

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

ГРЕБЕНЮК СЕРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН
ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ ГОМОГЕНІЗАЦІЇ
ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Науковий консультант:

Гоменюк Сергій Іванович,

доктор технічних наук, професор

Запоріжжя – 2016

ЗМІСТ

Вступ	5
Розділ 1 Аналітичний огляд сучасного стану проблеми визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів	13
1.1 Основні тенденції розвитку методів визначення пружних характеристик композиційного матеріалу	14
1.2 Методи розрахунку конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів	45
1.3 Висновки	63
Розділ 2 Розширення підходів до гомогенізації композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними матрицею та волокном	65
2.1 Основні припущення та вихідні співвідношення	65
2.2 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при лінійних деформаціях	70
2.3 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при зсувних деформаціях	89
2.4 Висновки	129
Розділ 3 Удосконалення підходів до гомогенізації композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними матрицею та волокном на основі енергетичних умов узгодження	130
3.1 Застосування енергетичних умов узгодження до визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при лінійних деформаціях	130
3.2 Застосування енергетичних умов узгодження до визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при зсувних деформаціях	151
3.3 Визначення пружних сталих композиційного матеріалу, що	

містить два сорти однаковоспрямованих армуючих волокон	167
3.4 Висновки	179
Розділ 4 Особливості застосування методу скінченних елементів у тривимірній постановці для волокнистих композиційних матеріалів	181
4.1 Вихідні співвідношення для перетворення величин	181
4.2 Особливості побудови матриці жорсткості просторового скінченного елемента для трансверсально-ізотропного матеріалу на основі моментної схеми	188
4.3 Дослідження збіжності розв'язків на основі матриці жорсткості скінченного елемента	203
4.4 Висновки	206
Розділ 5 Пакет прикладних програм «Композит» для розрахунку конструкцій із волокнистих композитів у програмному комплексі «МІРЕЛА+»	208
5.1 Структура програмного комплексу «МІРЕЛА+»	208
5.2 Скінченно-елементний підхід до розв'язання геометрично нелінійної задачі	210
5.3 Особливості організації препроцесора системи	217
5.4 Чисельна реалізація запропонованих підходів і методів у процесорі системи	221
5.5 Візуальне представлення результатів розв'язання задач у постпроцесорі системи	221
5.6 Висновки	226
Розділ 6 Застосування програмної системи до визначення напружено-деформованого стану конструкцій з гумовокордних матеріалів	228
6.1 Особливості напружено-деформованого стану віброакустичного ізолятора	229
6.2 Визначення напружено-деформованого стану автомобільної шини	238
6.3 Висновки	246
Розділ 7 Визначення напружено-деформованого стану елементів	

	4
ракетно-космічної техніки з волокнистих композиційних матеріалів	247
7.1 Напружено-деформований стан головного обтічника ракетноносія в умовах експлуатаційного навантаження	247
7.2 Висновки	256
Висновки	258
Список використаних джерел	260
Додаток А	302
Додаток Б	306
Додаток В	313
Додаток Г	317
Додаток Д	318
Додаток Ж	319

ВСТУП

Актуальність теми. Однією з тенденцій розвитку сучасної техніки є дедалі більше використання композиційних матеріалів при її виробництві. Це дає змогу зменшити матеріалоємність конструкції без утрати необхідних характеристик міцності та жорсткості.

В процесі проектування конструкцій на основі волокнистих композитів проводиться попередній розрахунок деформаційних, міцнісних та інших характеристик конструкцій. Аналіз цих розрахунків надалі уможлиблює коригування конструктивних особливостей шляхом зміни механічних властивостей композита та параметрів конструкції (розміру, форми тощо). Процес проектування конструкцій із використанням волокнистих композитів дає додаткові можливості для керування механічними властивостями композита за рахунок варіювання марками матеріалів матриці та волокна, розмірами волокон, характеристиками армування (напрямом, частотою, схемою укладки) тощо. Для раціонального вибору вищезазначених параметрів необхідно якомога точніше визначити компоненти напружено-деформованого стану конструкцій у реальних умовах експлуатації.

Існує значна кількість механічних аспектів, які необхідно враховувати при дослідженні волокнистих композиційних матеріалів. Зокрема, однією з основних проблем при розв'язанні задач механіки композитів є адекватне визначення пружних властивостей композиційного матеріалу. При реалізації цього завдання найпоширенішою тенденцією є врахування специфічних властивостей матриці та волокна (анізотропії, пластичності, в'язкопружності та інших) при визначенні властивостей композита, а також урахування особливостей їх сумісного деформування (наявність перехідного шару, адгезії тощо). Процес розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій із композитів без урахування анізотропних властивостей волокна та матриці не завжди дає адекватні результати.

У випадках, коли армування композиційного матеріалу набуває просторового характеру, або ж елемент конструкції з композиційного матеріалу є складовою тривимірної конструкції, розрахунок потребує застосування просторової теорії пружності й розвитку відповідних методів. Одним із таких методів є метод скінчених елементів, який при використанні традиційної схеми не завжди дає прийнятні результати. Тому при розрахунку композитних конструкцій для усунення недоліків традиційного методу доцільно використовувати моментну схему скінченного елемента (МССЕ) з можливістю задавати просторову орієнтацію волокон та анізотропні властивості матеріалу.

Низка конструкцій із композиційних матеріалів, зокрема, з гумовокордних, у реальних умовах експлуатації проявляють геометрично нелінійний характер залежності між напруженнями та деформаціями. Вказаний характер деформування потребує розробки концептуально нових способів її врахування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана згідно з планом наукових досліджень, проведених на математичному факультеті Запорізького національного університету за держбюджетними темами «Розробка чисельних методів та інструментальних засобів для математичного моделювання статичних і динамічних процесів у складних механічних системах» (2003-2005 рр.), № ДР 0103U000721; «Розробка методів чисельного аналізу контактних задач механіки еластомерів та композитів у статичній та динамічній постановці» (2005-2007 рр.), № ДР 0105U002192; «Розробка методик та програмного забезпечення для розрахунку конструкцій із гумових та гумовокордних матеріалів» (2009-2010 рр.), № ДР 0109U002522; «Аналітико-чисельні методи розв'язку задач механіки неоднорідних конструкцій на базі сучасних комп'ютерних технологій та візуалізація процесів» (2012-2013 рр.), № ДР 0112U003061; «Математичне моделювання конструкцій неоднорідної структури на базі сучасних інформаційних технологій» (2015-2016 рр.), № ДР 0115U00761;

«Інструментальна система аналізу складних механічних процесів FORTU-FEM», № ДР 0111U009113, (2011 р.) та за господарським договором № 1/15 від 5.02.2015 р. «Разработка программно-методического обеспечения для определения разрушающих нагрузок оболочек трехслойной конструкции из композиционного материала в условиях комплексного эксплуатационного нагружения» між Державним підприємством «Конструкторське бюро «Південне» та Запорізьким національним університетом (2015 р.).

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є розв'язання проблеми визначення напружено-деформованого стану просторових конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів на основі вдосконалення моделей пружних сталей та розробки ефективних чисельних підходів до розв'язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла.

Поставлена мета передбачає реалізацію таких завдань:

- визначення ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу з урахуванням трансверсально-ізотропних (транстропних) властивостей матриці та волокна на основі кінематичної та енергетичної умови узгодження;
- розробка підходу до розрахунку пружних сталей односпрямованого композита, періодично армованого двома сортами волокон, з урахуванням транстропних властивостей матриці та волокна;
- побудова матриці жорсткості тривимірного скінченного елемента для композиційного матеріалу з урахуванням просторового армування волокнами на основі МССЕ;
- застосування МССЕ до розробки чисельного підходу з урахуванням геометричної нелінійності матеріалу;
- створення пакету прикладних програм для визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів й дослідження його ефективності на конкретних задачах;

- визначення та аналіз напружено-деформованого стану промислових конструкцій із гумовокордних матеріалів на базі запропонованого програмного пакету;

- застосування програмного пакету до визначення напружено-деформованого стану аерокосмічних конструкцій із волокнистих композитів.

Об'єкт дослідження – процеси деформування волокнистих композиційних матеріалів та конструкцій на їх основі.

Предмет дослідження – компоненти напружено-деформованого стану волокнистих композиційних матеріалів та конструкцій із них.

Методи дослідження – для визначення ефективних пружних характеристик волокнистого композиційного матеріалу та напружено-деформованого стану конструкцій із композитів використовувались як аналітичні методи розв'язання крайових задач, так і модифікований метод скінченних елементів.

Наукова новизна отриманих результатів:

- на основі дослідження представницького об'ємного елемента вперше отримані аналітичні співвідношення для ефективних пружних характеристик волокнистого композиційного матеріалу з урахуванням транслопних властивостей матриці та волокна;

- вперше запропоновано підхід до визначення ефективних характеристик односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, періодично армованого двома сортами волокон, з урахуванням транслопних властивостей матриці та волокон;

- на основі моментної схеми скінченного елемента вперше побудовано матрицю жорсткості тривимірного скінченного елемента композиційного матеріалу з урахуванням просторового армування волокнами;

- отримали подальший розвиток чисельні підходи до врахування геометричної нелінійності волокнистого композиційного матеріалу із застосуванням МССЕ для дослідження напружено-деформованого стану силових елементів із волокнистих композитів;

- досліджено особливості напружено-деформованого стану конструкцій із гумовокордних матеріалів на основі застосування МССЕ;
- запропоновано методику визначення напружено-деформованого стану аерокосмічних конструкцій із волокнистих композитів в умовах експлуатаційного навантаження.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані співвідношення для визначення ефективних характеристик волокнистих композитів та розроблений програмний комплекс можуть бути застосовані при проектуванні та вдосконаленні конструкцій із композиційних матеріалів на відповідних промислових підприємствах машинобудівної, металургійної, будівельної, транспортної та інших галузей.

Підходи, запропоновані в дисертаційній роботі, були використані у відділі механіки еластомерних конструкцій інституту геотехнічної механіки НАН України (м. Дніпро) при розрахунку та створенні гумових віброізоляторів із проміжним шаром із волокнистих композитів. Розроблений програмний комплекс використовувався і впроваджений в КБ «Південне» (м. Дніпро) для визначення напружено-деформованого стану головного обтічника ракетносія.

Результати дисертаційного дослідження використовуються в навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних робіт студентів напряму підготовки «Математика» та при вивченні студентами напряму підготовки «Прикладна математика» навчального курсу «Метод скінченних елементів».

Особистий внесок здобувача. Матеріали дисертаційної роботи повною мірою відображені в публікаціях автора. Основні результати дослідження викладено в 67 наукових працях, з них: 3 монографії [97, 156, 158]; 53 статті [51, 53, 54, 56-61, 65-76, 78, 79, 90, 102, 103, 116, 118, 119, 124, 127, 128, 131, 154, 175, 177, 189, 190, 193, 203, 207, 219, 222, 236, 240, 248, 257, 267, 274, 282, 289, 290, 292], серед яких 30 входять до переліків, затверджених Департаментом атестації кадрів вищої кваліфікації Міністерства освіти і науки України з технічних наук [51, 53, 54, 58, 59, 60, 61, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 73, 74, 76, 79, 90, 119, 124, 127, 128, 175, 193, 203, 219, 236, 240, 248, 257], 6 у

журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, або у зарубіжних наукових фахових виданнях [69, 102, 118, 274, 289, 290], 6 у збірниках матеріалів конференцій [57, 72, 116, 189, 267, 282] та 11 додаткових публікацій [56, 75, 78, 103, 131, 154, 177, 190, 207, 222, 292]; 10 тез доповідей [52, 55, 62-64, 77, 115, 174, 176, 305] та 1 авторське свідоцтво [1].

Усі результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, отримані автором особисто. 9 наукових робіт опубліковано одноосібно [56, 57, 68, 71, 73, 76, 77, 79, 290]. У роботах, написаних у співавторстві, здобувачеві належать:

- застосування моментної схеми до побудови матриці жорсткості скінченних елементів [61, 78, 158, 289];
- чисельні результати пружного розрахунку конструкцій за допомогою методу скінченних елементів, у тому числі неоднорідних [55, 58, 59, 60, 62-67, 69, 70, 72, 74, 75, 97, 102, 115, 116, 119, 124, 127, 128, 154, 156, 158, 174-177, 189, 190, 219, 240, 257, 274];
- співвідношення для ефективних характеристик волокнистого композиційного матеріалу [1, 54, 90, 97, 103, 193, 203, 248, 282, 292];
- підхід до врахування геометричної нелінійності волокнистого композиційного матеріалу на основі моментної схеми скінченного елемента [53, 97, 118, 156, 158];
- пакет прикладних програм для визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів [51, 52, 97, 131, 156, 158, 174, 207, 222, 236, 267, 305].

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідались на конференціях та симпозіумах: Міжнародна конференція «Dynamical System Modeling and Stability Investigation» – «DSMSI – 2001», КНУ ім. Тараса Шевченка, м. Київ, 22-25 травня 2001 р.; XII, XIII симпозіуми «Проблемы шин и резинокордных композитов», НДІШП, м. Москва, 2001 р., 2002 р.; Міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2004», Національний авіаційний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, 17-19 листопада 2004 р.;

VI Міжнародний симпозиум «Механіка еластомерів – 2005», інститут геотехнічної механіки ім. Н.С. Полякова, м. Дніпропетровськ, 22-24 листопада 2005 р.; XI міжнародна наукова конференція імені М. Кравчука, КНУ ім. Тараса Шевченка, м. Київ, 18-20 травня 2006 р.; Міжнародна конференція «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки», ІПМаш ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків, 23-26 жовтня 2006 р.; Конференція молодих вчених та спеціалістів «Сучасні проблеми машинобудування», ІПМаш ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків, 4-7 грудня 2006 р.; Міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2008», Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, 2008 р.; IV Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій у науці, освіті та економіці», ЛНУ ім. Т. Шевченка, м. Луганськ, 15-17 квітня 2010 р.; II Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», м. Ялта, 4-7 червня 2010 р.; XI Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ – 2010, присвячена 100-річчю від дня народження академіка В.В. Новожилова, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 13-18 вересня 2010 р.; Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2011», м. Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ, 13-15 квітня 2011 р.; XII Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ–2011, присвячена 190-річчю від дня народження академіка П.Л. Чебишева, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 12-17 вересня 2011 р.; III Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», м. Ялта, 10-14 червня 2011 р.; IV Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки і міцності конструкцій», м. Запоріжжя, 8-10 червня 2012 р.; XIII Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ–2012, присвячена 370-річчю від дня народження академіка І. Ньютона,

м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 17-22 вересня 2012 р.; XIV Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ–2013, присвячена 150-річчю від дня народження академіка О.М. Крилова, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 17-21 вересня 2013 р.; XV Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ-2014, присвячена 160-річчю від дня народження Анрі Пуанкаре, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 16-20 вересня 2014 р.; V Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки і міцності конструкцій», м. Запоріжжя, 21-24 травня 2015 р.; 20th International Scientific Conference «Mechanika 2015», Kaunas, Lithuania, 23-24 April 2015.

У цілому дисертація була представлена та обговорювалася на міжвузівському науковому семінарі Запорізького національного університету «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки» (керівник д.т.н., проф. В.З. Грищак, 2016) та обговорювалася у відділі обчислювальної механіки Інституту механіки імені С.П. Тимошенка НАН України (керівник д.ф.-м.н., проф. О.Я. Григоренко, 2016).

Публікації. Основні результати дослідження викладено в 67 наукових працях, з них: 3 монографії; 53 статті, серед яких 30 входять до переліків, затверджених Департаментом атестації кадрів вищої кваліфікації Міністерства освіти і науки України з технічних наук, 6 у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, або у зарубіжних наукових фахових виданнях, 6 у збірниках матеріалів конференцій та 11 додаткових публікацій; 10 тез доповідей та 1 авторське свідоцтво.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ
ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Композиційними матеріалами, або композитами, називають матеріали, що мають таку сукупність ознак: не зустрічаються у природі; складаються з двох та більше компонентів, відмінних за хімічним складом та розділених вираженою межею; мають нові властивості порівняно із властивостями складових компонентів; є неоднорідними в мікрмасштабі й однорідними в макромасштабі; склад, форма та розподіл їх компонентів «запроектовані» заздалегідь; їх властивості визначаються кожним із компонентів, котрі, у зв'язку з цим, повинні бути в матеріалі в достатньо великих кількостях [235].

Компонент, неперервний у всьому об'ємі композиційного матеріалу, називається матрицею, а перервний, роз'єднаний в об'ємі композиції, – арматурою або армуючим елементом.

Все різноманіття існуючих композиційних матеріалів можна класифікувати більш або менш детально за цілою низкою ознак. До таких ознак належать матеріал матриці та матеріал армуючих волокон, структура, розташування і геометрія компонентів, методи отримання композита тощо.

При розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла для конструкцій із волокнистих композитів виникає необхідність створення математичних моделей, які б описували геометрію та розташування кожного волокна у конструкції. Враховуючи, що частота армування волокнами досить велика, це приводить до громіздких математичних співвідношень, використовувати які досить проблематично. Тому, як правило, така проблема вирішується послідовним розв'язанням двох задач. Перша задача полягає в гомогенізації волокнистого композита, тобто неоднорідний композиційний матеріал представляється моделлю однорідного анізотропного матеріалу,

характеристики якого залежать від характеристик компонентів композита. Друга задача полягає в розв'язанні задачі механіки для моделі однорідного анізотропного матеріалу.

1.1 Основні тенденції розвитку методів визначення пружних характеристик композиційного матеріалу

До визначення пружних характеристик композиційного матеріалу за пружними характеристикам його складових існує два альтернативних підходи.

Згідно з першим підходом, експериментально досліджується певний структурний елемент композита, який містить достатньо велику кількість армуючих частинок, щоб результати, отримані для нього, можна було б узагальнити на будь-який об'єм композиційного матеріалу. Застосування такого підходу дозволяє врахувати зміну пружних властивостей матриці й армуючих волокон в процесі виготовлення композита. З іншого боку, для отримання композита з необхідними властивостями доводиться проводити велику кількість експериментів, варіюючи різними параметрами – такими, як об'ємний вміст арматури, характер розташування армуючих елементів, застосування різних матеріалів для матриці та армуючих волокон.

Альтернативний структурний підхід передбачає визначення пружних характеристик композита через пружні характеристики матриці та армуючих волокон, їх об'ємні частки в композиті, розміри та взаємне розташування армуючих елементів. Суттєвим недоліком такого підходу є те, що пружні характеристики структурних складових можуть значно відрізнятись у вихідному стані і в композиті.

В цілому композит можна представити як матеріал з анізотропними властивостями. Зв'язок між напруженнями та деформаціями для анізотропного матеріалу описується узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.1)$$

де σ^{ij} – компоненти тензора напружень, ε_{kl} – компоненти тензора деформацій, C^{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей.

Таким чином, для описання пружних властивостей композиційного матеріалу необхідно знати 81 компоненту тензора C^{ijkl} . Різних компонент для анізотропного матеріалу залишається всього 21 [29], якщо враховувати, що коефіцієнти тензора пружних сталей мають симетрію відносно індексів i, j, k, l :

$$C^{ijkl} = C^{klij}, C^{ijkl} = C^{ijlk}, C^{ijkl} = C^{jikl}, C^{ijkl} = C^{jilk}. \quad (1.2)$$

А враховуючи, що волокнистий композиційний матеріал являє собою односпрямований армований шар (рис. 1.1), його можна розглядати як ортотропне середовище, що визначається 9 незалежними пружними сталими.

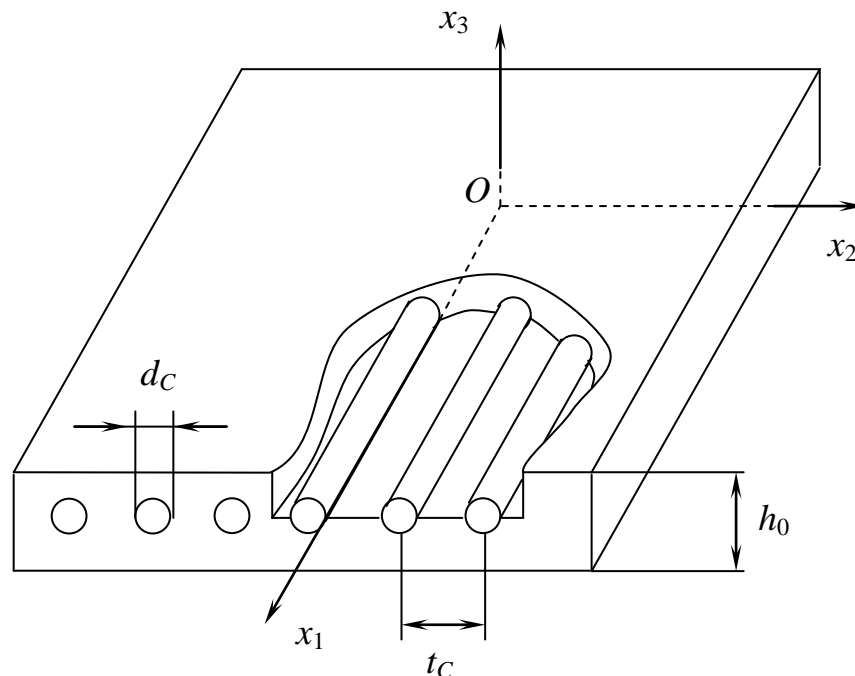


Рисунок 1.1 – Елементарний односпрямований армований шар.

Для ортотропного матеріалу закон Гука запишеться в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{22} &= a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{33} &= a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{23} &= a_{44}\sigma_{23}, \\
\varepsilon_{13} &= a_{55}\sigma_{13}, \\
\varepsilon_{12} &= a_{66}\sigma_{12},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

де a_{ij} – компоненти тензора податливості.

Якщо перейти від компонентів тензора податливості до технічних сталей, то рівняння (1.3) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22} + \frac{1}{E_3}\sigma_{33}, \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23}, \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13}, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}, \\
\frac{\nu_{21}}{E_2} &= \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності в напрямі осей x_1, x_2, x_3 ; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модулі зсуву в площинках x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2 ; ν_{ij} ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) – коефіцієнти Пуассона, котрі характеризують поперечне стискання при розтягненні в напрямі осей координат (визначають скорочення в напрямі осей x_j (другий

індекс) при розтягненні вздовж осі x_i (перший індекс). Враховуючи напрям армування (рис.1.1), E_1 називають поздовжнім модулем пружності, а E_2, E_3 – поперечними модулями пружності, аналогічно модулі G_{13}, G_{12} називають модулями поздовжнього зсуву, G_{23} – модулем поперечного зсуву.

Якщо припустити, що частота армування волокнами достатньо велика, то армований шар можна вважати трансверсально-ізотропним із площиною ізотропії x_2Ox_3 . Тоді співвідношення (1.4) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}(\sigma_{22} - \nu_{23}\sigma_{33}), \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}(-\nu_{23}\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}, \\ \nu_{21} &= \nu_{12}\frac{E_2}{E_1}, \quad G_{13} = G_{12}, \quad \nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Таким чином, для визначення пружних характеристик композиційного шару необхідно знайти 5 незалежних величин $E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$.

Найбільш поширені методики визначення пружних сталей для композиційного матеріалу дають такі співвідношення. Розглянемо спочатку пружні сталі, отримані для плоскої задачі теорії пружності. В роботі Лапіна О.А. [145] запропоновані такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c f + E_m (1 - f), \\
\nu_{12} &= \nu_c f + \nu_m (1 - f), \\
E_2 &= \frac{e E_1}{(f + e(1 - f))(e f + (1 - f)) - f(1 - f)(e \nu_m - \nu_c)^2}, \\
G_{12} &= \frac{g}{f + g(1 - f)} G_m,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

де $e = \frac{E_c}{E_m}$, $g = \frac{G_c}{G_m}$, E_c – модуль пружності матеріалу волокна; E_m – модуль пружності матеріалу матриці; G_c – модуль зсуву матеріалу волокна, G_m – модуль зсуву матеріалу матриці, ν_c – коефіцієнт Пуассона матеріалу волокна; ν_m – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці; f – коефіцієнт армування, що характеризує відносний об'ємний вміст волокон.

Для волокон круглого перетину й параметрів шару, зображеного на рис. 1.1, коефіцієнт армування визначається формулою [133]:

$$f = \frac{\pi d_c^2}{4 h_0} i_c, \tag{1.7}$$

де d_c – діаметр волокон; h_0 – товщина армованого шару; i_c – частота армування.

В роботі [269] запропоновані такі співвідношення для визначення пружних сталих композиційного матеріалу:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c f + E_m (1 - f), \\
\nu_{12} &= \nu_c f + \nu_m (1 - f), \\
E_2 &= \frac{1 + 2f}{1 - f} E_m,
\end{aligned}$$

$$G_{12} = \frac{1-f+g(f+1)}{f+1+g(1-f)} G_m. \quad (1.8)$$

Формули для визначення пружних констант композита, запропоновані в роботах [237], [288], мають вигляд:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_c f + E_m (1-f), \\ \nu_{12} &= 0,5, \\ E_2 &= \frac{4(1-f)}{3+(1-f)E_m/E_1} E_m, \\ G_{12} &= (1-f)G_m. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Наступна група формул описана в роботі [328]:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_c \Psi_c, \\ \nu_{12} &= 0,5, \nu_{21} = 0, \\ E_2 &= \frac{4}{3} E_m, \\ G_{12} &= G_m. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Нижченаведені співвідношення є частинним випадком формул (1.6), справедливим лише для гумовокордних композитів, тобто якщо припустити, що $E_c \gg E_m$, $\nu_m = 0,5$, $G_m = E_m/3$ [266]:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_c \Psi_c, \\ \nu_{12} &= 0,5, \nu_{21} = 0, \\ E_2 &= \frac{4}{3(1-f)} E_m, \end{aligned}$$

$$G_{12} = \frac{1}{(1-f)} G_m. \quad (1.11)$$

Для розв'язання тривимірних задач механіки композитів запропоновані такі співвідношення для визначення пружних сталей. В роботі [133] для найпростішої моделі композиційного матеріалу – системи жорстко зв'язаних почергових ізотропних стрижнів, які мають характеристики волокна та матриці – представлені співвідношення, отримані на основі рівняння адитивності або правила сумішей:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_c f + E_m (1-f), \\ E_2 &= \frac{E_c E_m}{[E_m f + E_c (1-f)]}, \\ G_{12} &= \frac{G_c G_m}{[G_c (1-f) + G_m f]}, \\ G_{23} &= \frac{\chi_m + f + (1-f)G_m/G_c}{(1-f)\chi_m + (1+f\chi_m)G_m/G_c} G_m, \\ \nu_{12} &= \nu_c f + \nu_m (1-f), \end{aligned} \quad (1.12)$$

де $\chi_m = 3 - 4\nu_m$.

В роботі Аболіньша Д.С. [2] запропонована така група формул:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_c f + E_m (1-f), \\ E_2 &= \frac{eE_1}{(f + e(1-f))((1-f) + ef) - f(1-f)(e\nu_m - \nu_c)^2}, \\ G_{12} &= \frac{1-f + g(f+1)}{f+1 + g(1-f)} G_m, \\ G_{23} &= \frac{g}{f + g(1-f)} G_m, \\ \nu_{12} &= \nu_c f + \nu_m (1-f). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Формули Ваніна Г.А. [43] мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c f + E_m (1 - f), \\
 \nu_{12} &= \nu_m - \frac{gf(\chi_m + 1)(\nu_m - \nu_c)}{(1 - f)(\chi_c - 1) + g(2 - f + f\chi_m)}, \\
 E_2 &= \left\{ \frac{\nu_{12}^2}{E_1} + \frac{\chi_m + 1}{8G_m} \left[\frac{\chi_c - 1 + 2g}{(1 - f)(\chi_c - 1) + g(2 - f + f\chi_m)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2(g - 1)f}{1 - f + g(f + \chi_m)} \right] \right\}^{-1}, \\
 G_{12} &= \frac{1 - f + g(f + 1)}{f + 1 + g(1 - f)} G_m, \\
 G_{23} &= \frac{1 - f + g(f + \chi_m)}{\chi_m(f + g(1 - f)) + 1} G_m, \tag{1.14}
 \end{aligned}$$

де $\chi_c = 3 - 4\nu_c$.

В роботі [133] на основі варіаційного принципу отримані пружні характеристики для композита, у якого волокна прийняті трансверсально-ізотропними, а матриця ізотропною:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{K_m(K_c + G_m)(1 - f) + K_c(K_m + G_m)f}{(K_c + G_m)(1 - f) + (K_m + G_m)f}, \\
 E_1 &= E_{1c}f + E_m(1 - f) + \frac{4(\nu_{12c} - \nu_m)^2 f(1 - f)}{\frac{1 - f}{K_c} + \frac{f}{K_m} + \frac{1}{G_m}}, \\
 \nu_{21} &= \nu_{12c}f + \nu_m(1 - f) + \frac{(\nu_{12c} - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_c} \right) f(1 - f)}{\frac{1 - f}{K_c} + \frac{f}{K_m} + \frac{1}{G_m}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{12} &= G_m + \frac{f}{\frac{1}{G_{12c} - G_m} + \frac{\nu_m}{2G_m}}, \\
G_{23-} &< G_{23} < G_{23+}, \\
\frac{4KG_{23-}}{K + mG_{23-}} &< E_2 < \frac{4KG_{23+}}{K + mG_{23+}}, \\
\frac{K - mG_{23+}}{K + mG_{23+}} &< \nu_{23} < \frac{K - mG_{23-}}{K + mG_{23-}}, \tag{1.15}
\end{aligned}$$

де $m = 1 + \frac{4K\nu_{12}^2}{E_1}$, K – поперечний об’ємний модуль, що визначається

формулою $K = \frac{E_2}{2(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2 E_2 / E_1)}$, $K_c = \frac{E_c}{3(1 - 2\nu_c)}$ – модуль об’ємної

деформації матеріалу волокон, $K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}$ – модуль об’ємної деформації

матеріалу матриці.

Значення $G_{23\pm}$ обираються в залежності від співвідношення між характеристиками компонент у такий спосіб:

1. Якщо $G_{23c} > G_m$, $K_c > K_m$

$$\begin{aligned}
G_{23-} &= G_m + \frac{f}{\frac{1}{G_{23c} - G_m} + \frac{(K_m + 2G_m)(1-f)}{2G_m(K_m + G_m)}}, \\
G_{23+} &= G_m \left[1 + \frac{f(1 + \beta_1)}{\rho - f \left(1 + \frac{3\beta_1^2(1-f)^2}{\alpha f^3 + 1} \right)} \right]. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

2. Якщо $G_{23c} < G_m$, $K_c < K_m$

$$G_{23-} = G_m \left[1 + \frac{f(1 + \beta_1)}{\rho - f \left(1 + \frac{3\beta_1^2(1-f)^2}{\alpha f^3 - \beta_1} \right)} \right],$$

$$G_{23+} = G_m + \frac{f}{\frac{1}{G_{23c} - G_m} + \frac{(K_m + 2G_m)(1-f)}{2G_m(K_m + G_m)}}, \quad (1.17)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{\beta_1 - \gamma\beta_2}{1 + \gamma\beta_2}, \quad \rho = \frac{\gamma + \beta_1}{\gamma - 1}, \quad \beta_1 = \frac{K_m}{K_m + 2G_m}, \quad \beta_2 = \frac{K_c}{K_c + 2G_{23c}}, \quad \gamma = \frac{G_{23c}}{G_m}.$$

Перший випадок реалізується звичайно в композитах з полімерною матрицею, а другий – з металевою.

Порівняємо пружні сталі композиційного матеріалу, обчислені за формулами (1.12)-(1.17), з експериментальними даними, отриманими в роботі [208]. Геометричні характеристики гумовокордного шару: $h_0 = 1,1$ мм, $d_c = 0,7$ мм, $i_c = 0,885$ мм⁻¹. Звідси, згідно з формулою (1.7), маємо $f \approx 0,31$. Пружні характеристики матеріалу корда: модуль пружності $E_c = 1600$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,8$. Пружні характеристики гуми: модуль пружності $E_m = 4,5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,49$. Результати розрахунків наведені в табл. 1.1. У формулах, наведених у [133], припускалося, що корд ізотропний.

Похибка обчислювалась згідно з формулою $\Delta = \frac{P^{\mathcal{E}} - P^T}{P^{\mathcal{E}}} \cdot 100\%$, $P^{\mathcal{E}}$ – експериментальне значення сталої, P^T – теоретичне (розрахункове) значення сталої. Як можна зазначити, для деяких пружних сталей розрахункові значення значно відрізняються від експериментальних даних.

На основі точної теорії армування [130] запропоновані аналітичні вирази для пружних характеристик композиційного матеріалу з ізотропною матрицею та трансверсально-ізотропним волокном. В результаті отримані такі пружні сталі композита:

$$E_1 = \frac{1}{S_{11}}, E_2 = \frac{1}{S_{22}}, \nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}, G_{12} = \frac{1}{S_{55}}. \quad (1.18)$$

Таблиця 1.1 – Пружні характеристики гумовокордного матеріалу

Пружні сталі	Експеримент [208]	Формули				
		правила сумішів	Аболіньша	Ваніна	роботи [133]	
					G_{23-}	G_{23+}
E_1 , МПа	499,9	499,1	499,1	499,1	499,2	
Δ , %	–	0,16	0,16	0,16	0,13	
E_2 , МПа	11,60	6,51	8,53	10,96	10,95	18,67
Δ , %	–	43,85	26,49	5,53	5,57	-60,97
G_{12} , МПа	1,934	2,185	2,854	2,854	3,395	
Δ , %	–	-12,99	-47,55	-47,55	-75,52	
ν_{12}	0,588	0,586	0,586	0,588	0,588	
Δ , %	–	0,32	0,32	0,08	0,08	
ν_{21}	0,0136	0,0076	0,0100	0,0129	0,0129	0,0220
Δ , %	–	43,76	26,37	5,14	5,21	-61,58
G_{23} , МПа	–	2,828	2,185	2,828	2,828	4,934
ν_{23}	–	0,152	0,951	0,937	0,937	0,892

Пружні податливості обчислюються за формулами:

$$S_{22} = \frac{1}{2}(S_2 + S_3), S_{23} = \frac{1}{2}(S_2 - S_3), S_{11} = \frac{1}{E_1^\circ} \cdot \frac{\alpha d_2 + 2\beta d_1}{d},$$

$$S_{12} = -\frac{1}{E_1^\circ} \cdot \frac{2\alpha d_1 + \beta d_2}{d}, S_{55} = \frac{1}{G^*} \cdot \frac{G_{12}^\circ(1-f) + G^*(1+f)}{G_{12}^\circ(1+f) + G^*(1-f)},$$

$$S_2 = \frac{1}{E_1^\circ} \left(\alpha - \beta - \frac{2\alpha d_3 + \beta d_4}{d} \right), \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
& \text{де } d_1 = a_{22}v_{21}^\circ - a_{12}, \quad d_2 = a_{11} - a_{21}v_{21}^\circ, \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\
& d_3 = a_{22}(\alpha k(1 - v^*) - (1 - v_{23}^\circ))f - 2a_{12}(\beta - v_{12}^\circ)f, \\
& d_4 = 2a_{11}(\beta - v_{12}^\circ)f - a_{21}(\alpha k(1 - v^*) - (1 - v_{23}^\circ))f, \\
& a_{11} = (1 - v_{23}^\circ)(1 - f) + \alpha k(1 + f) + \beta k(1 - f), \quad a_{12} = v_{21}^\circ(1 - f) + \beta k f, \\
& a_{21} = 2\beta f + 2v_{21}^\circ(1 - f), \quad a_{22} = \alpha f + (1 - f), \\
& \alpha = \frac{E_1^\circ}{E^*}, \quad \beta = v^* \frac{E_1^\circ}{E^*}, \quad k = \frac{E_2^\circ}{E_1^\circ}, \quad f - \text{об'ємний вміст волокна, } * \text{ позначені}
\end{aligned}$$

величини, що відносяться до матриці, $^\circ$ – величини, що відносяться до волокна.

Для допоміжної податливості S_3 в результаті розв'язання крайової задачі на чистий поперечний зсув отримані два значення S_3' та S_3'' :

$$S_3' = \frac{1}{E_1^\circ}(\alpha + \beta) \cdot \left(1 + 4(1 - v^*) \frac{d_1 + d_2}{d}\right), \quad (1.20)$$

$$S_3'' = \frac{1}{E_1^\circ}(\alpha + \beta) \cdot \left(1 + 4(1 - v^*) \frac{-d_1}{d}\right), \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}
& \text{де } d_1 = b_1(a_{22} - a_{12}), \quad d_2 = b_1(a_{11} - a_{21}), \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\
& a_{11} = 3(1 + v_{23}^\circ)(f^{-2} - 1) + 4(v_{23}^\circ + v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(f - f^{-2}) + \alpha k(1 + v^*)(3 - 4v^* f + f^{-2}), \\
& a_{12} = 2(1 + v_{23}^\circ)(f^{-1} - 1) + 2(v_{23}^\circ + v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(f - f^{-1}) + \\
& + 2\alpha k(1 + v^*)(1 - v^* f + (1 - v^*)f^{-1}), \\
& a_{21} = 3(1 + v_{23}^\circ)(f^{-2} - 1) + 2(3 + v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(f - f^{-2}) + \\
& + \alpha k(3(1 + v^*) - 2(3 + v^* - 2v^{*2})f - (1 + v^*)f^{-2}), \\
& a_{22} = 2(1 + v_{23}^\circ)(f^{-1} - 1) + (3 + v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(f - f^{-1}) + \\
& + \alpha k(2(1 + v^*) - (3 + v^* - 2v^{*2})f - (1 - v^* - 2v^{*2})f^{-1}), \quad b_1 = ((1 + v_{23}^\circ) - \alpha k(1 + v^*)).
\end{aligned}$$

Перше значення отримане для умови сумісності, накладеної на радіальне переміщення, друге – на окружне. При використанні значень податливості S_3 , отриманих за формулами (1.20) та (1.21), значення E_2 та ν_{23} можуть суттєво відрізнятися. В роботі [130] запропонована емпірична формула на основі чисельних експериментів за допомогою методу скінченних елементів, яка дає результат, добре узгоджений з експериментальними даними:

$$S_3 = \frac{21}{25} S'_3 + \frac{4}{25} S''_3 = \frac{1}{E_1^\circ} (\alpha + \beta) \cdot \left(1 + 4(1 - \nu^*) \frac{17d_1 + 21d_2}{25d} \right). \quad (1.22)$$

В роботі [133] на основі варіаційного принципу запропоновані співвідношення для нижньої та верхньої оцінки пружних сталих для волокнистого композиційного матеріалу, які в загальному випадку щодо трансверсально-ізотропних компонентів наведені в роботі [162].

