі сигнали пройшли без помилок, 3) хоча б один сигнал пройшов без помилок, 4) описати подію $(\overline{A_1+A_2})\cdot A_3\cdot A_4$.

19. Три студенти незалежно один від одного розв'язують одну й ту саму задачу. Подія A_1 - перший студент розв'язав задачу, A_2 - другий студент розв'язав задачу, A_3 - третій студент розв'язав задачу. Виразити через ці події та протилежні до них

наступні події: 1) всі студенти розв'язали задачу, 2) задачу розв'язав тільки перший студент, 3) задачу розв'язав хоча б один студент, 4) задачу розв'язав тільки один студент.

20. У квітковому магазині продають червоні, жовті і білі троянди. Купують одну квітку. Позначимо події: A={купили червону троянду}, B={купили жовту троянду}, C={купили білу троянду}. Описати в чому полягають події: 1) $A \cdot B$, 2) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$, 3) $\overline{A+B}$, 4) $\overline{A}+\overline{B}$, 5) $(\overline{A}+\overline{B}) \cdot C$.

Завдання № 2

1. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в непофарбованій частині кола? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

2. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій двічі? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

3. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій лише в синє? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

4. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка

ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій лише в червоне? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

5. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій лише один раз? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

6. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій хоча б один раз? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

7. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій не більше ніж один раз? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

8. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій не менше ніж один раз? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

9. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола,

пофарбованій тільки в червоне або не пофарбованій зовсім? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

10. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \ge x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій двічі або не пофарбованій зовсім? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

11. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в непофарбованій частині квадрата? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

12. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій двічі? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

13. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій лише в синє? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

14. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій лише в червоне? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

15. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій лише один раз? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

16. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій хоча б один раз? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

17. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій не більше ніж один раз? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

18. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій не менше ніж один раз? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

19. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій тільки в червоне або не пофарбованій зовсім? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

20. Квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \ge 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій двічі або не пофарбованій зовсім? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

Завдання № 3

1. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників двоє одержали золоту медаль?
2. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників двоє одержали срібну медаль?
3. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників двоє одержали медаль?
4. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників двоє не одержали ніякої медалі?
5. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників один одержав золоту медаль, і один – срібну?
6. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що в мішень влучить тільки один стрілець?
7. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що в мішень влучить хоча б один стрілець?
8. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для

другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що в мішень не влучить жоден стрілець?

9. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що мішень буде ураженою не менше ніж два рази?

10. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що мішень буде ураженою рівно два рази?

11. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого ґатунку, 750 – першого ґатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 2 будуть вищого ґатунку?

12. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого ґатунку, 750 – першого ґатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 7 будуть першого ґатунку?

13. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого ґатунку, 750 – першого ґатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей не буде бракованих?

14. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого ґатунку, 750 – першого ґатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 2 будуть вищого ґатунку і одна буде бракованою?

15. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого ґатунку, 750 – першого ґатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 7 будуть першого ґатунку і одна буде бракованою?

16. В урні 20 кульок, з них 8 – білі. Навмання витягли дві кульки. Найти ймовірність того, що вони обидві – білі.

17. В групі 30 студентів, з них 20 – юнаки. В деканат визвали двох студентів. Найти ймовірність того, що вони обидві – юнаки.

18. В кафе 12 видів десертів, з них 8 – з горіхами. Відвідувачі замовили три різних десерти. Найти ймовірність того, що всі десерти – з горіхами.

19. Серед 80 дерев 20 – дуби. Спиляли 2 дерева. Найти ймовірність того, що обидва спиляні дерева – дуби.

20. Серед 100 болтів 6 – нестандартні. Навмання обрали 3 болти. Найти ймовірність того, що всі обрані болти – нестандартні.

Завдання № 4

1. На складі зберігається 1000 деталей, з яких 600 виготовлено на першій фабриці, і 400 – на другій. Перша фабрика випускає 20% деталей вищого ґатунку, а друга – 10%. Яка ймовірність того, що навмання обрана деталь – вищого ґатунку?

2. В першій урні знаходяться 2 білих кульки і 3 чорних, а в другій – 2 білих кульки і 8 чорних. Навмання витягли одну кульку. Яка ймовірність того, що вона біла?

3. В таксопарку 30 автомобілів «Ланос» і 20 автомобілів «Славута». Ймовірність того, що «Ланос» спізниться до замовника, дорівнює 2%, а «Славута» – 5%. Яка ймовірність того, що викликаний автомобіль спізниться?

4. Бабуся, йдучи в гості до онуки, може купити улюблені цукерки в «Білочці» (куди зайде з імовірністю 40%) або в «Крем-Розеті» (куди зайде з імовірністю 60%). Улюблені цукерки є в продажу в «Білочці» з ймовірністю 70%, а в «Крем-Розеті» – з ймовірністю 80%. Яка ймовірність того, що бабуся натрапить на улюблені цукерки?

5. Автомагнітола «Pioneer» за рік експлуатації може вийти з ладу з імовірністю 0,05, а автомагнітола «Alpine» – з імовірністю 0,03. На автосервісі встановлюють «Pioneer» з імовірністю 60% чи «Alpine» з імовірністю 40%. Яка ймовірність того, що магнітола, встановлена на цьому автосервісі, вийде з ладу за рік експлуатації?

6. Школу №1 відремонтують до початку нового року з імовірністю 85%, а школу №2 – з імовірністю 95%. Батьки оформлять першокласника до школи №1 з імовірністю 30%, а до школи №2 – з імовірністю 70%. Яка ймовірність того, що першокласник навчатиметься у відремонтований школі?

7. У спекотні дні холодильник в кафе не встигає охолоджувати напої, тому «Фанта» може виявитись охолодженою з імовірністю 0,65, а «Спрайт» – з імовірністю 0,8. Клієнт обирає «Фанту» з імовірністю 30%, а «Спрайт» – з імовірністю 70%. Яка ймовірність того, що замовлений напій буде охолодженим?

8. Турист відправиться у подорож літаком з імовірністю 35% чи автобусом з імовірністю 65%. Рівень сервісу задовольняє туриста в авіакомпанії з імовірністю 90%, а в компанії автоперевізника – з імовірністю 75%. Яка ймовірність того, що турист буде задоволений рівнем сервісу?

9. При користуванні пакетом «Щасливий дзвінок» плата за послуги мобільного зв'язку не перевищує три гривні на день з імовірністю 0,45, а при користуванні пакетом «Зателефонуйте мені» – з імовірністю 0,99. Абонент обирає пакет «Щасливий дзвінок» з імовірністю 0,7, або пакет «Зателефонуйте мені» – з імовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що витрати цього абонента не перевищують три гривні на день?

10. В спеціалізованому книжковому магазині є: 1000 книжок з історії, з них 200 – у твердій обкладинці; 500 книжок з філософії, з них 100 – у твердій обкладинці; 2000 книжок з психології, з них 1500 – у твердій обкладинці. Читач купує одну книгу. Ця книга – з історії з імовірністю 40%, з філософії з імовірністю 10% чи з психології з імовірністю 50%. Яка ймовірність того, що куплена книга – у твердій обкладинці?

11. На день народження батьки можуть подарувати дитині м'яку іграшку з імовірністю 35% чи конструктор з імовірністю 65%. М'яка іграшка може виявитись для дитини бажаною з імовірністю 30%, а конструктор – з імовірністю 60%. З якою імовірністю подарунок виявиться бажаним?

12. В новому районі 75% будинків – каркасно-монолітні, а 25% – з цегли. Каркасно-монолітний будинок має підземну парковку у 95% випадків, а будинок із цегли – у 40% випадків. Родина новоселів обирає будинок. Яка ймовірність того, що буде обраний будинок з підземною парковкою?

13. В першому фотоательє роблять 70% глянцевих світлин і 30% матових, а в другому – 60% і 40% відповідно. Клієнт звертається до першого фотоательє з імовірністю 80%, чи до другого – з імовірністю 20%. Яка ймовірність того, що клієнт отримає глянцеву світлину?