Хашиним Ц. та Штрікманом Ш. на основі варіаційного принципу запропоновані нижня та верхня оцінки пружних сталих для волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними компонентами [278]:

нижні оцінки

$$E_1^L = E_1^\circ f + E_1^* (1 - f) + \frac{4(\nu_{12}^* - \nu_{12}^\circ)^2 k^\circ k^* G_{12}^*}{(k^\circ k^* + G_{12}^* (k^\circ f + k^* (1 - f)))};$$

$$\nu_{12}^L = \nu_{13}^L = \nu_{12}^\circ f + \nu_{12}^* (1 - f) + \frac{(\nu_{12}^* - \nu_{12}^\circ)(k^\circ - k^*)}{(k^\circ k^* + G_{12}^* (k^\circ f + k^* (1 - f)))};$$

$$G_{12}^L = \frac{G_{12}^* ((G_{12}^\circ + G_{12}^*) + f(G_{12}^\circ - G_{12}^*))}{((G_{12}^\circ + G_{12}^*) - f(G_{12}^\circ - G_{12}^*))};$$

$$G_{23}^L = \frac{G_{23}^* (k^\circ (G_{23}^\circ + G_{23}^*) + 2G_{23}^\circ G_{23}^* + f k^* (G_{23}^\circ - G_{23}^*))}{(k^* (G_{23}^\circ + G_{23}^*) + 2G_{23}^\circ G_{23}^* - f (G_{23}^\circ - G_{23}^*) (k^* + 2G_{23}^*))};$$

$$\begin{aligned}
k^L &= \frac{k^*(k^\circ + G_{23}^*) + fG_{23}^*(k^\circ - k^*)}{\left((k^\circ + G_{23}^*) - f(k^\circ - k^*)\right)}; \\
E_2^L &= E_3^L = \frac{1}{\frac{1}{4G_{23}^L} + \frac{1}{4k^L} + \frac{(v_{12}^U)^2}{E_1^L}}; \\
v_{23}^L &= \frac{2E_1^L k^L - E_1^L E_2^L - 4(v_{12}^U)^2 k^L E_2^L}{2E_1^L k^L}, \tag{1.23}
\end{aligned}$$

верхні оцінки

$$\begin{aligned}
E_1^U &= E_1^\circ f + E_1^*(1-f) + \frac{4(v_{12}^\circ - v_{12}^*)^2 k^\circ k^* G_{12}^\circ}{\left(k^\circ k^* + G_{12}^\circ(k^\circ f + k^*(1-f))\right)}; \\
v_{12}^U &= v_{13}^U = v_{12}^\circ f + v_{12}^*(1-f) + \frac{(v_{12}^\circ - v_{12}^*)(k^* - k^\circ)}{\left(k^\circ k^* + G_{12}^\circ(k^\circ f + k^*(1-f))\right)}; \\
G_{12}^U &= \frac{G_{12}^\circ \left((G_{12}^\circ + G_{12}^*) + (1-f)(G_{12}^* - G_{12}^\circ) \right)}{\left((G_{12}^\circ + G_{12}^*) - (1-f)(G_{12}^* - G_{12}^\circ) \right)}; \\
G_{23}^U &= \frac{G_{23}^\circ \left(k^*(G_{23}^\circ + G_{23}^*) + 2G_{23}^\circ G_{23}^* + (1-f)k^\circ(G_{23}^* - G_{23}^\circ) \right)}{\left(k^\circ(G_{23}^\circ + G_{23}^*) + 2G_{23}^\circ G_{23}^* - (1-f)(G_{23}^* - G_{23}^\circ)(k^\circ + 2G_{23}^\circ) \right)}; \\
k^U &= \frac{k^\circ(k^* + G_{23}^\circ) + (1-f)G_{23}^\circ(k^* - k^\circ)}{\left((k^* + G_{23}^\circ) - (1-f)(k^* - k^\circ) \right)}; \\
E_2^U &= E_3^U = \frac{1}{\frac{1}{4G_{23}^U} + \frac{1}{4k^U} + \frac{(v_{12}^L)^2}{E_1^U}}; \\
v_{23}^U &= \frac{2E_1^U k^U - E_1^U E_2^U - 4(v_{12}^L)^2 k^U E_2^U}{2E_1^U k^U}. \tag{1.24}
\end{aligned}$$

При армуванні системою n сортів суцільних волокон для визначення пружних характеристик композита запропоновані такі формули [133]:

$$E_1 = \sum_{i=1}^n E_{ci} f_i + E_m f_m, \quad (1.25)$$

$$v_{12} = v_m - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1) (v_m - v_{ci})}{(2 + (\chi_i - 1) G_m / G_{ci})}}{f_m + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1)}{(2 + (\chi_i - 1) G_m / G_{ci})}}, \quad (1.26)$$

$$E_2 = \left[\frac{v_{12}^2}{E_1} + \frac{\chi_m + 1}{8G_m} \left(\frac{1}{R} - \frac{2P}{1 + P} \right) \right]^{-1}, \quad (1.27)$$

$$G_{12} = G_m \frac{f_m + 2 \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{(1 + G_m / G_{ci})}}{1 - \sum_{i=1}^n f_i \frac{(1 - G_m / G_{ci})}{(1 + G_m / G_{ci})}}, \quad (1.28)$$

$$G_{23} = G_m \frac{1 + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(\chi_m + G_m / G_{ci})}}{1 - \chi_m \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(\chi_m + G_m / G_{ci})}}, \quad (1.29)$$

де f_i – об'ємна частка i -го сорту волокна в композиті, f_m – об'ємна частка матеріалу матриці в композиті, E_{ci} – модуль пружності матеріалу i -го сорту волокна, G_{ci} – модуль зсуву матеріалу i -го сорту волокна, v_{ci} – коефіцієнт Пуассона матеріалу i -го сорту волокна, $\chi_m = 3 - 4v_m$, $\chi_i = 3 - 4v_{ci}$,

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{f_i (1 - G_m / G_{ci})}{(\chi_m + G_m / G_{ci})}, \quad R = f_m + \sum_{i=1}^n \frac{f_i (\chi_m + 1)}{(2 + (\chi_i - 1) G_m / G_{ci})}.$$

Основними тенденціями при визначенні механічних характеристик композиційних матеріалів на сьогодні є спроби врахування особливих властивостей матеріалів матриці та волокна (анізотропії, в'язкопружності,

температурного розширення, пластичності, слабкої стисливості та інших) та особливостей сумісного деформування матриці та волокна (контакту матеріалу матриці з матеріалом волокна, особливостей зчеплення між ними, наявності перехідного шару між матеріалами, дифузії, наявності пошкоджень тощо). Врахування зазначених особливостей приводить до створення громіздких математичних моделей, застосовувати до яких аналітичні методи, як правило, не вдається. При застосуванні цих моделей використовують наближені методи (асимптотичні, чисельні), котрі, як правило, дають не аналітичні співвідношення, а числові значення механічних характеристик.

Так, широкого застосування набули асимптотичні підходи при визначенні ефективних механічних характеристик. Тут можна відзначити такі роботи. Основи варіаційного асимптотичного методу (VAMUCH) для визначення властивостей композитів, у тому числі й волокнистих, викладені в роботах Yu W. і Tang T. [324, 325, 337, 338]. Так, у монографії [324] наведено підходи до визначення пружно-пластичних, електромагнітопружних та інших властивостей композитів за допомогою варіаційного асимптотичного методу. Із зазначенням про періодичність армування як малий параметр, була сформульована варіаційна постановка для елементарної комірки гомогенізації за допомогою асимптотичного розкладання функціонала енергії. Для отримання чисельних результатів використовувався метод скінченних елементів, у результаті були визначені локальні поля в границях елементарної комірки, на основі яких можна відновити глобальну поведінку матеріалу. Перевагами методу є те, що за його допомогою визначаються властивості матеріалу за всіма напрямками одночасно в результаті розв'язання однієї задачі. У статті Yu W., Tang T. [338] описане застосування варіаційного асимптотичного методу для елементарної комірки гомогенізації для дослідження ефективних властивостей волокнистого композиційного матеріалу, а також напружено-деформованих полів на мікрорівні. У роботі Yu W., Tang T. [337] цей же метод використано для прогнозування ефективних термопружних властивостей композиційного матеріалу. На основі розробленої

моделі та з використанням методу скінченних елементів отримані термопружні характеристики композита зі сферичними включеннями та композита с волокнами круглого й квадратного перетину. Інша стаття Tang T., Yu W. [325] також присвячена подібній тематиці – застосуванню варіаційного асимптотичного методу до визначення термопружних характеристик та характеристик теплопровідності бінарного композита, композита зі сферичними та циліндричними включеннями.

Цикл робіт [276, 277, 281, 284, 293, 294] присвячено застосуванню методів гомогенізації для визначення механічних характеристик композитів різної структури. Так, у статті Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Rodríguez-Ramos R., Sabinab F.J. [277] розглянуто двофазний волокнистий композит періодичної структури з компонентами, що мають поперечну ізотропію. Отримані ефективні властивості цього композита з гексагональною структурою армування асимптотичним методом гомогенізації. У статті Rodríguez-Ramos R., Sabinac F.J., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J. [276] також розглянуто отримання ефективних характеристик аналогічного композита, але з прямокутною (тетрагональною) структурою армування. Робота Kari S., Berger H., Gabbert U., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Rodríguez-Ramos R. [284] присвячена застосуванню методу гомогенізації до розробки математичної моделі трифазного (включення, матриця та міжфазний шар) композиційного матеріалу. З використанням цієї моделі на основі двох методів – асимптотичного та методу скінченних елементів – отримані чисельні результати для ефективних характеристик композиційного матеріалу з випадково розподіленими сферичними включеннями та композиційного матеріалу з випадково розподіленими односпрямованими волокнами. В статті Guinovart-Díaz R., López-Realpozo J.C., Rodríguez-Ramos R., Bravo-Castillero J., Ramírez M., Camacho-Montes H., Sabina F.J. [294] для волокнистого композита з паралелограмовидною структурою армування за допомогою асимптотичного методу гомогенізації отримані співвідношення для визначення ефективних характеристик композита з циліндричними включеннями круглої форми (від

абсолютно жорстких до порожнистих). Робота López-Realpozo J.C., Rodríguez-Ramos R., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Otero J.A., Sabina F.J., Lebon F., Dumont S., Sevostianov I. [281] присвячена застосуванню асимптотичного методу гомогенізації до комірки у вигляді паралелограма для обчислення ефективних пружних коефіцієнтів композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними складовими та неідеальним контактом на межі поділу між матрицею й волокнами. В роботі Rodríguez-Ramos R., López-Realpozo J.C., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Sabina F.J. [293] асимптотичний метод гомогенізації застосовувався до обчислення ефективних п'єзоелектричних та пружних коефіцієнтів для композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними складовими та волокнами круглого перетину й неідеальним контактом на межі поділу між матрицею і волокнами.

В серії робіт [93-95] показано застосування методу асимптотичного осереднення до визначення пружних сталих волокнистого і тканинного композита. Так, в роботі Димитрієнка Ю.І., Соколова А.П. [95] викладені основи методу асимптотичного осереднення (методу Бахвалова-Побєдрі) для задач теорії пружності, а також основи методу скінченних елементів для розв'язання локальних задач теорії пружності на «комірці періодичності» та розрахунку ефективних пружних характеристик композитів. Надані варіаційні формулювання задач теорії пружності та задач на «комірці періодичності». Наведені приклади чисельних розв'язків локальних задач та результати моделювання полів мікронапружень для різних типів композиційних матеріалів: односпрямовано-армованих, просторово-ортогонально-армованих та інших. Розвиток методу асимптотичного осереднення періодичних структур на випадок багаторівневих ієрархічних структур для визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів надано в статті Димитрієнка Ю.І., Соколова А.П. [94]. Сформульовані рекурентні послідовності локальних та осереднених задач теорії пружності на комірках періодичності різних структурних рівнів. Наведено приклади скінченноелементних розв'язків серії локальних задач для моделі дворівневої

структури тканинного композиційного матеріалу. Робота Димитрієнка Ю.І., Соколова А.П. [93] також присвячена розширенню методу асимптотичного осереднення періодичних структур на випадок багаторівневих ієрархічних структур. Запропоновано метод обчислення міцнісних властивостей композиційного матеріалу за міцнісними властивостями його компонентів. На основі методу скінченних елементів проведено міцнісний розрахунок тканинного композиційного матеріалу.

Використовуючи підхід асимптотичної гомогенізації у статті Parnell W.J., Abrahams I.D. [313] отримані ефективні пружні сталі матеріалу для дослідження процесів поширення хвиль у композиті. Запропоновані співвідношення знайдені за допомогою розкладань, що швидко збігаються, в системі двоякоперіодичних функцій для волокон круглого та еліптичного перетину.

Для регулярних неоднорідних структур, у тому числі волокнистих композитів, математичне моделювання їх фізико-механічної поведінки здійснюється рівняннями з швидко осцилюючими коефіцієнтами [15, 16]. Використання таких рівнянь для чисельного розв'язання задач є досить проблематичним навіть за наявності сучасної комп'ютерної техніки. Тому за допомогою розкладання визначальних функцій за малим параметром (розміром комірки періодичності тощо) асимптотичним методом осереднення будуються простіші рівняння з осередненими коефіцієнтами, які й використовуються для розв'язання низки задач.

Асимптотичний підхід до визначення пружних та в'язкопружних характеристик волокнистого композита на комірці періодичності використано в роботі [35]. Застосовано розкладання шуканої функції за малим параметром (відношення розміру комірки періодичності до лінійного розміру всього зразка) для визначення фізико-механічних характеристик (коефіцієнти теплопровідності, дифузії, електропровідності тощо) волокнистих та зернистих композитів.

Застосування статистичних та ймовірнісних підходів при розв'язанні задачі гомогенізації композиційних матеріалів описане в нижченаведених роботах. Значний обсяг досліджень в напрямку визначення ефективних механічних характеристик композитів, у тому числі односпрямованих неперервно-волокнистих, проведено під керівництвом Гузя О.М. колективом вчених Хорошуном Л.П., Масловим Б.П., Шикуюю О.М., Назаренко Л.В. Ці дослідження узагальнено в монографії [167]. Охарактеризовано основні методи знаходження та отримано співвідношення для ефективних механічних характеристик у випадку транслопних властивостей волокна, в'язкопружних властивостей компонентів та нелінійності деформування волокнистого композита стохастичної структури.

У монографії Kwon Y.W., Allen D.H., Talreja R. [300] представлено широкий спектр методів із застосуванням ймовірнісних та статистичних підходів, які дозволяють описувати механічну поведінку композитів, у тому числі волокнистих та нанокомпозитів. Розглядаються різні підходи до визначення пружних сталей при наявності пошкоджень, тріщин, дифузії, температурних факторів, реологічних процесів і т.ін. У тому числі наведено термопружні сталі для волокнистого композита, армованого системою п волокон.

Основною метою дисертаційного дослідження Suwatnodom P. [323] є вивчення механічної поведінки залізобетону. Було розроблено мікромеханічну модель пошкодження, котра надає можливість описувати механічну поведінку композита в цілому. Отримані ефективні пружні характеристики для випадково розташованих та довільно орієнтованих волокон. Вивчено вплив об'ємної частки та форми армуючих елементів, а також вплив пружних властивостей компонентів на пружні властивості композита в цілому.

В статті Ko Y.-F., Ju J.W. [299] із використанням методу гомогенізації знайдено поперечний модуль пружності для трифазного композита з випадково розташованими односпрямованими круглими волокнами з урахуванням

взаємодії між волокнами. Також визначено поперечний модуль пружності композита для нестисливої матриці та круглих жорстких волокон.

Застосування методу гомогенізації при дослідженні пружнопластичної поведінки композита з випадково розподіленими односпрямованими круглими волокнами та пластичною матрицею описано в статті Ju J.W., Ko Y.F., Ruan H.N. [295]. Вплив випадкового процесу порушення зчеплення волокна та матриці в процесі деформування моделювався заміною відповідних волокон циліндричними пустотами. Пружні сталі трифазного композита (матриця, циліндричне волокно та пустота циліндричної форми, яка моделює порушення зчеплення волокна з матрицею) знаходились як комбінація тензорів пружних сталих матеріалу матриці й матеріалів включень, а також тензора Ешелбі для еліпсоїдних включень. Матеріал матриці та волокна вважався ізотропним.

Zhong W., Pan N. [341] на основі методу Монте-Карло запропонували стохастичний підхід до дослідження міжфазних явищ у волокнистих композитах. Зокрема, запропоновані методики були використані для моделювання процесу порушення зчеплення волокна та матриці.

Як правило, складність процесів взаємодії матриці та волокна приводить до складних математичних постановок задач, розв'язати які аналітичними методами не видається можливим. Тому використовують чисельні методи, такі як метод скінченних елементів, метод кінцевих різниць та інші.

В дисертаційній роботі Белова Д.А. [23] для пружного односпрямованого волокнистого композитного матеріалу розроблені методи гомогенізації та гетерогенізації, які дозволяють проводити аналіз механічної поведінки композитів на мікрорівні (характерні розміри – діаметри волокон, відстані між волокнами тощо) та на макрорівні (характерними розмірами є розміри конструкції), здійснюючі переходи з мікрорівня на макрорівень (гомогенізація), а також із макрорівня на мікрорівень (гетерогенізація). На основі об'єднання МСЕ і методу Монте-Карло розроблено алгоритм визначення ефективних пружних характеристик стохастичних односпрямованих волокнистих композитних матеріалів. Отримані точні вирази

для обчислення 13 ефективних пружних характеристик матеріалів, що мають властивості моноклінної симетрії. Встановлено мінімально необхідний розмір представницького елемента об'єму композитів та число реалізацій довільного розташування в них волокон при статичному визначенні цих характеристик. Виявлено характер залежності значень ефективних пружних характеристик від геометричних розмірів та пружних властивостей компонентів стохастичного односпрямованого волокнистого композитного матеріалу.

В статті Куїмової Є.В., Труфанова Н.А. [136] на основі сумісного застосування методу квазіконстантних операторів та методу скінченних елементів чисельно визначені ефективні термов'язкопружні характеристики односпрямованих армованих полімерних композитів за властивостями компонентів. Для опису в'язкопружних властивостей армований композит представлявся однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом із механічними сталими у вигляді різницевих інтегральних операторів. Значення пружних сталих знаходились із розв'язання крайової задачі термов'язкопружності на комірці періодичності. Досліджено вплив об'ємної релаксації зв'язувального матеріалу на властивості односпрямованого композита. Результати розрахунку пружних характеристик порівнювалися з результатами експерименту для композита з ізотропною матрицею та трансверсально-ізотропним волокном.

Для визначення в'язкопружних сталих волокнистого композиційного матеріалу в поперечному щодо волокна напрямі запропонована лінійна в'язкопружна модель поверхні розділу волокна та матриці у статті Gosz M., Moran B., Achenbach J.D. [287]. За допомогою гомогенізації для елементарної комірки методом скінченних елементів досліджені в'язкопружні властивості волокнистого композита.

В роботі Kamiński M. [296] визначені ефективні пружні властивості волокнистого композита на основі моделі стохастичних процесів старіння. За допомогою методу скінченних елементів досліджено процеси старіння композита зі скляними волокнами та епоксидною матрицею.

В серії робіт [283, 306, 307] за допомогою методів гомогенізації та подальшого застосування методу скінченних елементів отримано низку механічних характеристик для композиційного матеріалу. Так, у публікації Moreno M.E., Tita V., Marques F.D. [306] з використанням представницького об'ємного елемента та методу гомогенізації були сформульовані крайові задачі для п'єзоелектричних волокнистих композитів із квадратним та гексагональним розташуванням волокон круглого перетину. На основі методу скінченних елементів отримані чисельні результати для ефективних пружних та діелектричних характеристик композиційного матеріалу. Робота Moreno M.E., Tita V., Marques F.D. [307] є подальшим розширенням попередньої роботи з визначення пружних та діелектричних характеристик композиційного матеріалу, в якій особливу увагу приділено врахуванню структури армування. В статті Moreno M.E., Tita V., Marques F.D. [283] метод гомогенізації на основі представницького об'ємного елемента використовувався для визначення ефективних пружних та діелектричних характеристик композита. На основі методу скінченних елементів отримані чисельні результати для п'єзоелектричних волокнистих композитів із квадратним та гексагональним розташуванням волокон круглого та квадратного перетину.

В статті Sockalingam S., Nilakantan G. [320] на основі експериментальних методів проаналізовано міжфазну взаємодію на межі полімерної матриці й волокна. Різні механічні параметри міжфазної взаємодії матриці та волокна чисельно досліджені за допомогою методу скінченних елементів.

Srivastava V.K., Gabbert U., Berger H., Singh S. [268] визначили ефективні пружні властивості для композитів із різною формою й розмірами включень, таких як циліндричні волокна, сферичні та еліптичні частинки, а також циліндричні волокна з напівсферичними кінцями. Аналіз базований на методиці гомогенізації вихідного композиційного матеріалу. Вплив різних параметрів, таких як об'ємна частка, форма та розміри включень, проводились

за допомогою тривимірного представницького об'ємного елемента на основі чисельного моделювання методом скінченних елементів.

В роботі Klusemann B., Svendsen B. [297] запропоновано дві модифікації класичних методів гомогенізації матричних композитів із включеннями – так званий прямий метод та ефективна самоузгоджувальна схема. Проаналізовано ефективність запропонованих модифікацій у порівнянні з класичними методами гомогенізації та з результатами моделювання методом скінченних елементів.

Zeng T., Wu L., Guo L. [339] за допомогою модифікації методу скінченних елементів, що полягає у використанні трьох типів елементів: матричного, елемента пліти та змішаного, дослідили ефективні пружні характеристики просторових плетених композитів, у тому числі при наявності тріщин.

В роботі Yang F., Pitchumani R. [334] на основі вільної енергії Гіббса представлена математична модель композиційного матеріалу з урахуванням міжфазного шару між матрицею та волокном. За допомогою методу скінченних елементів визначаються ефективні пружні сталі матеріалу при наявності міжфазного шару.

Würkner M., Berger H., Gabbert U. [332] дослідили пружні сталі односпрямованоармованого композита з ромбічним вкладанням волокон. Математична модель створена методом гомогенізації на основі елементарного представницького об'єму. Чисельні результати отримані методом скінченних елементів. У іншій статті цих же авторів Würkner M., Berger H., Gabbert U. [331] вивчено ефективні пружні характеристики композита з ромбічним вкладанням волокон та з урахуванням особливостей міжфазного контакту на межі матриця-волокно за допомогою методу гомогенізації та методу скінченних елементів.

У статті Willoughby N., Parnell W.J., Hazel A.L., Abrahams I.D. [291] армований композитний матеріал із випадково розподіленими волокнами моделюється за допомогою представницького об'ємного елемента з

періодичними граничними умовами. Ефективні пружні характеристики матеріалу знаходяться на основі методу асимптотичної гомогенізації за допомогою скінченноелементних розв'язків.

Tucker C.L., Liang E. [327], спираючись на теорію еквівалентних включень Ешелбі, самоузгоджену модель для коротких волокон, модель Морі-Танака, граничну модель, співвідношення Халпін-Цая, описують мікромеханічну поведінку композитів, армованих прямими короткими волокнами. На основі зазначених моделей за допомогою методу скінченних елементів отримані ефективні пружні характеристики композита.

В роботі Sai V.S., Murthy V.B.K., Satyanarayana, Rao G.S. [303] побудовано тривимірну скінченно-елементну модель із використанням методу гомогенізації на комірці періодичності для визначення пружних характеристик волокнистого композита. Композиційний матеріал складається з двох різних волокнистих матеріалів (Т-300 та S-скла), один із яких має трансверсально-ізотропні властивості, та ізотропної полімерної матриці. Композит має гексагональну структуру армування, поперечні перетини волокон мають форму еліпсів різних ексцентриситетів, в тому числі кругу. Чисельні значення пружних сталих композита при різних значеннях об'ємного вмісту волокон отримані за допомогою програмного комплексу ANSYS, для поздовжнього модуля проведено порівняння з аналітичними значеннями, отриманими на основі правила сумішей.

Zhang Y., Xia Z., Ellyin F. [340] запропонували мікромеханічну модель односпрямованих волокнистих полімерних композитів з урахуванням наявності тріщини. За допомогою методу скінченних елементів досліджено процеси руйнування в тривимірній періодичній комірці для в'язкопружної матриці та пружного волокна.

Sharma R., Bhagat A.R., Mahajan P. [317] за допомогою скінченно-елементного аналізу дослідили різноспрямований 4D армований вуглецевий композит. Враховувались порожнини, зміщення волокон та викривлення поперечних перетинів волокон, отримані методами рентгенівської томографії.

На основі аналізу елементарної комірки за допомогою асимптотичної гомогенізації були отримані модулі пружності композиційного матеріалу.

Стаття Muneswara R.M.G., Zareena Sk. [309] присвячена мікромеханічному аналізу композитів, армованих трансверсально-ізотропними волокнами з використанням тривимірного методу скінченних елементів, реалізованого в програмному комплексі ANSYS. За допомогою методів гомогенізації знайдені ефективні поздовжній та поперечний модулі пружності та коефіцієнт Пуассона.

Визначенню макровластивостей односпрямованого волокнистого композита для фізично нелінійного матеріалу присвячена робота [99]. Розглядалась квадратна схема армування для волокон круглого перетину. Для знаходження п'яти механічних характеристик трансверсально-ізотропного композита методом скінченних елементів розв'язано три представницькі задачі при гармонічному навантаженні.

У роботі [245] на основі методу скінченних елементів розв'язано задачу про поперечний зсув волокнистого композита. З урахуванням симетрії механічних полів отримано оцінки модуля зсуву у площині ізотропії для композита.

В статті Новикова В.У., Бурьян О.Ю. [188] представлена чисельно-аналітична модель визначення пружних сталих волокнистого композита з перехідним шаром на границі «матриця»-«волокно». Перехідний шар представлявся у вигляді набору порожнистих циліндрів, кожен із яких має ізотропні властивості. Із розв'язання вісесиметричних задач теорії пружності для отриманого складеного циліндра, що складається із суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистих циліндрів, що моделюють перехідний шар, отримані пружні сталі ортотропного однорідного матеріалу, що моделює волокно та перехідний шар. Для прямокутної комірки композиційного матеріалу – «матриця»-«перехідний шар»-«волокно» – на основі методу кінцевих різниць побудовано систему розв'язувальних рівнянь для різних видів навантажень з урахуванням раніше знайдених пружних сталих системи

«перехідний шар»–«волокно». Розв’язання даної системи дає чисельні значення пружних сталих композиційного матеріалу з врахуванням міжфазного шару. Стаття Бур’ян О.Ю., Новикова В.У. [40] є розширенням роботи Новикова В.У., Бур’ян О.Ю. [187] як для односпрямованих волокнистих композитів, так і для дисперсно-наповнених, для котрих із використанням фрактального підходу отримані пружні характеристики перехідного шару в залежності від фрактальної розмірності.

У ході процедури визначення ефективних механічних характеристик також використовують інші, менш поширені методи – метод просторових характеристик, метод регулярних структур, метод орієнтаційного осереднення та інші.

Процес локального руйнування композиційного матеріалу, який обумовлений обривом одного з волокон, досліджено чисельно методом просторових характеристик [36]. При цьому матеріал моделювався так. Волокно, що обривається, вважалося пружним, об’єм матриці навколо нього вважався пружнов’язкопластичним, а весь масив композиційного матеріалу вважався трансверсально-ізотропним, однорідним.

В роботах Фильштинського Л.А., Шрамка Ю.В. та інших на основі методу регулярних структур досліджується елементарна комірка волокнистого композита й знаходяться осереднені електричні та магнітні властивості композитів, армованих суцільними волокнами [178].

Інтегральне рівняння, розв’язок якого дасть механічні характеристики композитного матеріалу із в’язкопружними матрицею та включенням, представлено у роботі [246].

Багато різних аспектів при проектуванні та застосуванні композиційних матеріалів та конструкцій на їх основі узагальнено у восьмитомній монографії під загальною редакцією Браутмана Л. і Крока Р. Особливу увагу варто звернути на другий том цієї монографії під редакцією Сендецькі Дж., присвячену механіці композиційних матеріалів. Зупинимося на найцікавіших із точки зору тематики дослідження розділах цієї монографії. Зокрема, у розділах 1, 2 цього

тому Пагано Н.Дж. [195, 196] досліджено ефективні модулі для шаруватих композитів та наведено методикау отримання механічних характеристик для шаруватого середовища. Розділ 3 надає відомості про точні та наближенні співвідношення для ефективних пружних характеристик композита в залежності від параметрів армування [228]. У розділі 7 у загальних рисах описано теорію великих деформацій матеріалів, які складаються із жорстких волокон та більш піддатливої матриці (наприклад, гумовокордного матеріалу). Теорію викладено з позицій макромеханіки так званих ідеальних волокнистих композитів (волокна розподілені неперервно, волокна є нерозтяжними й композит у цілому є нестисливим) [198].

В статті Yan P., Jiang C.P., Song F. [333] для трифазних (волокно, міжфазний шар, матриця) п'єзоелектричних композитів з двоякоперіодичною мікроструктурою запропоновано новий варіаційний функціонал для елементарної комірки періодичності шляхом включення у функціонал енергії періодичних граничних умов. Для такого композиційного матеріалу знайдені деякі ефективні електропружні характеристики.

Yao Y., Chen S., Chen P. [335] на основі трифазної моделі (волокно-проміжний шар-матриця) дослідили параметри напружено-деформованого стану композиційного матеріалу, армованого короткими волокнами. Отримано аналітичні розв'язки при лінійному та степеневому законі зміни модуля пружності в проміжному шарі, а коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт теплового розширення в проміжному шарі вважаються сталими. Результати аналітичних розв'язків добре узгоджуються з чисельними результатами, отриманими методом скінченних елементів. В статті Yao Y., Chen S. [336] побудовано математичну модель, що враховує шорсткість поверхні волокон при зчепленні з полімерною матрицею. Розглянуто вплив шорсткості поверхні волокон на напружено-деформований стан та ефективний модуль пружності волокнистого односпрямованого композита, армованого короткими циліндричними волокнами в шаховому порядку.

У роботі [50] за допомогою комплексних потенціалів та представлення їх рядами розв'язано задачу про макроскопічно однорідний напружено-деформований стан композитного матеріалу з анізотропними властивостями компонентів (площина, перпендикулярна до волокон, є площиною симетрії властивостей як матриці, так і волокна). Отримані співвідношення дозволяють визначати пружні характеристики композита, але при цьому необхідно розв'язувати нескінченну систему алгебраїчних рівнянь, що можливо в результаті обчислювального експерименту.

Основні положення та математичний апарат методу орієнтаційного осереднення на основі розкладання функцій у ряд Фур'є викладені у [159]. За мікромеханичними характеристиками отримано осередненні тензори деформацій та напружень, що характеризують пружні, в'язкопружні та упругопластичні властивості композита при різних схемах армування волокнами.

У монографії [200] наведено низку постановок одновимірних, дво- та тривимірних задач для отримання ефективних пружних характеристик пружних, в'язкопружних та пружно-пластичних волокнистих композитів. При розв'язках застосовуються як точні, де це можливо, так і наближені методи.

В серії робіт Teodorescu H., Vlase S., Candea I., Motoc D.L. [321], Teodorescu-Draghicescu H., Vlase S., Chiru A., Rosu D., Scutaru M.L., Secara E. [262, 318] на основі середнього арифметичного та середнього геометричного представлені розрахункові формули для визначення пружних сталих композита з еліптичними волокнами та наповнювачем. Результати розрахунку порівняно з експериментальними даними.

Експериментальні методи дослідження механічних характеристик волокнистих композитів представлені у низці робіт. Механіка текстильних та шаруватих композитів представлена в роботі Bogdanovich A., Pastore C.M. [273]. Зокрема, наведені теоретичні та експериментальні характеристики пружних властивостей односпрямованих, текстильних та шаруватих композиційних матеріалів. У серії робіт Кучера М.К., Заразовського М.М. та

інших [140-143] досліджуються можливості прогнозування механічних характеристик шаруватих композитів на основі механічних характеристик окремого моношару, у тому числі при впливі температурних факторів. Запропоновані підходи перевірено порівнянням із результатами експериментальних досліджень.

В роботі Silva L.J., Panzera T.H., Christoforo A.L., Rubio J.C.C., Scarpa F. [304] проаналізовано застосування аналітичних (правило сумішей та підхід Халпіна-Цая) та експериментальних методів визначення пружних характеристик класу полімерних композитів, виготовлених із епоксидної матриці, армованої односпрямованими природними сизалевими та банановими волокнами з мікрочастинками кремнезему та малеїнового ангідриду.

Особливості властивостей компонентів гумовокордного матеріалу приводить до необхідності застосування специфічних підходів при визначенні ефективних механічних характеристик такого композиційного матеріалу.

Так, у розділі 9 «Еластичні композити» роботи [242] наведені наближені, але досить загальні вирази для розрахунку модулів пружності односпрямованого гумовокордного моношару через пружні сталі матеріалу корда та гуми та об'ємний вміст корда в композиті, при цьому враховувались особливості деформування складових (нестисливість гуми, значні відмінності жорсткостей матеріалу корда й гуми та інше). Розглянуто вплив міжшарової зсувної деформації в проміжному гумовому шарі на напружено-деформований стан перехресно-армованої композитної полоси. За допомогою класичної теорії шаруватих пластин оцінюються характеристики жорсткості брекера та боковини шини.

Ефективні пружні характеристики односпрямованого гумовокордного матеріалу визначаються за допомогою розв'язку елементарних задач для одиничного кубика з одним армуючим кордом у ньому [34]. Для отримання аналітичних розв'язків зроблені такі припущення: матеріал матриці та волокна пружний та ізотропний, при дії поздовжнього навантаження поперечні напруження надзвичайно малі; при дії поперечного навантаження поперечні

напруження в матриці та волокні однакові, а поперечні деформації в матриці та волокні – пропорційні їх об'ємній частці в композиті. Отримані характеристики верифіковані методом скінченних елементів для масиву гумовокордного матеріалу. Найбільша різниця (до 60 %) спостерігається для поперечних модулів пружності, що пояснюється зробленими припущеннями.

Серія робіт [110, 212-214, 216] присвячена дослідженню пружних характеристик гумовокордного матеріалу та створенню математичних моделей для дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із гумовокордних матеріалів. Так, експериментальне дослідження пружних характеристик текстильних кордів та визначення ефективних характеристик гумовокордного матеріалу за відомими залежностями наведено в роботі [110]. Наведено підходи до визначення жорсткісних характеристик складених анізотропних гумовокордних матеріалів, які використовуються у каркасах [214] та брекерах [213] пневматичних шин. Однак при визначенні ефективних пружних характеристик гумовокордного матеріалу поздовжній та поперечний модулі пружності корду вважалися рівними, що не для всіх матеріалів справедливо і що, відповідно, обмежує застосування наведених співвідношень. Математичну модель рівноважної конфігурації профілю пневматичної шини у вигляді інтегрального рівняння представлено в роботі [216].

Деякі дотичні питання, пов'язані з механічними характеристиками волокнистих композитів розглядаються у таких роботах. Аналітичні розв'язки задачі оптимізації структури намотки для тороїдальної оболонки при обмеженнях по стійкості представлені в роботах [37, 38]. У роботі [259] розглядається алгоритм пошуку пружних сталей односпрямованого композитного шару за відомими пружними характеристиками багатошарового пакету, що складається із симетрично укладених шарів із односпрямованого композита.

На сьогодні наявна певна кількість робіт довідкового, а іноді більш навчального характеру, в яких узагальнено на час їх видання технологічні, механічні, фізичні, хімічні, конструкторські та інші аспекти виробництва й

експлуатації композиційних матеріалів, у тому числі волокнистих. Ці роботи мають різну міру деталізації тих чи інших аспектів, однак, незважаючи на це, всі вони можуть бути використані в інженерній справі при розрахунку та проектуванні композиційних матеріалів та конструкцій із них. Зокрема, різні групи співвідношень для визначення ефективних механічних характеристик волокнистого композита зведено в довідниках під редакцією Карпиноса Д.М. [133], Васильєва В.В., Тарнопольського Ю.М. [132], Kelly A. [278] та інших.

1.2 Методи розрахунку конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів

Після процедури гомогенізації волокнистого композита виникає необхідність розв'язання задачі механіки анізотропного середовища.

Значний вклад у розвиток підходів та методів механіки композиційних матеріалів та конструкцій внесли вітчизняні вчені. Так, можна відзначити фундаментальні багатотомні роботи, виконані під керівництвом Гузя О.М., а саме тритомне видання авторів Гузя О.М., Хорошуна Л.П., Ваніна Г.А. та інших [160, 161]. Більш узагальнювальне дванадцятитомне видання надає відомості про різноманіття механічних процесів, явищ та підходів і методів їх вивчення у композиційних матеріалах та конструкціях. Так, проблема визначення ефективних механічних характеристик розглянута колективом авторів Гузем О.М., Хорошуном Л.П., Масловим Б.П., Шикуюлою О.М., Назаренко Л.В. [167], вплив викривлення складових композита на його деформаційні характеристики досліджено Гузем О.М. та Акбаровим С.Д. [168]. Підходи та методи розрахунку статичних задач узагальнені Головчаном В.Т., Гузем О.М., Коханенком Ю.В. та іншими [162] та Гузем О.М., Григоренком Я.М., Василенком А.Т., Ємельяновим І.Г. та іншими [172]. Особливості напружено-деформованого стану, обумовлені наявністю

концентраторів напружень (отвори, тріщини, інші недосконалості матеріалу) або технологією виготовлення композитів, описані в роботах Гузя О.М., Камінського А.О., Назаренка В.М., Пелеха Б.Л., Гузя І.О. [169], Гузя О.М., Шутьги М.О., Томашевського В.Т., Карнаухова В.Г. та інш. [170], Гузя О.М., Космодам'янського О.С., Шевченка В.П. [171]. Проблеми та методи розв'язання задач динаміки та стійкості композитів узагальнені в роботах Гузя О.М., Кубенка В.Д., Бабаєва А.Е., Беспалової О.І., Василенка А.Т., Григоренка О.Я. [173], Гузя О.М., Бабича І.Ю. та інших [163]. У роботі Гузя О.М., Григоренка Я.М., Шевченка Ю.М., Василенка А.Т., Гузя І.О., Коханенка Ю.В. [164] викладено чисельні методи розв'язання лінійних та геометрично й фізично нелінійних задач механіки композитів. Експериментальні аспекти дослідження композиційних матеріалів узагальнені в роботі Гузя О.М. та Хорошуна Л.П. [165].

Особливості механічної поведінки відносно нового класу композиційних матеріалів – нанокompозитів – розглянуто в монографії Гузя О.М., Рушицького Я.Я., Гузя І.О. [91].

Системне викладення механіки деформованих анізотропних середовищ надано у роботах Лехницького С.Г. [147], акцент на нелінійні аспекти деформування анізотропних тіл, у тому числі для еластомерів, армованих нерозтяжними волокнами, наведено в роботі Черних К.Ф. [254].

Проблеми механіки руйнування та оптимального проектування конструкцій із композиційних матеріалів, у тому числі й волокнистих, розглядаються в монографії Черепанова Г.П. [253].

Узагальнення підходів та методів розв'язання задач механіки композитів наведено в літературі довідкового характеру. У довіднику під редакцією Карпиноса Д.М. [133] описані методи розрахунку фізико-механічних, міцнісних характеристик композиційних матеріалів, методи визначення їх складу та структури, наведено великий обсяг експериментальних даних. Довідник під редакцією Васильєва В.В., Тарнопольського Ю.М. [132] містить опис методів розрахунку напружено-деформованого стану різних конструкцій

(балки, стрижні, кільця, труби, балони тиску, багатошарові конструкції та інші) із композиційних матеріалів. В короткій енциклопедії під редакцією Kelly A. [278] викладені основні дані про властивості та особливості механічної поведінки штучних та природних композитів, у тому числі волокнистих.

Розвиток методів розрахунку неоднорідних конструкцій та конструкцій і анізотропними властивостями можна відзначити в роботах Сметанкіної Н.В. [232], Верещаки С.М., Дейнеки А.В., Данільцева В.В. [45], Карнаухова В.Г., Козлова В.І., Карнаухової Т.В. [106, 107], Дзюби А.П. та ін. [192], Гарт Е.Л., Гудрамовича В.С. [48] та інших.

При розрахунку просторових конструкцій введенням спрощувальних гіпотез та припущень вдається зменшити розмірність задачі й звести тривимірні задачі до задач теорії пластин та оболонок. Тому спочатку розглянемо розв'язання задач механіки анізотропного середовища на основі теорії пластин та оболонок.

Розрахунки на міцність армованих тонкостінних конструкцій (стрижневих конструкцій, пластин, оболонок, панелей) та принципи їх раціонального проектування представлені в роботі [185].

Вплив взаємодії кордних ниток гумовокордного композита при скінченних деформаціях на напружено-деформований стан досліджується на основі методу Колосова-Мухелішвілі [101, 225]. Задача розв'язується у випадку плоскої деформації. Корд вважається абсолютно жорстким, гума – нестисливою та в'язкопружною. В'язкопружні властивості описуються інтегральним оператором з різницеvim ядром. Як ядро релаксації прийнято ядро Колтунова М.А. [101]. Нелінійна задача розв'язується методом послідовних наближень.

Застосування різних варіантів уточненої теорії шаруватих оболонок та пластин для дослідження рівноваги, стійкості й коливань тонкостінних неоднорідних елементів конструкцій показано у [210]. Розв'язання задачі стійкості та знаходження критичних навантажень для сферичних та циліндричних оболонок із композиційних матеріалів надано в роботі [24].

Отримано як аналітичні розв'язки так і експериментальні дані для оболонок при різних варіантах силового та температурного навантаження та різних схемах укладки волокон у шарах оболонок.

На основі теорії оболонок Власова В.З. побудовано рівняння технічної теорії повзучості для ізотропних та анізотропних тонких оболонок [39]. Для отримання чисельних розв'язків крайових задач для зазначених оболонок використано різні методи: метод редукції крайової задачі до задачі Коші з подальшим їх розв'язанням методом Рунге-Кутта, різницевий метод в поєднанні з методом послідовних наближень та інші.

Отримано розрахункові моделі та рівняння будівельної механіки для розв'язання задач статички, динаміки та стійкості композитних стрижнів, балок, пластин та оболонок [44].

В роботі [183] на основі структурної механіки композитів із використанням відомих мікромеханічних моделей волокнистого композита визначаються пружні характеристики двовимірних та просторових композитів із різним характером армування волокнами (гібридні композити, симетрична та асиметрична укладка, хаотичне армування тощо). Також отримано основні співвідношення теорії оболонок із композиційних матеріалів на основі різних гіпотез (гіпотеза Кірхгофа-Лява, моделі типу Тимошенко та інші). На основі запропонованих співвідношень розв'язано статичні задачі, задачі про стійкість та міцність та задачу оптимізації параметрів композитних оболонок.

Дослідження початкового етапу руйнування оболонок із композиційного матеріалу або переходу в пластичний стан представлено в роботі [185]. При розрахунках конструкцій на основі теорії оболонок використовувались кінематичні гіпотези, що дозволяють врахувати викривлення нормалі та поперечні зсувні напруження.

В роботі Mukhopadhyay M. [308] здійснена спроба викласти комплексний та єдиний підхід до аналізу ряду аспектів механіки склопластиків. Викладені різні теорії деформування конструкцій із таких матеріалів, зокрема балок, пластин тощо. Розглянуті особливості розв'язання задач статички, динаміки,

термопружності та теплопровідності, механіки руйнування для склопластиків. Представлені основи методу скінченних елементів для розв'язання цих задач та чисельні результати розрахунків.

У зв'язку з широким застосуванням конструкцій із композиційних матеріалів, наприклад, у автомобільній промисловості, набув розвитку такий напрям, як механіка багатошарових конструкцій.

Так, на основі теорії тришарових пластин та оболонки було запропоновано підхід до побудови механіки багатошарових конструкцій [31], який отримав розвиток у ряді подальших публікацій. В тому числі проведено узагальнення цієї теорії на довільну кількість шарів. Цю теорію можна розвинути при досить загальних припущеннях про характер роботи кожного шару. Для одних шарів можна прийняти гіпотезу Кірхгоффа–Лява, для других – гіпотезу Тимошенко, для третіх – гіпотезу Тимошенко, узагальнену з урахуванням зміни довжини нормалі. Коли число шарів досить велике, конструкцію можна розглядати як дрібношарову. В цьому випадку отримані рівняння допускають граничний перехід, який був уперше проведений на основі принципу енергетичної континуалізації (розмазування, згладжування). Пізніше принцип континуалізації було застосовано для отримання визначальних рівнянь механіки шаруватих композитів [33].

Загальна постановка теорії багатошарових оболонки була запропонована Григолоюком Э.И., Чулковим Ю.Н. [85] та Болотіным В.В., Новичковим Ю.Н. [32]. На основі цієї теорії були побудовані рівняння, порядок яких залежить від числа шарів у оболонці.

Іншим напрямом розвитку теорії багатошарових оболонки є застосування для всього пакету шарів єдиних кінематичних або статичних гіпотез. Уточнена теорія багатошарових анізотропних оболонки, яка приводить до розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних дванадцятого порядку й заснована на використанні незалежних апроксимацій тангенціальних переміщень та поперечних дотичних напружень, наведена в роботі [87]. Існують і інші підходи [47].

Алгоритми чисельного розв'язання задач статички шаруватих ортотропних і анізотропних оболонок Кірхгоффа–Лява розроблені Григоренком Я.М. і його учнями [88, 89]. Значний внесок у розвиток теорії багатошарових пластин та оболонок внесли Амбарцумян С.А. [4, 5], Рябов А.Ф. та Рассказов А.О. [224], Терегулов А.Г. [238] та інші. До цього напрямку дотичні дослідження пластин та оболонок із композиційних матеріалів: Бідермана В.Л. [25], Корольова В.І. [135] та інших.

Надалі теорії багатошарових пластин та оболонок знайшли широке застосування при дослідженні напружено-деформованого стану гумовокордних пневматичних оболонок. Одна з перших дієвих моделей радіальної шини як оболонки була запропонована в роботі Бьома Ф., де стверджувалося, що оболонка складається з двох мембранних шарів, котрі моделюють каркас та брекер шини. В цій роботі розглядалось навантаження шини внутрішнім тиском. Розподіл зусиль між каркасом та брекерним поясом задавався при розрахунку за допомогою деяких функцій, названих функціями опоясаності. Після вибору функції опоясаності визначалася конфігурація шини.

В роботі Бідермана В.Л. та Левковскої Е.Я. [27] отримала подальший розвиток модель радіальної шини Бьома Ф., у якій вважалось, що оболонка складається з двох мембранних шарів, котрі моделюють каркас та брекер шини. У цій моделі бігова частина радіальної шини розглядалась як тришарова ортотропна оболонка з двома несучими мембранними шарами, що моделюють каркас та брекер, та гумовим прошарком, що їх роз'єднує і працює тільки на поперечний зсув. Бокова стінка моделювалася одношаровою безмоментною оболонкою. Ця схема використовувалась для розрахунку напруженого стану, викликаного внутрішнім тиском.

На основі наближеної теорії тришарових оболонок у роботах [19, 22] розв'язувалася задача обтиснення шини на поверхні дороги та задача стаціонарного кочення обтисненої шини. Використовувався підхід, згідно з яким у околі стану шини, викликаного внутрішнім тиском, проводилася лінеаризації «точних» геометрично нелінійних рівнянь.

Дослідження напружено-деформованого стану армованих оболонок, зокрема пневматичних шин, на основі геометрично нелінійної теорії багат шарових анізотропних оболонок типу Тимошенко, побудованої на основі незалежних гіпотез щодо характеру розподілу переміщень та поперечних дотичних напружень за товщиною пакета, наведено в монографії [84]. Там також викладено модель армованого шару, що дозволяє визначити механічні властивості матеріалу на основі властивостей його компонентів. Досліджено ефект анізотропії в перехресно армованих оболонках.

Розв'язання контактної задачі пневматичних шин [111], у яких деформаціями розтягнення корда каркаса в меридіональному напрямі можна знехтувати, виконано чисельним методом із використанням функціоналів повної енергії оболонки шини й півпростору та їх мінімізації методом локальних варіацій. Концепція теорії гнучких анізотропних оболонок і специфіка деформованої метрики для уточненого розрахунку напружень у контактній зоні шини врахована у розрахунковій моделі для аналізу показників напружено-деформованого стану пневмопокришки малого тиску [260]. В роботі [204] на основі методу скінченних елементів визначено напружено-деформований стан шини з використанням моделі Муни-Рівліна для опису нелінійних властивостей гуми. Зазначено, що контактний тиск у шинах виникає від статичних та динамічних навантажень, а дотичні напруження – при розгоні, гальмуванні, повороті транспортного засобу. В статті [243] розвинена методика розрахунку напружено-деформованого стану гумовокордних пневматичних шин на основі тривимірних рівнянь теорії пружності. Основну увагу приділено розв'язанню системи рівнянь, отриманої при дискретизації тривимірної задачі.

Розрахунок оболонкових конструкцій із застосуванням методу скінченних елементів та теорії рядів Фур'є проведено у [247]. Описано комплекс програм із розрахунку напружено-деформованого стану та дослідження стійкості складених багат шарових ортотропних оболонкових конструкцій при силових та температурних навантаженнях. За допомогою

цього комплексу проведено дослідження напружено-деформованого стану тороподібної оболонки обертання змінної товщини та жорсткості.

Розв'язання задачі про рівноважну конфігурацію діагональної шини було отримано Бідерманом В.Л. на основі безмоментної теорії сіткових оболонок [28]. Робота Бухіна Б.Л. цю модель узагальнює на випадок нелінійно розтяжного корда [42].

Використання лінеаризованої теорії попередньо напружених тришарових оболонок при розрахунку радіальних шин розглянуто в роботі [21]. Запропоновано алгоритм наближеного розв'язання контактної задачі, що надає можливість оцінки форми та розмірів області контакту, розподілу контактного тиску та параметрів напруженого стану шин ще на стадії проектування.

Вплив граничних умов у точці ободу на напружено-деформований стан пневматичних шин досліджено в роботі [80]. Геометрично нелінійна задача контактної взаємодії борта шини з ободом колеса, розв'язується шляхом застосування мішаного принципу Ху-Вашидзу. При цьому будується внутрішньо несуперечлива теорія багатошарових анізотропних оболонок типу Тимошенко з урахуванням поперечного обтиснення. Як шукані функції обрані переміщення внутрішніх поверхонь, що спрощує формулювання контактних задач та дозволяє створити достатньо ефективні чисельні алгоритми на основі дискретної ортогоналізації та методу скінченних елементів.

На основі теорії Болотіна В.В. Єлізаровим С.В. [98] розвинено варіант теорії багатошарових конструкцій на базі принципу континуалізації – переходу від шаруватого середовища до суцільного анізотропного. Запропонована нелінійна модель деформування та руйнування односпрямованого шару в складі різноспрямованого шаруватого композита з полімерною матрицею. Ця модель враховує часткове збереження та зміну в процесі руйнування несучої здатності шару не тільки відносно навантаження вдовж волокон, але й відносно поперечних та зсувних навантажень. Модель включає також механізми міжшарових руйнувань, пов'язаних із моментними ефектами. На основі методу

скінченних елементів із використанням запропонованої моделі проведено розрахунок композитних градирень.

Існує значна кількість задач, які не можна звести до задач теорії пластин та оболонок. Тому для їх розв'язання використовуються співвідношення тривимірної теорії механіки деформівного твердого тіла. Так, у серії робіт Ахундова В.М., що узагальнені в дисертації [9], описані підходи до розв'язання задач нелінійної механіки деформування гумовокордних матеріалів. Побудовані структурна та каркасна теорії композитів, які з'єднують мікро- та макромеханіку в умовах сильних змін та відмінностей метрик структурних складових при великих деформаціях. Побудована теорія деформаційних характеристик композитів при великих деформаціях для різних схем армування волокнами. Для опису нелінійних деформацій еластомерної матриці використано потенціал Левінсона-Буржеса, а для опису нелінійних деформацій корда – потенціал Блейтца або потенціал Блейца-Ко. Розроблені теорії використано до розрахунково-експериментального дослідження оболонкових конструкцій із композита. Розвинення описаних підходів наведено в подальших роботах Ахундова В.М. та інших [8, 10, 11].

Основи механіки текстильних та шаруватих композитів представлено в роботі Bogdanovich A., Pastore C.M. [273]. Розглянуті проблеми тривимірного аналізу напружено-деформованого стану конструкцій із таких матеріалів.

Робота Dvorak G. [279] представляє широкий спектр аналітичних та чисельних методів для моделювання властивостей та поведінки композиційних та шаруватих матеріалів, полікристалів та інших неоднорідних середовищ у різних умовах. Дослідження проводились на різних рівнях, починаючи від нано- (атоми) та мікрорівня (матриця, волокно), мезорівня (проміжний – армований шар, тканинні та шаруваті структури) і закінчуючи макрорівнем (гомогенізований матеріал).

Монографія Soutis C., Beaumont P.W.R. [322] присвячена вивченню мікроструктурних особливостей композиційних матеріалів. Основна увага приділена різним подходам, що моделюють різні руйнівні процеси в

композитах: пошкодженості матеріалу, процес утворення та розвитку тріщин, ударних пошкоджень, руйнування від втомленості та інших. Одним із методів, що використовуються при розрахунках, є метод скінченних елементів.

В монографії Matthews F.L., Davies G.A.O., Hitchings D., Soutis C. [285] викладені основні теоретичні відомості про волокнисті композиційні матеріали та про особливості застосування методу скінченних елементів до розрахунку конструкцій із них. Зокрема, особливу увагу приділено вивченню таких особливостей, як наявність отворів, крайові та міжшарові ефекти, розшарування тощо.

Aboudi J., Arnold S.M., Bednarczyk B.A. [265] наводять методи, що дозволяють моделювати поведінку композиційних матеріалів у різних умовах деформування. Наведено відомості про застосування різних методів опису композиційних матеріалів на мікрорівні. Розглянуті моделі пружної, в'язкопружної, пружнопластичної, термопружної поведінки композитів, ряд моделей механіки руйнування.

Монографія Tenek L.T., Argyris J. [326] містить основні відомості про чисельний аналіз тривимірних композитних конструкцій із використанням методу скінченних елементів. Розглянуті питання, що стосуються визначення напружено-деформованого стану балок, пластин і оболонок у лінійній та нелінійній постановці.

В роботі Barbero E.J. [270] розглянуті особливості моделювання ряду ефектів, притаманних композиційним матеріалам, таких як крайові ефекти, розшарування, в'язкопружність тощо. Наведені чисельні результати розрахунків із використанням ANSYS та MATLAB.

Для розв'язання задачі механіки композитів використовується структурно-феноменологічна модель, вона полягає в тому, що загальноприйняті феноменологічні рівняння механіки деформівного твердого тіла розглядаються на декількох (у цьому випадку на двох – мікро- та макрорівні) рівнях [46]. Розв'язок стохастичної крайової задачі для двофазного композита із випадковою структурою отримано за допомогою моментних

функцій структурних модулів пружності, які характеризують ступінь та характер упорядкованості елементів структури, форму включень тощо.

Складність постановок просторових задач обумовлює використання чисельних методів розв'язання тривимірних та двовимірних задач. До таких методів зараховують метод скінченних елементів, метод кінцевих різниць, метод граничних елементів тощо.

Так, дослідженню напружено-деформованого стану та стійкості дво- та тришарових оболонок тонкостінних елементів конструкцій з урахуванням дефектів типу розшарувань присвячена робота [218]. Запропоновані підходи базуються на методі кінцевих різниць.

У статті [180] досліджується розтягнення нескінченної двошарової гумовокордної полоси. Задача розв'язується аналітичним та кінцеворізницевим методом та порівнюється з результатами експериментальних досліджень.

В роботі Cisilino A.P., Ortiz J.E. [275] представлена методика дослідження параметрів механіки руйнування волокнистих композиційних матеріалів за допомогою методу граничних елементів. На основі тривимірної моделі отримані величини J -інтеграла та коефіцієнтів інтенсивності напружень для тріщин, які утворюються на межі розділу матриця-волокно. Knight M.G., Wrobel L.C., Henshall J.L. [298] методом граничних елементів дослідили мікромеханічну поведінку односпрямованого волокнистого композита з рівномірно та з випадковим чином розташованими волокнами. В роботі [108] побудовано основні рівняння механіки деформівного твердого тіла для залізобетонних просторових конструкцій при різних схемах армування арматурою та при наявності тріщин. Показано методику застосування до розв'язку цих рівнянь методу скінченних елементів, методу кінцевих різниць та варіаційно-різницевого методу.

Метод скінченних елементів до розрахунку конструкцій із композитів використано у вищезгаданих роботах Єлізаровим С.В. [98], Mukhopadhyay M. [308], Soutis C., Beaumont P.W.R. [322], Matthews F.L., Davies G.A.O., Hitchings D., Soutis C. [285], Tenek L.T., Argyris J. [326]. Також застосування

методу скінченних елементів для проектування конструкцій із композиційних матеріалів описано в роботі Barbero E.J. [270]. Розглянуті особливості методу скінченних елементів при характеристиці низки ефектів, притаманних композиційним матеріалам, таких як крайові ефекти, розшарування, в'язкопружність тощо. Наведені чисельні результати розрахунків із використанням ANSYS.

Soares C.A.M., Soares C.M.M., Freitas M.J.M. [319] наводять основні теоретичні відомості про механіку композиційних матеріалів, основи методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композиційних балок, пластин та оболонок. Особливу увагу приділено оптимізації конструкцій із композиційного матеріалу, дослідженню різних видів руйнування таких конструкцій.

Робота Gopalakrishnan S., Chakraborty A., Mahapatra D.R. [286] представляє собою системний виклад спектрального методу скінченних елементів для аналізу неоднорідних та анізотропних структур, у тому числі в контексті проблем механіки руйнування таких конструкцій.

В монографії Ochoa O.O., Reddy J.N. [310] викладені основи методу скінченних елементів для розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих пластин із композиційних матеріалів. Представлені моделі для дослідження нелінійної поведінки, динамічних задач, дослідження пошкоджень та критеріїв відмови таких конструкцій та ін.

Ning X., Zhu Q., Lanir Y., Margulies S.S. [264] представляють інтегральні співвідношення для в'язкопружної моделі волокнистого композиційного матеріалу з матрицею з неогуківського матеріалу. За допомогою методу скінченних елементів та генетичних алгоритмів досліджено в'язкопружну поведінку частин головного мозку.

Стаття Maimi' P., Mayugo J.A., Samanho P.P. [302] пропонує тривимірну модель пошкодження шаруватого армованого волокном полімерного композита, засновану на коректуванні тензора пружних сталих введенням до нього сталих пошкодження. На основі запропонованої моделі за допомогою

методу скінченних елементів досліджувався процес розповсюдження тріщини в композиті.

В роботі Bavan D.S., Kumar G.C.M. [271] за допомогою скінченноелементних моделей, реалізованих у програмному комплексі ANSYS, досліджено напружено-деформований стан композиційних балок із природними (маїсовими) односпрямованими волокнами.

Модель розшарування, що дає змогу розраховувати міжшарове розшарування в гібридному композиті, побудована Seddak A., Benzerga D., Haddi A. [316]. Модель пошкодження базується на квадратичному критерії накопичення пошкоджень. При отриманні чисельних розрахунків використовувався програмний комплекс ANSYS.

У роботі Seidel G.D., Allen D.H., Helms K.L.E., Groves S.E. [263] моделювались процеси пошкоджень у двофазних в'язкопружних композиційних матеріалах, армованих кристалами неправильної форми. Дослідження проводились методом скінченних елементів.

Ebrahimi S.H., Mohammadi S., Asadpoure A. [280] запропоновано новий підхід до моделювання тріщин в ортотропному композитному середовищі за допомогою розширеного методу скінченних елементів (XFEM). Основною ідеєю XFEM є представлення апроксимуючої функції у вигляді декількох складових, перша з котрих представляє апроксимацію традиційного MCE, а інші – моделюють різні недосконалості в конструкції без зміни кількості вузлів.

Дисертаційна робота Wilson M.J. [330] присвячена моделюванню пошкоджень тканинних композитів на основі поліпропіленової матриці, армованої скловолокном. Результати, отримані в результаті скінченноелементних розв'язків, порівнювалися з експериментальними даними.

Пагано Н.Дж. та іншими [206] досліджуються процеси руйнування та кромкові ефекти в композиційних матеріалах. Основними методами

розв'язання крайових задач для шаруватих композитів є метод кінцевих різниць та двомірний метод скінченних елементів.

У роботі Марчука А.В. та Пискунова В.Г. [152] застосовано напіваналітичний метод скінченних елементів до розв'язання задач механіки композитів та розрахунку шаруватих конструкцій.

Особливості застосування методу скінченних елементів до розв'язання задач механіки неоднорідних пологих оболонок та пластин шаруватої структури представлено у [220]. Наведено підходи до побудови матриць жорсткості скінченного елемента для високої балки, плити, пологої оболонки, пружного шаруватого напівпростору.

Залежно від типу задачі, що розглядається, та властивостей матеріалу конструкції доцільно використовувати матриці жорсткості скінченних елементів, які побудовані з урахуванням тих чи інших гіпотез та припущень. Так, запропоновано матрицю жорсткості оболонкового скінченного елемента для багат шарового ортотропного середовища на основі гіпотези Тимошенко [250].

Розвитку методу скінченних елементів і його модифікацій – моментної схеми скінченного елемента та напіваналітичного методу скінченних елементів – та їх застосуванню при розв'язанні різних задач механіки оболонок, теорії пружності, в'язкопружності, пластичності, механіки руйнування тощо присвячена низка робіт [13, 182, 184, 201, 255]. У роботах [182, 201] на основі моментної схеми для напіваналітичного методу скінченних елементів отримані співвідношення матриць жорсткості для розв'язання широкого класу задач механіки деформівного твердого тіла. Так описані матриці жорсткості для неоднорідних скінченних елементів: призматичного, замкненого та незамкненого кругового, спеціальних, що дозволяє отримати ліпшу збіжність чисельних результатів при розв'язанні відповідних задач.

Модифікацію моментної схеми скінченного елемента для отримання матриці жорсткості ексцентричного скінченного елемента оболонки та її застосування до розв'язання нелінійних задач надано у [13].

Уточнена ітераційно-аналітична теорія багатошарових оболонок, яка дозволяє звести тривимірні рівняння теорії пружності до двовірних, представлена у роботі [184]. Вона базується на ітераційній процедурі уточнення виду апроксимуючих функцій за товщиною конструкції на основі стаціонарності повної енергії. Реалізація цієї теорії для розв'язання нелінійних задач механіки багатошарових оболонок заснована на застосуванні моментної схеми скінченного елемента.

Скінченні елементи для дослідження конструкцій із армованих матеріалів із тріщиною на основі моментної схеми представлені у роботі [255]. Так, розроблено тривимірний скінченний елемент для армованого матеріалу (залізобетон) при наявності тріщин. При побудові матриці жорсткості такого елемента прийнято низку спрощень та гіпотез. Після утворення тріщини на площинах руйнування матеріал припиняє сприймати нормальні та дотичні напруження, арматура творить опір лише лінійній деформації вздовж волокна, деформування матриці та волокна відбувається сумісно, супротив середовища, що моделює композит, обумовлене додаванням напружень у матриці та волокні, осереднених за об'ємом. Наслідком цих спрощень є те, що тензор пружних сталих композита знаходиться як доданок тензорів пружних сталих матриці та волокна. Також надано два скінченних елементи для розв'язання задач менш загального виду – напіваналітичний кільцевий скінченний елемент, неоднорідний у окружному напрямі, та моментний скінченний елемент для вісесиметричних та плоских задач.

Для дослідження термопружної поведінки шаруватих конструкцій на основі моментної схеми скінченного елемента запропоновано просторовий скінченний елемент шаруватої структури [150]. Кожен шар скінченного елемента має власну схему армування волокна та власні пружні характеристики. Матриця жорсткості елемента будується на основі підсумовування енергії пружної деформації кожного шару. Армування волокнами задається у площинах, паралельних одній із координатних площин скінченного елемента.

Розроблено чисельний алгоритм та програмні засоби, що реалізують його, для дослідження нелінійного деформування й тріщиноутворення просторових залізобетонних конструкцій [256]. Використовується метод скінчених елементів. Чисельне моделювання нелінійного деформування та руйнування матеріалів здійснюється згідно з феноменологічними теоріями. Алгоритм розрахунку ґрунтується на методі Ньютона-Канторовича. Достовірність результатів підтверджена шляхом порівняння з експериментальними даними і чисельними розрахунками, виконаними за іншими методиками.

Викладено основи методу розв'язання статичних задач геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки тонких пружних неоднорідних оболонок, що мають складну форму серединної поверхні, геометричні особливості за товщиною, багатошарову структуру матеріалу та перебувають в умовах складного термосилового навантаження [272]. Підхід базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та використанні моментної схеми скінчених елементів. Дана чисельне обґрунтування методу. Виконане порівняння розв'язків із розв'язками інших авторів і в програмних комплексах ЛІРА, SCAD.

Розглянуто відомі методики прогнозування пружних сталей для моделі композитного матеріалу, армованого односпрямованими волокнами, через мікромеханічні параметри його складових [233]. Запропоновано методику врахування отриманих ефективних характеристик для цього типу композитного матеріалу в шарах розробленого багатошарового скінченного елемента тонкої неоднорідної оболонки.

Розрахунок напружено-деформованого стану гумовокордної оболонки у пневмопідвісці транспортного засобу представлено в роботі [186]. При цьому вважалося, що деформації в меридіанному напрямі відсутні. Задача розв'язувалася в нелінійній постановці за допомогою методу скінчених елементів та методу послідовних наближень. Проведено порівняння чисельних результатів із результатами експериментальних випробувань.

За допомогою програмного комплексу «КАСКАД» на основі теорії тришарових оболонок проведено розрахунок радіальної шини під внутрішнім тиском в умовах контактної взаємодії з поверхнею [17]. У статті [144] описано скінченноелементну систему STAR для розрахунку та проектування гумовотехнічних виробів, яка дозволяє визначати напружено-деформований та температурний стан, довговічність таких виробів. Застосування методу скінченних елементів, його програмної реалізації та графічних можливостей до проектування шин надано у [221]. Показано його ефективність при аналізі впливу конструктивних параметрів на вихідні характеристики шин.

У роботі [20] для визначення жорсткісних характеристик шин проаналізовано застосування п'яти типів оболонкових скінченних елементів, матриці жорсткості яких побудовані на основі тих чи інших гіпотез та припущень.

Розв'язання задачі про напружено-деформований стан кордної нитки при її висмикуванні з гумового блока аналітичним методом та методом скінченних елементів у програмному комплексі ANSYS представлено в [234].

Особливості розрахунку оболонкових конструкцій на основі безмоментної теорії сіткових оболонок, класичної теорії оболонок Кіргофа-Лява, теорії багатошарових анізотропних оболонок типу Тимошенко, просторової теорії пружності методами ортогональної прогонки, методом скінченних елементів, методом локальних варіацій представлено в роботах [83, 84]. Розроблені підходи застосовувалися до розрахунку автомобільних шин. Формулювання контактної задачі для багатошарової анізотропної оболонки обертання та алгоритми її подальшого розв'язання за допомогою МСЕ представлені у [81, 82].

На основі нелінійної теорії пружності анізотропного тіла метод скінченних елементів отримав широке застосування для розрахунку конструкцій із анізотропних матеріалів в роботах Носатенко П.Я. [188], Рикардса Р.Б. [223], Григолюка Е.І. [86] та інших.

Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. [3] запропонували підходи до розв'язання задач статичної та стійкості багатошарових пластинчатих та оболонкових конструкцій із композиційних матеріалів. Описано отримання основних розв'язувальних рівнянь варіаційно-матричним способом на основі принципу можливих переміщень. За допомогою МСЕ отримані рівняння розв'язуються для низки пластинчатих та оболонкових конструкцій.

Одним із напрямків розвитку чисельних методів розрахунку просторових конструкцій із композиційних матеріалів є створення програмних комплексів для розрахунку ракетно-космічної техніки, що пов'язане з вирішенням актуальних задач міцності силових елементів конструкцій складної конфігурації. Сучасні вимоги до процесу проектування конструкцій потребують вдосконалення та розвитку систем автоматизованого проектування (САПР) чи САД (Computer-Aided Design) та систем автоматизації інженерних розрахунків і аналізу (CAE) [153]. Найпоширеніші спеціалізовані програмні комплекси ANSYS, Abacus, Patran, Nastran широко застосовуються у практиці проектування ракетно-космічної техніки.

Так, програмний комплекс скінченно-елементного аналізу Nastran [134] було використано при проектуванні конструктивних елементів ракети-носія «Циклон-4» із полімерних композитних матеріалів (ПКМ). При визначенні напружено-деформованого стану шаруватих конструкцій або враховують наявність розривних властивостей матеріалу, або будують еквівалентну неперервну модель.

Так званий метод розривних деформацій (the Discontinuous Deformation Analysis (DDA)) [301] і метод дискретних елементів (the Discrete Element Method (DEM)) [312, 329] належать до першої групи методів. До неї також можна зарахувати модифікації методів скінченних елементів і скінченних різниць, які враховують розрив властивостей і структуру шарів матеріалу досліджуваної конструкції.

Аналіз багатошарових конструкцій складної форми цими методами викликає певні утруднення, пов'язані з необхідністю урахування структури шарів матеріалу.

Згідно з методами другої групи, шаруватий матеріал представляється еквівалентним однорідним континуумом [315], до якого згодом застосовується будь-який чисельний метод механіки деформівного твердого тіла.

1.3 Висновки

На основі наведеного огляду літератури можна зазначити, що у дослідженні просторових конструкцій при наявності волокнистих композитів задача, як правило, розбивається на два етапи – перший, коли області з неоднорідного матеріалу представляються однорідними шарами з «осередненими» механічними характеристиками, й другий, коли до отриманої задачі механіки анізотропного середовища застосовується аналітичний або чисельний метод.

Основним напрямом наукових досліджень у задачах визначення механічних характеристик волокнистого композиційного матеріалу є врахування особливостей складових його компонентів, таких як анізотропія, пластичність, в'язкопружність тощо, а також специфіки їх взаємодії та деформування в композиті, як-от, наявність перехідного шару, дифузії, порушення зчеплення, наявність тріщин тощо. Опис указаних особливостей в математичних моделях приводить до їх ускладнення і, як правило, до неможливості розв'язання поставлених задач аналітичними методами. У зв'язку з цим методами розв'язання все частіше виступають асимптотичні та чисельні методи.

Тому, однією з актуальних задач є уточнення або знаходження в аналітичному вигляді співвідношень для визначення пружних сталих композиційного матеріалу з урахуванням транстропних характеристик матриці

та волокна, які б адекватно й однозначно описували поведінку реальних композитів, у тому числі гумовокордних.

Значна частина чисельних методів при розрахунку конструкцій із композитів застосовується у двовірній постановці. Однак широке застосування композитів обумовлює збільшення числа конструкцій із їх використанням та їх значне ускладнення, як з геометричної точки зору, так і в аспекті їх експлуатації. Звідси виникають досить складні математичні задачі, у яких не завжди можливо ввести спрощувальні гіпотези та ефективно застосувати наявні методи.

Тому виникає необхідність в розвитку методів розв'язання таких задач у тривимірній постановці, зокрема методу скінченних елементів. Як правило, в наведеній літературі для досліджень використовується метод скінченних елементів у традиційній формі з усіма його недоліками. В деяких випадках досить ефективно застосовувались скінченні елементи, отримані з урахуванням спрощувальних гіпотез (пластинчаті, оболонкові).

Складна структура армування та складна геометрія конструкції потребують розробки тривимірних скінченних елементів, які без утрати точності розрахунків дозволили б спростити проектування й розрахунок конструкцій інженерами.

Однією з найбільш ефективних схем методу скінченних елементів є моментна схема, яка дозволяє нівелювати негативні властивості традиційної схеми, особливо у випадку значних згинних деформацій, що важливо для гумовокордного композита. Зважаючи на це, досить актуальною є розробка тривимірного скінченного елемента на основі моментної схеми з можливістю врахування довільної орієнтації волокон. Це не тільки зменшить кількість елементарних математичних операцій при обчисленнях, що, в свою чергу, зменшить обчислювальні похибки, а й зробить зручнішими операції задання вихідної інформації та полегшить роботу інженерів-проектувальників.

РОЗДІЛ 2

РОЗШИРЕННЯ ПІДХОДІВ ДО ГОМОГЕНІЗАЦІЇ КОМПОЗИЦІЙНОГО
МАТЕРІАЛУ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМИ МАТРИЦЕЮ ТА
ВОЛОКНОМ

На основі кінематичної умови узгодження методом представницького об'ємного елемента отримаємо аналітичні співвідношення для ефективних пружних сталих композиційного матеріалу з транстропними матрицею та волокном.

2.1 Основні припущення та вихідні співвідношення

Існує низка схем розташування волокон в односпрямованих композиційних матеріалах, зокрема, однією з таких схем є гексагональна укладка волокон (рис. 2.1).

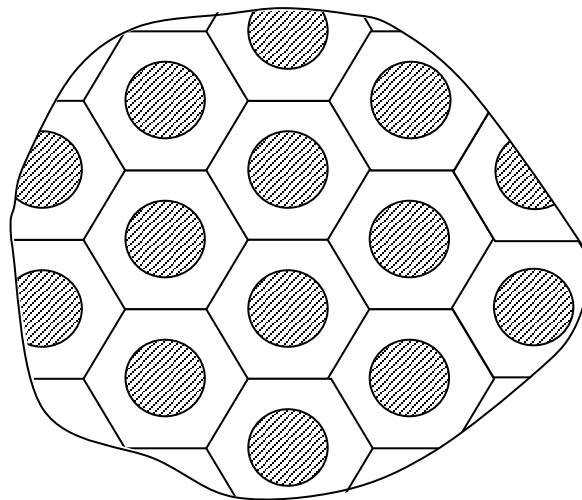


Рисунок 2.1 – Гексагональна укладка волокон.

Розглянемо випадок, коли анізотропні властивості мають і матеріал матриці, і матеріал волокна. Припустимо, що і матриця, і волокно представлені трансверсально-ізотропними матеріалами, причому площини ізоотропії збігаються й розташовані перпендикулярно осі волокна. Зробимо також низку припущень: і матеріал матриці, й матеріал волокна підкорюються закону Гука, між матеріалом матриці й матеріалом волокна існує ідеальне зчеплення. В цілому розміри волокон та частота армування є такими, що композиційний матеріал можна вважати макроскопічно однорідним.

Представимо елемент волокнистого композиційного матеріалу, що має трансверсально-ізотропні властивості, у вигляді комбінації двох циліндрів нескінченної довжини – трансверсально-ізотропного порожнистого, що моделює матрицю, та трансверсально-ізотропного суцільного, що моделює волокно (рис.2.2).