14. В групі 20 студентів, з яких 4 відмінники. Ймовірність розв'язати задачу для відмінника становить 0,9, а для решти студентів – 0,6. Якай ймовірність того, що випадково обраний студент розв'яже задачу?

15. Виробник отримує комплектуючі від двох постачальників, частки яких 40% та 60%. Дефектними є 2% деталей першого постачальника і 3% другого. Яка ймовірність того, що навмання обрана деталь є дефектною?

16. Є дві партії деталей з 10 і 12 штук, причому в кожній партії одна деталь є бракованою. З першої партії навмання обрали одну деталь і переклали в другу партію. Після цього з другої партії навмання витягли одну деталь. Яка ймовірність того, що деталь, витягнута з другої партії, є бракованою?

17. Ввечері по першому каналу транслюватимуть художній фільм-переможець конкурсу з імовірністю 60%, а по другому – з імовірністю 80%. Глядач увімкне перший канал у двох випадках із десяти, а другий – у восьми випадках із десяти. Яка ймовірність того, що глядач побачить фільм-переможець конкурсу?

18. Якщо остання задача тесту – з геометрії, то учень розв'яже її з імовірністю 0,7, а якщо з алгебри – то з імовірністю 0,8. Остання задача може виявитись задачею з геометрії з імовірністю 0,35. Яка ймовірність того, що учень розв'яже останню задачу?

19. Механічний годинник іде з придатною точністю з імовірністю 0,7, а електронний – з імовірністю 0,999. З партії 160 годинників, з яких 40 механічних, навмання обрали один. Яка ймовірність того, що обраний годинник йтиме з придатною точністю?

20. Потужна лампа розжарювання може згоріти протягом року з імовірністю 6%, а малопотужна – з імовірністю 2%. В коробці було 24 лампи, в тому числі 16 – потужні. З них навмання обрали одну. Яка ймовірність того, що вона згорить протягом року?

Завдання № 5

1. В першій урні знаходились 2 білих кульки і 3 чорних, а в другій – 2 білих кульки і 8 чорних. Навмання витягли одну кульку. Яка ймовірність того, що її витягли з першої урни, якщо вона виявилась білою?

2. В таксопарку 30 автомобілів «Ланос» і 20 автомобілів «Славута». Ймовірність того, що «Ланос» спізниться до замовника, дорівнює 2%, а «Славута» – 5%. Яка ймовірність того, що викликаний автомобіль є «Ланосом», якщо виявилось, що він спізнився?

3. Бабуся, йдучи в гості до онуки, може купити цукерки в «Білочці» (куди могла б зайти з імовірністю 40%) або в «Крем-Розеті» (куди могла б зайти з імовірністю 60%). Улюблені цукерки є в продажу в «Білочці» з ймовірністю 70%, а в «Крем-Розеті» – з ймовірністю 80%. Яка ймовірність того, що бабуся обрала «Білочку», якщо стало відомо, що вона натрапила на улюблені цукерки?

4. Автомагнітола «Pioneer» за рік експлуатації може вийти з ладу з імовірністю 0,05, а автомагнітола «Alpine» – з імовірністю 0,03. На автосервісі встановлюють «Pioneer» з імовірністю 60% чи «Alpine» з імовірністю 40%. Магнітола, встановлена на цьому автосервісі, вийшла з ладу за рік експлуатації. Яка ймовірність того, що це був «Pioneer»?

5. Школу №1 відремонтують до початку нового року з імовірністю 85%, а школу №2 – з імовірністю 95%. Батьки могли б оформити першокласника до школи №1 з імовірністю 30%, а до школи №2 – з імовірністю 70%. Яка ймовірність того, що першокласника оформили до школи №2, якщо виявилось, що вона відремонтована?

6. У спекотні дні холодильник в кафе не встигає охолоджувати напої, тому «Фанта» може виявитись охолодженою з імовірністю 0,65, а «Спрайт» – з імовірністю 0,8. Клієнт міг би обрати «Фанту» з імовірністю 30%, а «Спрайт» – з імовірністю 70%. Яка ймовірність того, що він обрав «Спрайт», якщо замовлений напій виявився охолодженим?

7. Турист міг би відправитись у подорож літаком з імовірністю 35% чи автобусом з імовірністю 65%. Рівень сервісу задовольняє туриста в авіакомпанії з імовірністю 90%, а в компанії автоперевізника – з імовірністю 75%. Яка ймовірність того, що турист відправився у подорож літаком, якщо відомо, що рівень сервісу його задовольнив?

8. При користуванні пакетом «Щасливий дзвінок» плата за послуги мобільного зв’язку не перевищує три гривні на день з імовірністю 0,45, а при користуванні пакетом «Зателефонуйте мені» – з імовірністю 0,99. Абонент міг би обрати пакет «Щасливий дзвінок» з

імовірністю 0,7, або пакет «Зателефонуйте мені» – з імовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що він обрав пакет «Щасливий дзвінок», якщо відомо, що його витрати не перевищують три гривні на день?

9. В спеціалізованому книжковому магазині є: 1000 книжок з історії, з них 200 – у твердій обкладинці; 500 книжок з філософії, з них 100 – у твердій обкладинці; 2000 книжок з психології, з них 1500 – у твердій обкладинці. Читач купує одну книгу. Ця книга могла б бути з історії з імовірністю 40%, з філософії з імовірністю 10% чи з психології з імовірністю 50%. Яка ймовірність того, що куплена книга – з філософії, якщо відомо, що вона виявилась у твердій обкладинці?

10. На день народження батьки могли б подарувати дитині м'яку іграшку з імовірністю 35% чи конструктор з імовірністю 65%. М'яка іграшка може виявитись для дитини бажаною з імовірністю 30%, а конструктор – з імовірністю 60%. Яка імовірність того, що дитині подарували конструктор, якщо відомо, що подарунок виявився бажаним?

11. В новому районі 75% будинків – каркасно-монолітні, а 25% – з цегли. Каркасно-монолітний будинок має підземну парковку у 95% випадків, а будинок із цегли – у 40% випадків. Родина новоселів обирає будинок. Яка ймовірність того, що обраний будинок є каркасно-монолітним, якщо стало відомо, що в ньому є підземна парковка?

12. В першому фотоательє роблять 70% глянцевих світлин і 30% матових, а в другому – 60% і 40% відповідно. Клієнт міг би звернутися до першого фотоательє з імовірністю 80%, чи до другого – з імовірністю 20%. Яка ймовірність того, що він звернувся до першого фотоательє, якщо відомо, що отримана світлина є глянцевою?

13. В групі 20 студентів, з яких 4 відмінники. Ймовірність розв'язати задачу для відмінника становить 0,9, а для решти студентів – 0,6. Якай ймовірність того, що випадково обраний студент є відмінником, якщо стало відомо, що він розв'язав задачу?

14. Виробник отримує комплектуючі від двох постачальників, частки яких 40% та 60%. Дефектними є 2% деталей першого постачальника і 3% другого. Яка ймовірність того, що навмання обрана деталь – від першого постачальника, якщо вона виявилась дефектною?

15. Є дві партії деталей з 10 і 12 штук, причому в кожній партії одна деталь є бракованою. З першої партії навмання обрали одну

деталь і переклали в другу партію. Після цього з другої партії навмання витягли одну деталь. Яка ймовірність того, що деталь, перекладена з першої партії – не бракована, якщо деталь, витягнута з другої партії, виявилась бракованою?

16. Ввечері по першому каналу транслюватимуть художній фільм-переможець конкурсу з імовірністю 60%, а по другому – з імовірністю 80%. Глядач міг би увімкнути перший канал у двох випадках із десяти, а другий – у восьми випадках із десяти. Яка ймовірність того, що глядач увімкнув перший канал, якщо відомо, що він дивиться фільм-переможець конкурсу?