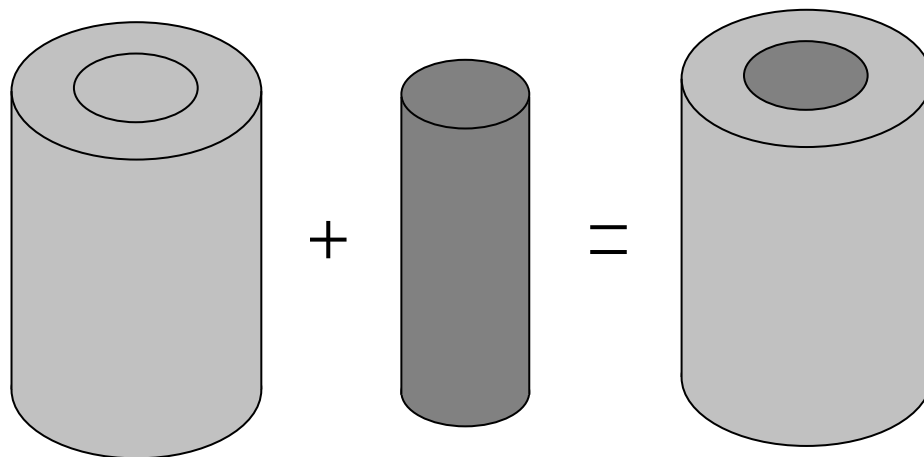


Рисунок 2.2 – Елемент волокнистого композита.

Для цього апроксимуємо об'єм елементарної гексагональної комірки об'ємом циліндра, причому радіус циліндра приймемо таким, щоб об'ємний вміст волокна в гексагональній комірці, і об'ємний вміст волокна в циліндричній комірці були б однаковими (рис.2.3).

Якщо об'ємний вміст волокон в композиті дорівнює f , то, враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку займає

волокно в елементарній комірці, мають однакову висоту, справедливе таке співвідношення:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (2.1)$$

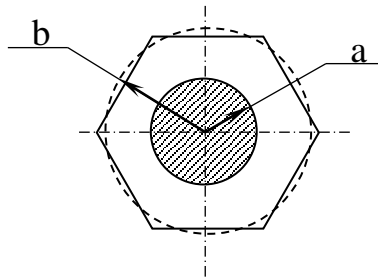


Рисунок 2.3 – Гексагональна комірка.

Пружні сталі знаходяться із розв’язання двох крайових задач, спочатку розв’язується крайова задача сумісного деформування трансверсально-ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного волокна. В результаті її розв’язання отримуємо компоненти напружено-деформованого стану як функції пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об’ємної частки кожного з них у композиті. Далі отримуємо розв’язок аналогічної крайової задачі для композита, котрий представляється однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом із поки що невідомими пружними сталими. В результаті розв’язання отримуємо компоненти напружено-деформованого стану як функції невідомих пружних сталих однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит. Умовою узгодження виступає рівність деяких компонентів вектора переміщень у обох задачах. Із цієї умови знаходимо невідомі пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу як функції пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об’ємної частки кожного з них в композиті.

Із наведеного вище ясно, що чим точніше розв’язана крайова задача, тим точнішими будуть пружні характеристики композита. Аналітичні розв’язки для

такої комбінації можна отримати лише для обмеженого кола крайових задач. До числа таких задач належать: рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне розтягнення, чистий поперечний зсув та чистий поздовжній зсув.

Розглянемо вісесиметричний напружено-деформований стан циліндричного тіла, тоді $\sigma_{zz} = \sigma_0$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$, $\sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0$. Рівняння рівноваги (А.8) та (А.9), наведені в додатку А, виконуються тотожно, а рівняння (А.7) при масовій силі $G_r = 0$ набуде вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (2.2)$$

Якщо вважати осьове напруження сталим, зокрема нульовим, то тоді з (А.34) та (А.35) витікає, що $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r)$ і, відповідно, $\varepsilon_{zz} = const$. Тоді з урахуванням співвідношень додатку А (А.47), (А.48) і (А.1), (А.3) для вісесиметричного напружено-деформованого стану рівняння (2.2) запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (2.3)$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (2.4)$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з граничних умов.

Звідси, використовуючи співвідношення додатку А (А.1), (А.3) отримуємо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}(r) &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}; \\ \varepsilon_{\theta\theta}(r) &= \frac{u_r}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Скориставшись співвідношеннями (А.47), (А.48), запишемо наступні вирази:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E_2 \left(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1 + \nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(\nu_{23} + 2\nu_{12}\nu_{21} - 1) \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E_2 \left(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + C_1(1 + \nu_{23}) + \frac{C_2}{r^2}(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21}) \right)}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Підставляючи отримані співвідношення та значення $\sigma_{zz} = \sigma_0$ у вираз (А.36), знайдемо співвідношення для ε_{zz} :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1 - \nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} = const.\quad (2.7)$$

А враховуючи співвідношення (А.5), отримаємо вирази для осьових переміщень:

$$\begin{aligned}u_z(z) &= \int \varepsilon_{zz} dz = \int \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1 - \nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} \right) dz = \\ &= \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1 - \nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} \right) z + C_3.\end{aligned}\quad (2.8)$$

За умови $u_z(0) = 0$, маємо $C_3 = 0$. І співвідношення (2.8) запишеться в вигляді:

$$u_z(z) = \left(\frac{\sigma_0(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1 - \nu_{23})} - \frac{2C_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{23})} \right) z. \quad (2.9)$$

З урахуванням отриманого співвідношення (2.9) вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= E_2 \left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1 - \nu_{23})} + \frac{C_1}{1 - \nu_{23}} - \frac{C_2}{r^2(1 + \nu_{23})} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= E_2 \left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1 - \nu_{23})} + \frac{C_1}{1 - \nu_{23}} + \frac{C_2}{r^2(1 + \nu_{23})} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким чином, для вісесиметричного напружено-деформованого стану отримані всі компоненти напружень, деформацій і переміщень, як функції пружних характеристик матеріалу і сталей, які знаходяться з крайових умов.

2.2 Визначення ефективних пружних сталей композиційного матеріалу при лінійних деформаціях

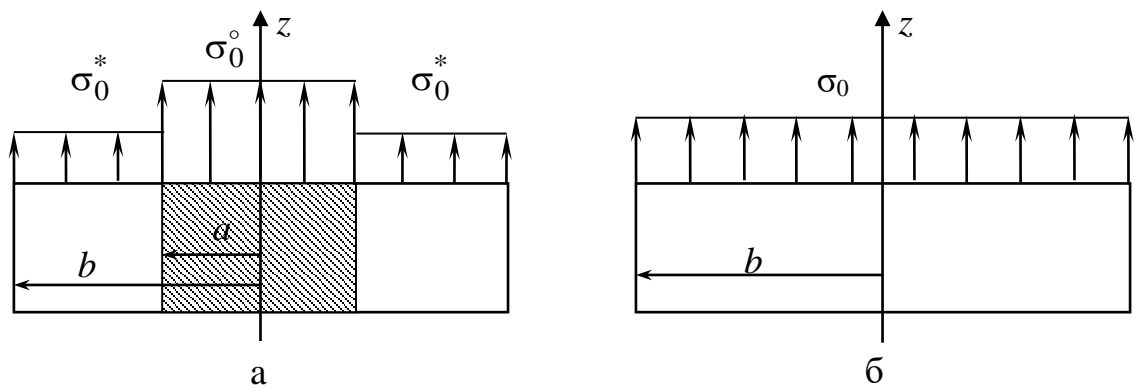
Поздовжнє розтягнення. Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис.2.4а) суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, і порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю.

Крайові умови підберемо таким чином, щоб вони відповідали експериментальним даним, отриманим для композиційного матеріалу. В місці зчеплення волокна з матрицею відсутній стрибок за радіальним переміщенням

та радіальним напруженням, осьові переміщення і волокна, й матриці сталі й однакові:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a) = \sigma_{rr}^{*}(a), u_r^{\circ}(a) = u_r^{*}(a), u_z^{\circ}(h) = u_z^{*}(h). \quad (2.11)$$

Тут і далі символ \circ означає величини, що відносяться до волокна, а символ $*$ – величини, що відносяться до матриці.



а – сумісне деформування матриці та волокна;

б – деформування композита;

Рисунок 2.4 – Поздовжнє розтягнення.

Крім цього, крайові умови в напруженнях при сумісному деформуванні матриці й волокна запишуться таким чином:

$$\sigma_{rr}^{*}(b) = 0. \quad (2.12)$$

Радіальні переміщення трансверсально-ізотропного волокна будуть описуватися співвідношенням (2.4), а з урахуванням того, що при $r = 0$ $u_r^{\circ}(0) = 0$ впливає, що $C_2 = 0$, тоді співвідношення (2.4) запишуться у вигляді (перепозначимо C_1 на C):

$$u_r^{\circ}(r) = Cr. \quad (2.13)$$

Тоді напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися, окрім (2.13), такими співвідношеннями:

$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right); \quad \sigma_{\theta\theta}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right). \quad (2.15)$$

Аналогічно запишемо співвідношення, які описують напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної матриці (перепозначимо C_1 на A , а C_2 на B):

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r}; \quad u_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^*)} \left(\frac{\sigma_0^* (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right) z, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right). \quad (2.17)$$

Виходячи з крайових умов (2.11), (2.12) знайдемо тепер сталі A , B , C та залежність між σ_0° та σ_0^* . Із другої рівності (2.11) маємо:

$$C = A + \frac{B}{a^2}. \quad (2.18)$$

Із рівності (2.12) отримуємо:

$$A = \frac{B}{b^2} \frac{(1 - v_{23}^*)}{(1 + v_{23}^*)} - \frac{\sigma_0^* v_{12}^*}{E_1^*}. \quad (2.19)$$

Тоді (2.18) запишеться у вигляді:

$$C = B \left(\frac{f(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*)}{a^2(1 + v_{23}^*)} \right) - \frac{\sigma_0^* v_{12}^*}{E_1^*}. \quad (2.20)$$

Із першої рівності (2.11) маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{E_2^\circ}{(1 - v_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^* v_{12}^*}{E_1^*} \right) = \\ & = \frac{B}{a^2} \left(\frac{E_2^*}{(1 + v_{23}^*)} (f - 1) - \frac{E_2^\circ}{(1 - v_{23}^\circ)(1 + v_{23}^*)} (f(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*)) \right), \\ B & = \left(\frac{\sigma_0^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^* v_{12}^*}{E_1^*} \right) \frac{a^2 E_2^\circ (1 + v_{23}^*)}{E_2^* (f - 1)(1 - v_{23}^\circ) - E_2^\circ (f(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*))}, \quad (2.21) \end{aligned}$$

Позначимо

$$d_1 = E_2^* (f - 1)(1 - v_{23}^\circ), \quad d_2 = E_2^\circ (f(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*)). \quad (2.22)$$

Тоді

$$\begin{aligned} B & = \frac{v_{21}^\circ a^2 (1 + v_{23}^*)}{d_1 - d_2} \sigma_0^\circ - \frac{a^2 E_2^\circ (1 + v_{23}^*) v_{12}^*}{d_1 - d_2} \frac{\sigma_0^*}{E_1^*}; \\ C & = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \frac{v_{12}^\circ}{E_1^\circ} \sigma_0^\circ - \frac{v_{12}^*}{E_1^*} \frac{d_1}{d_1 - d_2} \sigma_0^*; \end{aligned}$$

$$A = \frac{fv_{21}^{\circ}(1-v_{23}^*)}{d_1-d_2}\sigma_0^{\circ} - \frac{v_{12}^*}{E_1^*} \frac{fE_2^{\circ}(1-v_{23}^*)+d_1-d_2}{d_1-d_2}\sigma_0^*. \quad (2.23)$$

Нарешті, з третьої рівності (2.11) знаходимо співвідношення між σ_0^* та σ_0° :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(1-2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ}-v_{23}^{\circ})(d_1-d_2)}{E_1^{\circ}(1-v_{23}^{\circ})} - \frac{2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ}d_2}{E_1^{\circ}(1-v_{23}^{\circ})} + \frac{2fv_{21}^{\circ}v_{21}^*}{1} \right) \sigma_0^{\circ} = \\ & = \left(\frac{(1-2v_{12}^*v_{21}^*-v_{23}^*)(d_1-d_2)}{E_1^*(1-v_{23}^*)} + \frac{2v_{12}^*v_{21}^*(fE_2^{\circ}(1-v_{23}^*)+d_1-d_2)}{E_1^*(1-v_{23}^*)} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2v_{12}^*v_{21}^{\circ}d_1}{E_1^*(1-v_{23}^{\circ})} \right) \sigma_0^*. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Позначивши

$$\begin{aligned} d^{\circ} &= \frac{E_2^*(f-1)(1-v_{23}^{\circ}-2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ})-E_2^{\circ}(f(1-v_{23}^*-2v_{12}^{\circ}v_{21}^*)+(1+v_{23}^*))}{E_1^{\circ}}, \\ d^* &= \frac{E_2^*(f-1)(1-v_{23}^{\circ}-2v_{12}^*v_{21}^{\circ})-E_2^{\circ}(f(1-v_{23}^*-2v_{12}^*v_{21}^*)+(1+v_{23}^*))}{E_1^*}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

отримуємо

$$d^{\circ}\sigma_0^{\circ} = d^*\sigma_0^*. \quad (2.26)$$

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу (рис. 2.4б). В цьому випадку поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (2.27)$$

Причому для того, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2 \sigma_0^\circ + \pi (b^2 - a^2) \sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0, \text{ або } \sigma_0^\circ f + \sigma_0^* (1 - f) = \sigma_0. \quad (2.28)$$

З урахуванням (2.26) отримаємо:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0 d^\circ}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)}, \quad \sigma_0^\circ = \frac{\sigma_0 d^*}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)}. \quad (2.29)$$

З урахуванням (2.27) співвідношення (A.34), (A.36) набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_0. \quad (2.30)$$

Тоді переміщення, згідно з (A.1), (A.5), будуть визначатися формулами:

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0 r + C_1; \quad u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z + C_2. \quad (2.31)$$

Сталі $C_1 = C_2 = 0$ з урахуванням того, що для цієї задачі будуть виконуватися умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, тоді

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0 r; \quad u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z. \quad (2.32)$$

Будемо вважати, що як умови узгодження для задачі про поздовжнє розтягнення однорідного трансверсально-ізотропного композита та задачі про сумісне поздовжнє розтягнення матриці й волокна будуть виступати рівність

осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні:

$$u_r(b) = u_r^*(b); u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.33)$$

Тоді друге зі співвідношень (2.33) з урахуванням (2.16) та (2.32) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma_0^* (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^* (1 - \nu_{23}^*)} - \frac{2A\nu_{21}^*}{(1 - \nu_{23}^*)} = \frac{1}{E_1} \sigma_0, \quad (2.34)$$

а з урахуванням (2.23) та (2.29) отримаємо співвідношення:

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)} \left(-\frac{2\nu_{21}^* f \nu_{21}^\circ d^*}{d_1 - d_2} + \left(\frac{(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^* (1 - \nu_{23}^*)} + \frac{2\nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ (1 - \nu_{23}^*) + d_1 - d_2}{(1 - \nu_{23}^*) E_1^* (d_1 - d_2)} \right) d^\circ \right). \quad (2.35)$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними матрицею і волокном:

$$E_1 = \frac{(d^\circ (1 - f) + d^* f) (E_2^* (f - 1) (1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ (\nu_{23}^* (f - 1) - (1 + f))) E_1^*}{(E_2^* (f - 1) (1 - \nu_{23}^\circ) - E_2^\circ (1 + \nu_{23}^* + f (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^* \nu_{12}^*))) d^\circ - 2f \nu_{12}^* \nu_{21}^\circ E_2^* d^*},$$

або

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^\circ \beta) E_1^* (1 - f) + (\alpha - 2\nu_{12}^* \beta) E_1^\circ f}{\alpha - 2\beta \nu_{12}^\circ + 2f \nu_{21}^* E_2^\circ (\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}, \quad (2.36)$$

з урахуванням співвідношень

$$\alpha = E_2^*(1-f)(1-v_{23}^\circ) + E_2^\circ(f(1-v_{23}^*) + (1+v_{23}^*)); \beta = v_{21}^\circ E_2^*(1-f) + v_{21}^* f E_2^\circ. \quad (2.37)$$

Із першої з умов (2.33) знайдемо співвідношення $-\frac{v_{21}}{E_2}$ для композиційного матеріалу. Тоді, з урахуванням виразу для A (2.23), отримуємо

$$\frac{fv_{21}^\circ(1-v_{23}^*)}{d_1-d_2}\sigma_0^\circ - \frac{v_{12}^* f E_2^\circ(1-v_{23}^*) + d_1-d_2}{E_1^* d_1-d_2}\sigma_0^* + \frac{B}{b^2} = -\frac{v_{21}}{E_2}\sigma_0. \quad (2.38)$$

Підставляючи в останній вираз співвідношення для B (2.23), з урахуванням (2.29), остаточно отримуємо:

$$-\frac{v_{21}}{E_2} = \frac{1}{d^\circ + f(d^* - d^\circ)} \left(\frac{2fv_{21}^\circ d^*}{d_1-d_2} - \frac{v_{12}^* (2fE_2^\circ + d_1-d_2)d^\circ}{E_1^* d_1-d_2} \right). \quad (2.39)$$

Або, використовуючи співвідношення між коефіцієнтами Пуассона і модулями пружності анізотропного матеріалу, отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона v_{12} :

$$v_{12} = \frac{(v_{12}^*(f-1)(E_2^*(1-v_{23}^\circ) + E_2^\circ(1+v_{23}^*))d^\circ - 2fv_{21}^\circ E_1^* d^*)}{(E_2^*(f-1)(1-v_{23}^\circ) - E_2^\circ(1+v_{23}^* + f(1-v_{23}^\circ - 2v_{21}^* v_{12}^*)))d^\circ - 2fv_{12}^* v_{21}^\circ E_2^* d^*},$$

або

$$v_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta v_{12}^\circ)v_{12}^* + 2E_2^\circ f(v_{12}^\circ - v_{12}^*)}{\alpha - 2\beta v_{12}^\circ + 2fv_{21}^* E_2^\circ(v_{12}^\circ - v_{12}^*)}. \quad (2.40)$$

Порівняємо значення поздовжнього модуля пружності E_1 і коефіцієнта Пуассона ν_{12} , отримані за формулами (2.36) та (2.40), з відомими в літературі експериментальними даними.

Розглянемо спочатку гумовокордний матеріал з ізотропною матрицею та ізотропним кордом з такими пружними характеристиками [83]: модуль пружності текстильного корда $E^\circ = 1,6 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,8$, модуль пружності гуми $E^* = 4,5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,49$.

В таблицях 2.1, 2.2 наведені порівняння значень модуля пружності E_1 та коефіцієнта Пуассона ν_{12} з експериментальними даними при об'ємному вмісті корда $f = 0,31$. Як можна відзначити, похибка обчислень ε за формулами (2.36) та (2.40) в порівнянні з даними експериментів менше 1 %.

Таблиця 2.1 – Поздовжній модуль пружності E_1 гумовокордного матеріалу

Величина	Експеримент [83]	Розрахунок		
		формула (1.23)	формула (1.24)	формула (2.36)
E_1 , МПа	499,9	499,7	567,7	499,2
ε , %	-	0,04	-13,56	0,14

Таблиця 2.2 – Коефіцієнт Пуассона ν_{12} гумовокордного матеріалу

Величина	Експеримент [83]	Розрахунок		
		формула (1.23)	формула (1.24)	формула (2.40)
ν_{12}	0,588	0,582	0,584	0,588
ε , %	-	1,02	0,68	0,0

На рисунку 2.5 представлена залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для

різних значень модуля пружності корда, який приймає значення kE° (де $E^\circ = 1,6 \cdot 10^3$ МПа).

На рисунку 2.6 представлена залежність коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{12} від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для різних значень коефіцієнта Пуассона корда ν° .

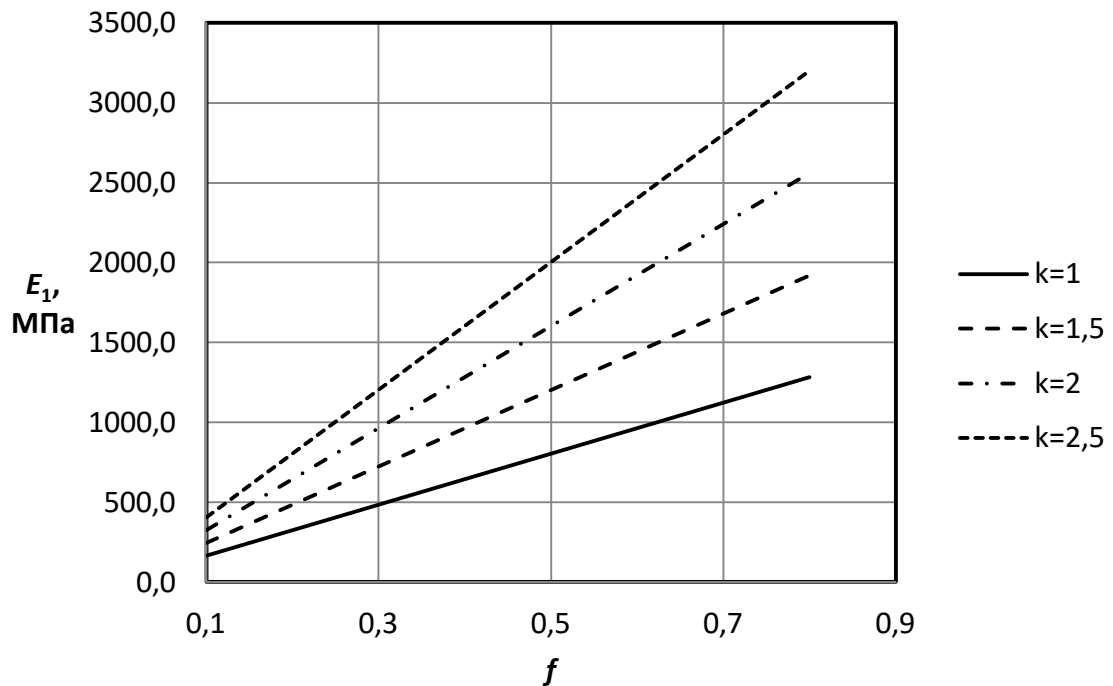


Рисунок 2.5 – Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від об'ємного вмісту корда f в композиті.

У розглянутій вище задачі і матеріал матриці, і матеріал волокна є ізотропним. Порівняємо тепер значення поздовжнього модуля пружності E_1 та коефіцієнта Пуассона ν_{12} , отримані за формулами (2.36) та (2.40), з відомими в літературі експериментальними даними для ізотропної матриці та трансропного волокна.

Розглянемо композит UD PFRP з волокном із поліетилену високої щільності (VHDPE Tenfor SN1A) та епоксидної смоли (Ciba-Geigy 913) як

матриці [130]: поздовжній модуль пружності волокна $E_1^\circ = 60,4$ ГПа, поперечний модуль пружності волокна $E_2^\circ = 4,68$ ГПа, коефіцієнти Пуассона волокна $\nu_{12}^\circ = 0,38$ та $\nu_{23}^\circ = 0,55$, модуль зсуву волокна $G_{12}^\circ = 1,65$ ГПа, модуль пружності матриці $E^* = 5,55$ ГПа, коефіцієнт Пуассона матриці $\nu^* = 0,37$.

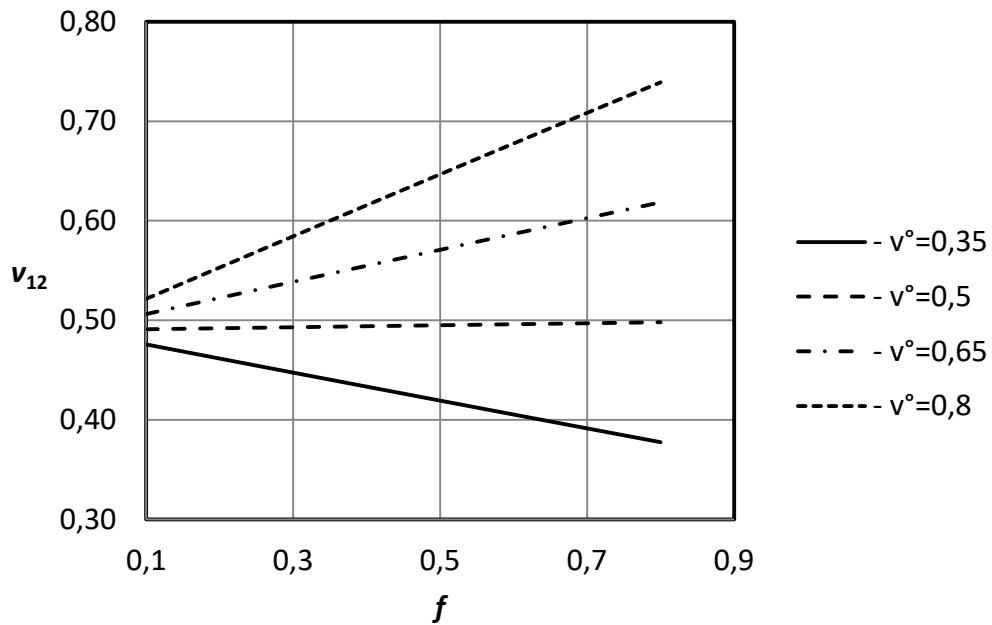


Рисунок 2.6 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{12} від об'ємного вмісту корда f у композиті.

В таблицях 2.3, 2.4 наведені значення модуля пружності E_1 та коефіцієнта Пуассона ν_{12} при різному об'ємному вмісті волокна. Як можна зазначити, похибка обчислень ε за формулами (2.36) та (2.40) у порівнянні з даними експериментів для поздовжнього модуля пружності E_1 становить менше 2 %, а максимальна похибка обчислень для коефіцієнта Пуассона ν_{12} – близько 3 %.

На рисунку 2.7 представлена залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від об'ємного вмісту волокна в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для різних значень поздовжнього модуля пружності волокна, який набуває значення kE_1° (де $E_1^\circ = 60,4$ ГПа).

Таблиця 2.3 – Поздовжній модуль пружності E_1 композита UD PFRP

Об'ємний вміст волокон, f	Величина	Експеримент [130]	Розрахунок за формулою (2.36)
0,36	E_1 , ГПа	25,8	25,3
	ε , %	-	1,94
0,56	E_1 , ГПа	36,2	36,3
	ε , %	-	-0,28
0,67	E_1 , ГПа	42,0	42,3
	ε , %	-	-0,71
0,75	E_1 , ГПа	46,2	46,7
	ε , %	-	-1,08

Таблиця 2.4 – Коефіцієнт Пуассона ν_{12} композита UD PFRP

Об'ємний вміст волокон, f	Величина	Експеримент [130]	Розрахунок		
			формула (1.23)	формула (1.24)	формула (2.40)
0,36	ν_{12}	0,383	0,373	0,373	0,373
	ε , %	-	2,35	2,35	2,61
0,56	ν_{12}	0,374	0,376	0,376	0,375
	ε , %	-	-0,53	-0,53	-0,27
0,67	ν_{12}	0,370	0,377	0,377	0,377
	ε , %	-	-1,89	-1,89	-1,89
0,75	ν_{12}	0,366	0,378	0,378	0,377
	ε , %	-	-3,28	-3,28	-3,01

На рисунку 2.8 представлена залежність коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{12} при $f = 0,1 \dots 0,8$ для різних значень коефіцієнта Пуассона волокна ν_{12}° .

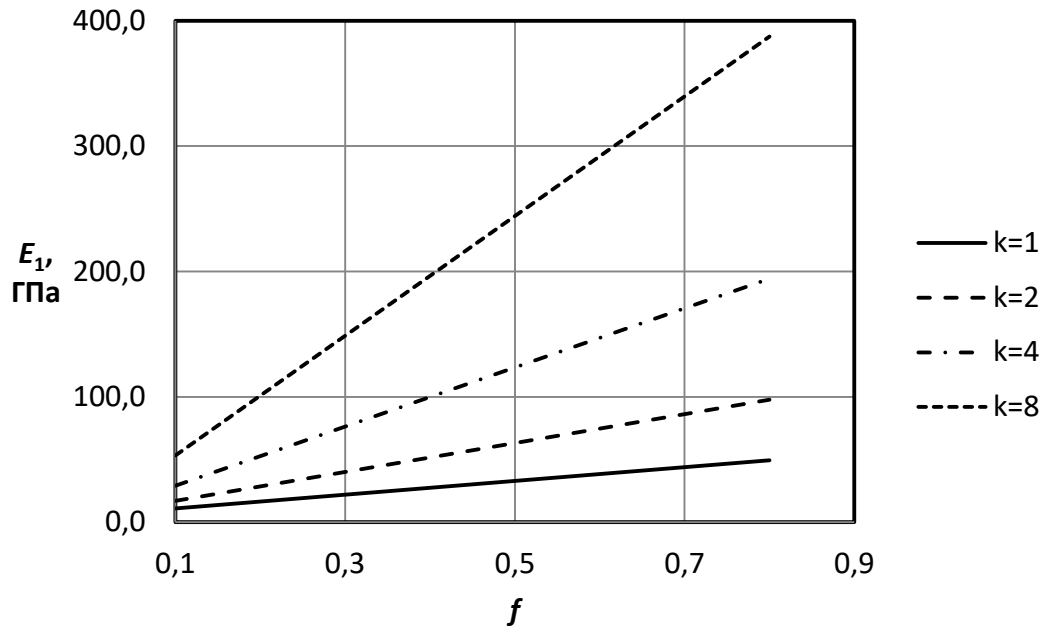
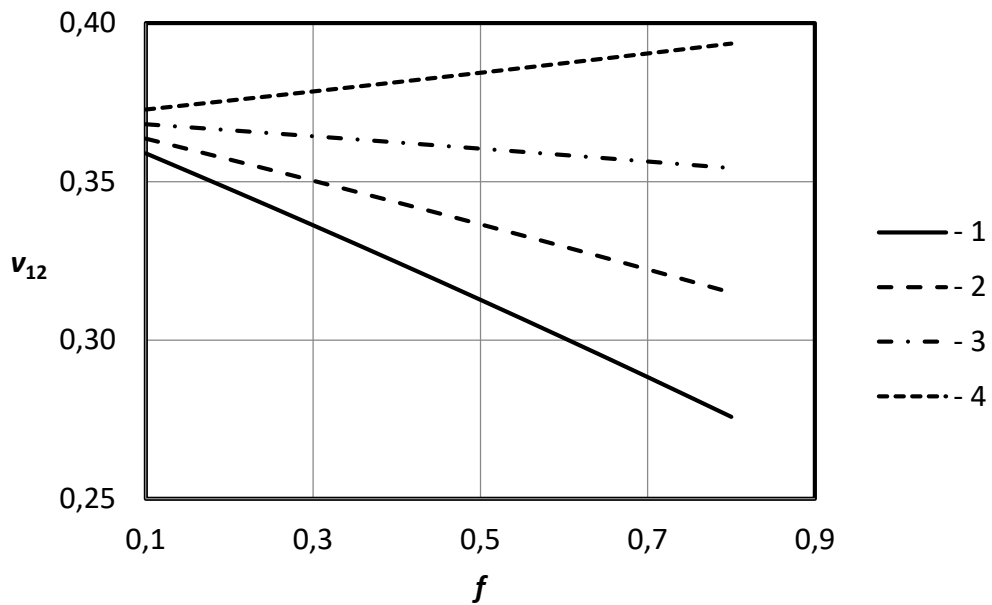


Рисунок 2.7 – Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

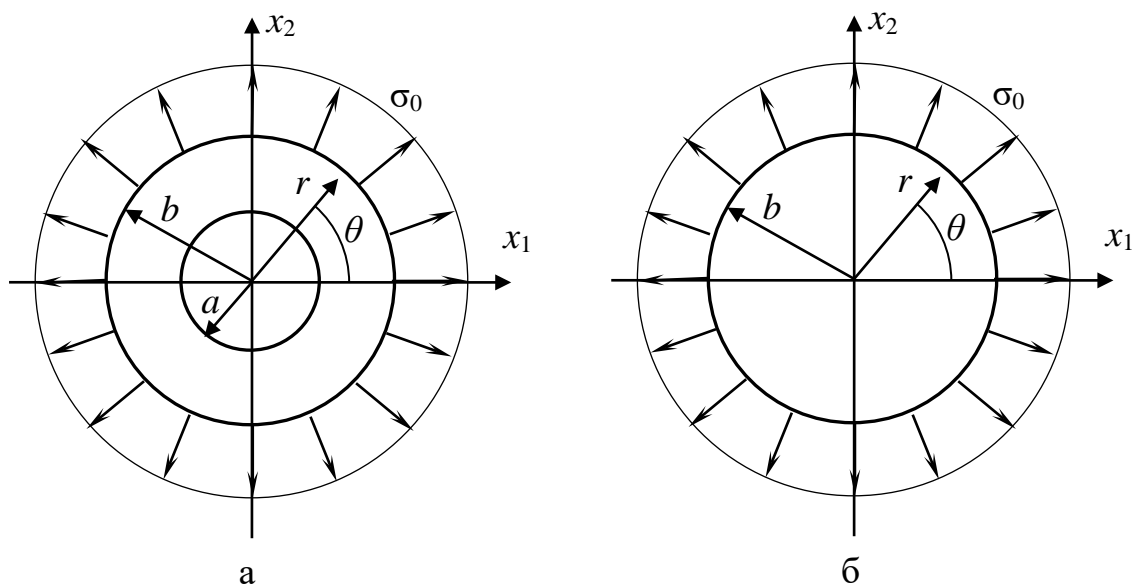


$$1 - \nu_{12}^{\circ} = 0,25; 2 - \nu_{12}^{\circ} = 0,35; 3 - \nu_{12}^{\circ} = 0,45; 4 - \nu_{12}^{\circ} = 0,55$$

Рисунок 2.8 – Залежність коефіцієнта Пуассона композита ν_{12} від об'ємного вмісту волокна f в композиті при різних значеннях коефіцієнта Пуассона волокна ν_{12}° .

Наведені вище результати дають підстави сказати, що і поздовжній модуль пружності E_1 , і коефіцієнт Пуассона композиційного матеріалу ν_{12} мають близьку до лінійної залежність від об'ємного вмісту волокна f . Порівняння результатів розрахунків на основі отриманих формул із відомими в літературі експериментальними даними дає максимальну похибку для поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу E_1 до 2 %, а для коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{12} – близько 3 %.

Поперечне розтягнення. Аналогічно до попередньої задачі, розглянемо сумісне вісесиметричне поперечне розтягнення суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), який моделює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), який моделює матрицю (рис. 2.9а).



а – сумісне деформування матриці та волокна;

б – деформування композита;

Рисунок 2.9 – Поперечне розтягнення.

Тоді напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися співвідношеннями такого ж вигляду, що і для поздовжнього розтягнення (2.13)-(2.15).

Аналогічно до поздовжнього розтягнення запишуться співвідношення, які описують напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної матриці – (2.16)-(2.17).