17. Якщо остання задача тесту – з геометрії, то учень розв’яже її з імовірністю 0,7, а якщо з алгебри – то з імовірністю 0,8. Остання задача могла б виявитись задачею з геометрії з імовірністю 0,35. Яка ймовірність того, що остання задача насправді була задачею з геометрії, якщо відомо, що учень її розв’язав?

18. Механічний годинник іде з придатною точністю з імовірністю 0,7, а електронний – з імовірністю 0,999. З партії 160 годинників, з яких 40 механічних, навмання обрали один. Яка ймовірність того, що обрали механічний годинник, якщо відомо, що він іде з придатною точністю?

19. Потужна лампа розжарювання може згоріти протягом року з імовірністю 6%, а малопотужна – з імовірністю 2%. В коробці було 24 лампи, в тому числі 16 – потужні. З них навмання обрали одну, яка згоріла протягом року. Яка ймовірність того, що було обрано потужну лампу?

20. На складі зберігається 1000 деталей, з яких 600 виготовлено на першій фабриці, і 400 – на другій. Перша фабрика випускає 20% деталей вищого ґатунку, а друга – 10%. Яка ймовірність того, що навмання обрану деталь виготовлено на першій фабриці, якщо вона виявилась вищого ґатунку?

Завдання № 6

1. У родині четверо дітей. Яка ймовірність того, що два з них – хлопчики? Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515.

2. Дівчинка добирає букет з п’яти білих та червоних троянд. Чергова квітка – біла з імовірністю 0,2. Яка ймовірність того, що в букеті буде одна біла троянда?

3. Стрілець стріляє в мішень 4 рази. Ймовірність влучити при кожному пострілі дорівнює 0,2. Що більш імовірно – влучити один раз чи не влучити жодного разу?

4. Що більш імовірно – виграти в шахи у рівноправного суперника три партії з чотирьох чи п’ять партій з восьми?

5. Юннат посадив 10 зерняток. Кожне зернятко може прорости з імовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що в досліді юнната проросте 4 зернятка?

6. Юннат посадив 10 зерняток. Кожне зернятко може прорости з імовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що в досліді юнната проросте 5 зерняток?

7. Протягом першого тижня літа в певній місцевості кожний день може виявитись похмурим з імовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що на першому тижні літа три дні будуть похмурими?

8. Монету підкидали 8 разів. Яка ймовірність того, що вона 5 разів упаде цифрою догори?

9. Гральну кістку підкидали 5 разів. Яка ймовірність того, у двох випадках з п’яти випадає по одному очку?

10. З колоди (32 карти) витягають карту і повертають її назад в колоду. Дослід повторюють чотири рази. Яка ймовірність того, що в двох випадках з чотирьох було витягнуто туза?

11. У 8 випадках із 10 порушення правил дорожнього руху на трасі полягає в порушенні швидкісного режиму. Яка ймовірність того, що з 8 порушників 6 порушили саме швидкісний режим?

12. У веселці 7 кольорів. Кожна з 5 дівчат обирає собі один колір. Яка ймовірність того, що дві дівчинки обрали собі зелений колір?

13. Серед сучасних мобільних телефонів 45% мають сенсорний екран. Яка ймовірність того, що серед 9 навмання обраних мобільних телефонів 4 мають сенсорний екран?

14. Всередині кола з центром в початку декартової системи координат навмання розташували 9 точок. Яка ймовірність того, що 2 з них знаходяться в першому квадранті?

15. Для роботи GPS-навігатор, який може вимірювати висоту без барометричного сенсора, має прийняти сигнали не менше ніж чотирьох супутників. В даній місцевості транслюють свої сигнали 14 супутників. Прийом сигналу від кожного з них відбувається з імовірністю 0,5. З якою ймовірністю навігатор буде працювати?

16. Історики музики розповідають, що недоброзичливці перед концертом підпиляли на скрипці Нікколо Паганіні три струни, але майстер зміг на четвертій струні відіграти весь концерт. Припустимо, ймовірність того, що струна обірветься, дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що обірвуться дві струни з чотирьох?

17. Кожен з шести учнів називає одну цифру, обрану ним навмання. Яка ймовірність того, що буде названо три непарні цифри?

18. Програма MiniTool Power Data Recovery може відновити файли на флеш-накопичувачі, навіть якщо його було відформатовано. За певних умов процес відновлення кожного файлу є успішним з імовірністю 0,8. На накопичувачі перед форматуванням було розміщено 14 файлів. Яка ймовірність того, що буде можливо відновити не менше 12 файлів?

19. Програма MiniTool Power Data Recovery може відновити файли на флеш-накопичувачі, навіть якщо його було відформатовано. За певних умов процес відновлення кожного файлу є успішним з імовірністю 0,8. На накопичувачі перед форматуванням було розміщено 12345 файлів. Яка найбільш імовірна кількість відновлених файлів?

20. При верстанні тринадцятої сторінки цих методичних вказівок виникла потреба 13 разів викликати редактор формул Microsoft Equation 3.0. Через потойбічні фактори збій в роботі цього редактору на день верстання (13 число) складав 0,13 при кожному виклику. Яка ймовірність того, що при верстанні цієї сторінки збій в роботі редактору мав місце два рази?

Завдання № 7

1-20. При одноразовому випробуванні деяка подія A може відбутися з імовірністю p. Проведено n випробувань. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться а) 2 рази; б) не більше ніж 2 рази. Скористайтесь такими даними:

1. $n = 2000$, $p = 0{,}00075$.
2. $n = 3000$, $p = 0{,}00067$.
3. $n = 1500$, $p = 0{,}00087$.
4. $n = 2500$, $p = 0{,}00060$.

5. $n = 1800$, $p = 0{,}00092$.
6. $n = 1300$, $p = 0{,}00153$.
7. $n = 2200$, $p = 0{,}00114$.
8. $n = 2600$, $p = 0{,}00108$.
9. $n = 3200$, $p = 0{,}00045$.
10. $n = 1400$, $p = 0{,}00143$.
11. $n = 1500$, $p = 0{,}00100$.
12. $n = 2250$, $p = 0{,}00088$.
13. $n = 1700$, $p = 0{,}00148$.
14. $n = 1850$, $p = 0{,}00125$.
15. $n = 1600$, $p = 0{,}00094$.
16. $n = 2100$, $p = 0{,}00095$.
17. $n = 2900$, $p = 0{,}00086$.
18. $n = 3300$, $p = 0{,}00074$.
19. $n = 2300$, $p = 0{,}00065$.
20. $n = 3100$, $p = 0{,}00058$.

Завдання № 8

1-20. При одноразовому випробуванні деяка подія A може відбутися з імовірністю p. Проведено n випробувань. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться k разів. Скористайтесь такими даними:

1. $n = 400$, $p = 0{,}3$, $k = 129$.
2. $n = 400$, $p = 0{,}3$, $k = 111$.
3. $n = 320$, $p = 0{,}35$, $k = 121$.
4. $n = 320$, $p = 0{,}35$, $k = 103$.
5. $n = 280$, $p = 0{,}45$, $k = 134$.
6. $n = 280$, $p = 0{,}45$, $k = 118$.
7. $n = 220$, $p = 0{,}6$, $k = 125$.
8. $n = 220$, $p = 0{,}6$, $k = 140$.

9. $n = 300$, $p = 0{,}5$, $k = 159$.
10. $n = 300$, $p = 0{,}5$, $k = 141$.
11. $n = 310$, $p = 0{,}36$, $k = 103$.
12. $n = 310$, $p = 0{,}36$, $k = 120$.
13. $n = 350$, $p = 0{,}75$, $k = 254$.
14. $n = 350$, $p = 0{,}75$, $k = 271$.
15. $n = 340$, $p = 0{,}65$, $k = 230$.
16. $n = 340$, $p = 0{,}65$, $k = 212$.
17. $n = 140$, $p = 0{,}4$, $k = 62$.
18. $n = 140$, $p = 0{,}4$, $k = 50$.
19. $n = 180$, $p = 0{,}7$, $k = 120$.
20. $n = 180$, $p = 0{,}7$, $k = 132$.

Завдання № 9

1-20. При одноразовому випробуванні деяка подія A може відбутися з імовірністю p. Проведено n випробувань. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться не менше ніж k' разів, але не більше ніж k'' разів. Скористайтесь такими даними:

1. $n = 500$, $p = 0{,}4$, $k' = 186$, $k'' = 220$.
2. $n = 500$, $p = 0{,}3$, $k' = 137$, $k'' = 168$.
3. $n = 400$, $p = 0{,}35$, $k' = 125$, $k'' = 161$.
4. $n = 400$, $p = 0{,}5$, $k' = 184$, $k'' = 222$.
5. $n = 450$, $p = 0{,}7$, $k' = 288$, $k'' = 319$.
6. $n = 450$, $p = 0{,}17$, $k' = 54$, $k'' = 80$.
7. $n = 350$, $p = 0{,}25$, $k' = 81$, $k'' = 108$.
8. $n = 350$, $p = 0{,}45$, $k' = 151$, $k'' = 181$.
9. $n = 420$, $p = 0{,}6$, $k' = 240$, $k'' = 273$.
10. $n = 420$, $p = 0{,}36$, $k' = 140$, $k'' = 172$.
11. $n = 220$, $p = 0{,}55$, $k' = 97$, $k'' = 127$.
12. $n = 220$, $p = 0{,}85$, $k' = 170$, $k'' = 191$.

13. $n = 280$, $p = 0{,}24$, $k' = 65$, $k'' = 72$.
14. $n = 280$, $p = 0{,}74$, $k' = 205$, $k'' = 212$.
15. $n = 340$, $p = 0{,}65$, $k' = 209$, $k'' = 222$.
16. $n = 340$, $p = 0{,}35$, $k' = 107$, $k'' = 120$.
17. $n = 510$, $p = 0{,}25$, $k' = 124$, $k'' = 135$.
18. $n = 510$, $p = 0{,}45$, $k' = 225$, $k'' = 238$.
19. $n = 440$, $p = 0{,}15$, $k' = 65$, $k'' = 69$.
20. $n = 440$, $p = 0{,}9$, $k' = 394$, $k'' = 398$.

Завдання № 10

1-20. Дискретна випадкова величина X може прийняти значення x_1 з імовірністю p_1 чи значення x_2 з імовірністю p_2. Записати закон розподілу та знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X. Скористайтесь такими даними:

1. $x_1 = 5$; $p_1 = 0{,}1$; $x_2 = 45$; $p_2 = 0{,}9$.
2. $x_1 = 10$; $p_1 = 0{,}1$; $x_2 = 40$; $p_2 = 0{,}9$.
3. $x_1 = 15$; $p_1 = 0{,}1$; $x_2 = 35$; $p_2 = 0{,}9$.
4. $x_1 = 20$; $p_1 = 0{,}1$; $x_2 = 30$; $p_2 = 0{,}9$.
5. $x_1 = 22$; $p_1 = 0{,}1$; $x_2 = 28$; $p_2 = 0{,}9$.
6. $x_1 = 5$; $p_1 = 0{,}9$; $x_2 = 45$; $p_2 = 0{,}1$.
7. $x_1 = 10$; $p_1 = 0{,}9$; $x_2 = 40$; $p_2 = 0{,}1$.
8. $x_1 = 15$; $p_1 = 0{,}9$; $x_2 = 35$; $p_2 = 0{,}1$.
9. $x_1 = 20$; $p_1 = 0{,}9$; $x_2 = 30$; $p_2 = 0{,}1$.
10. $x_1 = 22$; $p_1 = 0{,}9$; $x_2 = 28$; $p_2 = 0{,}1$.
11. $x_1 = 45$; $p_1 = 0{,}02$; $x_2 = 55$; $p_2 = 0{,}98$.
12. $x_1 = 35$; $p_1 = 0{,}02$; $x_2 = 65$; $p_2 = 0{,}98$.
13. $x_1 = 30$; $p_1 = 0{,}02$; $x_2 = 70$; $p_2 = 0{,}98$.
14. $x_1 = 25$; $p_1 = 0{,}02$; $x_2 = 75$; $p_2 = 0{,}98$.

15. $x_1 = 20$; $p_1 = 0,02$; $x_2 = 80$; $p_2 = 0,98$.

16. $x_1 = 45$; $p_1 = 0,98$; $x_2 = 55$; $p_2 = 0,02$.

17. $x_1 = 35$; $p_1 = 0,98$; $x_2 = 65$; $p_2 = 0,02$.

18. $x_1 = 30$; $p_1 = 0,98$; $x_2 = 70$; $p_2 = 0,02$.

19. $x_1 = 25$; $p_1 = 0,98$; $x_2 = 75$; $p_2 = 0,02$.

20. $x_1 = 20$; $p_1 = 0,98$; $x_2 = 80$; $p_2 = 0,02$.

Завдання № 11

1-20. В умові нижче охарактеризовано ситуацію та названо дискретну випадкову величину. Розв'язавши відповідну задачу з теорії ймовірностей, для цієї величини записати закон розподілу та знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Скористайтесь такими описами:

1. Гральну кістку кидають два рази. Випадкова величина – сума очок, що випали.

2. Монету підкидають три рази. Випадкова величина – кількість підкидань, при яких випадає «цифра».

3. Таксі запізнюється на виклик з імовірністю 0,05. Здійснюють три виклики. Випадкова величина – кількість викликів, на які таксі запізнилось.

4. В урні 10 кульок, з яких три – білі. Дослід полягає в витяганні кульки і повертанні її назад в урну. Цей дослід повторюють тричі. Випадкова величина – кількість витягань білої кульки.

5. В урні 10 кульок, з яких три – білі. Дослід полягає в витяганні кульки без її повертання в урну. Цей дослід повторюють двічі. Випадкова величина – кількість витягань білої кульки.

6. Стрілець, маючи один патрон, стріляє у мішень. Якщо він не влучив, йому дають іще один патрон. Це відбувається до тих пір, поки він не влучить. Ймовірність попадання в мішень при кожному пострілі однакова і дорівнює 0,4. Випадкова величина – кількість зроблених пострілів.

7. У першій урні 6 білих кульок і 4 чорних, а у другій – 4 білих кульки і 6 чорних. Витягають дві кульки. Першу кульку витягають з першої урни. Якщо вона – біла, то другу кульку також витягають із

першої урни, а якщо чорна – з другої. Випадкова величина – кількість білих кульок серед витягнутих.

8. Ймовірність того, що перший стрілець влучить у мішень, дорівнює 0,7, а другий – 0,8. Кожний стрілець робить по одному пострілу. Випадкова величина – кількість влучень у мішень.

9. Екзаменаційний білет містить два питання. Студент може відповісти на перше питання з імовірністю 0,8, а на друге – з імовірністю 0,9. Випадкова величина – кількість правильних відповідей.

10. Ймовірність того, що номер навмання обраного абонента – контрактний, дорівнює 0.6. Навмання обрали трьох абонентів. Випадкова величина – кількість контрактних номерів.

11. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5. В родині четверо дітей. Випадкова величина – кількість хлопчиків в родині.

12. Гральну кістку підкидають 3 рази. Випадкова величина – кількість підкидань, при яких випадає шість очок.

13. Кожен з чотирьох учнів називає одну цифру, обрану ним навмання. Випадкова величина – кількість названих парних цифр.

14. В урні – дуже велика кількість чорних і білих кульок в пропорції 2:3. Витягають 3 кульки. Випадкова величина – кількість чорних кульок серед витягнутих.

15. Ймовірність того, що у навмання обраного автомобіля двигун дизельний, дорівнює 0,45. Випадкова величина – кількість автомобілів с дизельними двигунами серед чотирьох навмання обраних автомобілів.

16. У кожній з двох коробок 8 шоколадних цукерок і 2 карамелі. Витягають по одній цукерці з кожної коробки. Випадкова величина – кількість шоколадних цукерок.