Для того, щоб змоделювати поперечне вісесиметричне розтягнення, необхідно задати таку крайову умову:

$$\sigma_{rr}^*(b) = \sigma_0. \quad (2.41)$$

При цьому, виходячи з реальних даних про напружено-деформовані стани композиційного матеріалу при вісесиметричному поперечному розтягненні, як і при поздовжньому розтягненні, можемо записати такі крайові умови:

$$\sigma_{rr}^\circ(a) = \sigma_{rr}^*(a), u_r^\circ(a) = u_r^*(a), u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.42)$$

Виходячи з крайових умов (2.41), (2.42), знайдемо сталі A , B , C та залежність між σ_0 та σ_0° , σ_0^* – осьовими напруженнями, які діють на матеріал волокна й матриці, відповідно ($\sigma_0^\circ = const$, $\sigma_0^* = const$, виходячи з третьої рівності (2.42)). З другої рівності (2.42) маємо:

$$C = A + \frac{B}{a^2}. \quad (2.43)$$

З рівності (2.41) отримуємо:

$$\sigma_0 = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^* v_{12}^*}{E_1^* (1 - v_{23}^*)} + \frac{A}{1 - v_{23}^*} - \frac{B}{b^2 (1 + v_{23}^*)} \right), \quad (2.44)$$

$$A = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23}^*)}{E_2^*} - \frac{\sigma_0^* \nu_{21}^*}{E_2^*} + \frac{B(1 - \nu_{23}^*)}{b^2(1 + \nu_{23}^*)}, \quad (2.45)$$

$$C = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23}^*)}{E_2^*} - \frac{\sigma_0^* \nu_{21}^*}{E_2^*} + B \frac{f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)}{a^2(1 + \nu_{23}^*)}. \quad (2.46)$$

З першої рівності (2.42), з урахуванням (2.43) та (2.44), маємо

$$B = \frac{a^2(1 + \nu_{23}^*)(E_2^*(1 - \nu_{23}^\circ) - (1 - \nu_{23}^*)E_2^\circ)}{E_2^*(d_2 - d_1)} \sigma_0 - \frac{a^2(1 + \nu_{23}^*)\nu_{21}^\circ}{(d_2 - d_1)} \sigma_0^\circ + \frac{a^2(1 + \nu_{23}^*)\nu_{21}^*E_2^\circ}{E_2^*(d_2 - d_1)} \sigma_0^*, \quad (2.47)$$

$$A = \sigma_0 \frac{(1 - \nu_{23}^*)(E_2^\circ(1 + \nu_{23}^*) + E_2^*(1 - \nu_{23}^\circ))}{E_2^*(d_2 - d_1)} - \sigma_0^\circ \frac{f\nu_{21}^\circ(1 - \nu_{23}^*)}{(d_2 - d_1)} + \sigma_0^* \frac{\nu_{21}^*(d_1 - E_2^\circ(1 + \nu_{23}^*))}{E_2^*(d_2 - d_1)}, \quad (2.48)$$

$$C = \sigma_0 \frac{2(1 - \nu_{23}^\circ)}{(d_2 - d_1)} - \frac{\nu_{21}^\circ(f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*))}{(d_2 - d_1)} \sigma_0^\circ + \frac{\nu_{21}^*d_1}{E_2^*(d_2 - d_1)} \sigma_0^*. \quad (2.49)$$

Залежність між σ_0 та σ_0° , σ_0^* знайдемо з третьої рівності (2.42):

$$\left(\frac{(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(d_2 - d_1)}{E_1^\circ(1 - \nu_{23}^\circ)} + \frac{2\nu_{21}^\circ E_1^\circ(\nu_{21}^\circ(f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)) - f\nu_{21}^*(1 - \nu_{23}^\circ))}{E_1^\circ(1 - \nu_{23}^\circ)} \right) \sigma_0^\circ +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2v_{12}^* v_{21}^* (1 - v_{23}^\circ) (d_1 - E_2^\circ (1 + v_{23}^*)) - 2v_{21}^\circ v_{12}^* d_1 (1 - v_{23}^*)}{E_1^* (1 - v_{23}^*) (1 - v_{23}^\circ)} - \right. \\
& \left. - \frac{(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*) (d_2 - d_1) (1 - v_{23}^\circ)}{E_1^* (1 - v_{23}^*) (1 - v_{23}^\circ)} \right) \sigma_0^* = \\
& = \frac{4v_{21}^\circ E_2^* - 2v_{21}^* (E_2^\circ (1 + v_{23}^*) + E_2^* (1 - v_{23}^\circ))}{E_2^*} \sigma_0. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Прийнявши такі позначення

$$\begin{aligned}
d_1^\circ = -d^\circ &= \frac{(E_2^\circ (f(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + (1 + v_{23}^*)) + E_2^* (1 - f)(1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ))}{E_1^\circ}, \\
d_1^* = d^* &= \frac{(E_2^* (f - 1)(1 - v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^*) - E_2^\circ (f(1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*) + (1 + v_{23}^*)))}{E_1^*}, \\
d_0 &= \frac{(4v_{21}^\circ E_2^* - 2v_{21}^* (E_2^\circ (1 + v_{23}^*) + E_2^* (1 - v_{23}^\circ)))}{E_2^*}, \tag{2.51}
\end{aligned}$$

маємо

$$d^* \sigma_0^* - d^\circ \sigma_0^\circ = d_0 \sigma_0. \tag{2.52}$$

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізоτροпного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу (рис. 2.9б). У цьому випадку поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0, \tag{2.53}$$

переміщення запишуться у вигляді:

$$u_r(r) = C_1 r, \quad u_z(z) = -\frac{2C_1 \nu_{21}}{(1 + \nu_{23})} z. \quad (2.54)$$

А вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{C_1 E_2}{1 - \nu_{23}} = const, \quad \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{E_2 C_1}{1 - \nu_{23}} = const. \quad (2.55)$$

Враховуючи граничну умову

$$\sigma_{rr}(b) = \sigma_0, \quad (2.56)$$

отримуємо

$$\sigma_{rr} = \sigma_0; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0. \quad (2.57)$$

З урахуванням (2.53), (2.57) співвідношення додатку А (А.34), (А.36) набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2}; \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{2\sigma_0 \nu_{12}}{E_1}. \quad (2.58)$$

Тоді переміщення, згідно з (А.1), (А.5), визначатимуться формулами:

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1 - \nu_{23})}{E_2} r + C_1; \quad u_z(z) = -\frac{2\sigma_0 \nu_{12}}{E_1} z + C_2. \quad (2.59)$$

Сталі $C_1 = C_2 = 0$ з урахуванням, що для цієї задачі будуть виконуватися умови $u_r(0) = 0$ та $u_z(0) = 0$, тоді

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2} r; \quad u_z(z) = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1} z. \quad (2.60)$$

Для того, щоб збігалися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалася рівність:

$$\pi a^2 \sigma_0^\circ + \pi(b^2 - a^2) \sigma_0^* = 0, \quad \text{або} \quad \sigma_0^\circ f + \sigma_0^*(1-f) = 0. \quad (2.61)$$

З урахуванням (2.52) отримуємо:

$$\sigma_0^* = \sigma_0 \frac{d_0 f}{d^* f + d^\circ(1-f)}, \quad \sigma_0^\circ = \sigma_0 \frac{d_0(f-1)}{d^* f + d^\circ(1-f)}. \quad (2.62)$$

Вважатимемо, що як умови узгодження для цієї задачі про поперечне розтягнення однорідного трансверсально-ізотропного композита і задачі про сумісне поперечне розтягнення матриці та волокна будуть виступати рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні:

$$u_r(b) = u_r^*(b); \quad u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (2.63)$$

З першої умови (2.63), з урахуванням (2.62), маємо такий пружний коефіцієнт:

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu_{23}}{E_2} = & \frac{E_2^*(1-\nu_{23}^\circ) \left(f(1+\nu_{23}^*) + (1-\nu_{23}^*) \right) + E_2^\circ(1+\nu_{23}^*) \left(1-\nu_{23}^* \right) (1-f)}{E_2^*(d_2-d_1)} + \\ & + \frac{d_0 f(f-1) \left(\nu_{21}^* E_2^\circ(1+\nu_{23}^*) + E_2^* \left(\nu_{21}^* (1-\nu_{23}^\circ) - 2\nu_{21}^\circ \right) \right)}{E_2^*(d_2-d_1) \left(d^* f + d^\circ(1-f) \right)}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

З другої умови (2.63), з врахуванням (2.62), отримуємо співвідношення:

$$-\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{d_0 f (d_2 - d_1 + 2E_2^* \nu_{12}^* \nu_{21}^{\circ} (f - 1) - 2f \nu_{12}^* \nu_{21}^* E_2^{\circ})}{2E_1^* (d_2 - d_1) (d^* f + d^{\circ} (1 - f))} - \frac{\nu_{12}^* (E_2^{\circ} (1 + \nu_{23}^*) + E_2^* (1 - \nu_{23}^{\circ}))}{E_1^* (d_2 - d_1)}. \quad (2.65)$$

Вираз (2.64) надалі використовуватиметься для отримання невідомих ефективних пружних сталих композита, а вираз (2.65) дає такий же результат (із урахуванням співвідношень між модулями пружності та коефіцієнтами Пуасона анізотропного матеріалу) як і (2.39).

2.3 Визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу при зсувних деформаціях

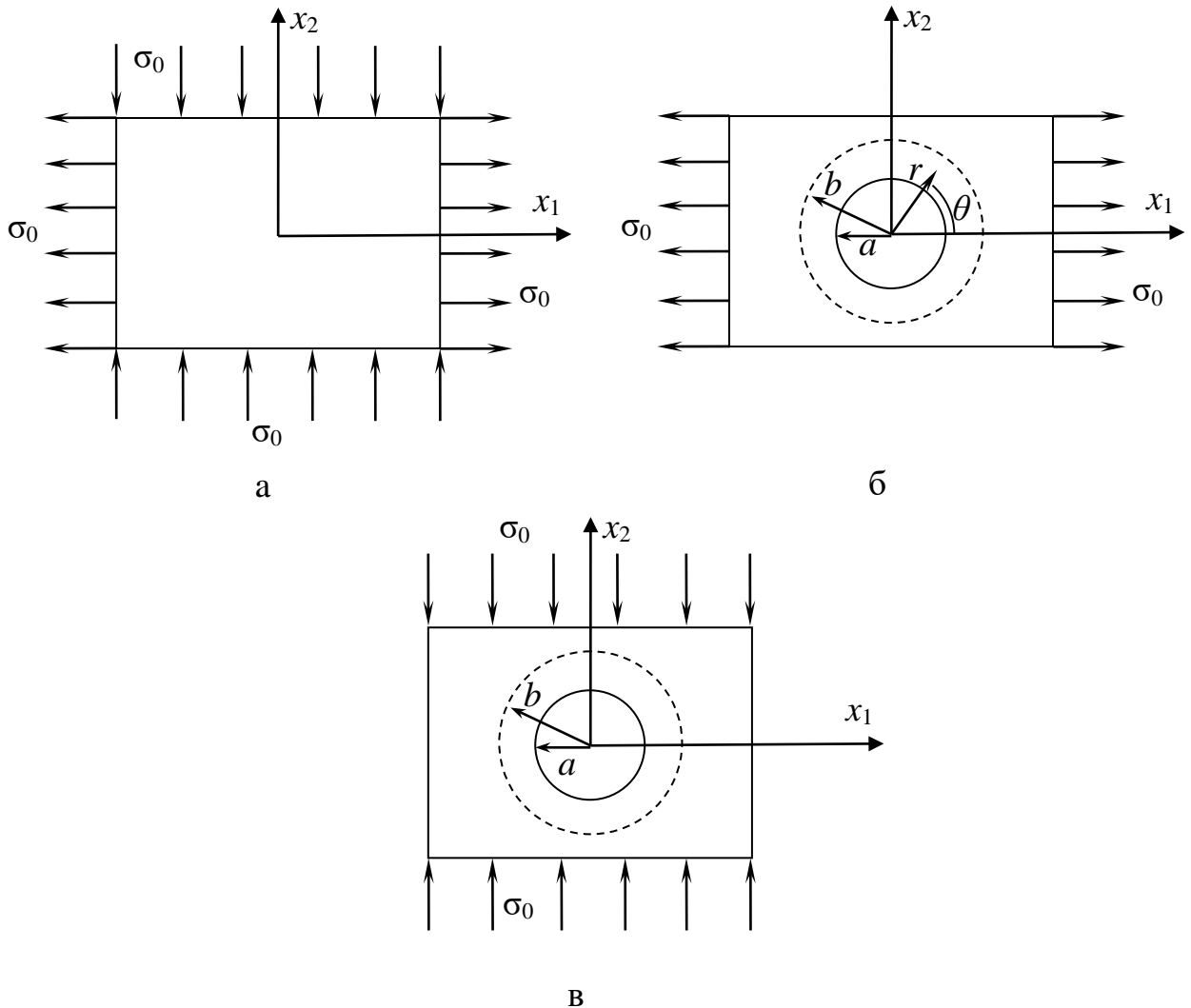
Поперечний зсув. Розглянемо задачу про сумісний поперечний (в площині ізотропії) зсув суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю. При деформації чистого поперечного зсуву реальний композиційний матеріал перебуває в стані, близькому до плоскої деформації, тобто $\varepsilon_{zz} = 0$.

З теорії пружності відомо, що чистий зсув отримується при розтягненні прямокутної пластини напруженнями σ_0 в одному напрямку та дії стискаючих напружень σ_0 в іншому (рис. 2.10а).

Для того, щоб отримати поперечний зсув для циліндричних областей, якими є порожнистий циліндр, що моделює матрицю, і суцільний циліндр, що моделює волокно, розглянемо розв'язок задачі Кірша. В цій задачі нескінченна пластина з круглим отвором малого радіуса a розтягується напруженням σ_0

(рис. 2.10б). Виокремивши із пластини кільце радіусом b ($b \gg a$), на межі цього кільця як для простого розтягнення будемо мати [130]:

$$\sigma_{rr}(b, \theta) = \frac{1}{2}\sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_0 \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}(b, \theta) = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta. \quad (2.66)$$



а – пластина під дією розтягуючих та стискаючих напружень;

б – пластина з отвором під дією розтягуючих напружень;

в – пластина з отвором під дією стискаючих напружень;

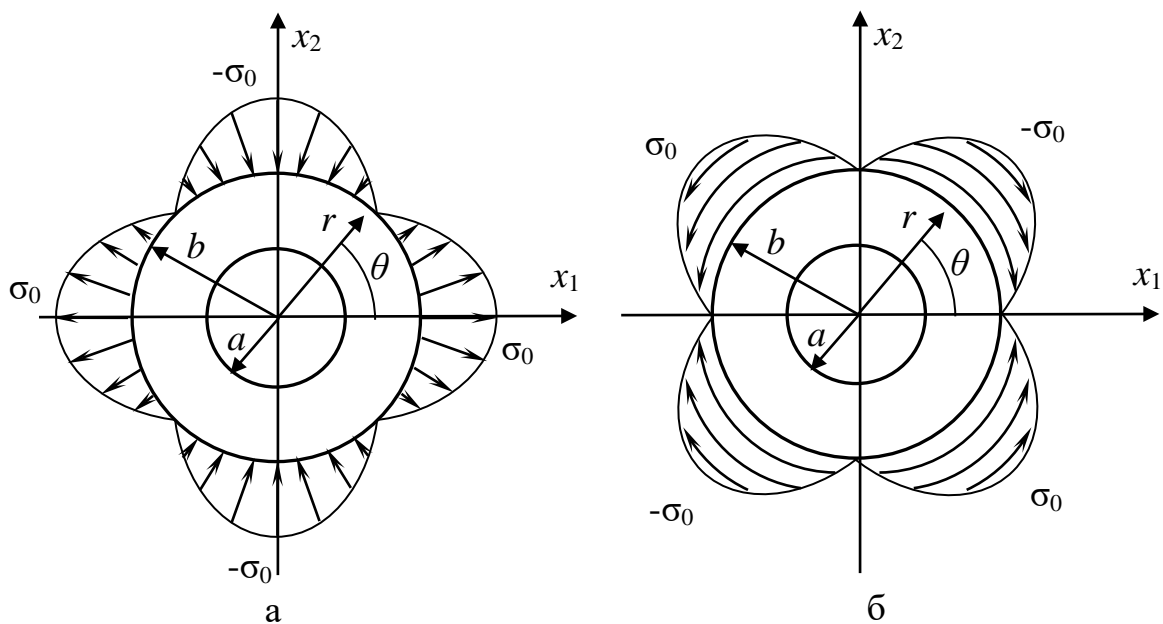
Рисунок 2.10 – Поперечний зсув.

Для того, щоб отримати чистий зсув, прикладемо для такої ж пластини стискаюче навантаження в перпендикулярному напрямі (рис. 2.10в). І для межі кільця радіусом b ($b \gg a$) матимемо:

$$\sigma_{rr}(b, \theta) = -\frac{1}{2}\sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_0 \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}(b, \theta) = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta. \quad (2.67)$$

Таким чином, щоб отримати чистий зсув в кільці радіусом b , згідно з методом суперпозицій, до зовнішньої межі кільця необхідно прикласти таке навантаження (рис. 2.11):

$$\sigma_{rr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}(b, \theta) = -\sigma_0 \sin 2\theta. \quad (2.68)$$



а – для напружень $\sigma_{rr}(b, \theta)$;

б – для напружень $\sigma_{r\theta}(b, \theta)$;

Рисунок 2.11 – Крайові умови при поперечному зсуві в кільці.

Розв'язок цієї крайової задачі зручно знаходити за допомогою функції Ері вигляду $\varphi(r, \theta) = f(r)\cos 2\theta$, тоді бігармонічне рівняння сумісності деформацій у полярній системі координат набуде вигляду [130]:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0. \quad (2.69)$$

Розв'язком цього рівняння є функція вигляду:

$$f(r) = C_1 r^2 + C_2 r^4 + \frac{C_3}{r^2} + C_4. \quad (2.70)$$

Тоді функція Ері для цієї крайової задачі запишеться у вигляді:

$$\varphi(r, \theta) = \left(C_1 r^2 + C_2 r^4 + \frac{C_3}{r^2} + C_4 \right) \cos 2\theta. \quad (2.71)$$

І тепер, враховуючи зв'язок функції Ері з компонентами тензора напружень:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right), \quad (2.72)$$

отримаємо співвідношення для напруженого стану кільця зовнішнього радіуса b та внутрішнього радіуса a в умовах чистого зсуву:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= -\left(2C_1 + \frac{6C_3}{r^4} + \frac{4C_4}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \left(2C_1 + 12C_2 r^2 + \frac{6C_3}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \left(2C_1 + 6C_2 r^2 - \frac{6C_3}{r^4} - \frac{2C_4}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Тоді напружений стан для матеріалу матриці, що являє собою порожнистий циліндр, запишеться у вигляді (перепозначимо C_1 на A , C_2 на B , C_3 на C , а C_4 на D):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^*(r, \theta) &= -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}^*(r, \theta) &= \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta; \\ \sigma_{zr}^* &= 0; \quad \sigma_{\theta z}^* = 0.\end{aligned}\tag{2.74}$$

Компоненту σ_{zz}^* знайдемо з умови:

$$\varepsilon_{zz}^* = 0,\tag{2.75}$$

скориставшись співвідношенням (А.36):

$$\varepsilon_{zz}^* = \frac{1}{E_1^*} \left(\sigma_{zz}^* - \nu_{12}^* (\sigma_{rr}^* + \sigma_{\theta\theta}^*) \right) = 0,\tag{2.76}$$

з урахуванням (2.74), отримуємо:

$$\sigma_{zz}^*(r, \theta) = \nu_{12}^* \left(12Br^2 - \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta.\tag{2.77}$$

Напружений стан матеріалу волокна, що являє собою суцільний циліндр, також у загальному випадку описується співвідношеннями (2.73). А враховуючи, що напруження при $r = 0$ мають кінцеві значення, необхідно, щоб

у формулах (2.73) $C_3 = 0$ та $C_4 = 0$. Тоді для волокна можемо записати (перепозначивши C_1 на F , а C_2 на H):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{\circ}(r, \theta) &= -2F \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r, \theta) &= (2F + 12Hr^2) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}^{\circ}(r, \theta) &= (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta; \\ \sigma_{zr}^{\circ} &= 0; \quad \sigma_{\theta z}^{\circ} = 0.\end{aligned}\tag{2.78}$$

Компоненту σ_{zz}° знайдемо з умови:

$$\varepsilon_{zz}^{\circ} = 0,\tag{2.79}$$

скориставшись співвідношенням (А.36), звідки:

$$\sigma_{zz}^{\circ} = \nu_{12}^{\circ} (\sigma_{rr}^{\circ} + \sigma_{\theta\theta}^{\circ}),\tag{2.80}$$

а з урахуванням (2.78), отримуємо:

$$\sigma_{zz}^{\circ}(r, \theta) = 12Hr^2 \nu_{12}^{\circ} \cos 2\theta.\tag{2.81}$$

Тепер, скориставшись законом Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу, визначимо деформований стан матриці та волокна. З урахуванням (А.34)-(А.39), (2.74) та (2.77) для матриці маємо:

$$\varepsilon_{rr}^*(r, \theta) = -\frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + \nu_{23}^*) + 12Br^2 (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6C}{r^4} (1 + v_{23}^*) + \frac{4D}{r^2} (1 - v_{21}^* v_{12}^*) \Big) \cos 2\theta; \\
\varepsilon_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= \frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + v_{23}^*) + 12Br^2 (1 - v_{21}^* v_{12}^*) + \right. \\
& \left. + \frac{6C}{r^4} (1 + v_{23}^*) + \frac{4D}{r^2} (v_{23}^* + v_{21}^* v_{12}^*) \right) \cos 2\theta; \\
\gamma_{r\theta}^*(r, \theta) &= \frac{2(1 + v_{23}^*)}{E_2^*} \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta; \\
\gamma_{zr}^* &= 0; \quad \gamma_{z\theta}^* = 0.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Аналогічно визначимо деформований стан волокна, скориставшись співвідношеннями (A.34)-(A.39), (2.78) та (2.81):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^\circ(r, \theta) &= -\frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + v_{23}^\circ) + 12Hr^2 (v_{23}^\circ + v_{12}^\circ v_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta; \\
\varepsilon_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) &= \frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + v_{23}^\circ) + 12Hr^2 (1 - v_{12}^\circ v_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta; \\
\gamma_{r\theta}^\circ(r, \theta) &= \frac{2(1 + v_{23}^\circ)}{E_2^\circ} (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta; \\
\gamma_{zr}^\circ &= 0; \quad \gamma_{z\theta}^\circ = 0.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Тепер, скориставшись співвідношеннями Коші, знайдемо компоненти вектора переміщень для матриці та волокна. Із співвідношення (A.1) маємо:

$$\begin{aligned}
u_r^*(r, \theta) &= \int \varepsilon_{rr}^* dr = -\frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + v_{23}^*) r + 4Br^3 (v_{23}^* + v_{21}^* v_{12}^*) - \right. \\
& \left. - \frac{2C}{r^3} (1 + v_{23}^*) - \frac{4D}{r} (1 - v_{21}^* v_{12}^*) \right) \cos 2\theta + C_1(\theta).
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Із співвідношення (А.3) знаходимо переміщення $u_{\theta}^*(r, \theta)$:

$$u_{\theta}^*(r, \theta) = \int (r\varepsilon_{\theta\theta}^* - u_r^*) d\theta = \frac{2}{E_2^*} \times$$

$$\times \left(A(1 + \nu_{23}^*)r + Br^3(3 + \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*) + \frac{C}{r^3}(1 + \nu_{23}^*) + \frac{D}{r}(\nu_{23}^* + 2\nu_{21}^*\nu_{12}^* - 1) \right) \times$$

$$\times \sin 2\theta - \int C_1(\theta) d\theta + C_2(r). \quad (2.85)$$

Підставимо отримані вирази для $u_r^*(r, \theta)$ та $u_{\theta}^*(r, \theta)$ в співвідношення Коші (А.6) для $\gamma_{r\theta}^*(r, \theta)$ й прирівняємо співвідношенню для $\gamma_{r\theta}^*(r, \theta)$ в (2.82):

$$\frac{2(1 + \nu_{23}^*)}{E_2^*} \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta =$$

$$= \frac{2(1 + \nu_{23}^*)}{E_2^*} \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial C_1(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} + \frac{\int C_1(\theta) d\theta}{r} - \frac{C_2(r)}{r},$$

звідки

$$\frac{\partial C_1(\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} + \int C_1(\theta) d\theta - C_2(r) = 0. \quad (2.86)$$

Продиференціюємо це рівняння по θ , в результаті отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{\partial^2 C_1(\theta)}{\partial \theta^2} + C_1(\theta) = 0, \quad (2.87)$$

яке має розв'язок

$$C_1(\theta) = H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta. \quad (2.88)$$

Тоді вираз для радіальних переміщень набуде вигляду:

$$u_r^*(r, \theta) = -\frac{1}{E_2} \left(2A(1 + \nu_{23}^*)r + 4Br^3(\nu_{23}^* + \nu_{21}^*\nu_{12}^*) - \right. \\ \left. - \frac{2C}{r^3}(1 + \nu_{23}^*) - \frac{4D}{r}(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta + H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta. \quad (2.89)$$

Для того, щоб визначити сталу $C_2(r)$, підставимо (2.88) в (2.86), в результаті отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial(H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} + \int (H_1 \cos \theta + H_2 \sin \theta) d\theta - C_2(r) = 0, \\ r \frac{\partial C_2(r)}{\partial r} - C_2(r) = 0, \quad (2.90)$$

яке має розв'язок

$$C_2(r) = H_3 r. \quad (2.91)$$

Тоді вираз для окружних переміщень набуде вигляду:

$$u_\theta^*(r, \theta) = \frac{2}{E_2} \left(A(1 + \nu_{23}^*)r + Br^3(3 + \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*) + \frac{C}{r^3}(1 + \nu_{23}^*) + \right. \\ \left. + \frac{D}{r}(\nu_{23}^* + 2\nu_{21}^*\nu_{12}^* - 1) \right) \sin 2\theta - H_1 \sin \theta + H_2 \cos \theta + H_3 r. \quad (2.92)$$

Для визначення констант H_1 , H_2 в (2.89) скористаємося такими міркуваннями: враховуючи симетричність крайової задачі, можемо записати наступну рівність:

$$u_r^*\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = u_r^*\left(r, \frac{3\pi}{4}\right) = u_r^*\left(r, -\frac{\pi}{4}\right). \quad (2.93)$$

Тоді, підставивши наведені значення кутів у (2.89), отримуємо такі рівності:

$$H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + H_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + H_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - H_2 \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2.94)$$

Остання рівність виконується при таких умовах:

$$H_1 = 0, H_2 = 0. \quad (2.95)$$

Для визначення константи H_3 в (2.92) знову скористаємося симетричністю крайової задачі, тоді можна записати таку рівність:

$$u_\theta^*(r, 0) = 0. \quad (2.96)$$

Підставляючи наведене значення кута в (2.92) та враховуючи отримані значення сталих H_1 , H_2 з (2.95), знаходимо таку рівність:

$$H_3 r = 0, \text{ або } H_3 = 0. \quad (2.97)$$

Тоді отримаємо співвідношення для вектора переміщень:

$$\begin{aligned}
u_r^*(r, \theta) &= -\frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + \nu_{23}^*)r + 4Br^3(\nu_{23}^* + \nu_{21}^*\nu_{12}^*) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2C}{r^3}(1 + \nu_{23}^*) - \frac{4D}{r}(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta; \\
u_\theta^*(r, \theta) &= \frac{2}{E_2^*} \left(A(1 + \nu_{23}^*)r + Br^3(3 + \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{C}{r^3}(1 + \nu_{23}^*) + \frac{D}{r}(\nu_{23}^* + 2\nu_{21}^*\nu_{12}^* - 1) \right) \sin 2\theta. \tag{2.98}
\end{aligned}$$

Тепер, скориставшись співвідношеннями Коші, знайдемо компоненти вектора переміщень для волокна. Зі співвідношення (А.1) маємо:

$$u_r^\circ(r, \theta) = \int \varepsilon_{rr}^\circ dr = -\frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ)r + 4Hr^3(\nu_{23}^\circ + \nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta + T_1(\theta). \tag{2.99}$$

Зі співвідношення (А.3) знаходимо переміщення $u_\theta^\circ(r, \theta)$:

$$\begin{aligned}
u_\theta^\circ(r, \theta) &= \int (r\varepsilon_{\theta\theta}^\circ - u_r^\circ) d\theta = \frac{2}{E_2^\circ} \times \\
&\times \left(F(1 + \nu_{23}^\circ)r + Hr^3(3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) \right) \sin 2\theta - \int T_1(\theta) d\theta + T_2(r). \tag{2.100}
\end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази для $u_r^\circ(r, \theta)$ та $u_\theta^\circ(r, \theta)$ у співвідношення Коші (А.6) для $\gamma_{r\theta}^\circ(r, \theta)$ і прирівняємо співвідношенню для $\gamma_{r\theta}^\circ(r, \theta)$ в (2.83):

$$\begin{aligned}
\frac{2(1 + \nu_{23}^\circ)}{E_2^\circ} (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta &= \frac{2(1 + \nu_{23}^\circ)}{E_2^\circ} (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial T_1(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial T_2(r)}{\partial r} + \frac{\int T_1(\theta) d\theta}{r} - \frac{T_2(r)}{r},
\end{aligned}$$

звідки

$$\frac{\partial T_1(\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial T_2(r)}{\partial r} + \int T_1(\theta) d\theta - T_2(r) = 0. \quad (2.101)$$

Це диференціальне рівняння аналогічне (2.86), тому маємо:

$$T_1(\theta) = R_1 \cos \theta + R_2 \sin \theta. \quad (2.102)$$

Тоді вираз для радіальних переміщень набуде вигляду:

$$u_r^\circ(r, \theta) = -\frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ) r + 4Hr^3 (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right) \cos 2\theta + \\ + R_1 \cos \theta + R_2 \sin \theta. \quad (2.103)$$

Для визначення констант R_1 , R_2 в (2.103) скористаємося тим фактом, що для будь-якого кута θ справедлива така рівність:

$$u_r^\circ(0, \theta) = 0. \quad (2.104)$$

Тоді, підставляючи в (2.103) $r = 0$, отримуємо таку рівність:

$$R_1 \cos \theta + R_2 \sin \theta = 0. \quad (2.105)$$

Остання рівність виконується при умові:

$$R_1 = 0, R_2 = 0. \quad (2.106)$$

Для того, щоб визначити сталу $T_2(r)$, підставимо (2.106) в (2.101), в результаті отримаємо рівняння:

$$r \frac{\partial T_2(r)}{\partial r} - T_2(r) = 0, \quad (2.107)$$

яке має розв'язок:

$$T_2(r) = R_3 r. \quad (2.108)$$

Тоді вираз для окружних переміщень набуде вигляду:

$$u_{\theta}^{\circ}(r, \theta) = \frac{2}{E_2^{\circ}} \left(F(1 + \nu_{23}^{\circ}) r + Hr^3 (3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right) \sin 2\theta + R_3 r. \quad (2.109)$$

Для визначення сталої R_3 в (2.109) знову скористаємося симетричністю крайової задачі, тоді можемо записати таку рівність:

$$u_{\theta}^{\circ}(r, 0) = 0. \quad (2.110)$$

Тоді, підставляючи наведене значення кута в (2.109), отримаємо таку рівність:

$$R_3 r = 0, \text{ або } R_3 = 0. \quad (2.111)$$

Тоді можемо записати співвідношення для вектора переміщень:

$$u_r^{\circ}(r, \theta) = -\frac{1}{E_2^{\circ}} \left(2F(1 + \nu_{23}^{\circ}) r + 4Hr^3 (\nu_{23}^{\circ} + \nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right) \cos 2\theta;$$

$$u_{\theta}^{\circ}(r, \theta) = \frac{2}{E_2^{\circ}} \left(F(1 + \nu_{23}^{\circ})r + Hr^3(3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}) \right) \sin 2\theta. \quad (2.112)$$

Знайдемо розв'язок задачі про суцільний поперечний зсув суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистого циліндра, що моделює матрицю. Для цього необхідно знайти всі невідомі сталі A , B , C , D , F , H , що входять до співвідношення (2.74), (2.78) і (2.98), (2.112). Для їх знаходження скористаємося крайовими умовами (2.68), в результаті отримаємо:

$$\sigma_0 = -2A - \frac{6C}{b^4} - \frac{4D}{b^2}; \quad -\sigma_0 = 2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2},$$

або

$$C = \frac{Bb^6}{2} - \frac{Db^2}{2}; \quad A = -\frac{\sigma_0}{2} - \frac{3Bb^2}{2} - \frac{D}{2b^2}. \quad (2.113)$$

Решту сталих знайдемо з умов неперервності на стику двох циліндрів: суцільного, що моделює волокно, та порожнистого, що моделює матрицю:

$$u_r^*(a, \theta) = u_r^{\circ}(a, \theta), \quad (2.114)$$

$$\sigma_{rr}^*(a, \theta) = \sigma_{rr}^{\circ}(a, \theta), \quad (2.115)$$

$$u_{\theta}^*(a, \theta) = u_{\theta}^{\circ}(a, \theta), \quad (2.116)$$

$$\sigma_{r\theta}^*(a, \theta) = \sigma_{r\theta}^{\circ}(a, \theta). \quad (2.117)$$

З (2.115), (2.117) з урахуванням (2.74), (2.78), (2.113), маємо:

$$F = -\frac{\sigma_0}{2} + \frac{3Bb^2(b^4 - a^4)}{2a^4} + \frac{D(4a^2b^2 - a^4 - 3b^4)}{2a^4b^2}, \quad (2.118)$$

$$H = B\frac{a^6 - b^6}{a^6} + D\frac{b^2 - a^2}{a^6}. \quad (2.119)$$

З (2.114), (2.116) з урахуванням (2.98) та (2.112), маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + v_{23}^*)a + 4Ba^3(v_{23}^* + v_{21}^*v_{12}^*) \right) - \\ & - \frac{2C}{a^3} (1 + v_{23}^*) - \frac{4D}{a} (1 - v_{21}^*v_{12}^*) = \frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + v_{23}^\circ)a + 4Ha^3(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right), \\ & \frac{1}{E_2^*} \left(A(1 + v_{23}^*)a + Ba^3(3 + v_{23}^* - 2v_{21}^*v_{12}^*) + \frac{C}{a^3}(1 + v_{23}^*) + \right. \\ & \left. + \frac{D}{a}(v_{23}^* + 2v_{21}^*v_{12}^* - 1) \right) = \frac{1}{E_2^\circ} \left(F(1 + v_{23}^\circ)a + Ha^3(3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right). \quad (2.120) \end{aligned}$$

а з урахуванням (2.113), (2.118), (2.119) маємо:

$$\begin{aligned} & B \left(\frac{E_2^\circ(4a^6(v_{23}^* + v_{21}^*v_{12}^*) - b^2(3a^4 + b^4)(1 + v_{23}^*))}{a^3} - \right. \\ & \left. - \frac{E_2^*(3b^2(b^4 - a^4)(1 + v_{23}^\circ) + 4(a^6 - b^6)(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ))}{a^3} \right) + \\ & + D \left(\frac{E_2^\circ((b^4 - a^4)(1 + v_{23}^*) - 4a^2b^2(1 - v_{21}^*v_{12}^*))}{a^3b^2} - \right. \\ & \left. - \frac{E_2^*((4a^2b^2 - a^4 - 3b^4)(1 + v_{23}^\circ) + 4(b^2 - a^2)b^2(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ))}{a^3b^2} \right) = \\ & = \sigma_0 a (E_2^\circ(1 + v_{23}^*) - E_2^*(1 + v_{23}^\circ)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B \left(\frac{E_2^\circ (2a^6 (3 + v_{23}^* - 2v_{21}^* v_{12}^*) + b^2 (b^4 - 3a^4) (1 + v_{23}^*))}{a^3} - \right. \\
& \left. - \frac{E_2^* (3b^2 (b^4 - a^4) (1 + v_{23}^\circ) + 2(a^6 - b^6) (3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ))}{a^3} \right) + \\
& D \left(\frac{E_2^\circ (2a^2 b^2 (v_{23}^* + 2v_{21}^* v_{12}^* - 1) - (a^4 + b^4) (1 + v_{23}^*))}{a^3 b^2} - \right. \\
& \left. - \frac{E_2^* ((4a^2 b^2 - a^4 - 3b^4) (1 + v_{23}^\circ) + 2b^2 (b^2 - a^2) (3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ))}{a^3 b^2} \right) = \\
& = \sigma_0 a (E_2^\circ (1 + v_{23}^*) - E_2^* (1 + v_{23}^\circ)). \tag{2.121}
\end{aligned}$$

Перетворимо останні два вирази до вигляду:

$$\begin{aligned}
& b^2 B \left(E_2^\circ \left(4f (v_{23}^* + v_{21}^* v_{12}^*) - \left(3 + \frac{1}{f^2} \right) (1 + v_{23}^*) \right) - \right. \\
& \left. - E_2^* \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right) \right) + \\
& + \frac{D}{a^2} \left(E_2^\circ \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + v_{23}^*) - 4(1 - v_{21}^* v_{12}^*) \right) - \right. \\
& \left. - E_2^* \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right) \right) = \\
& = \sigma_0 (E_2^\circ (1 + v_{23}^*) - E_2^* (1 + v_{23}^\circ)), \\
& b^2 B \left(E_2^\circ \left(2f (3 + v_{23}^* - 2v_{21}^* v_{12}^*) + \left(\frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^*) \right) - \right. \\
& \left. - E_2^* \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (1 + v_{23}^\circ) + 2 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D}{a^2} \left(E_2^\circ \left(2(v_{23}^* + 2v_{21}^*v_{12}^* - 1) - \left(f + \frac{1}{f} \right) (1 + v_{23}^*) \right) - \right. \\
& \left. - E_2^* \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + v_{23}^\circ) + 2 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right) \right) = \\
& = \sigma_0 \left(E_2^\circ (1 + v_{23}^*) - E_2^* (1 + v_{23}^\circ) \right). \tag{2.122}
\end{aligned}$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= E_2^\circ \left(\left(4f - 3 - \frac{1}{f^2} \right) (1 + v_{23}^*) - 4f (1 - v_{21}^*v_{12}^*) \right) - \\
& - E_2^* \left(\left(4f - \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f^2} - f \right) (1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right); \\
d_{12} &= E_2^\circ \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + v_{23}^*) - 4(1 - v_{21}^*v_{12}^*) \right) - \\
& - E_2^* \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(1 - \frac{1}{f} \right) (1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right); \\
d_{21} &= E_2^\circ \left(4f (1 - v_{21}^*v_{12}^*) + \left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^*) \right) - \\
& - E_2^* \left(\left(2f + \frac{1}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right); \\
d_{22} &= E_2^\circ \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + v_{23}^*) - 4(1 - v_{21}^*v_{12}^*) \right) - \\
& - E_2^* \left(\left(2 - f - \frac{1}{f} \right) (1 + v_{23}^\circ) + 4 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right); \\
b_1 &= E_2^\circ (1 + v_{23}^*) - E_2^* (1 + v_{23}^\circ). \tag{2.123}
\end{aligned}$$

Тоді можемо записати систему лінійних рівнянь відносно невідомих сталих B , D :

$$\begin{cases} d_{11}b^2B + \frac{d_{12}}{a^2}D = \sigma_0b_1, \\ d_{21}b^2B + \frac{d_{22}}{a^2}D = \sigma_0b_1. \end{cases} \quad (2.124)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо співвідношення для B , D :

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sigma_0b_1}{b^2} \frac{d_{22} - d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \\ D &= \sigma_0a^2b_1 \frac{d_{11} - d_{21}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Звідси знаходимо співвідношення для всіх інших сталих:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (d_{22} - d_{12}) + \left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (d_{11} - d_{21}) \right) - 1 \right); \\ H &= \frac{\sigma_0b_1}{a^2(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left(\left(f - \frac{1}{f^2} \right) (d_{22} - d_{12}) + \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (d_{11} - d_{21}) \right); \\ C &= \frac{\sigma_0b_1b^4}{2(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} ((d_{22} - d_{12}) - f(d_{11} - d_{21})); \\ A &= -\frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} (3(d_{22} - d_{12}) + f(d_{11} - d_{21})) \right). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Тоді напружений стан для матеріалу матриці представиться у вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^*(r, \theta) &= \sigma_0 \left(1 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 \left(1 - \frac{b^4}{r^4} \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f \left(1 + \frac{3b^4}{r^4} - \frac{4b^2}{r^2} \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\
\sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= -\sigma_0 \left(1 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(3 \left(1 - 4 \frac{r^2}{b^2} - \frac{b^4}{r^4} \right) (d_{22} - d_{12}) + f \left(1 + \frac{3b^4}{r^4} \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\
\sigma_{r\theta}^*(r, \theta) &= -\sigma_0 \left(1 + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 \left(1 - \frac{2r^2}{b^2} + \frac{b^4}{r^4} \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f(d_{11} - d_{21}) \left(1 - \frac{3b^4}{r^4} + \frac{2b^2}{r^2} \right) \right) \right) \sin 2\theta; \\
\sigma_{zz}^*(r, \theta) &= \frac{4\sigma_0 v_{12}^* b_1}{r^2 b^2 (d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left(3r^4 (d_{22} - d_{12}) - a^2 b^2 (d_{11} - d_{21}) \right) \cos 2\theta. \quad (2.127)
\end{aligned}$$