17. У 8 випадках із 10 порушення правил дорожнього руху на трасі полягає в порушенні швидкісного режиму. Випадкова величина – кількість порушників швидкісного режиму серед трьох порушників правил дорожнього руху.

18. Серед 10 квитків 2 – виграшні. Навмання обрано 3 квитка. Випадкова величина – кількість виграшних квитків серед обраних.

19. На момент перевірки кожен з трьох ліфтів деякого будинку з імовірністю 0,1 може виявитись таким, що вийшов із ладу. Випадкова величина – кількість ліфтів, які на момент перевірки вийшли з ладу.

20. На 15 картках написані числа 1, 2, …, 15. Навмання витягають чотири картки. Випадкова величина – кількість карток, на яких число більше за 10, серед витягнутих карток.

Завдання № 12

1-20. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність імовірності $f(x)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$. Знайти ймовірність події $(X \in [a;b])$. Скористайтесь такими даними:

1. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{2}x, & 0 \le x < 2; \\ 1, & x \ge 2. \end{cases} \qquad a=1,$$
$b=2$.

2. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ \frac{1}{2}(x-1), & 1 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 3. \end{cases} \quad a=1,\ b=13.$$

3. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2; \\ \frac{1}{4}(x+2), & -2 \le x < 2; \\ 1, & x \ge 2. \end{cases} \qquad a=-3,$$
$b=1$.

4. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ \frac{1}{3}(x-2), & 2 \le x < 5; \\ 1, & x \ge 5. \end{cases} \quad a=3,\ b=4.$$

5. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sin x, & 0 \le x < \pi/2; \\ 1, & x \ge \pi/2. \end{cases} \qquad a=\frac{\pi}{6},\ b=\frac{\pi}{3}.$$

6. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/2; \\ \cos x, & -\pi/2\le x<0; \\ 1, & x\ge 0. \end{cases}$ $a=-\dfrac{\pi}{6}$, $b=0$.

7. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sin 2x, & 0\le x<\pi/4; \\ 1, & x\ge \pi/4. \end{cases}$ $a=\dfrac{\pi}{6}$, $b=3$.

8. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ e^{x}-1, & 0\le x<\ln 2; \\ 1, & x\ge \ln 2. \end{cases}$ $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$.

9. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 2x-x^{2}, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$ $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$.

10. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ x^{2}, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$ $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$.

11. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ x^{3}, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$ $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$.

12. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sqrt{x}, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$ $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$.

13. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ (x-1)^2, & 1\le x<2; \\ 1, & x\ge 2. \end{cases} \quad a=-3,\ b=\frac{3}{2}.$$

14. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{2}\sqrt{x}, & 0\le x<4; \\ 1, & x\ge 4. \end{cases} \quad a=1,\ b=4.$$

15. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{4}x^2, & 0\le x<2; \\ 1, & x\ge 2. \end{cases} \quad a=\frac{1}{2},\ b=1.$$

16. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{8}x^3, & 0\le x<2; \\ 1, & x\ge 2. \end{cases} \quad a=\frac{1}{2},\ b=1.$$

17. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sin 4x, & 0\le x<\pi/8; \\ 1, & x\ge \pi/8. \end{cases} \quad a=\frac{\pi}{16},\ b=\frac{\pi}{12}.$$

18. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{10}\left(x^3+x\right), & 0\le x<2; \\ 1, & x\ge 2. \end{cases} \quad a=1,\ b=2.$$

19. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{2}\left(x^3+x\right), & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases} \quad a=0,\ b=\frac{1}{2}.$$

20. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x-\frac{1}{4}x^2, & 0\le x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}\qquad a=0,\ b=\frac{1}{2}.$$

Завдання № 13

1-20. Використовуючи отриману в попередній задачі щільність імовірності $f(x)$, обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Завдання № 14

1-20. Задано щільність розподілу *f(x)* випадкової величини *X*. Обчислити значення невідомого параметра *a* і функцію розподілу *F(x)*.

1. $$f(x)=\begin{cases}ax+2, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$$

2. $$f(x)=\begin{cases}ax^2, & x\in[0;3]\\ 0, & x\notin[0;3]\end{cases}$$

3. $$f(x)=\begin{cases}a/x, & x\in[1;e^2]\\ 0, & x\notin[1;e^2]\end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases}a\cos x-\pi/2, & x\in[0;\pi/2]\\ 0, & x\notin[0;\pi/2]\end{cases}$$

5. $$f(x)=\begin{cases}e^x+ax, & x\in[-3;0]\\ 0, & x\notin[-3;0]\end{cases}$$

6. $$f(x)=\begin{cases}a\ell n(x)/x, & x\in[1;e^3]\\ 0, & x\notin[1;e^3]\end{cases}$$

7. $$f(x)=\begin{cases}-e^{\cos x-1}\sin x+a, & x\in[-\pi/2;0]\\ 0, & x\notin[-\pi/2;0]\end{cases}$$

8. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot 3^x}{3\cdot \ell n3}-a, & x\in[1;2]\\ 0, & x\notin[1;2]\end{cases}$$

9. $$f(x)=\begin{cases}ax+5, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$$

10. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cdot \sin x}{\cos^3 x}, & x\in[0;\pi/4]\\ 0, & x\notin[0;\pi/4]\end{cases}$$

11. $$f(x)=\begin{cases}ax\sin x, & x\in[0;\pi/2]\\ 0, & x\notin[0;\pi/2]\end{cases}$$

12. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x^2+1}, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$$

13. $$f(x)=\begin{cases}a\cdot x\cdot arctgx, & x\in[0;\pi/4]\\ 0, & x\notin[0;\pi/4]\end{cases}$$

14. $$f(x)=\begin{cases}a\sqrt[3]{x}+1, & x\in[0;8]\\ 0, & x\notin[0;8]\end{cases}$$

15. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{\ell n(x-1)}}{x-1}, & x\in\left[2;1+\sqrt{e^3}\right]\\ 0, & x\notin\left[2;1+\sqrt{e^3}\right]\end{cases}$$

16. $$f(x)=\begin{cases}e^x+a, & x\in[0;5]\\ 0, & x\notin[0;5]\end{cases}$$

17. $$f(x)=\begin{cases}a\cdot x\cdot \ln x, & x\in[1;e]\\ 0, & x\notin[1;e]\end{cases}$$

18. $$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}+9, & x\in[0;9] \\ 0, & x\notin[0;9] \end{cases}$$

19. $$f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x\in[0;2] \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$$

20. $$f(x)=\begin{cases} ax\cos x, & x\in[0;\pi/4] \\ 0, & x\notin[0;\pi/4] \end{cases}$$

3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

1. Нехай маємо три довільних події - А, В, С. Виразити через ці події та протилежні до них наступні події:

а) відбулась тільки подія С;
б) відбулись всі три події;
в) відбулась хоча б одна подія;
г) відбулись хоча б 2 події;
д) відбулись 2 події;
є) жодної події не відбулось;
ж) не більш ніж 2 події відбулось.

Розв'язання.

Використовуючи основні операції алгебри подій, а саме добуток та додавання, маємо наступні результати:

а) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$;
б) $A \cdot B \cdot C$;
в) $A + B + C$;
г) $AB + AC + BC$;
д) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$;
є) $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$;
ж) $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} =$
$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$.

2. Коло $x^2 + y^2 \le 4$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + y\sqrt{3} = 0$. Частину при $y \ge x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y\sqrt{3} \ge 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в непофарбованій частині кола? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

Розв'язання.

Очевидно, задані прямі утворюють кути $\frac{\pi}{4}$ і $-\frac{\pi}{6}$ з додатним напрямком осі Ox. Тому непофарбована частина є сектором з центральним кутом $\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{12}$ (рис. 3.1).

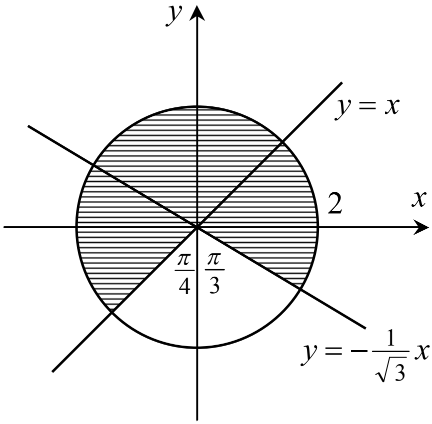

Рисунок 3.1 - Пояснення до задачі 2

Оскільки площа сектору пропорціональна до його центрального кута, то по геометричному підходу до визначення ймовірності маємо:

$$p=\frac{\frac{7\pi}{12}}{2\pi}=\frac{7}{24}.$$

Відповідь: $\frac{7}{24}$.

3. Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що влучить перший стрілець, дорівнює 0,4, а другий – 0,45. Яка ймовірність того, що в мішень влучить хоча б один стрілець?

Розв'язання.

Нехай подія A полягає в тому, що перший стрілець влучив у мішень. За умовою $P(A)=p_1=0,4$. Нехай подія B полягає в тому, що другий стрілець влучив у мішень. За умовою $P(B)=p_2=0,45$. Промах першого стрільця (подія $\overline{A}$) відбувається з імовірністю

$$q_1=P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-p_1,$$

а другого (подія $\overline{B}$) – з імовірністю

$$q_2=P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-p_2.$$

Оскільки події $\overline{A}$, $\overline{B}$ незалежні, то за теоремою про ймовірність добутку подій ймовірність двох одночасних промахів (подія $\overline{A} \cdot \overline{B}$) дорівнює

$$q = P\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) = q_1 q_2 = \left(1 - p_1\right)\left(1 - p_2\right).$$

Очевидно, ураження мішені хоча б одним стрільцем є подією, протилежною до події $\overline{A} \cdot \overline{B}$. Тоді шукана ймовірність

$$p = 1 - q = 1 - \left(1 - p_1\right)\left(1 - p_2\right) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}55 = 0{,}67.$$

Відповідь: $0{,}67$.

4. Водій може заїхати на заправку АЗС-1 з імовірністю 40% або на заправку АЗС-2 з імовірністю 60%. Якщо він заправить автомобіль на АЗС-1, то буде задоволений якістю пального з імовірністю 30%, а якщо на АЗС-2 – то з імовірністю 95%. Яка ймовірність того, що водій буде задоволений якістю пального?

Розв’язання.

Умова задачі відповідає ситуації, коли застосовують формулу повної імовірності.

Нехай H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що водій заправив автомобіль на АЗС-1, а H_2 – на АЗС-2. За умовою

$$p\left(H_1\right) = 0{,}4, \qquad p\left(H_2\right) = 0{,}6.$$

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що водій задоволений якістю пального. Величина $p_{H_1}\left(A\right)$ є умовною ймовірністю того, що водій задоволений якістю пального за умови, що він заправляв автомобіль на АЗС-1, а $p_{H_2}\left(A\right)$ – на АЗС-2. За умовою

$$p_{H_1}\left(A\right) = 0{,}3, \qquad p_{H_2}\left(A\right) = 0{,}95.$$

За формулою повної ймовірності

$$p\left(A\right) = p\left(H_1\right) \cdot p_{H_1}\left(A\right) + p\left(H_2\right) \cdot p_{H_2}\left(A\right) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}95 = 0{,}69.$$

Відповідь: $0{,}69$.

5. Водій міг би заїхати на заправку АЗС-1 з імовірністю 40% або на заправку АЗС-2 з імовірністю 60%. Якщо він заправить автомобіль на АЗС-1, то буде задоволений якістю пального з імовірністю 30%, а якщо на АЗС-2 – то з імовірністю 95%. Яка ймовірність того, що водій заїхав на заправку АЗС-1, якщо відомо, що він залишився задоволеним якістю пального?

Розв'язання.

Умова задачі відповідає ситуації, коли застосовують формулу Байєса (формулу переоцінки ймовірностей гіпотез).

Нехай H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що водій заправив автомобіль на АЗС-1, а H_2 – на АЗС-2. За умовою

$$p(H_1) = 0,4, \qquad p(H_2) = 0,6.$$

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що водій задоволений якістю пального. Величина $p_{H_1}(A)$ є умовною ймовірністю того, що водій задоволений якістю пального за умови, що він заправляв автомобіль на АЗС-1, а $p_{H_2}(A)$ – на АЗС-2. За умовою

$$p_{H_1}(A) = 0,3, \qquad p_{H_2}(A) = 0,95.$$

За формулою повної ймовірності

$$p(A) = p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) =$$
$$= 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,95 = 0,69.$$

Умовна ймовірність $p_A(H_1)$ гіпотези H_1 за умови, що подія A вже відбулась, за формулою Байєса дорівнює

$$p_A(H_1) = \frac{p(H_1) p_{H_1}(A)}{p(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,69} \approx 0,17.$$

Зауважимо, виявилось, що $p_A(H_1) \approx 0,17 << p(H_1) = 0,4$. Ми переоцінили ймовірність гіпотези H_1 у бік її зменшення. Справді, вже *після того*, як стало відомо, що водій задоволений якістю пального, ймовірність заїзду до АЗС-1 треба зменшити, бо на цій АЗС шанси залишитись вдоволеним значно нижчі.

Відповідь: $\approx 0,17$.

6. Ймовірність того що студент складе іспит з першого разу, дорівнює 0,75. Яка ймовірність того, що в групі з 8 студентів 7 студентів складуть іспит з першого разу? Чому дорівнює найімовірніше число студентів, які складуть іспит з першого разу?

Розв'язання.

Умова задачі відповідає схемі Бернуллі (схемі незалежних випробувань). Маємо: $n=8$, $k=7$, $p=0,75$, $q=1-p=0,25$. Тоді за формулою Бернуллі:

$$P_8(7)=\frac{8!}{7!\cdot 1!}\cdot 0,75^7\cdot 0,25^1=2\cdot 0,75^7\approx 0,267.$$

Найбільш імовірна кількість k_0 успіхів при випробуваннях:

$$np-q\le k_0\le np+p,$$

$$8\cdot 0,75-0,25\le k_0\le 8\cdot 0,75+0,75,$$

$$5,75\le k_0\le 6,75,$$

$$k_0=6.$$

Відповідь: $\approx 0,267$; 6.

7. При транспортуванні ламка деталь може розбитися з імовірністю $p=0,001$. Перевезено $n=3000$ деталей Знайти ймовірність того, що розбилось а) 6 деталей; б) не більше ніж 6 деталей; в) більше ніж 6 деталей.

Розв'язання.

Умова задачі відповідає схемі Бернуллі (схемі незалежних випробувань). Маємо: $n=3000$, $p=0,001$. Але використання формули Бернуллі утруднене через те, що число n є дуже великим. Проте, добуток $\lambda=np=3000\cdot 0,001=3<10$. Тому можна застосувати формулу Пуассона (формулу ймовірності рідкісних подій): $P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Ймовірність того, що жодна деталь не розіб'ється ($k=0$ – кількість тих, що розбились):

$$P_n(0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=\frac{1}{e^\lambda}=\frac{1}{e^3}\approx 0,04979.$$

Ймовірність того, що одна деталь розіб'ється ($k=1$):

$$P_n(1)=\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda}{e^\lambda}=\frac{3}{e^3}\approx 0,14936.$$

Ймовірність того, що дві деталі розіб'ються ($k=2$):

$$P_n\left(2\right)=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2e^{\lambda}}=\frac{9}{2e^3}\approx 0{,}22404\,.$$

Ймовірність того, що три деталі розіб’ються ($k=3$):

$$P_n\left(3\right)=\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^3}{6e^{\lambda}}=\frac{27}{6e^3}\approx 0{,}22404\,.$$

Ймовірність того, що чотири деталі розіб’ються ($k=4$):

$$P_n\left(4\right)=\frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^4}{24e^{\lambda}}=\frac{81}{24e^3}\approx 0{,}16803\,.$$