Для компонент вектора переміщень матеріалу матриці отримаємо:

$$\begin{aligned}
u_r^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0 r}{E_2^*} \left((1 + v_{23}^*) + \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \times \right. \\
&\quad \times \left(\left(\left(3 + \frac{b^4}{r^4} \right) (1 + v_{23}^*) - \frac{4r^2}{b^2} (v_{23}^* + v_{21}^* v_{12}^*) \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{4a^2}{r^2} (1 - v_{21}^* v_{12}^*) + f \left(1 + v_{23}^* \left(1 - \frac{b^4}{r^4} \right) \right) \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\
u_\theta^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0 r}{E_2^*} \left(- (1 + v_{23}^*) + \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\left(\frac{2r^2}{b^2} (3 + v_{23}^* - 2v_{21}^*v_{12}^*) + \left(\frac{b^4}{r^4} - 3 \right) (1 + v_{23}^*) \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2a^2}{r^2} (v_{23}^* + 2v_{21}^*v_{12}^* - 1) - (1 + v_{23}^*) f \left(1 + \frac{b^4}{r^4} \right) \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \sin 2\theta. \quad (2.128) \end{aligned}$$

Аналогічно запишемо співвідношення для напруженого стану матеріалу волокна:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\circ}(r, \theta) &= \sigma_0 \left(1 - \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r, \theta) &= \sigma_0 \left(\frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left(3 \left(\left(1 - \frac{4r^2}{a^2} \right) \frac{1}{f^2} - 1 + \frac{4r^2}{a^2} f \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(4 \left(1 - \frac{3r^2}{a^2} \right) - f + \frac{3}{f} \left(\frac{4r^2}{a^2} - 1 \right) \right) (d_{11} - d_{21}) - 1 \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}^{\circ}(r, \theta) &= \sigma_0 \left(\frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \left(3 \left(\frac{1}{f^2} \left(1 - \frac{2r^2}{a^2} \right) - 1 + \frac{2r^2}{a^2} f \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(2 \left(2 - \frac{3r^2}{a^2} \right) - f + \frac{3}{f} \left(\frac{2r^2}{a^2} - 1 \right) \right) (d_{11} - d_{21}) - 1 \right) \sin 2\theta; \\ \sigma_{zz}^{\circ}(r, \theta) &= \frac{12\sigma_0 b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}) a^2} \left(\left(f - \frac{1}{f^2} \right) (d_{22} - d_{12}) + \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \times \\ & \quad \times v_{12}^{\circ} \cos 2\theta. \quad (2.129) \end{aligned}$$

Для компонент вектора переміщень матеріалу волокна отримаємо:

$$\begin{aligned}
u_r^\circ(r, \theta) &= \frac{\sigma_0 r}{E_2^\circ} \left((1 + v_{23}^\circ) - \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \right) \times \\
&\times \left(\left(\left(\frac{3}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^\circ) + \frac{4r^2}{a^2} \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \\
&+ \left. \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + v_{23}^\circ) + \frac{4r^2}{a^2} \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \cos 2\theta; \\
u_\theta^\circ(r, \theta) &= \frac{\sigma_0 r}{E_2^\circ} \left(- (1 + v_{23}^\circ) + \frac{b_1}{(d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12})} \right) \times \\
&\times \left(\left(\left(\frac{3}{f^2} - 3 \right) (1 + v_{23}^\circ) + \frac{2r^2}{a^2} \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right) (d_{22} - d_{12}) + \right. \\
&+ \left. \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + v_{23}^\circ) + \frac{2r^2}{a^2} \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ) \right) (d_{11} - d_{21}) \right) \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{2.130}$$

Розв'яжемо аналогічну задачу на чистий поперечний зсув для транстропного однорідного матеріалу, що моделює композит. У цій задачі композиційний матеріал представиться у вигляді суцільного круга радіусом b . Крайові умови набудуть вигляду (2.68). Напружено-деформований стан описуватиметься співвідношеннями, аналогічними співвідношенням для волокна, таким чином, для компонент напружень маємо:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, \theta) &= -2\tilde{A} \cos 2\theta, \\
\sigma_{r\theta}(r, \theta) &= (2\tilde{A} + 6\tilde{B}r^2) \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Скориставшись першою крайовою умовою (2.68), знаходимо сталу:

$$\tilde{A} = -\frac{\sigma_0}{2}. \tag{2.132}$$

Із другої крайової умови отримуємо:

$$\tilde{B} = 0. \quad (2.133)$$

Скориставшись співвідношеннями, отриманими для волокна (де замінимо F на \tilde{A} , а H на \tilde{B}), а також враховуючи значення сталих (2.132), (2.133) для однорідного транслопного матеріалу, що моделює композит, отримаємо:

напруження

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= \sigma_0 \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\sigma_0 \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.134)$$

деформації

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(r, \theta) &= \frac{\sigma_0(1+\nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta; \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0(1+\nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta; \\ \gamma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{2\sigma_0(1+\nu_{23})}{E_2} \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.135)$$

переміщення

$$u_r(r, \theta) = \frac{\sigma_0(1+\nu_{23})r}{E_2} \cos 2\theta; \quad u_\theta(r, \theta) = -\frac{\sigma_0(1+\nu_{23})r}{E_2} \sin 2\theta. \quad (2.136)$$

Таким чином, маємо розв'язок задачі про чистий поперечний зсув для сумісного деформування кільця та круга, що моделюють, відповідно, матрицю та волокно, і для круга, що моделює композиційний матеріал. Можна застосувати такі умови узгодження. Рівність радіальних переміщень на зовнішній межі:

$$u_r(b, \theta) = u_r^*(b, \theta), \quad (2.137)$$

та рівність окружних переміщень на зовнішній межі:

$$u_\theta(b, \theta) = u_\theta^*(b, \theta). \quad (2.138)$$

Використовуючи рівність (2.137), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} = & \frac{1}{E_2^*} \left((1 + \nu_{23}^*) + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} ((3(d_{22} - d_{12}) + f(d_{11} - d_{21})) \times \right. \\ & \times (1 + \nu_{23}^*) - 4(d_{22} - d_{12})(\nu_{23}^* + \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + ((d_{22} - d_{12}) - f(d_{11} - d_{21})) \times \\ & \left. \times (1 + \nu_{23}^*) + 4f(d_{11} - d_{21})(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right). \end{aligned} \quad (2.139)$$

Застосовуючи рівність (2.138), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} = & \frac{1}{E_2^*} \left((1 + \nu_{23}^*) + \frac{b_1}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}} ((3(d_{22} - d_{12}) + f(d_{11} - d_{21})) \times \right. \\ & \times (1 + \nu_{23}^*) - 2(d_{22} - d_{12})(3 + \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*) - ((d_{22} - d_{12}) - f(d_{11} - d_{21})) \times \\ & \left. \times (1 + \nu_{23}^*) - 2f(d_{11} - d_{21})(\nu_{23}^* + 2\nu_{21}^*\nu_{12}^* - 1) \right). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Після перетворень, та враховуючи позначення

$$\chi_1 = \frac{(d_{11} - d_{21})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}; \quad \chi_2 = \frac{(d_{22} - d_{12})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad (2.141)$$

відповідно, отримуємо:

$$\frac{(1+v_{23})}{E_2} = \frac{1}{E_2^*} \left((1+v_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*) (1 - v_{21}^* v_{12}^*) (f\chi_1 + \chi_2) \right), \quad (2.142)$$

$$\frac{(1+v_{23})}{E_2} = \frac{1}{E_2^*} \left((1+v_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*) (1 - v_{21}^* v_{12}^*) (f\chi_1 - \chi_2) \right). \quad (2.143)$$

Скориставшись співвідношеннями (2.64) та (2.142) або (2.143), а саме,

враховуючи, що $\frac{1-v_{23}}{E_2} + \frac{1+v_{23}}{E_2} = \frac{2}{E_2}$, маємо:

для формули (2.142)

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^*}{\left(\alpha \left((1+v_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*) (1 - v_{21}^* v_{12}^*) (f\chi_1 + \chi_2) \right) + \delta + \eta_1 \eta_2 \right)}, \quad (2.144)$$

для формули (2.143)

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^*}{\left(\alpha \left((1+v_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*) (1 - v_{21}^* v_{12}^*) (f\chi_1 - \chi_2) \right) + \delta + \eta_1 \eta_2 \right)}, \quad (2.145)$$

де $\delta = f(1+v_{23}^*) (\gamma - 2E_2^*) + \gamma(1-v_{23}^*)$, $\eta_1 = 2E_1^{\circ} E_1^* f(f-1) (v_{21}^* \gamma - 2v_{21}^{\circ} E_2^*)^2$,
 $\eta_2 = 1 / \left(E_2^* \left(\alpha (E_1^{\circ} f + E_1^* (1-f)) - 2\beta (v_{12}^* E_1^{\circ} f + v_{12}^{\circ} E_1^* (1-f)) \right) \right)$,
 $\gamma = E_2^* (1 - v_{23}^{\circ}) + E_2^{\circ} (1 + v_{23}^*)$.

Враховуючи, що $\frac{1+v_{23}}{E_2} - \frac{1-v_{23}}{E_2} = \frac{2v_{23}}{E_2}$, зі співвідношень (2.64) та

(2.142), (2.144) або (2.143), (2.145), маємо:

для формул (2.142), (2.144)

$$v_{23} = \frac{\left(\alpha \left((1+v_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*) (1 - v_{21}^* v_{12}^*) (f\chi_1 + \chi_2) \right) - (\delta + \eta_1 \eta_2) \right)}{\left(\alpha \left((1+v_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*) (1 - v_{21}^* v_{12}^*) (f\chi_1 + \chi_2) \right) + (\delta + \eta_1 \eta_2) \right)}. \quad (2.146)$$

для формул (2.143), (2.145)

$$v_{23} = \frac{\left(\alpha \left((1 + v_{23}^*) \right) + 4 \left(\gamma - 2E_2^* \right) \left(1 - v_{21}^* v_{12}^* \right) \left(f\chi_1 - \chi_2 \right) \right) - (\delta + \eta_1 \eta_2)}{\left(\alpha \left((1 + v_{23}^*) \right) + 4 \left(\gamma - 2E_2^* \right) \left(1 - v_{21}^* v_{12}^* \right) \left(f\chi_1 - \chi_2 \right) \right) + (\delta + \eta_1 \eta_2)}. \quad (2.147)$$

Застосуємо отримані формули для розрахунку пружних сталих реальних композиційних матеріалів. Спочатку розглянемо гумовокордний матеріал із ізотропною матрицею та ізотропним кордом із такими пружними характеристиками [83]: модуль пружності текстильного корда $E^\circ = 1,6 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,8$, модуль пружності гуми $E^* = 4,5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,49$.

На рисунку 2.12 представлена залежність поперечного модуля пружності композиційного матеріалу E_2 , отримана за формулою (2.144), від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$.

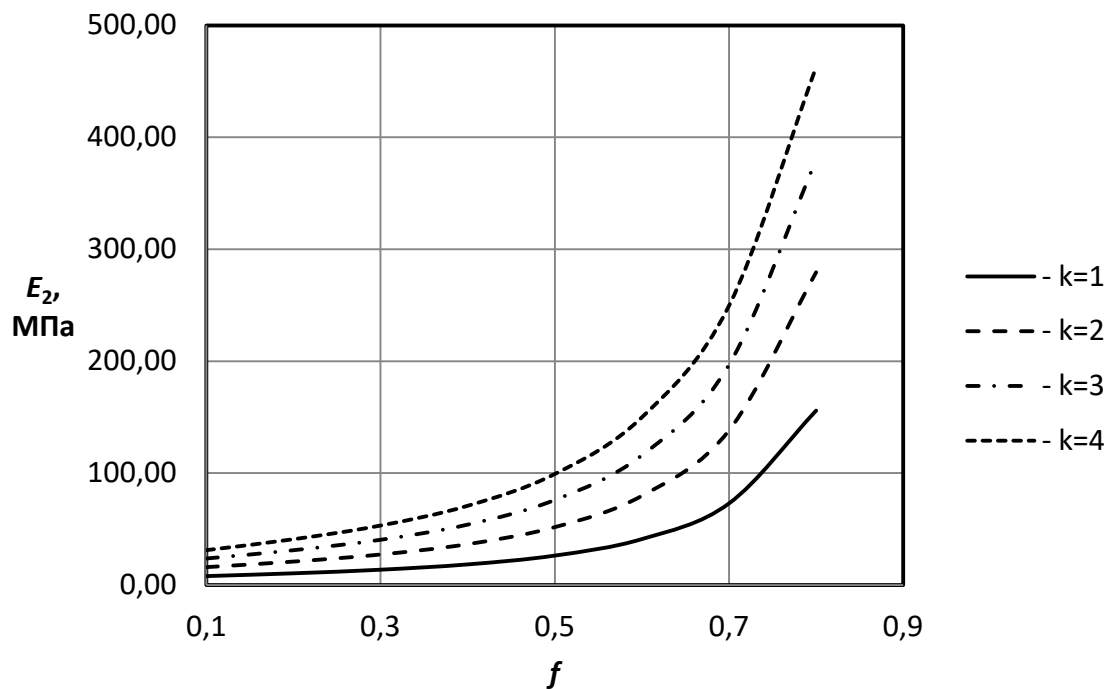


Рисунок 2.12 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.144)) від об'ємного вмісту корда f в композиті.

Графіки побудовані для різних значень модуля пружності гуми, який набуває значення kE^* (де $E^* = 4,5$ МПа).

На рисунку 2.13 представлена аналогічна залежність поперечного модуля пружності композиційного матеріалу E_2 , отримана за допомогою формули (2.145), при різних значеннях модуля пружності гуми, який набуває значення kE^* (де $E^* = 4,5$ МПа).

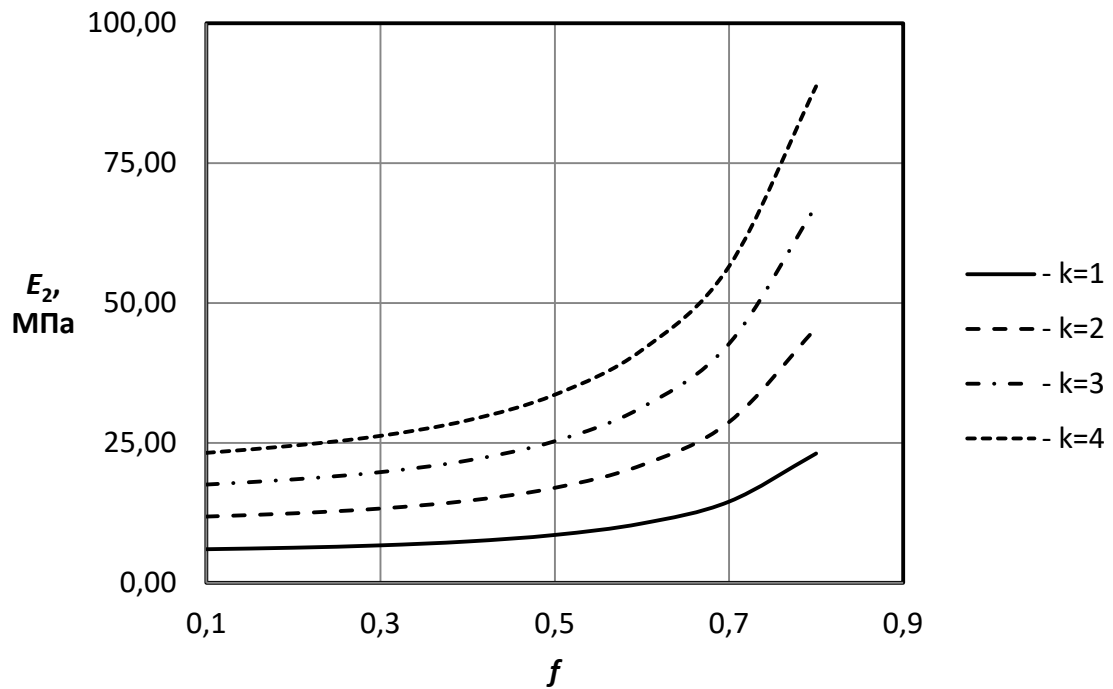
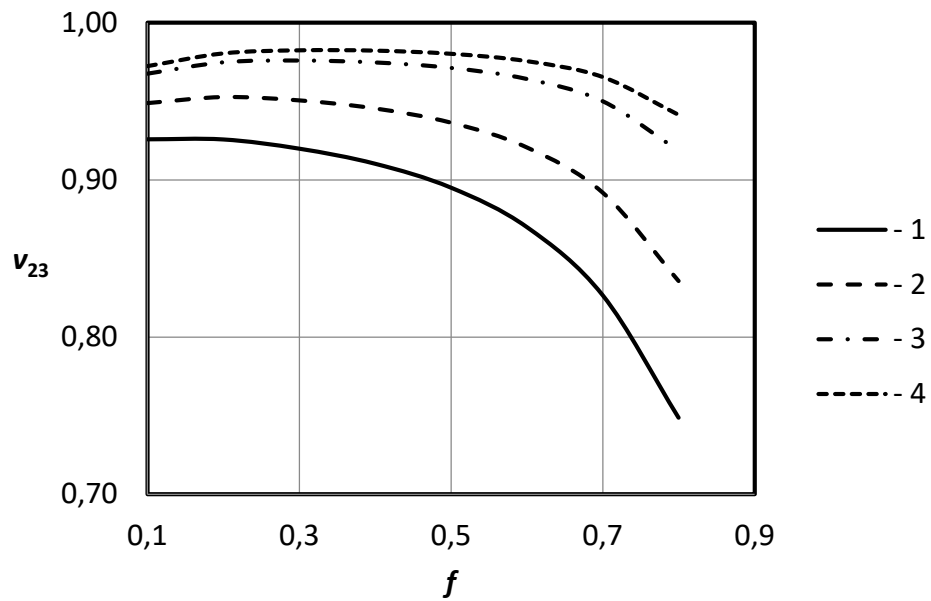


Рисунок 2.13 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.145)) від об'ємного вмісту корда f в композиті.

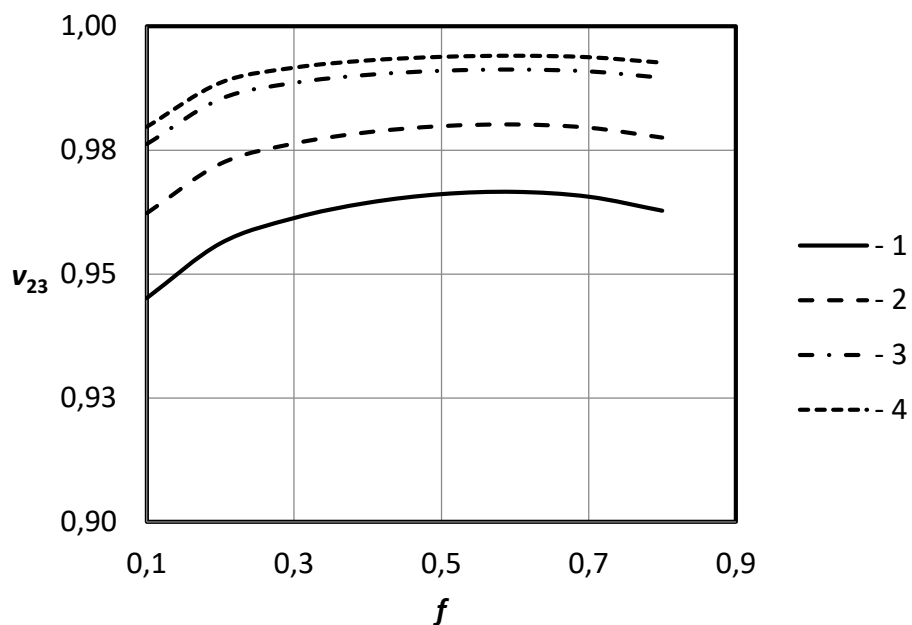
На рисунку 2.14 представлена залежність коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{23} , обчисленого за формулою (2.146), від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для різних значень коефіцієнта Пуассона гуми ν^* . На рисунку 2.15 представлена залежність коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{23} , обчислена за формулою (2.147), від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для різних значень коефіцієнта Пуассона гуми ν^* .



$$1 - v^* = 0,49; 2 - v^* = 0,495; 3 - v^* = 0,499; 4 - v^* = 0,49999$$

Рисунок 2.14 – Залежність коефіцієнта Пуассона v_{23} (формула (2.146))

від об'ємного вмісту корда f при різних значеннях v^* .



$$1 - v^* = 0,49; 2 - v^* = 0,495; 3 - v^* = 0,499; 4 - v^* = 0,49999$$

Рисунок 2.15 – Залежність коефіцієнта Пуассона v_{23} (формула (2.147))

від об'ємного вмісту корда f при різних значеннях v^* .

Розглянемо тепер композит UD PFRP з волокном із поліетилену високої щільності (VHDPE Tenfor SN1A) та епоксидною смолою (Ciba-Geigy 913) як матрицею [130]: поздовжній модуль пружності волокна $E_1^{\circ} = 60,4$ ГПа, поперечний модуль пружності волокна $E_2^{\circ} = 4,68$ ГПа, коефіцієнти Пуассона волокна $\nu_{12}^{\circ} = 0,38$ і $\nu_{23}^{\circ} = 0,55$, модуль зсуву волокна $G_{12}^{\circ} = 1,65$ ГПа, модуль пружності матриці $E^* = 5,55$ ГПа, коефіцієнт Пуассона матриці $\nu^* = 0,37$.

На рисунку 2.16 представлена залежність поперечного модуля пружності композиційного матеріалу E_2 , отримана за формулою (2.144), від об'ємного вмісту волокна в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для різних значень поперечного модуля пружності волокна, який набуває значення kE_2° (де $E_2^{\circ} = 4,68$ ГПа).

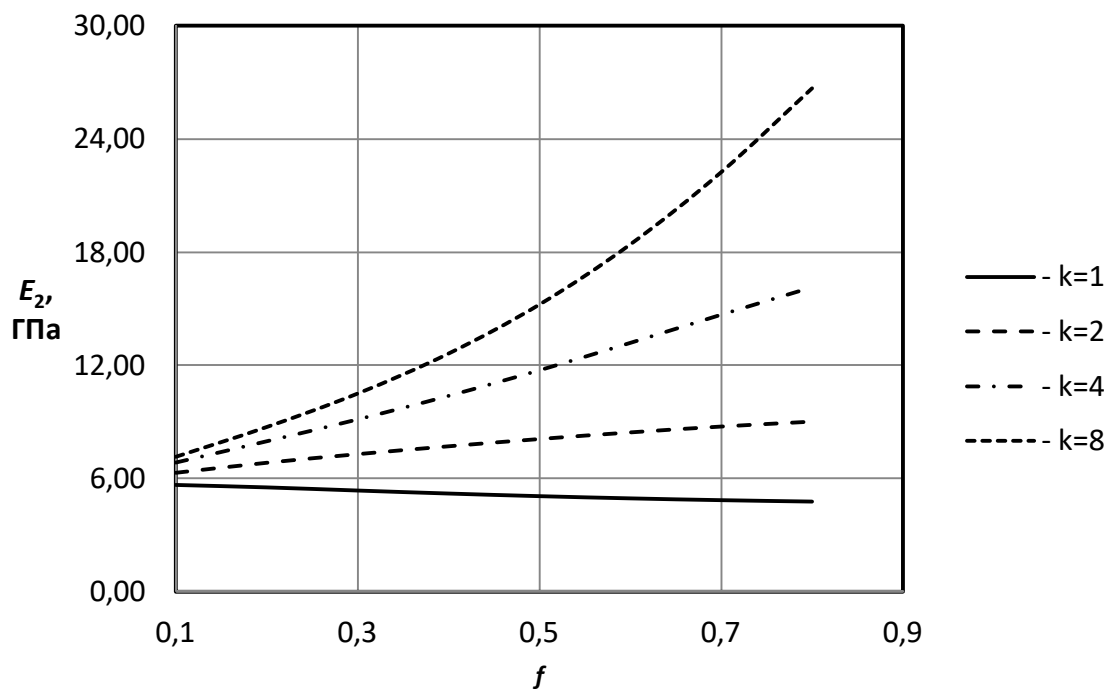


Рисунок 2.16 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.144)) від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

На рисунку 2.17 представлена залежність поперечного модуля пружності композиційного матеріалу E_2 , отримана за допомогою формули (2.145), від

об'ємного вмісту волокна в діапазоні $f = 0,1 \div 0,8$. Графіки побудовані для різних значень поперечного модуля пружності волокна, який набуває значення kE_2° (де $E_2^\circ = 4,68$ ГПа).

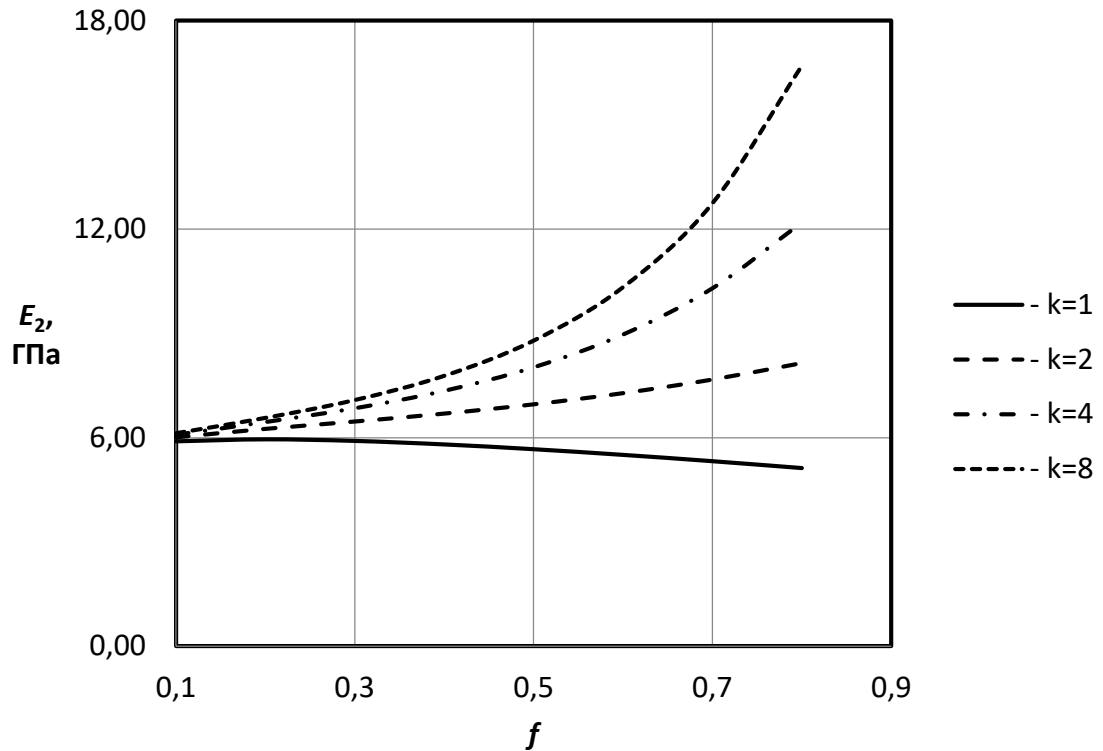


Рисунок 2.17 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 (формула (2.145)) від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

На рисунку 2.18 представлена залежність коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{23} , отримана за формулою (2.146), від об'ємного вмісту волокна в діапазоні $f = 0,1 \div 0,8$. Графіки побудовані для різних значень поздовжнього модуля пружності волокна kE_1° (де $E_1^\circ = 60,4$ ГПа).

На рисунку 2.19 представлена залежність коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{23} , отримана за формулою (2.147), від об'ємного вмісту волокна в діапазоні $f = 0,1 \div 0,8$. Графіки побудовані для різних значень поздовжнього модуля пружності волокна kE_1° (де $E_1^\circ = 60,4$ ГПа).

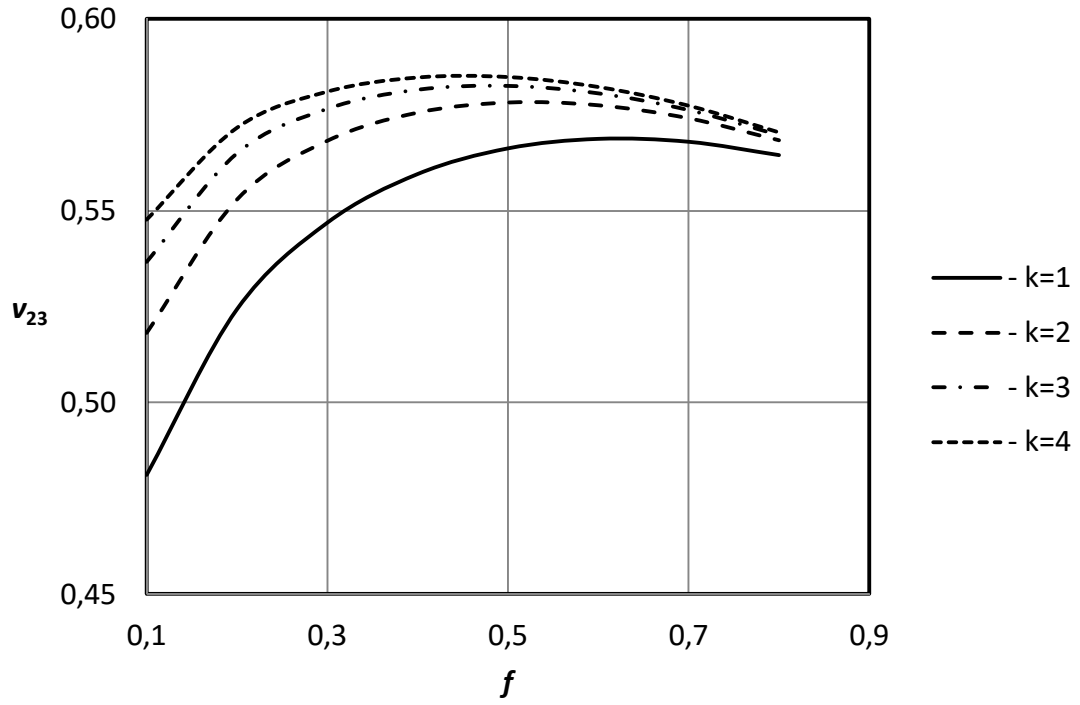


Рисунок 2.18 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} (формула (2.146)) від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

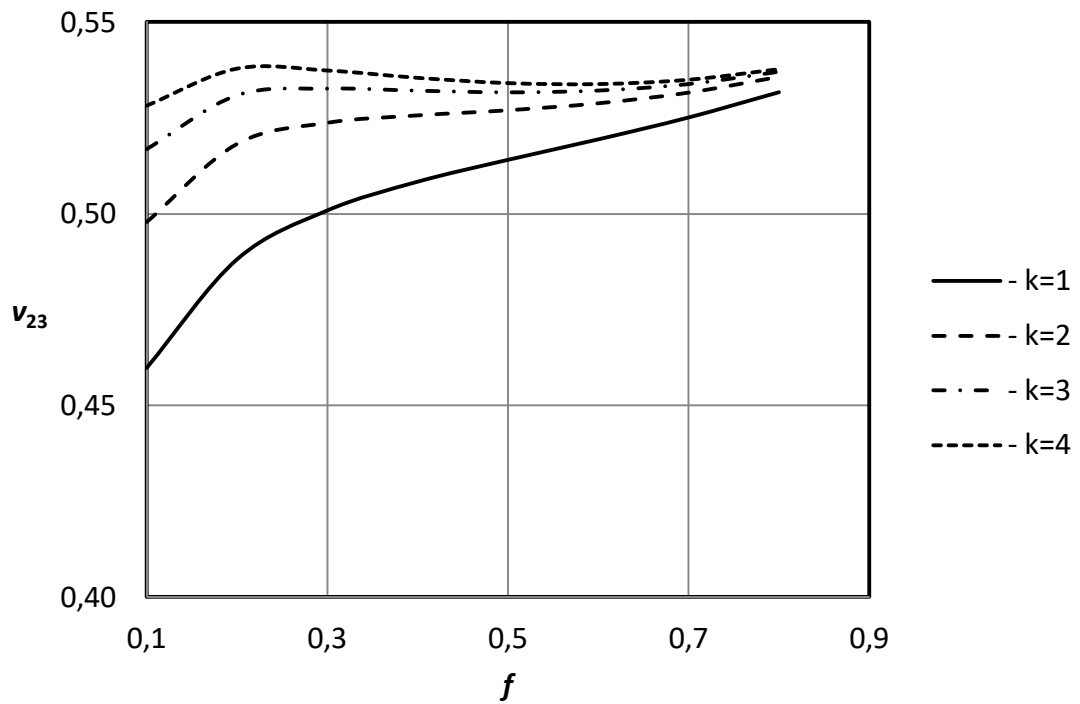


Рисунок 2.19 – Коефіцієнт Пуассона ν_{23} (формула (2.147)) від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

Як видно з наведених результатів, і поперечний модуль пружності E_2 , і коефіцієнт Пуассона композиційного матеріалу ν_{23} мають нелінійну залежність від об'ємного вмісту волокна f . При цьому чим більше об'ємний вміст волокна f , тим менше вплив величини поздовжнього модуля пружності волокна E_1° на зазначені ефективні пружні сталі композита E_2 та ν_{23} .

Поздовжній зсув. В роботі [130] наведено розв'язання задачі для трансверсально-ізотропного циліндричного тіла. Запишемо основні співвідношення, що характеризують чистий поздовжній зсув у циліндричній області (рис. 2.20).

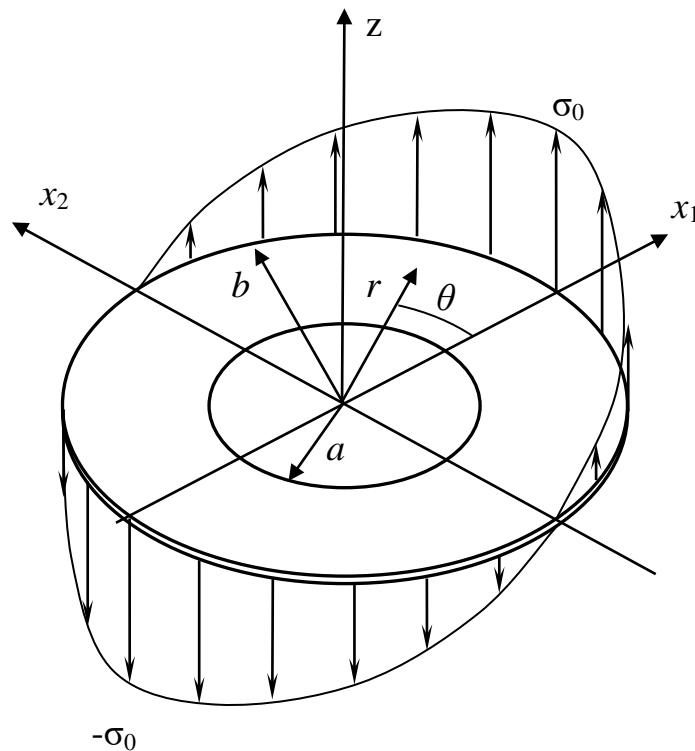


Рисунок 2.20 – Крайові умови для напружень $\sigma_{zr}(b, \theta)$ при поздовжньому зсуві в кільці.

У випадку поздовжнього зсуву напружено-деформований стан визначається такими співвідношеннями: $\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{zr} = \sigma_{zr}(r, \theta)$, $\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(r, \theta)$; $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$, $\gamma_{zr} = \gamma_{zr}(r, \theta)$, $\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}(r, \theta)$.

Для того, щоб змодельовати напружено-деформований стан чистого поздовжнього зсуву в циліндричній області нескінченної довжини, необхідно до зовнішньої циліндричної поверхні області прикласти таке навантаження:

$$\sigma_{zr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos \theta, \quad (2.148)$$

а напружено-деформований стан чистого зсуву характеризуватиметься такими співвідношеннями $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0$.

Тоді з трьох рівнянь рівноваги залишається тільки одне, яке матиме вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0, \quad (2.149)$$

або в переміщеннях:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.150)$$

Розв'язком цього рівняння буде функція:

$$u_z(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta, \quad (2.151)$$

тоді, використовуючи формули (А.2) та (А.4), можемо отримати співвідношення для деформацій:

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = - \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta;$$

$$\gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\partial u_z}{\partial r} = \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (2.152)$$

а з урахуванням формул (А.49) та (А.50), співвідношення для напружень набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}(r, \theta) &= G_{12} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta; \\ \sigma_{z\theta}(r, \theta) &= -G_{12} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Розглянемо задачу про сумісний поздовжній зсув суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю.

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан матриці (нескінчений порожнистий циліндр), набудуть вигляду (перепозначимо в співвідношеннях (2.151)-(2.153) C_1 на A , а C_2 на B):

$$u_z^*(r, \theta) = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \theta, \quad (2.154)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = - \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta; \quad \gamma_{zr}^*(r, \theta) = \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (2.155)$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) = G_{12}^* \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \quad \sigma_{z\theta}^*(r, \theta) = -G_{12}^* \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (2.156)$$

Основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна (нескінчений суцільний циліндр), з урахуванням скінченності переміщень при $r=0$ (в співвідношеннях (2.151)-(2.153) $C_2=0$), набудуть вигляду (перепозначимо C_1 на C):

$$u_z^\circ(r, \theta) = Cr \cos \theta, \quad (2.157)$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = -C \sin \theta; \quad \gamma_{zr}^\circ(\theta) = C \cos \theta, \quad (2.158)$$

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = G_{12}^\circ C \cos \theta; \quad \sigma_{z\theta}^\circ(\theta) = -G_{12}^\circ C \sin \theta. \quad (2.159)$$

Щоби знайти невідомі сталі в співвідношеннях (2.154)-(2.159) для задачі про сумісний поздовжній зсув матриці і волокна, скористаємося крайовою умовою (2.148) та умовами неперервності на межі розділу матеріалів:

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = \sigma_{zr}^*(a, \theta), \quad (2.160)$$

$$u_z^\circ(a, \theta) = u_z^*(a, \theta). \quad (2.161)$$

Із (2.148) маємо:

$$A = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*} + \frac{B}{b^2}. \quad (2.162)$$

Із (2.161), з урахуванням (2.162), отримуємо

$$C = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*} + B \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right). \quad (2.163)$$

И, насамкінець, із (2.160) з урахуванням (2.162), (2.163), маємо

$$B = \frac{\sigma_0 a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{G_{12}^* (G_{12}^* (f - 1) - G_{12}^\circ (f + 1))}. \quad (2.164)$$

Тоді

$$C = \frac{-2\sigma_0}{\left(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)}, \quad (2.165)$$

$$A = \frac{-\sigma_0(G_{12}^* + G_{12}^\circ)}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))}. \quad (2.166)$$

Враховуючи (2.164), (2.166) запишемо основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан матриці при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \left(-\left(G_{12}^* + G_{12}^\circ\right)r + \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r} \right) \cos \theta, \quad (2.167)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta;$$

$$\gamma_{zr}^*(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (2.168)$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta;$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (2.169)$$

Враховуючи (2.165), запишемо основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^\circ(r, \theta) = \frac{-2\sigma_0 r \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}, \quad (2.170)$$

$$\gamma_{\theta z}^{\circ}(\theta) = \frac{2\sigma_0 \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)}; \gamma_{zr}^{\circ}(\theta) = \frac{-2\sigma_0 \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)}, \quad (2.171)$$

$$\sigma_{zr}^{\circ}(\theta) = \frac{-2\sigma_0 G_{12}^{\circ} \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)}; \sigma_{z\theta}^{\circ}(\theta) = \frac{2\sigma_0 G_{12}^{\circ} \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)}. \quad (2.172)$$

Розв'яжемо аналогічну задачу про чистий поздовжній зсув для транстропного однорідного матеріалу, що моделює композит. В цій задачі композиційний матеріал представиться у вигляді суцільного нескінченного циліндра радіусом b . Крайові умови набудуть вигляду (2.148). Напружено-деформований стан описуватиметься співвідношеннями, аналогічними співвідношенням для волокна, таким чином, для компонент переміщень, деформацій та напружень маємо:

$$u_z(r, \theta) = \tilde{A} r \cos \theta, \quad (2.173)$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\tilde{A} \sin \theta; \gamma_{zr}(r, \theta) = \tilde{A} \cos \theta, \quad (2.174)$$

$$\sigma_{zr}(r, \theta) = \tilde{A} G_{12} \cos \theta; \sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\tilde{A} G_{12} \sin \theta. \quad (2.175)$$

Із крайової умови (2.148) знайдемо сталу \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \frac{\sigma_0}{G_{12}}. \quad (2.176)$$

Тоді матимемо:

$$u_z(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta, \quad (2.177)$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta; \gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta, \quad (2.178)$$

$$\sigma_{zr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \cos \theta; \quad \sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \sin \theta. \quad (2.179)$$

Таким чином, маємо розв'язок задачі на чистий поздовжній зсув для сумісного деформування нескінченних порожнистого та суцільного циліндрів, що моделюють, відповідно, матрицю і волокно, і для нескінченного суцільного циліндра, що моделює композиційний матеріал. Умову узгодження можна використати таку. Рівність осьових переміщень на зовнішній межі:

$$u_z(b, \theta) = u_z^*(b, \theta). \quad (2.180)$$

Використовуючи рівність (2.191), маємо:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^* (G_{12}^* (1-f) + G_{12}^\circ (f+1))}{G_{12}^\circ (1-f) + G_{12}^* (f+1)}. \quad (2.181)$$

Порівняємо значення модуля зсуву G_{12} , отримане за формулою (2.181), з відомими в літературі експериментальними даними.

Розглянемо спочатку гумовокордний матеріал із ізотропною матрицею та ізотропним кордом із такими пружними характеристиками [83]: модуль пружності текстильного корда $E^\circ = 1,6 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,8$, модуль пружності гуми $E^* = 4,5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,49$.

В таблиці 2.5 наведені значення модуля зсуву G_{12} при об'ємному вмісті корда $f = 0,31$. Як можна побачити, похибка обчислень ε за формулою (2.181) у порівнянні з даними експериментів доходить до 47,6 %.

На рисунку 2.21 представлена залежність модуля зсуву G_{12} від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для різних значень модуля пружності гуми, який набуває значення kE^* (де $E^* = 4,5$ МПа). Як

можна помітити, зі збільшенням модуля пружності гуми збільшується і модуль зсуву гуми, що приводить до збільшення модуля зсуву G_{12} гумовокордного матеріалу. На рис. 2.22 представлена залежність модуля зсуву G_{12} від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для різних значень модуля пружності корда, який набуває значення kE° (де $E^\circ = 1,6 \cdot 10^3$ МПа). Збільшення модуля пружності корда приводить до збільшення модуля зсуву корда, однак це не веде до зміни модуля зсуву G_{12} гумовокордного матеріалу (графіки на рис. 2.22 практично збігаються).

Таблиця 2.5 – Модуль зсуву гумовокордного матеріалу G_{12}

Величина	Експеримент [83]	Розрахунок за формулою		
		(1.23)	(1.24)	(2.181)
G_{12} , МПа	1,934	2,854	82,984	2,854
ε , %	-	-47,6	-4143,23	-47,6

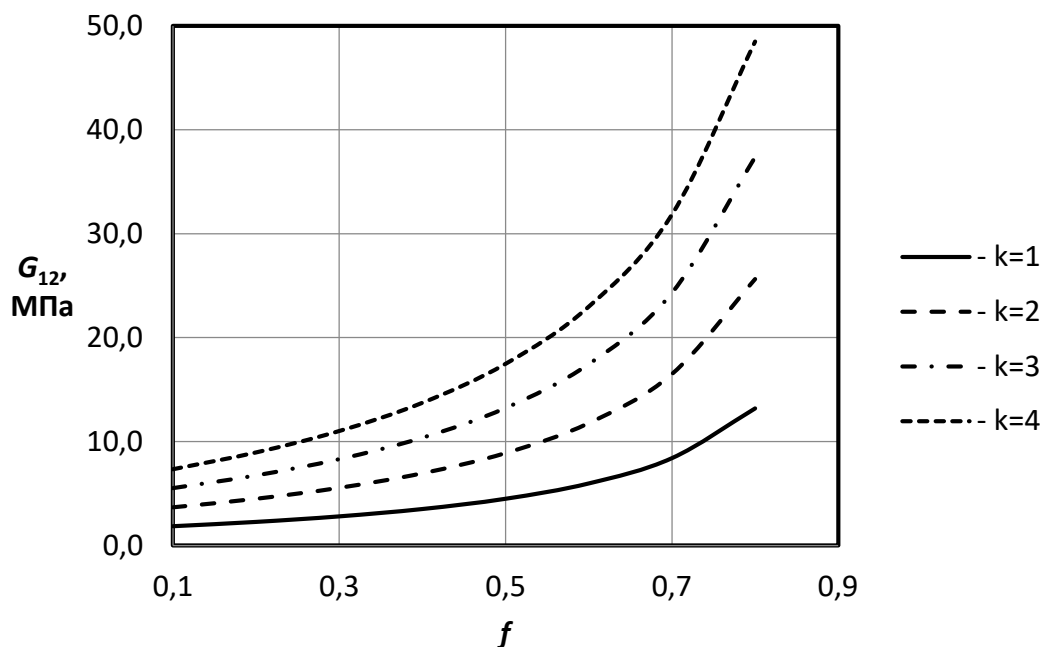


Рисунок 2.21 – Залежність модуля зсуву композиційного матеріалу G_{12} від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

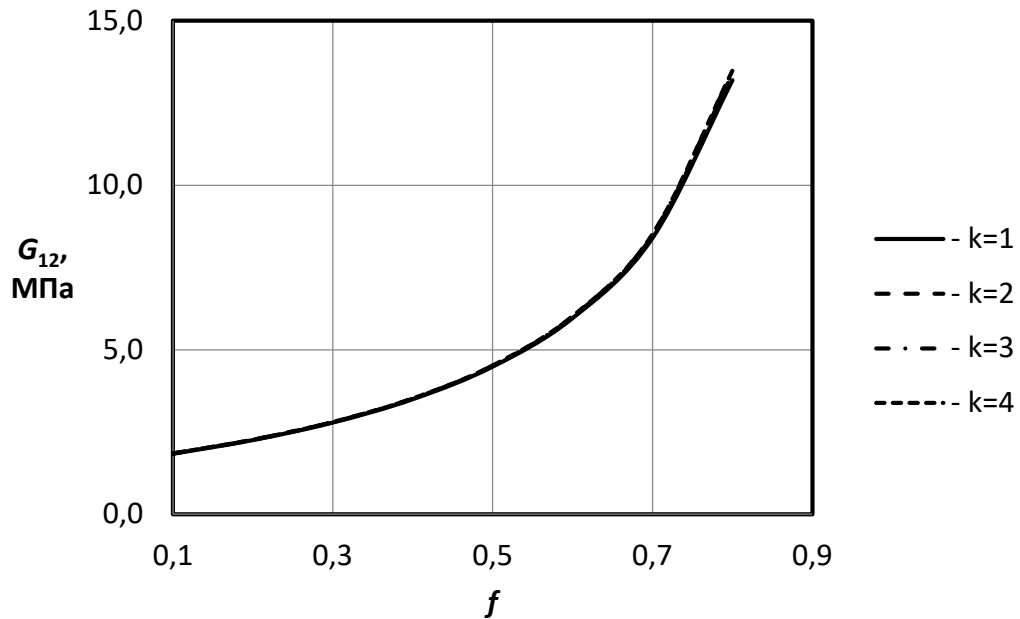


Рисунок 2.22 – Залежність модуля зсуву композиційного матеріалу G_{12} від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

У розглянутій вище задачі і матеріал матриці, і матеріал волокна є ізотропним. Порівняємо тепер значення модуля зсуву G_{12} , отримане за формулою (2.181), з відомими в літературі експериментальними даними для ізотропної матриці та трансропного волокна.

Розглянемо композит UD PFRP із волокном із поліетилену високої щільності (VHDPE Tenfor SN1A) та епоксидною смолою (Ciba-Geigy 913) як матрицею [130]: поздовжній модуль пружності волокна $E_1^{\circ} = 60,4$ ГПа, поперечний модуль пружності волокна $E_2^{\circ} = 4,68$ ГПа, коефіцієнти Пуассона волокна $\nu_{12}^{\circ} = 0,38$ та $\nu_{23}^{\circ} = 0,55$, модуль зсуву волокна $G_{12}^{\circ} = 1,65$ ГПа, модуль пружності матриці $E^* = 5,55$ ГПа, коефіцієнт Пуассона матриці $\nu^* = 0,37$.

В таблиці 2.6 наведено порівняння з експериментальними даними значень модуля зсуву G_{12} при різному об'ємному вмісті волокна. Як можна побачити, похибка обчислень ε за формулою (2.181) у порівнянні з даними експериментів для модуля зсуву G_{12} менше 5 %.

Таблиця 2.6 – Модуль зсуву G_{12} композиційного матеріалу

Об'ємний вміст волокон, f	Величина	Експеримент [130]	Розрахунок за формулами (2.181)
0,36	G_{12} , ГПа	1,92	1,88
	ε , %	-	2,08
0,56	G_{12} , ГПа	1,77	1,81
	ε , %	-	-2,26
0,67	G_{12} , ГПа	1,73	1,77
	ε , %	-	-2,31
0,75	G_{12} , ГПа	1,66	1,74
	ε , %	-	-4,82

На рисунку 2.23 представлена залежність модуля зсуву G_{12} від об'ємного вмісту волокна в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Графіки побудовані для різних значень модуля пружності матриці, який набуває значення kE^* (де $E^* = 5,55$ ГПа).

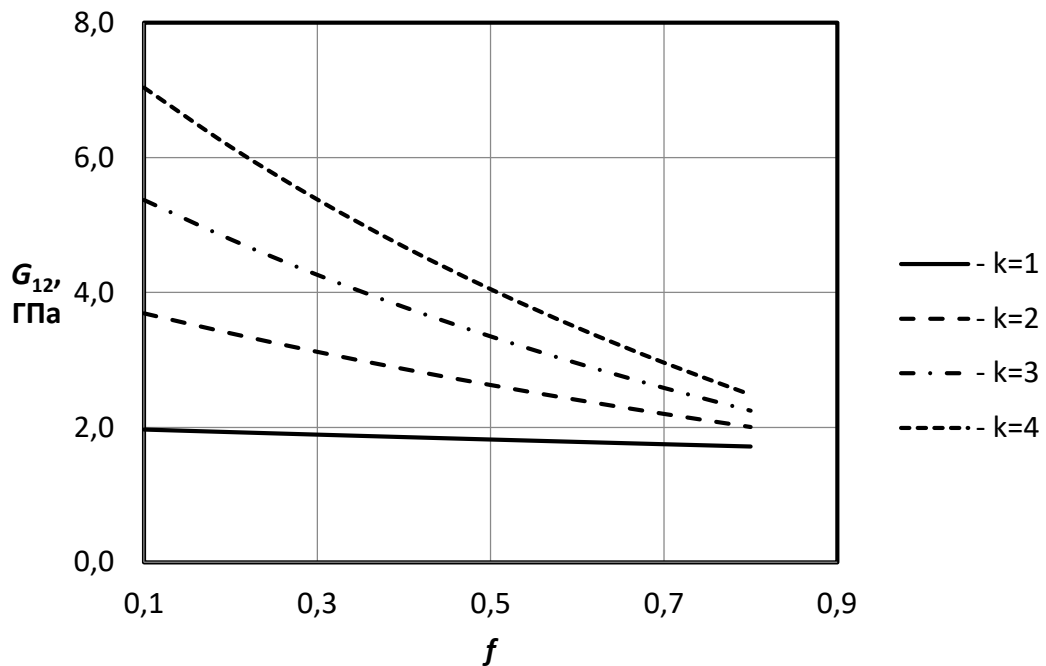


Рисунок 2.23 – Залежність модуля зсуву G_{12} від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

2.4 Висновки

У розділі на основі кінематичного критерію узгодження отримані формули для визначення пружних сталих E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{23} , G_{12} композиційного матеріалу з матрицею і волокном, що мають трансропні властивості (площина ізотропії перпендикулярна осі волокон).

Як можна зауважити, кожна з ефективних пружних сталих композиційного матеріалу E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{23} залежить від пружних сталих матриці E_1^* , E_2^* , ν_{12}^* , ν_{23}^* та волокна E_1° , E_2° , ν_{12}° , ν_{23}° та об'ємного вмісту матриці й волокна в композиті, й не залежить від поздовжніх зсувних властивостей матриці та волокна, що характеризуються модулями зсуву G_{12}^* та G_{12}° . У свою чергу, поздовжній модуль зсуву композиційного матеріалу G_{12} залежить тільки від поздовжніх модулів зсуву матриці G_{12}^* і волокна G_{12}° та об'ємного вмісту матриці й волокна в композиті, й не залежить від інших пружних характеристик складових.

Розраховані пружні сталі композиційного матеріалу та проведено порівняння з результатами, отриманими іншими авторами, та результатами експериментальних досліджень. Порівняння з експериментальними даними чисельних результатів, отриманих за запропонованими формулами, показує хорошу збіжність. Однак, поперечні характеристики, які можна обчислювати за формулами на основі рівності радіальних та окружних переміщень, дають, відповідно, завищені та занижені значення, особливо для гумовокордних матеріалів. Тому отримання більш точних та однозначних співвідношень є актуальною задачею.

Основні положення розділу викладено у роботах [54, 56, 71, 79, 90, 203, 248, 257, 282, 292].

РОЗДІЛ 3

УДОСКОНАЛЕННЯ ПІДХОДІВ ДО ГОМОГЕНІЗАЦІЇ КОМПОЗИЦІЙНОГО
МАТЕРІАЛУ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ МАТРИЦІ ТА
ВОЛОКНА НА ОСНОВІ ЕНЕРГЕТИЧНИХ УМОВ УЗГОДЖЕННЯ

На основі енергетичної умови узгодження уточнюються ефективні пружні сталі композита із трансропними матрицею та волокном. Наводиться підхід для визначення ефективних механічних характеристик композиційного матеріалу, що містить два сорти однаково спрямованих армуючих волокон.

3.1 Застосування енергетичних умов узгодження до визначення ефективних пружних сталей композиційного матеріалу при лінійних деформаціях

Поздовжнє розтягнення. Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис. 2.4а) суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю.

У випадку поздовжнього розтягнення напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна описуватиметься формулами (2.13)-(2.15):

$$u_r^\circ(r) = Cr; u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1 - \nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1 - \nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right); \sigma_{\theta\theta}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1 - \nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right). \quad (3.2)$$

А використовуючи співвідношення (А.1), (А.3), (А.5) та (А.46), матимемо:

$$\sigma_{zz}^{\circ} = \sigma_0^{\circ}, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{rr}^{\circ}(r) = C; \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ}(r) = C; \varepsilon_{zz}^{\circ}(z) = \frac{1}{(1 - \nu_{23}^{\circ})} \left(\frac{\sigma_0^{\circ}(1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})}{E_1^{\circ}} - 2C\nu_{21}^{\circ} \right). \quad (3.4)$$

Для трансверсально-ізотропної матриці напружено-деформований стан у випадку поздовжнього розтягнення описуватиметься формулами (2.16), (2.17):

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r}; u_z^*(z) = \frac{1}{(1 - \nu_{23}^*)} \left(\frac{\sigma_0^*(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right) z, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1 - \nu_{23}^*)} + \frac{A}{1 - \nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2(1 + \nu_{23}^*)} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1 - \nu_{23}^*)} + \frac{A}{1 - \nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2(1 + \nu_{23}^*)} \right). \quad (3.6)$$

Використовуючи співвідношення (А.1), (А.3), (А.5) та (А.46), отримаємо:

$$\sigma_{zz}^* = \sigma_0^*, \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{rr}^*(r) = A - \frac{B}{r^2}; \varepsilon_{\theta\theta}^*(r) = A + \frac{B}{r^2};$$

$$\varepsilon_{zz}^*(z) = \frac{1}{(1 - \nu_{23}^*)} \left(\frac{\sigma_0^*(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right). \quad (3.8)$$

Знайдемо пружні сталі композиційного матеріалу, використовуючи енергетичний критерій як умову узгодження. Цей критерій полягає в тому, що пружні сталі знаходяться з умови рівності енергії пружної деформації

трансверсально-ізотропного однорідного циліндра (або іншого тіла), що моделює композиційний матеріал, та енергії пружної деформації суцільного циліндра, який складається з суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистого циліндра, що моделює матрицю, тобто

$$U^* + U^\circ = U, \quad (3.9)$$

де енергія пружної деформації для композиційного матеріалу, матеріалу матриці та матеріалу волокна в циліндричній системі координат визначається формулою:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \sigma_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \sigma_{zr} \gamma_{zr}) r dr d\theta dz. \quad (3.10)$$

Тоді у випадку поздовжнього розтягнення пружна енергія деформації для матриці, волокна й композита набуде вигляду:

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_{rr}^* \varepsilon_{rr}^* + \sigma_{\theta\theta}^* \varepsilon_{\theta\theta}^* + \sigma_{zz}^* \varepsilon_{zz}^*) r dr d\theta dz; \\ U^\circ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_{rr}^\circ \varepsilon_{rr}^\circ + \sigma_{\theta\theta}^\circ \varepsilon_{\theta\theta}^\circ + \sigma_{zz}^\circ \varepsilon_{zz}^\circ) r dr d\theta dz; \\ U &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}) r dr d\theta dz. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Враховуючи співвідношення (3.1)-(3.4), отримані для напружено-деформованого стану матеріалу волокна при поздовжньому розтягненні, а також вирази для сталих, знайдені з граничних умов у попередньому розділі, матимемо:

$$\begin{aligned}
U^\circ &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(\sigma_{rr}^\circ \varepsilon_{rr}^\circ + \sigma_{\theta\theta}^\circ \varepsilon_{\theta\theta}^\circ + \sigma_{zz}^\circ \varepsilon_{zz}^\circ \right) r dz dr d\theta = \\
&= \frac{\pi h}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)} \int_0^a \left(2E_2^\circ C^2 E_1^\circ + (\sigma_0^\circ)^2 (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) \right) r dr = \\
&= \frac{\pi h a^2 (\sigma_0^\circ)^2}{2E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ) (d_1 - d_2)^2 (d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2} \times \\
&\times \left(\left((d_1 - d_2)^2 (1 - \nu_{23}^\circ) - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ d_1 (d_1 - 2d_2) \right) (d^*)^2 - \right. \\
&\left. - 4\nu_{21}^\circ E_1^\circ d_1 d_2 \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} d^* d^\circ + 2E_1^\circ E_2^\circ (d_1)^2 \frac{\nu_{12}^* \nu_{12}^*}{E_1^* E_1^*} (d^\circ)^2 \right). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (3.5)-(3.8), отримані для напружено-деформованого стану матеріалу матриці при поздовжньому розтягненні, а також вирази для сталих, знайдені з граничних умов у попередньому розділі, матимемо:

$$\begin{aligned}
U^* &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^b \left(\sigma_{rr}^* \varepsilon_{rr}^* + \sigma_{\theta\theta}^* \varepsilon_{\theta\theta}^* + \sigma_{zz}^* \varepsilon_{zz}^* \right) r dr d\theta dz = \\
&= \frac{\pi h E_2^*}{(1 - \nu_{23}^*)} \int_a^b \left(\frac{\sigma_0^* \sigma_0^* (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_2^* E_1^*} r + 2A^2 r + \frac{2B^2 (1 - \nu_{23}^*)}{r^3 (1 + \nu_{23}^*)} \right) dr = \\
&= \frac{\pi h (b^2 - a^2)}{E_1^* (1 - \nu_{23}^*)} \left(\frac{\sigma_0^* \sigma_0^* (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{2} + A^2 E_2^* E_1^* + \frac{B^2 E_2^* E_1^* (1 - \nu_{23}^*)}{b^2 a^2 (1 + \nu_{23}^*)} \right) = \\
&= \frac{\pi h (\sigma_0^*)^2 (b^2 - a^2)}{E_1^* (d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2 (d_1 - d_2)^2} \times \\
&\times \left(\left(\left(\frac{(d_1 - d_2)}{2} + 2\nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ \right) (d_1 - d_2) + \nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ d_2 \right) (d^\circ)^2 + \right. \\
&\left. + f \nu_{21}^\circ \nu_{21}^\circ E_2^* E_1^* (f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)) (d^*)^2 - 2E_2^* f \nu_{21}^\circ \nu_{12}^* d_1 d^* d^\circ \right). \quad (3.13)
\end{aligned}$$

У випадку поздовжнього розтягнення напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного композиційного матеріалу описуватиметься формулами (2.27), (2.30), (2.32):

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0; \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_0; \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_0, \quad (3.14)$$

$$\sigma_{rr} = 0; \sigma_{\theta\theta} = 0; \sigma_{zz} = \sigma_0. \quad (3.15)$$

Враховуючи співвідношення (3.14)-(3.15), отримані для напружено-деформованого стану композиційного матеріалу при поздовжньому розтягненні, матимемо:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}) r dz dr d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{(\sigma_0)^2}{E_1} r dz dr d\theta = \frac{h (\sigma_0)^2}{2 E_1} \int_0^b \int_0^{2\pi} r dr d\theta = \frac{hb^2 (\sigma_0)^2}{4 E_1} \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{\pi hb^2 (\sigma_0)^2}{2 E_1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

На основі енергетичної умови узгодження (3.9) з урахуванням сталих, отриманих у попередньому розділі з використанням граничних умов, при поздовжньому розтягненні матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\pi hb^2 (\sigma_0)^2}{2 E_1} &= \frac{\pi h (\sigma_0)^2 (b^2 - a^2)}{E_1^* (d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2 (d_1 - d_2)^2} \times \\ &\times \left(\left(\left((d_1 - d_2)/2 + 2\nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ \right) (d_1 - d_2) + \nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ d_2 \right) (d^\circ)^2 + \right. \\ &\left. + f \nu_{21}^\circ \nu_{21}^\circ E_2^* E_1^* (f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*)) (d^*)^2 - 2E_2^* f \nu_{21}^\circ \nu_{12}^* d_1 d^* d^\circ \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi h a^2 (\sigma_0)^2}{2E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ) (d_1 - d_2)^2 (d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2} \times \\
& \times \left(\left((d_1 - d_2)^2 (1 - \nu_{23}^\circ) - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ d_1 (d_1 - 2d_2) \right) (d^*)^2 - \right. \\
& \left. - 4\nu_{21}^\circ E_1^\circ d_1 d_2 \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} d^* d^\circ + 2E_1^\circ E_2^\circ (d_1)^2 \frac{\nu_{12}^* \nu_{12}^*}{E_1^* E_1^*} (d^\circ)^2 \right),
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_1} = & \frac{1}{(d^\circ + f(d^* - d^\circ))^2} \left(\frac{(1-f)}{E_1^*} \left(1 + \frac{2\nu_{21}^* \nu_{12}^* f E_2^\circ}{d_1 - d_2} \right) (d^\circ)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{f}{E_1^\circ} \left(1 + \frac{2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ E_2^* (1-f)}{d_1 - d_2} \right) (d^*)^2 - \frac{4\nu_{21}^* f \nu_{21}^\circ (1-f)}{d_1 - d_2} d^* d^\circ \right). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропною матрицею та волокном:

$$E_1 = \frac{(d^\circ (1-f) + d^* f) (E_2^* (f-1) (1 - \nu_{23}^\circ) + E_2^\circ (\nu_{23}^* (f-1) - (1+f))) E_1^*}{(E_2^* (f-1) (1 - \nu_{23}^\circ) - E_2^\circ (1 + \nu_{23}^* + f (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^* \nu_{12}^*))) d^\circ - 2f \nu_{12}^* \nu_{21}^\circ E_2^* d^*},$$

або

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^\circ \beta) E_1^* (1-f) + (\alpha - 2\nu_{12}^* \beta) E_1^\circ f}{\alpha - 2\beta \nu_{12}^\circ + 2f \nu_{21}^* E_2^\circ (\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}. \quad (3.18)$$

де α , β визначаються відповідно формулами (2.37).

Як можна помітити, формула (3.18), отримана в задачі про поздовжнє розтягнення на основі енергетичного критерію узгодження, повністю збігається з формулою (2.36), отриманою в аналогічній задачі про поздовжнє розтягнення на основі кінематичної умови узгодження.

Поперечне розтягнення. Розглянемо сумісне вісесиметричне поперечне розтягнення суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю (рис. 2.9а). Тоді на основі отриманого розв'язку (2.13)-(2.15) ненульові компоненти напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного волокна при поперечному розтягненні описуватимуться такими співвідношеннями:

$$u_r^\circ(r) = Cr; u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1 - \nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z, \quad (3.19)$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1 - \nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right); \sigma_{\theta\theta}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1 - \nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right); \sigma_{zz}^\circ = \sigma_0^\circ, \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{rr}^\circ(r) = C; \varepsilon_{\theta\theta}^\circ(r) = C; \varepsilon_{zz}^\circ(z) = \frac{1}{(1 - \nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\sigma_0^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right). \quad (3.21)$$

Тоді на основі енергетичного критерію узгодження для енергії пружного деформування матеріалу волокна маємо:

$$\begin{aligned} U^\circ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_{rr}^\circ \varepsilon_{rr}^\circ + \sigma_{\theta\theta}^\circ \varepsilon_{\theta\theta}^\circ + \sigma_{zz}^\circ \varepsilon_{zz}^\circ) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{1}{2E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left((\sigma_0^\circ)^2 (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) + 2E_2^\circ E_1^\circ C^2 \right) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{\pi h a^2}{2E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)} \left((\sigma_{zz}^\circ)^2 (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) + 2E_2^\circ E_1^\circ C^2 \right). \quad (3.22) \end{aligned}$$

Аналогічно, на основі (2.16), (2.17) ненульові компоненти напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропної матриці запишуться у вигляді:

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r}; \quad u_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^*)} \left(\frac{\sigma_{zz}^* (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right) z, \quad (3.23)$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_{zz}^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E_2^* \left(\frac{\sigma_{zz}^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right);$$

$$\sigma_{zz}^* = \sigma_{zz}^*, \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_{rr}^*(r) = A - \frac{B}{r^2}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^*(r) = A + \frac{B}{r^2};$$

$$\varepsilon_{zz}^*(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^*)} \left(\frac{\sigma_{zz}^* (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* \right). \quad (3.25)$$

Тоді на основі енергетичного критерію узгодження, для енергії пружного деформування матеріалу матриці маємо:

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_{rr}^* \varepsilon_{rr}^* + \sigma_{\theta\theta}^* \varepsilon_{\theta\theta}^* + \sigma_{zz}^* \varepsilon_{zz}^*) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{E_2^*}{2(1-\nu_{23}^*)} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{(\sigma_{zz}^*)^2 (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{E_2^* E_1^*} r + 2A^2 r + \frac{2B^2 (1-\nu_{23}^*)}{r^3 (1+\nu_{23}^*)} \right) dr d\theta dz = \\ &= \frac{\pi h (b^2 - a^2)}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} \left(\frac{(\sigma_{zz}^*)^2 (1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{2} + A^2 E_2^* E_1^* + \frac{B^2 E_2^* E_1^* (1-\nu_{23}^*)}{b^2 a^2 (1+\nu_{23}^*)} \right). \quad (3.26) \end{aligned}$$

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу (рис. 2.9б). У цьому випадку поле напружень визначатиметься такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = 0; \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0; \sigma_{rr} = \sigma_0; \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0. \quad (3.27)$$

Співвідношення для ненульових складових вектора переміщень запишуться у вигляді:

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2} r; u_z(z) = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1} z. \quad (3.28)$$

А вирази для ненульових компонентів деформацій набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2}; \varepsilon_{zz} = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1}. \quad (3.29)$$

Енергія пружної деформації трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композиційний матеріал, запишеться у такому вигляді:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b (\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta}) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b \left(\frac{(\sigma_0)^2(1-\nu_{23})}{E_2} + \frac{(\sigma_0)^2(1-\nu_{23})}{E_2} \right) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^2 (1-\nu_{23})}{E_2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Для визначення пружних сталей трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композиційний матеріал, скористаємося енергетичним критерієм (3.9) як умовою узгодження, тобто:

$$\frac{\pi h (b^2 - a^2)}{E_1^* (1 - \nu_{23}^*)} \left(\frac{(\sigma_{zz}^*)^2 (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*)}{2} + A^2 E_2^* E_1^* + \frac{B^2 E_2^* E_1^* (1 - \nu_{23}^*)}{b^2 a^2 (1 + \nu_{23}^*)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi h a^2}{2E_1^\circ(1-\nu_{23}^\circ)} \left((\sigma_{zz}^\circ)^2 (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) + 2E_2^\circ E_1^\circ C^2 \right) = \\
& = \frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^\circ (1-\nu_{23})}{E_2}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів для сталих A , B , C , отриманих у підрозділі 2.3, отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi h (b^2 - a^2)}{2E_1^* E_2^* (d_2 - d_1)^2 (1 - \nu_{23}^*)} \left((\sigma_{zz}^*)^2 E_2^* \left(E_2^{\circ 2} (1 - \nu_{23}^*) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left((1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*) f^2 (1 - \nu_{23}^*) + 2(1 + \nu_{23}^*) f (1 - \nu_{23}^* - \nu_{12}^* \nu_{21}^*) + (1 + \nu_{23}^*)^2 \right) - \right. \right. \\
& - 2E_2^* E_2^\circ (f - 1) (1 - \nu_{23}^\circ) (1 - \nu_{23}^*) \left(f (1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^* \nu_{21}^*) + (1 + \nu_{23}^*) \right) + \\
& \left. \left. + E_2^{*2} (f - 1)^2 (1 - \nu_{23}^\circ)^2 (1 - \nu_{23}^*) \right) + 2\sigma_0^2 E_1^* (1 - \nu_{23}^*) \times \right. \\
& \times \left. \left((1 - \nu_{23}^*) \left(E_2^\circ (1 + \nu_{23}^*) + E_2^* (1 - \nu_{23}^\circ) \right) \right)^2 + f (1 + \nu_{23}^*) \left(E_2^* (1 - \nu_{23}^\circ) - (1 - \nu_{23}^*) E_2^\circ \right)^2 \right) + \\
& + 4\sigma_0 \sigma_{zz}^* E_1^* \nu_{21}^* (1 - \nu_{23}^*) \left(2E_2^* E_2^\circ (1 + \nu_{23}^*) (1 - \nu_{23}^\circ) (f - 1) - \right. \\
& - E_2^\circ E_2^\circ (1 + \nu_{23}^*) \left((1 + \nu_{23}^*) + f (1 - \nu_{23}^*) \right) + E_2^* E_2^* (1 - \nu_{23}^\circ) (f - 1) (1 - \nu_{23}^\circ) \left. \right) - \\
& - 8\sigma_{zz}^\circ \sigma_0 E_1^* f \nu_{21}^\circ E_2^* E_2^* (1 - \nu_{23}^\circ) (1 - \nu_{23}^*) - \\
& - 4\sigma_{zz}^\circ \sigma_{zz}^* E_1^* f \nu_{21}^\circ E_2^* (1 - \nu_{23}^*) \nu_{21}^* E_2^* (f - 1) (1 - \nu_{23}^\circ) + \\
& \left. + 2\sigma_{zz}^\circ{}^2 E_1^* f \nu_{21}^\circ{}^2 E_2^{*2} (1 - \nu_{23}^*) \left(f (1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*) \right) \right) + \\
& + \frac{\pi h a^2}{2E_1^\circ (d_2 - d_1)^2 (1 - \nu_{23}^\circ)} \left((\sigma_{zz}^\circ)^2 (1 - \nu_{23}^\circ) \times \right. \\
& \times \left(E_2^{\circ 2} \left(f (1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*) \right) \right)^2 + E_2^{*2} (f - 1)^2 (1 - \nu_{23}^\circ) (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) - \\
& - 2E_2^* (f - 1) (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) E_2^\circ \left(f (1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*) \right) \left. \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8\sigma_0^2 E_2^\circ E_1^\circ (1 - v_{23}^\circ)^2 + 8\sigma_{zz}^* \sigma_0 E_2^\circ E_1^\circ v_{21}^* (f - 1) (1 - v_{23}^\circ) (1 - v_{23}^\circ) + \\
& \quad + 2\sigma_{zz}^*{}^2 E_2^\circ E_1^\circ v_{21}^*{}^2 (f - 1)^2 (1 - v_{23}^\circ)^2 - \\
& \quad - 8\sigma_{zz}^\circ \sigma_0 E_2^\circ E_1^\circ v_{21}^\circ (f(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*)) (1 - v_{23}^\circ) - \\
& \quad - 4\sigma_{zz}^\circ \sigma_{zz}^* E_2^\circ E_1^\circ v_{21}^\circ (f(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*)) v_{21}^* (f - 1) (1 - v_{23}^\circ) = \\
& \quad = \frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^2 (1 - v_{23})}{E_2}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів для σ_{zz}^* та σ_{zz}° , отриманих у підрозділі 2.3, та перетворень з урахуванням позначень, прийнятих у попередньому розділі, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - v_{23}}{E_2} = & \frac{E_2^* (1 - v_{23}^\circ) (f(1 + v_{23}^*) + (1 - v_{23}^*)) + E_2^\circ (1 + v_{23}^*) (1 - v_{23}^\circ) (1 - f)}{E_2^* (d_2 - d_1)} + \\
& + \frac{d_0 f (f - 1) (v_{21}^* E_2^\circ (1 + v_{23}^*) + v_{21}^\circ E_2^* (1 - v_{23}^\circ) - 2v_{21}^\circ E_2^*)}{E_2^* (d_2 - d_1) (d_1^* f + d_1^\circ (f - 1))}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

де d_1 , d_2 , d_1° , d_1^* та d_0 визначаються, відповідно, формулами (2.22), (2.51).

З урахуванням виразу для $\gamma = E_2^* (1 - v_{23}^\circ) + E_2^\circ (1 + v_{23}^*)$ та співвідношень (2.37) матимемо:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - v_{23}}{E_2} = & \frac{E_2^* (1 - v_{23}^\circ) (f(1 + v_{23}^*) + (1 - v_{23}^*)) + E_2^\circ (1 - (v_{23}^*)^2) (1 - f)}{E_2^* \alpha} + \\
& + \frac{2f E_1^* E_1^\circ (1 - f) (v_{21}^* \gamma - 2v_{21}^\circ E_2^*)^2}{(E_2^*)^2 \alpha (2\beta (E_1^* (1 - f) v_{12}^\circ + E_1^\circ f v_{12}^*) - \alpha (E_1^\circ f + E_1^* (1 - f)))}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Як можна помітити, формула (3.34), отримана в задачі про поперечне розтягнення на основі енергетичної умови узгодження, повністю збігається з формулою (2.64), отриманою в аналогічній задачі про поперечне розтягнення на основі кінематичної умови узгодження.

Сумісне поздовжнє та поперечне розтягнення. На основі енергетичної умови узгодження при розв'язанні однієї задачі можна отримати одну ефективну пружну сталу композиційного матеріалу. Однак, урахувавши, що композиційний матеріал є трансверсально-ізотропним і його пружні властивості характеризуються п'ятьма пружними сталими, розв'язків чотирьох описаних вище задач – поздовжнього та поперечного розтягнення, поздовжнього та поперечного зсуву – буде недостатньо для визначення всіх пружних сталих композиційного матеріалу. Тому розглянемо вісесиметричне деформування суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю, при сумісній дії поздовжнього та поперечного розтягнення. Не зменшуючи загальності результату, будемо вважати, що навантаження, що прикладаються в поздовжньому та поперечному напрямі, однакові та дорівнюють σ_0 . Тоді на основі отриманих співвідношень (3.1)-(3.8), (3.14)-(3.15), (3.19)-(3.21), (3.23)-(3.25), (3.27)-(3.29) і методу суперпозицій матимемо розв'язок цієї задачі.