Ймовірність того, що п’ять деталей розіб’ються ($k=5$):

$$P_n\left(5\right)=\frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^5}{120e^{\lambda}}=\frac{243}{120e^3}\approx 0{,}10082\,.$$

Ймовірність того, що шість деталей розіб’ються ($k=6$):

$$P_n\left(6\right)=\frac{\lambda^6}{6!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^6}{720e^{\lambda}}=\frac{729}{720e^3}\approx 0{,}05041\,.$$

Події «розбилось нуль деталей», «розбилась одна деталь» і т.д. є несумісними. Тому за теоремою про ймовірність суми несумісних подій ймовірність того, що розбилось не більше ніж 6 деталей, дорівнює:

$$p=P_n\left(0\right)+P_n\left(1\right)+\cdots+P_n\left(6\right)=$$
$$=0{,}04979+0{,}14936+0{,}22404+0{,}22404+$$
$$+0{,}16803+0{,}10082+0{,}05041=0{,}96649\,.$$

Відповідно, ймовірність протилежної події (розбилось більше ніж 6 деталей)

$$q=1-p=1-0{,}96649=0{,}03351\,.$$

Відповідь: а) $\approx 0{,}05041$; б) $\approx 0{,}96649$; в) $\approx 0{,}03351$.

8. При транспортуванні ламка деталь може розбитися з імовірністю $p=0{,}4$. Перевезено $n=3750$ деталей Знайти а) найбільш імовірну кількість розбитих деталей; б) ймовірність того, що кількість розбитих деталей буде на три одиниці меншою за найбільш ймовірну кількість розбитих деталей.

Розв'язання.

Умова задачі відповідає схемі Бернуллі з параметрами: $n = 3750$, $p = 0,4$, $q = 1 - p = 0,6$. Для найбільш імовірної кількості k_0 маємо:

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

$$3750 \cdot 0,4 - 0,6 \le k_0 \le 3750 \cdot 0,4 + 0,4,$$

$$1499,4 \le k_0 \le 1500,4,$$

$$k_0 = 1500.$$

Використання формули Бернуллі утруднене через те, що n є дуже великим числом. В той же час, добуток

$$\lambda = np = 3750 \cdot 0,4 = 1500 >> 10.$$

Отже, застосовувати асимптотику Пуассона не можна (подія не є рідкісною). Тому застосуємо локальну теорему Лапласа. Враховуючи, що за умовою $k = k_0 - 3$, маємо:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{3750 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 30,$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{(1500 - 3) - 3750 \cdot 0,4}{30} = -0,1.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$, враховуючи її парність, маємо

$$\varphi(x) = \varphi(-0,1) = \varphi(0,1) = 0,3970.$$

Тоді за локальною теоремою Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{0,3970}{30} \approx 0,0132.$$

Відповідь: а) 1500; б) $\approx 0,0132$.

9. При транспортуванні ламка деталь може розбитися з імовірністю $p = 0,5$. Перевезено $n = 400$ деталей Знайти ймовірність того, що кількість розбитих деталей буде а) не меншою за $k' = 195$, але не більшою за $k'' = 210$; б) не меншою за $k' = 195$, але не більшою за $k'' = 390$.

Розв'язання.

Умова задачі відповідає схемі Бернуллі з параметрами: $n = 400$, $p = 0,5$, $q = 0,5$. Використання формули Бернуллі утруднене через те, що n є дуже великим числом. Крім того, застосування локальної теореми Лапласа є доволі громіздким, оскільки при обчисленні ймовірності події «розбито від 195 до 210 деталей» необхідно додавати імовірності великої кількості несумісних подій «розбито 195 деталей», «розбито 196 деталей» і т.д.:

$$P_{400}\left(195,210\right) = P_{400}\left(195\right) + P_{400}\left(196\right) + \cdots + P_{400}\left(210\right).$$

Тому застосуємо інтегральну теорему Лапласа. Маємо:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 10,$$

$$x' = \frac{k' - np}{\sqrt{npq}} = \frac{195 - 400 \cdot 0,5}{10} = -0,5,$$

$$x'' = \frac{k'' - np}{\sqrt{npq}} = \frac{210 - 400 \cdot 0,5}{10} = 1.$$

За таблицею значень функції $\Phi\left(x\right)$, враховуючи її непарність, знаходимо:

$$\Phi\left(x'\right) = \Phi\left(-0,5\right) = -\Phi\left(0,5\right) = -0,1915,$$

$$\Phi\left(x''\right) = \Phi\left(1\right) = 0,3413.$$

Тоді за інтегральною теоремою Лапласа шукана ймовірність

$$P_n\left(k',k''\right) = P_{400}\left(195,210\right) = \Phi\left(x''\right) - \Phi\left(x'\right) =$$

$$= 0,3413 - \left(-0,1915\right) = 0,5328.$$

В пункті б) аналогічно маємо:

$$x' = -0,5,$$

$$x'' = \frac{390 - 400 \cdot 0,5}{10} = 19.$$

Для значення $x'' = 19$ значення $\Phi\left(x''\right)$ в таблиці є відсутнім: зазвичай такі таблиці складають для значень аргументу $0 \le x \le 5$. З одного боку, функція $\Phi\left(x\right)$ є монотонно зростаючою, а з іншого боку – вона обмежена зверху, оскільки площа під графіком $\varphi\left(x\right)$ є скінченною. Отже, існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=\frac{1}{2}$. За таблицею $\Phi(5)=0,499997$. Тому при практичних обчисленнях, якщо $x>5$, то приймають $\Phi(x)=\Phi(+\infty)=\frac{1}{2}$. Тоді за інтегральною теоремою Лапласа шукана ймовірність

$$P_n(k',k'')=P_{400}(195,390)=\Phi(x'')-\Phi(x')=$$
$$=0,5-(-0,1915)=0,6915.$$

Відповідь: а) $0,5328$; б) $0,6915$.

10. Дискретна випадкова величина X може прийняти значення $x_1=15$ з імовірністю $p_1=0,98$ чи значення $x_2=85$ з імовірністю $p_2=0,02$. Записати закон розподілу та знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Розв'язання.

Закон розподілу дискретної випадкової величини є таблицею з двох рядків: в першому записано можливі значення величини, а в другому – ймовірності того, що величина прийме ці значення. В нашому випадку ця таблиця є скінченною і має вигляд:

x_i	15	85
p_i	0,02	0,98

Математичне сподівання

$$M(X)=p_1x_1+p_2x_2=0,02\cdot15+0,98\cdot85=83,6.$$

Дисперсія

$$D(X)=p_1x_1^2+p_2x_2^2-(M(X))^2=$$
$$=0,02\cdot15^2+0,98\cdot85^2-83,6^2=96,04.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{96,04}=9,8.$$

Відповідь: закон розподілу – див. табл.; $M(X)=83,6$; $D(X)=96,04$; $\sigma(X)=9,8$.

11. З колоди (32 карти) навмання витягнуто три карти. Випадкова величина – кількість витягнутих тузів. Розв'язавши відповідну задачу з теорії ймовірностей, для цієї величини записати закон розподілу.

Розв'язання.

Кількість способів обрати три карти з тих 32 карт, що є в наявності: $m = C_{32}^{3}$. Обчислимо ймовірність того, що серед трьох витягнутих карт – жодного туза. Оскільки в колоді всього 4 тузи, то карт – не тузів 28 штук. Щоб серед обраних карт не було тузів, треба їх обирати з 28 карт. Кількість способів зробити це дорівнює $n = C_{28}^{3}$. Шукана ймовірність

$$p_0 = \frac{n}{m} = \frac{28!}{3!\cdot 25!}\cdot\frac{3!\cdot 29!}{32!} = \frac{26\cdot 27\cdot 28}{30\cdot 31\cdot 32} = \frac{13\cdot 9\cdot 7}{10\cdot 31\cdot 4} = \frac{819}{1240}.$$

Обчислимо ймовірність того, що серед трьох витягнутих карт – один туз. Відповідно, дві карти – не тузи. Отже, треба обирати одну карту з 4 і незалежно від цього ще дві з 28. Шукана ймовірність

$$p_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_{28}^2}{C_{32}^3} = \frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{28!}{2!\cdot 26!}\cdot\frac{3!\cdot 29!}{32!} = \frac{3\cdot 4\cdot 27\cdot 28}{30\cdot 31\cdot 32} =$$

$$\frac{3\cdot 9\cdot 14}{10\cdot 31\cdot 4} = \frac{378}{1240}.$$

Обчислимо ймовірність того, що серед трьох витягнутих карт – два тузи. Відповідно, одна карта – не туз. Отже, треба обирати дві карти з 4 і незалежно від цього ще одну з 28. Шукана ймовірність

$$p_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_{28}^1}{C_{32}^3} = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{28!}{1!\cdot 27!}\cdot\frac{3!\cdot 29!}{32!} = \frac{3\cdot 2\cdot 28\cdot 2\cdot 3}{30\cdot 31\cdot 32} =$$

$$\frac{14\cdot 3}{10\cdot 31\cdot 4} = \frac{42}{1240}.$$

Обчислимо ймовірність того, що серед трьох витягнутих карт – усі тузи. Отже, треба обирати три карти з 4. Шукана ймовірність

$$p_3 = \frac{C_4^3}{C_{32}^3} = \frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{3!\cdot 29!}{32!} = \frac{4\cdot 2\cdot 3}{30\cdot 31\cdot 32} = \frac{1}{10\cdot 31\cdot 4} = \frac{1}{1240}.$$

Отже, шуканий закон розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{819}{1240}$	$\frac{378}{1240}$	$\frac{42}{1240}$	$\frac{1}{1240}$

Зробимо перевірку: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \frac{819+378+42+1}{1240} = 1$.

Відповідь: закон розподілу – див. табл.

12. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{16}x^2, & 0 \le x < 4; \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

Знайти щільність імовірності $f(x)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$. Знайти ймовірність події $(X \in [a;b])$, де $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$.

Розв'язання.

Щільність імовірності знайдемо, диференціюючи функцію $F(x)$ на кожній ділянці окремо:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{8}x, & 0 \le x < 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Графіки цих функцій схематично зображено на рис. 3.2.

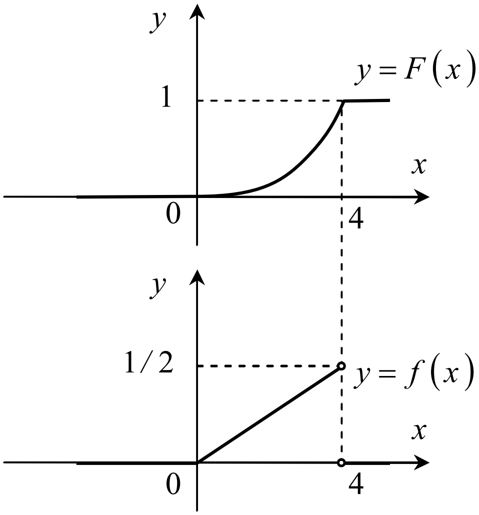

Рисунок 3.2 - Пояснення до задачі 12

Ймовірність події $\left(X\in[a;b]\right)$ знайдемо як різницю:

$$P\left(X\in[a;b]\right)=F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}\cdot 1^2-\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{64}.$$

$$=\frac{1}{16}\cdot 1^2-\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}-\frac{1}{64}=\frac{3}{64}.$$

Відповідь: $f(x)=\left[\begin{array}{ll}0, & x<0;\\ \frac{1}{8}x, & 0\le x<4;\\ 0, & x>4;\end{array}\right.$ $P\left(X\in[a;b]\right)=\frac{3}{64}$; див. графіки в тексті.

13. Неперервна випадкова величина X задана щільністю імовірності

$$f(x)=\left[\begin{array}{ll}0, & x<0;\\ \frac{1}{8}x, & 0\le x<4;\\ 0, & x>4.\end{array}\right.$$

Обчислити математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$ випадкової величини X.

Розв’язання.

Оскільки щільність імовірності задано кусково, використовуючи адитивність інтегралу Рімана, маємо:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)dx+\int_{0}^{4} x\,f(x)dx+\int_{4}^{+\infty} x\,f(x)dx=$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx}_{=0}+\int_{0}^{4} x\,f(x)dx+\underbrace{\int_{4}^{+\infty} x\cdot 0\,dx}_{=0}=$$

$$=\int_{0}^{4} x\cdot\frac{1}{8}x\,dx=\left.\frac{x^3}{24}\right|_0^4=\frac{64}{24}-\frac{0}{24}=\frac{8}{3}.$$

Зауважимо, отримане значення збігається з абсцисою центру мас трикутника на рис. 3.2 (складає дві третини довжини його горизонтального катету).

Аналогічно маємо

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)dx-\{M(X)\}^2=$$

$$=\int_{0}^{4} x^2\cdot\frac{1}{8}x\,dx-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\left.\frac{x^4}{32}\right|_0^4-\frac{64}{9}=$$

$$=\frac{256}{32}-\frac{0}{32}-\frac{64}{9}=8-\frac{64}{9}=\frac{8}{9}.$$

Відповідь: $M(X)=\dfrac{8}{3}$, $D(X)=\dfrac{8}{9}$.

14. Нехай маємо щільність розподілу *f(x)* випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases} a\,x^3, & x\in[0;4],\\ 0, & x\notin[0;4]. \end{cases}$$

Обчислити значення невідомого параметра *a* і функцію розподілу *F(x)*.

Розв'язання.

1) Знайдемо параметр *a* з властивості функції щільності випадкової величини:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 .$$

Ліва частина цієї рівності набуває вигляду

$$\int_0^4 ax^3dx = a\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^4 = a\frac{4^4}{4} = 64a\,,\quad 64a=1\,,\ a=1/64\,.$$

Таким чином, функція щільності набуває вигляду

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{64}x^3, & x\in[0;4],\\ 0, & x\notin[0;4]. \end{cases}$$

2) Перейдемо до відшукання функції розподілу *F(x)*. Виходячи з означення, маємо

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

При $x\in(-\infty;0)$ отримаємо $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt = 0$.

При $x\in[0;4]$ проміжок інтегрування розбивається на два:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt + \int_0^x \frac{1}{64}t^3\cdot dt = \frac{1}{64}\int_0^x t^3dt = \frac{1}{64}\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^x = \frac{x^4}{256}\,.$$

При $x \in (4;+\infty)$ проміжок інтегрування розбивається на три:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{4} \frac{1}{64} t^3 \cdot dt + \int_{4}^{x} 0 \cdot dt = \frac{1}{64} \int_{0}^{4} t^3 dt = \frac{1}{64} \frac{t^4}{4} \bigg|_0^4 = 1 .$$

Таким чином, маємо остаточний результат

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty;0), \\ \dfrac{x^4}{256}, & x \in [0;4], \\ 1, & x \in (4;\infty). \end{cases}$$

4 ЛІТЕРАТУРА

1 Павлов О. А. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 [Електронний ресурс] : для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» / О. А. Павлов, О. В. Гавриленко, Л. В. Рибачук ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 154 с.

2 Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. –Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 184 с.

3 Найко Д.А. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / Д.А. Найко, О.Ф. Шевчук – Вінниця: ВНАУ, 2020. – 382 с.

4 Соловко Я.Т. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов. / Я.Т.Соловко, П.Г.Остафійчук, О.З.Гарпуль, С.А.Войтик. – Івано-Франківськ: Репозитарій / ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. – 150 с.

5 Тюрин О.В. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. / О. В. Тюрин, О. Ю. Ахмеров. – Одеса: Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 170 с.

6 Левицька Т.І. Курс лекцій з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посібник / Т.І. Левицька, І.С. Пожуєва. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 164 с.