Ненульові компоненти напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного волокна при поперечному розтягненні (позначимо \sim) описуватимуться такими співвідношеннями:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{\circ}(r) = \frac{E_2^{\circ}}{(1 - \nu_{23}^{\circ})} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^{\circ} \nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}} + \tilde{C} \right); \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{\circ}(r) = \frac{E_2^{\circ}}{(1 - \nu_{23}^{\circ})} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^{\circ} \nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}} + \tilde{C} \right); \quad \tilde{\sigma}_{zz}^{\circ} = \tilde{\sigma}_0^{\circ}, \quad (3.35)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{rr}^{\circ}(r) = \tilde{C}; \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{\circ}(r) = \tilde{C}; \quad \tilde{\varepsilon}_{zz}^{\circ}(z) = \frac{1}{(1 - \nu_{23}^{\circ})} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^{\circ} (1 - \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{12}^{\circ} \nu_{21}^{\circ})}{E_1^{\circ}} - 2\tilde{C} \nu_{21}^{\circ} \right), \quad (3.36)$$

$$\tilde{C} = \sigma_0 \frac{2(1 - \nu_{23}^{\circ})}{(d_2 - d_1)} - \frac{\nu_{21}^{\circ} (f(1 - \nu_{23}^*) + (1 + \nu_{23}^*))}{(d_2 - d_1)} \tilde{\sigma}_0^{\circ} + \frac{\nu_{21}^* d_1}{E_2^* (d_2 - d_1)} \tilde{\sigma}_0^*, \quad (3.37)$$

$$\tilde{\sigma}_0^* = \sigma_0 \frac{d_0 f}{d^* f + d^\circ (1-f)}; \quad \tilde{\sigma}_0^\circ = \sigma_0 \frac{d_0 (f-1)}{d^* f + d^\circ (1-f)}, \quad (3.38)$$

де $d_1, d_2, d^\circ, d^*, d_0$ визначаються, відповідно, формулами (2.22), (2.25), (2.51).

При поздовжньому розтягненні (позначимо \wedge) напружено-деформований стан волокна описуватиметься такими співвідношеннями:

$$\hat{\sigma}_{rr}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + \hat{C} \right); \quad \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + \hat{C} \right); \quad \hat{\sigma}_{zz}^\circ = \hat{\sigma}_0^\circ, \quad (3.39)$$

$$\hat{\varepsilon}_{rr}^\circ(r) = \hat{C}; \quad \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ(r) = \hat{C}; \quad \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^\circ (1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2\hat{C} \nu_{21}^\circ \right), \quad (3.40)$$

$$\hat{C} = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \frac{\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} \hat{\sigma}_0^\circ - \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} \frac{d_1}{d_1 - d_2} \hat{\sigma}_0^*, \quad (3.41)$$

$$\hat{\sigma}_0^* = \frac{\sigma_0 d^\circ}{d^* f + d^\circ (1-f)}; \quad \hat{\sigma}_0^\circ = \frac{\sigma_0 d^*}{d^* f + d^\circ (1-f)}, \quad (3.42)$$

де d_1, d_2, d°, d^* визначаються, відповідно, формулами (2.22), (2.51).

Аналогічно, ненульові компоненти напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропної матриці при поперечному розтягненні запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}^*(r) &= E_2^* \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{\tilde{A}}{1-\nu_{23}^*} - \frac{\tilde{B}}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right); \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^*(r) &= E_2^* \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1-\nu_{23}^*)} + \frac{\tilde{A}}{1-\nu_{23}^*} + \frac{\tilde{B}}{r^2 (1+\nu_{23}^*)} \right); \\ \tilde{\sigma}_{zz}^* &= \tilde{\sigma}_0^*, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{rr}^*(r) &= \tilde{A} - \frac{\tilde{B}}{r^2}; \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^*(r) = \tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{r^2}; \\
\tilde{\varepsilon}_{zz}^*(z) &= \frac{1}{(1-v_{23}^*)} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^* (1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)}{E_1^*} - 2\tilde{A}v_{21}^* \right), \\
\tilde{B} &= \frac{a^2(1+v_{23}^*) (E_2^* (1-v_{23}^\circ) - (1-v_{23}^*) E_2^\circ)}{E_2^* (d_2 - d_1)} \sigma_0 - \frac{a^2(1+v_{23}^*) v_{21}^\circ}{(d_2 - d_1)} \tilde{\sigma}_0^\circ + \\
&\quad + \frac{a^2(1+v_{23}^*) v_{21}^* E_2^\circ}{E_2^* (d_2 - d_1)} \tilde{\sigma}_0^*; \\
\tilde{A} &= \sigma_0 \frac{(1-v_{23}^*) (E_2^\circ (1+v_{23}^*) + E_2^* (1-v_{23}^\circ))}{E_2^* (d_2 - d_1)} - \tilde{\sigma}_0^\circ \frac{fv_{21}^\circ (1-v_{23}^*)}{(d_2 - d_1)} + \\
&\quad + \tilde{\sigma}_0^* \frac{v_{21}^* (d_1 - E_2^\circ (1+v_{23}^*))}{E_2^* (d_2 - d_1)},
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
&\tag{3.45}
\end{aligned}$$

де $d_1, d_2, \tilde{\sigma}_0^*, \tilde{\sigma}_0^\circ$ визначаються, відповідно, формулами (2.22), (3.38).

При поздовжньому розтягненні матимемо:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{rr}^*(r) &= E_2^* \left(\frac{\hat{\sigma}_0^* v_{12}^*}{E_1^* (1-v_{23}^*)} + \frac{\hat{A}}{1-v_{23}^*} - \frac{\hat{B}}{r^2 (1+v_{23}^*)} \right); \\
\hat{\sigma}_{\theta\theta}^*(r) &= E_2^* \left(\frac{\hat{\sigma}_0^* v_{12}^*}{E_1^* (1-v_{23}^*)} + \frac{\hat{A}}{1-v_{23}^*} + \frac{\hat{B}}{r^2 (1+v_{23}^*)} \right); \\
\hat{\sigma}_{zz}^* &= \hat{\sigma}_0^*,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{rr}^*(r) &= \hat{A} - \frac{\hat{B}}{r^2}; \quad \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^*(r) = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{r^2}; \\
\hat{\varepsilon}_{zz}^*(z) &= \frac{1}{(1-v_{23}^*)} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^* (1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)}{E_1^*} - 2\hat{A}v_{21}^* \right), \\
\hat{B} &= \frac{v_{21}^\circ a^2 (1+v_{23}^*)}{d_1 - d_2} \hat{\sigma}_0^\circ - \frac{a^2 E_2^\circ (1+v_{23}^*) v_{12}^*}{d_1 - d_2} \frac{\hat{\sigma}_0^*}{E_1^*};
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\hat{A} = \frac{fv_{21}^{\circ}(1-v_{23}^*)}{d_1-d_2}\hat{\sigma}_0^{\circ} - \frac{v_{12}^*}{E_1^*} \frac{fE_2^{\circ}(1-v_{23}^*)+d_1-d_2}{d_1-d_2}\hat{\sigma}_0^*, \quad (3.49)$$

де $d_1, d_2, \hat{\sigma}_0^{\circ}, \hat{\sigma}_0^*$ визначаються, відповідно, формулами (2.22), (3.42).

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу. У випадку поперечного розтягнення поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\tilde{\sigma}_{zz} = 0; \tilde{\sigma}_{zr} = \tilde{\sigma}_{\theta z} = \tilde{\sigma}_{r\theta} = 0; \tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_0; \tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_0. \quad (3.50)$$

Вирази для ненульових компонентів деформацій у випадку поперечного розтягнення набудуть вигляду:

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2}; \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0(1-\nu_{23})}{E_2}; \tilde{\varepsilon}_{zz} = -\frac{2\sigma_0\nu_{12}}{E_1}. \quad (3.51)$$

Для випадку поздовжнього розтягнення поле напружень визначатиметься такими співвідношеннями:

$$\hat{\sigma}_{zz} = \sigma_0, \hat{\sigma}_{rr} = 0, \hat{\sigma}_{\theta\theta} = 0, \hat{\sigma}_{zr} = \hat{\sigma}_{\theta z} = \hat{\sigma}_{r\theta} = 0, \quad (3.52)$$

а вирази для деформацій набудуть вигляду:

$$\hat{\varepsilon}_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0; \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0; \hat{\varepsilon}_{zz} = \frac{1}{E_1}\sigma_0. \quad (3.53)$$

Тоді на основі принципу суперпозицій, для енергії пружного деформування матеріалу волокна отримуємо:

$$\begin{aligned}
U^\circ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left((\tilde{\sigma}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{rr}^\circ) (\tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ) + (\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ) (\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ) \right) + \\
&+ \left(\tilde{\sigma}_{zz}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \right) \left(\tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ + \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ \right) r dr d\theta dz = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left((\tilde{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \tilde{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ) \right) + \\
&+ \left(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ \right) + \\
&+ \left(\tilde{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ + \tilde{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ \right) r dr d\theta dz = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left((\tilde{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \tilde{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ) \right) + \\
&+ \left(\hat{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \tilde{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ + \tilde{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ \right) + \\
&+ \left(\hat{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ \right) r dr d\theta dz. \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Аналогічно запишемо вираз для енергії пружного деформування матеріалу матриці:

$$\begin{aligned}
U^* &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left((\tilde{\sigma}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{rr}^*) (\tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\varepsilon}_{rr}^*) + (\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^*) (\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^*) \right) + \\
&+ \left(\tilde{\sigma}_{zz}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \right) \left(\tilde{\varepsilon}_{zz}^* + \hat{\varepsilon}_{zz}^* \right) r dr d\theta dz = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left((\tilde{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \tilde{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^*) \right) + \\
&+ \left(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^* \right) + \\
&+ \left(\tilde{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^* + \tilde{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^* \right) r dr d\theta dz = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left((\tilde{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \tilde{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^*) \right) + \\
&+ \left(\hat{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \tilde{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^* + \tilde{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^* \right) + \\
&+ \left(\hat{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^* \right) r dr d\theta dz. \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Енергія пружної деформації трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композиційний матеріал, запишеться у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b (\sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}) r dr d\theta dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b (\tilde{\sigma}_{rr} (\tilde{\varepsilon}_{rr} + \hat{\varepsilon}_{rr}) + \tilde{\sigma}_{\theta\theta} (\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}) + \hat{\sigma}_{zz} (\tilde{\varepsilon}_{zz} + \hat{\varepsilon}_{zz})) r dr d\theta dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b ((\tilde{\sigma}_{rr} \tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}) + (\tilde{\sigma}_{rr} \hat{\varepsilon}_{rr} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \hat{\sigma}_{zz} \tilde{\varepsilon}_{zz}) + (\hat{\sigma}_{zz} \hat{\varepsilon}_{zz})) r dr d\theta dz. \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Для визначення пружних сталей трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композиційний матеріал, скористаємося енергетичним критерієм (3.9) як умовою узгодження, після підстановки маємо:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a ((\tilde{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \tilde{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^*) + \\
 &+ (\hat{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \tilde{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^* + \tilde{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^*) + \\
 &+ (\hat{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^*)) r dr d\theta dz + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^0 ((\tilde{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \tilde{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ) + \\
 &+ (\hat{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \tilde{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ + \tilde{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ) + \\
 &+ (\hat{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ)) r dr d\theta dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b ((\tilde{\sigma}_{rr} \tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}) + (\tilde{\sigma}_{rr} \hat{\varepsilon}_{rr} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \hat{\sigma}_{zz} \tilde{\varepsilon}_{zz}) + (\hat{\sigma}_{zz} \hat{\varepsilon}_{zz})) r dr d\theta dz,
 \end{aligned}$$

або:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\tilde{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \tilde{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^*) r dr d\theta dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\tilde{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \tilde{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ) r dr d\theta dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\hat{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \tilde{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^* + \tilde{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^*) r dr d\theta dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\hat{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \tilde{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ + \tilde{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ) r dr d\theta dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\hat{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^*) r dr d\theta dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\hat{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ) r dr d\theta dz = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\tilde{\sigma}_{rr} \tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}) r dr d\theta dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\tilde{\sigma}_{rr} \hat{\varepsilon}_{rr} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \hat{\sigma}_{zz} \tilde{\varepsilon}_{zz}) r dr d\theta dz + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \hat{\sigma}_{zz} \hat{\varepsilon}_{zz} r dr d\theta dz. \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Аналізуючи отриману рівність, можна помітити, що деякі доданки наявні в ній тільки при чистому поздовжньому розтягненні, другі – тільки при чистому поперечному розтягненні і треті – тільки при сумісному деформуванні в умовах поздовжнього та поперечного деформування. Так, можна помітити, що сума перших двох інтегралів у лівій частині дорівнює першому інтегралу в правій частині, і ця рівність була використана в задачі про поперечне розтягнення, в результаті чого для композиційного матеріалу була отримана пружна стала $\frac{1-\nu_{23}}{E_2}$. Аналогічно, можна помітити, що сума двох останніх

інтегралів у лівій частині дорівнює останньому інтегралу у правій частині, і ця рівність була використана в задачі про поздовжнє розтягнення, в результаті

чого для композиційного матеріалу була отримана пружна стала E_1 . Враховуючи все вищевикладене для визначення решти пружних сталей композиційного матеріалу, від рівності (3.56) приходимо до рівності:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\hat{\sigma}_{rr}^* \tilde{\varepsilon}_{rr}^* + \tilde{\sigma}_{rr}^* \hat{\varepsilon}_{rr}^* + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^* \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^* \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^* + \hat{\sigma}_{zz}^* \tilde{\varepsilon}_{zz}^* + \tilde{\sigma}_{zz}^* \hat{\varepsilon}_{zz}^* \right) r dr d\theta dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\hat{\sigma}_{rr}^\circ \tilde{\varepsilon}_{rr}^\circ + \tilde{\sigma}_{rr}^\circ \hat{\varepsilon}_{rr}^\circ + \hat{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^\circ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^\circ + \hat{\sigma}_{zz}^\circ \tilde{\varepsilon}_{zz}^\circ + \tilde{\sigma}_{zz}^\circ \hat{\varepsilon}_{zz}^\circ \right) r dr d\theta dz = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\tilde{\sigma}_{rr} \hat{\varepsilon}_{rr} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \hat{\sigma}_{zz} \tilde{\varepsilon}_{zz} \right) r dr d\theta dz. \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Підставимо в останню рівність відповідні співвідношення для компонент напружень та деформацій:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(E_2^* \left(\frac{\hat{\sigma}_0^* v_{12}^*}{E_1^* (1 - v_{23}^*)} + \frac{\hat{A}}{1 - v_{23}^*} - \frac{\hat{B}}{r^2 (1 + v_{23}^*)} \right) \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{B}}{r^2} \right) + \right. \\
& + E_2^* \left(\frac{\tilde{\sigma}_{zz}^* v_{12}^*}{E_1^* (1 - v_{23}^*)} + \frac{\tilde{A}}{1 - v_{23}^*} - \frac{\tilde{B}}{r^2 (1 + v_{23}^*)} \right) \left(\hat{A} - \frac{\hat{B}}{r^2} \right) + \\
& + E_2^* \left(\frac{\hat{\sigma}_0^* v_{12}^*}{E_1^* (1 - v_{23}^*)} + \frac{\hat{A}}{1 - v_{23}^*} + \frac{\hat{B}}{r^2 (1 + v_{23}^*)} \right) \left(\tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{r^2} \right) + \\
& + E_2^* \left(\frac{\tilde{\sigma}_{zz}^* v_{12}^*}{E_1^* (1 - v_{23}^*)} + \frac{\tilde{A}}{1 - v_{23}^*} + \frac{\tilde{B}}{r^2 (1 + v_{23}^*)} \right) \left(\hat{A} + \frac{\hat{B}}{r^2} \right) + \\
& + \hat{\sigma}_0^* \frac{1}{(1 - v_{23}^*)} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^* (1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)}{E_1^*} - 2\tilde{A} v_{21}^* \right) + \\
& \left. + \tilde{\sigma}_0^* \frac{1}{(1 - v_{23}^*)} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^* (1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)}{E_1^*} - 2\hat{A} v_{21}^* \right) \right) r dr d\theta dz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{E_2^\circ}{(1-v_{23}^\circ)} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ} + \hat{C} \right) \tilde{C} + \frac{E_2^\circ}{(1-v_{23}^\circ)} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ} + \tilde{C} \right) \hat{C} + \right. \\
& \quad + \frac{E_2^\circ}{(1-v_{23}^\circ)} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ} + \hat{C} \right) \tilde{C} + \frac{E_2^\circ}{(1-v_{23}^\circ)} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ} + \tilde{C} \right) \hat{C} + \\
& \quad + \hat{\sigma}_0^\circ \frac{1}{(1-v_{23}^\circ)} \left(\frac{\tilde{\sigma}_0^\circ (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2\tilde{C}v_{21}^\circ \right) + \\
& \quad \left. + \tilde{\sigma}_0^\circ \frac{1}{(1-v_{23}^\circ)} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^\circ (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2\hat{C}v_{21}^\circ \right) \right) r dr d\theta dz = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(-\sigma_0 \frac{v_{21}}{E_2} \sigma_0 - \sigma_0 \frac{v_{21}}{E_2} \sigma_0 - \sigma_0 \frac{2\sigma_0 v_{12}}{E_1} \right) r dr d\theta dz, \\
& \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{2\hat{\sigma}_0^* \tilde{\sigma}_0^* (1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)}{E_1^* (1-v_{23}^*)} r + \frac{4\tilde{A}\hat{A}E_2^*}{1-v_{23}^*} r + \frac{4\tilde{B}\hat{B}E_2^*}{r^3 (1+v_{23}^*)} \right) dr d\theta dz + \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{4E_2^\circ \tilde{C}\hat{C}}{(1-v_{23}^\circ)} + \frac{2\tilde{\sigma}_0^\circ \hat{\sigma}_0^\circ (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)}{E_1^\circ (1-v_{23}^\circ)} \right) r dr d\theta dz = \\
& \quad = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(-\frac{4v_{21}(\sigma_0)^2}{E_2} \right) r dr d\theta dz. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Проінтегруємо отримані вирази, в результаті маємо:

$$\begin{aligned}
& \pi h \left(\frac{\hat{\sigma}_0^* \tilde{\sigma}_0^* (1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*) (b^2 - a^2)}{E_1^* (1-v_{23}^*)} + \frac{2\tilde{A}\hat{A}E_2^* (b^2 - a^2)}{1-v_{23}^*} + \frac{2\tilde{B}\hat{B}E_2^* (b^2 - a^2)}{a^2 b^2 (1+v_{23}^*)} \right) + \\
& \quad + \pi h \left(\frac{2E_2^\circ \tilde{C}\hat{C}a^2}{(1-v_{23}^\circ)} + \frac{\tilde{\sigma}_0^\circ \hat{\sigma}_0^\circ (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) a^2}{E_1^\circ (1-v_{23}^\circ)} \right) = -\frac{2\pi h v_{12} (\sigma_0)^2 b^2}{E_1}, \\
& \frac{\hat{\sigma}_0^* \tilde{\sigma}_0^* (1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*) (1-f)}{E_1^* (1-v_{23}^*)} + \frac{2\tilde{A}\hat{A}E_2^* (1-f)}{1-v_{23}^*} + \frac{2\tilde{B}\hat{B}E_2^* (1-f)}{a^2 b^2 (1+v_{23}^*)} + \\
& \quad + \frac{2E_2^\circ \tilde{C}\hat{C}f}{(1-v_{23}^\circ)} + \frac{\tilde{\sigma}_0^\circ \hat{\sigma}_0^\circ (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) f}{E_1^\circ (1-v_{23}^\circ)} = -2(\sigma_0)^2 \frac{v_{12}}{E_1}. \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Підставляючи знайдені раніше сталі $\tilde{\sigma}_0^\circ$, $\hat{\sigma}_0^\circ$, $\tilde{\sigma}_0^*$, $\hat{\sigma}_0^*$, \tilde{A} , \hat{A} , \tilde{B} , \hat{B} , \tilde{C} , \hat{C} , отримуємо

$$\begin{aligned}
& \frac{d_0 f(f-1)}{2(d^* f + d^\circ(1-f))^2} \left(\frac{d^\circ(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*)}{E_1^*(1-v_{23}^*)} - \frac{d^*(1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)}{E_1^\circ(1-v_{23}^\circ)} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{(d_2 - d_1)^2 (d^* f + d^\circ(1-f))^2} \left(\frac{(f-1)}{E_2^*(1-v_{23}^*)} \times \right. \\
& \quad \times (v_{21}^*(E_2^*(f-1)(1-v_{23}^\circ) - E_2^\circ(1+v_{23}^*))d^\circ - f v_{21}^\circ E_2^*(1-v_{23}^*)d^*) \times \\
& \quad \times \left((1-v_{23}^*)(E_2^\circ(1+v_{23}^*) + E_2^*(1-v_{23}^\circ))(d^* f + d^\circ(1-f)) - \right. \\
& \quad \left. - d_0(f-1)f v_{21}^\circ E_2^*(1-v_{23}^*) + d_0 f v_{21}^*(d_1 - E_2^\circ(1+v_{23}^*)) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{f(f-1)(1+v_{23}^*)}{E_2^*} (v_{21}^* E_2^\circ d^\circ - v_{21}^\circ E_2^* d^*) \times \right. \\
& \quad \times \left((E_2^*(1-v_{23}^\circ) - (1-v_{23}^*)E_2^\circ)(d^* f + d^\circ(1-f)) + d_0 f v_{21}^* E_2^\circ - d_0 v_{21}^\circ E_2^*(f-1) \right) - \\
& \quad - \frac{E_2^\circ f}{(1-v_{23}^\circ)} \left(2(1-v_{23}^\circ)(d^* f + d^\circ(1-f)) + v_{21}^* d_0 f(f-1)(1-v_{23}^\circ) - \right. \\
& \quad \left. - v_{21}^\circ d_0(f-1)(f(1-v_{23}^*) + (1+v_{23}^*)) \right) \left(\frac{v_{21}^* d_1 d^\circ}{E_2^*} - \frac{v_{12}^\circ d_2 d^*}{E_1^\circ} \right) \Bigg) = \frac{v_{12}}{E_1}, \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Виконавши математичні перетворення, приходимо до такого співвідношення:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{12}}{E_1} &= \frac{v_{12}^*(E_2^\circ(1+v_{23}^*) + E_2^*(1-v_{23}^\circ))}{E_1^*(d_2 - d_1)} - \\
& - \frac{d_0 f(d_2 - d_1 + 2E_2^* v_{12}^* v_{21}^\circ(f-1) - 2f v_{12}^* v_{21}^* E_2^\circ)}{2E_1^*(d_2 - d_1)(d^* f + d^\circ(1-f))}. \quad (3.61)
\end{aligned}$$

А скориставшись співвідношенням для поздовжнього модуля пружності E_1 , отриманим раніше у підрозділі 3.1, маємо:

$$v_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta v_{12}^{\circ})v_{12}^* + 2E_2^{\circ}f(v_{12}^{\circ} - v_{12}^*)}{\alpha - 2\beta v_{12}^{\circ} + 2fv_{21}^*E_2^{\circ}(v_{12}^{\circ} - v_{12}^*)}, \quad (3.62)$$

де α , β визначаються відповідно формулами (2.37).

Як можна помітити, формула (3.62), отримана в задачі про поздовжнє та поперечне розтягнення на основі енергетичного критерію узгодження, повністю збігається з формулою (2.40), отриманою в задачі про поздовжнє розтягнення на основі кінематичної умови узгодження.

3.2 Застосування енергетичних умов узгодження до визначення ефективних пружних сталей композиційного матеріалу при зсувних деформаціях

Поперечний зсув. Розглянемо задачу про сумісний поперечний (в площині ізотропії) зсув суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), що моделює волокно, та порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), що моделює матрицю. Розв'язок цієї задачі отримано в попередньому розділі. Для матеріалу матриці маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^*(r, \theta) &= -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}^*(r, \theta) &= \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta; \quad \sigma_{zr}^* = 0, \quad \sigma_{\theta z}^* = 0; \\ \sigma_{zz}^*(r, \theta) &= v_{12}^* \left(12Br^2 - \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^*(r, \theta) &= -\frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + \nu_{23}^*) + 12Br^2(\nu_{23}^* + \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{6C}{r^4}(1 + \nu_{23}^*) + \frac{4D}{r^2}(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta; \\
\varepsilon_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= \frac{1}{E_2^*} \left(2A(1 + \nu_{23}^*) + 12Br^2(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{6C}{r^4}(1 + \nu_{23}^*) + \frac{4D}{r^2}(\nu_{23}^* + \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta; \\
\gamma_{r\theta}^*(r, \theta) &= \frac{2(1 + \nu_{23}^*)}{E_2^*} \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta; \\
\gamma_{zr}^* &= 0; \quad \gamma_{z\theta}^* = 0; \quad \varepsilon_{zz}^* = 0.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Напружено-деформований стан волокна визначається співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^\circ(r, \theta) &= -2F \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) = (2F + 12Hr^2) \cos 2\theta; \quad \sigma_{zz}^\circ(r, \theta) = 12Hr^2 \nu_{12}^\circ \cos 2\theta; \\
\sigma_{r\theta}^\circ(r, \theta) &= (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta; \quad \sigma_{zr}^\circ = 0; \quad \sigma_{\theta z}^\circ = 0,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^\circ(r, \theta) &= -\frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ) + 12Hr^2(\nu_{23}^\circ + \nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta; \\
\varepsilon_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) &= \frac{1}{E_2^\circ} \left(2F(1 + \nu_{23}^\circ) + 12Hr^2(1 - \nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) \right) \cos 2\theta; \\
\gamma_{r\theta}^\circ(r, \theta) &= \frac{2(1 + \nu_{23}^\circ)}{E_2^\circ} (2F + 6Hr^2) \sin 2\theta; \quad \gamma_{zr}^\circ = 0, \quad \gamma_{z\theta}^\circ = 0.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Введемо допоміжні змінні:

$$\zeta_2 = b_1 \chi_2; \quad \zeta_1 = b_1 \chi_1. \tag{3.67}$$

Тоді для сталих A , B , C , D , F та H маємо:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\sigma_0 \zeta_2}{b^2}; \quad D = \sigma_0 a^2 \zeta_1; \\
C &= \sigma_0 \zeta_2 \frac{b^4}{2} - \sigma_0 \zeta_1 \frac{a^2 b^2}{2} = \sigma_0 \frac{b^2}{2} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2); \\
A &= -\frac{\sigma_0}{2} - \frac{3\sigma_0 \zeta_2}{2} - \frac{\sigma_0 f \zeta_1}{2} = -\frac{\sigma_0}{2} (1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1); \\
F &= \frac{\sigma_0}{2} \left(3\zeta_2 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) + \zeta_1 \left(4 - f - \frac{3}{f} \right) - 1 \right); \\
H &= \frac{\sigma_0}{b^2} \left(\zeta_2 \left(1 - \frac{1}{f^3} \right) + \zeta_1 \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{f} \right) \right). \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Напруження та деформації для матеріалу матриці опишуться такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^*(r, \theta) &= -\sigma_0 \left((1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1) - 6\frac{\zeta_2}{b^2} r^2 + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2) + \frac{2a^2}{r^2} \zeta_1 \right) \sin 2\theta; \\
\sigma_{rr}^*(r, \theta) &= \sigma_0 \left(1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1 + (\zeta_1 a^2 - \zeta_2 b^2) \frac{3b^2}{r^4} - \frac{4a^2 \zeta_1}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\
\sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= \sigma_0 \left(-(1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1) + 12\frac{\zeta_2}{b^2} r^2 + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2) \right) \cos 2\theta, \tag{3.69} \\
\varepsilon_{rr}^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{E_2^*} \left((1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1) (1 + \nu_{23}^*) - 12\frac{\zeta_2 r^2}{b^2} (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_1 a^2 - \zeta_2 b^2) (1 + \nu_{23}^*) - \frac{4a^2 \zeta_1}{r^2} (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta; \\
\varepsilon_{\theta\theta}^*(r, \theta) &= \frac{\sigma_0}{E_2^*} \left(-(1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1) (1 + \nu_{23}^*) + 12\frac{\zeta_2 r^2}{b^2} (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2) (1 + \nu_{23}^*) + \frac{4a^2 \zeta_1}{r^2} (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) \cos 2\theta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta}^*(r, \theta) = & -\frac{2\sigma_0}{E_2^*} \left(1 + \nu_{23}^*\right) \left((1 + 3\zeta_2 + f\zeta_1) - 6\frac{\zeta_2}{b^2} r^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3b^2}{r^4} (\zeta_2 b^2 - \zeta_1 a^2) + \frac{2a^2 \zeta_1}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Підставляючи отримані співвідношення у вираз для пружної енергії деформації та здійснивши математичні перетворення, маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(\sigma_{rr}^*(r, \theta) \varepsilon_{rr}^*(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) \varepsilon_{\theta\theta}^*(r, \theta) + \sigma_{r\theta}^*(r, \theta) \gamma_{r\theta}^*(r, \theta) \right) r d\theta dz = \\ & = \frac{\sigma_0^2 \pi h b^2 (1-f)}{E_2^*} \left(1 - 6f\zeta_2 + 2f\zeta_1 + 3\zeta_2^2 \left(\frac{1}{f^3} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{f} + 3 + 6f^2 \right) - \right. \\ & - 6 \left(f^2 + \frac{1}{f^2} + 2f \right) \zeta_1 \zeta_2 + \left(f^2 + \frac{3}{f} - 3 + 3f \right) \zeta_1^2 + \nu_{23}^* (1 - 6f\zeta_2 + 2f\zeta_1 + \\ & + 3\zeta_2^2 \left(\frac{1}{f^3} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{f} + 3 + 6f^2 \right) - 6\zeta_1 \zeta_2 \left(f^2 + \frac{1}{f^2} + 2f \right) + \\ & + \zeta_1^2 \left(f^2 + \frac{3}{f} - 3 + 3f \right) + 24f\zeta_1 \zeta_2 - 12\zeta_2^2 (1 + f + f^2) - 4f\zeta_1^2 \left. \right) + \\ & + \nu_{21}^* \nu_{12}^* \left(24f\zeta_1 \zeta_2 - 12\zeta_2^2 (1 + f + f^2) - 4f\zeta_1^2 \right). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Введемо нові змінні:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & (1-f) \left(1 - 6f\zeta_2 + 2f\zeta_1 + 3\zeta_2^2 \left(\frac{1}{f^3} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{f} + 3 + 6f^2 \right) - \right. \\ & \left. - 6 \left(f^2 + \frac{1}{f^2} + 2f \right) \zeta_1 \zeta_2 + \left(f^2 + \frac{3}{f} - 3 + 3f \right) \zeta_1^2 \right), \\ \beta_1 = & \left(24f\zeta_1 \zeta_2 - 12\zeta_2^2 (1 + f + f^2) - 4f\zeta_1^2 \right) (1-f), \end{aligned} \quad (3.72)$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^h \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^*(r, \theta) \varepsilon_{rr}^*(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) \varepsilon_{\theta\theta}^*(r, \theta) + \sigma_{r\theta}^*(r, \theta) \gamma_{r\theta}^*(r, \theta)) r d\theta dz = \\ = \frac{\sigma_0^2 \pi h b^2}{E_2^*} (\alpha_1 (1 + \nu_{23}^*) + \beta_1 (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*)). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Підставимо у вираз пружної енергії деформації співвідношення для напружень та деформацій (3.65)-(3.66) для матеріалу волокна з урахуванням допоміжних величин (3.67), і після математичних перетворень матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^h \int_0^{2\pi} (\sigma_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) \varepsilon_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) + \sigma_{rr}^\circ(r, \theta) \varepsilon_{rr}^\circ(r, \theta) + \sigma_{r\theta}^\circ(r, \theta) \gamma_{r\theta}^\circ(r, \theta)) r d\theta dz dr = \\ = \frac{\pi h b^2 \sigma_0^2}{E_2^\circ} \left(9 \zeta_2^2 \left(2f^3 - 2f^2 + f - 2 + \frac{1}{f^3} \right) + \zeta_1^2 \left(f^3 - 2f^2 + 10f - 18 + \frac{9}{f} \right) - \right. \\ \left. - 6 \zeta_1 \zeta_2 \left(f^3 + f^2 - 2f - \frac{3}{f} + \frac{3}{f^2} \right) + (2(3\zeta_2 - \zeta_1)(1-f) + 1)f \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 12(1-f) \times \\ \times \left(\zeta_2^2 \left(1 + f + f^2 \right) \left(1 - \frac{1}{f^3} \right) - 2 \zeta_1 \zeta_2 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) + \zeta_1^2 \left(1 - \frac{1}{f} \right) \right) (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Введемо нові змінні

$$\begin{aligned} \alpha_2 = 9 \zeta_2^2 \left(2f^3 - 2f^2 + f - 2 + \frac{1}{f^3} \right) + \zeta_1^2 \left(f^3 - 2f^2 + 10f - 18 + \frac{9}{f} \right) - \\ - 6 \zeta_1 \zeta_2 \left(f^3 + f^2 - 2f - 3 \frac{1}{f} + \frac{3}{f^2} \right) + (2(3\zeta_2 - \zeta_1)(1-f) + 1)f ; \end{aligned}$$

$$\beta_2 = -\frac{12}{f} \left((1-f) \left(\zeta_2 \left(\frac{1+f+f^2}{f} \right) - \zeta_1 \right) \right)^2, \quad (3.75)$$

тоді вираз для енергії запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(\sigma_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) \varepsilon_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) + \sigma_{rr}^\circ(r, \theta) \varepsilon_{rr}^\circ(r, \theta) + \sigma_{r\theta}^\circ(r, \theta) \gamma_{r\theta}^\circ(r, \theta) \right) r d\theta dz dr = \\ & = \frac{\pi h b^2 \sigma_0^2}{E_2^\circ} \left(\alpha_2 (1 + \nu_{23}^\circ) + \beta_2 (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Маючи розв'язок задачі про чистий поперечний зсув (2.134)-(2.136) для трансропного однорідного матеріалу, що моделює композит:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \sigma_0 \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \cos 2\theta; \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \sin 2\theta, \quad (3.77)$$

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0 (1 + \nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta; \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0 (1 + \nu_{23})}{E_2} \cos 2\theta;$$

$$\gamma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{2\sigma_0 (1 + \nu_{23})}{E_2} \sin 2\theta, \quad (3.78)$$

запишемо вираз для енергії пружної деформації в вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(\sigma_{rr}(r, \theta) \varepsilon_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) + \sigma_{r\theta}(r, \theta) \gamma_{r\theta}(r, \theta) \right) r d\theta dz dr = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(\sigma_0^2 \cos^2 2\theta \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} + \sigma_0^2 \cos^2 2\theta \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\sigma_0^2 (1 + \nu_{23})}{E_2} \sin^2 2\theta \right) r d\theta dz dr = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma_0^2(1+\nu_{23})}{E_2} \int_0^b \int_0^h \int_0^{2\pi} r d\theta dz dr = \frac{\pi h b^2 \sigma_0^2(1+\nu_{23})}{E_2}. \quad (3.79)$$

Для визначення пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композиційний матеріал, скористаємося енергетичним критерієм (3.9) як умовою узгодження, тоді маємо:

$$\frac{\sigma_0^2 \pi h b^2}{E_2^*} \left(\alpha_1 (1 + \nu_{23}^*) + \beta_1 (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) + \\ + \frac{\pi h b^2 \sigma_0^2}{E_2^\circ} \left(\alpha_2 (1 + \nu_{23}^\circ) + \beta_2 (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right) = \frac{\pi h b^2 \sigma_0^2 (1 + \nu_{23})}{E_2},$$

або

$$\frac{1 + \nu_{23}}{E_2} = \frac{E_2^\circ \left(\alpha_1 (1 + \nu_{23}^*) + \beta_1 (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) + E_2^* \left(\alpha_2 (1 + \nu_{23}^\circ) + \beta_2 (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right)}{E_2^* E_2^\circ}. \quad (3.80)$$

Використовуючи (3.34) та (3.80), і враховуючи, що $\frac{1 - \nu_{23}}{E_2} + \frac{1 + \nu_{23}}{E_2} = \frac{2}{E_2}$,

маємо:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{2E_2^* E_2^\circ} \left(E_2^\circ (\delta_1 + \eta_1 \eta_2) + \alpha \delta_2 \right), \quad (3.81)$$

$$\text{де } \delta_2 = E_2^\circ \left(\alpha_1 (1 + \nu_{23}^*) + \beta_1 (\nu_{23}^* + \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) + E_2^* \left(\alpha_2 (1 + \nu_{23}^\circ) + \beta_2 (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$\delta_1 = E_2^* (1 - \nu_{23}^\circ) \left(f (1 + \nu_{23}^*) + (1 - \nu_{23}^*) \right) + E_2^\circ \left(1 - (\nu_{23}^*)^2 \right) (1 - f).$$

Звідси отримуємо:

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^* E_2^\circ}{\left(E_2^\circ(\delta_1 + \eta_1 \eta_2) + \alpha \delta_2\right)}. \quad (3.82)$$

Використовуючи формули (3.34) та (3.80) і враховуючи, що $\frac{1+v_{23}}{E_2} - \frac{1-v_{23}}{E_2} = \frac{2v_{23}}{E_2}$, маємо:

$$\frac{v_{23}}{E_2} = \frac{E_2^\circ(\alpha_1(1+v_{23}^*) + \beta_1(v_{23}^* + v_{21}^* v_{12}^*)) + E_2^*(\alpha_2(1+v_{23}^\circ) + \beta_2(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ))}{2E_2^* E_2^\circ} -$$

$$- \frac{E_2^*(1-v_{23}^\circ)(f(1+v_{23}^*) + (1-v_{23}^*)) + E_2^\circ(1-(v_{23}^*)^2)(1-f)}{2E_2^* \alpha} -$$

$$- \frac{2fE_1^* E_1^\circ(1-f)(v_{21}^* \gamma - 2v_{21}^\circ E_2^*)^2}{2(E_2^*)^2 \alpha(2\beta(E_1^*(1-f)v_{12}^\circ + E_1^\circ f v_{12}^*) - \alpha(E_1^\circ f + E_1^*(1-f)))},$$

або

$$\frac{v_{23}}{E_2} = \frac{1}{2E_2^*} \left(\frac{1}{E_2^\circ} \delta_2 - \frac{1}{\alpha} (\delta_1 + \eta_1 \eta_2) \right). \quad (3.83)$$

А з урахуванням (3.82), отримуємо:

$$v_{23} = \frac{\left(\alpha \delta_2 - E_2^\circ(\delta_1 + \eta_1 \eta_2)\right)}{\left(\alpha \delta_2 + E_2^\circ(\delta_1 + \eta_1 \eta_2)\right)}. \quad (3.84)$$

Як можна помітити, формули (3.82) та (3.84), отримані в задачі про поперечний зсув на основі енергетичного критерію узгодження, не збігаються з аналогічними формулами, отриманими раніше на основі кінематичної умови узгодження.

Порівняємо значення поперечного модуля пружності E_2 , отримані за формулами (2.144), (2.145) та (3.82), з відомими в літературі

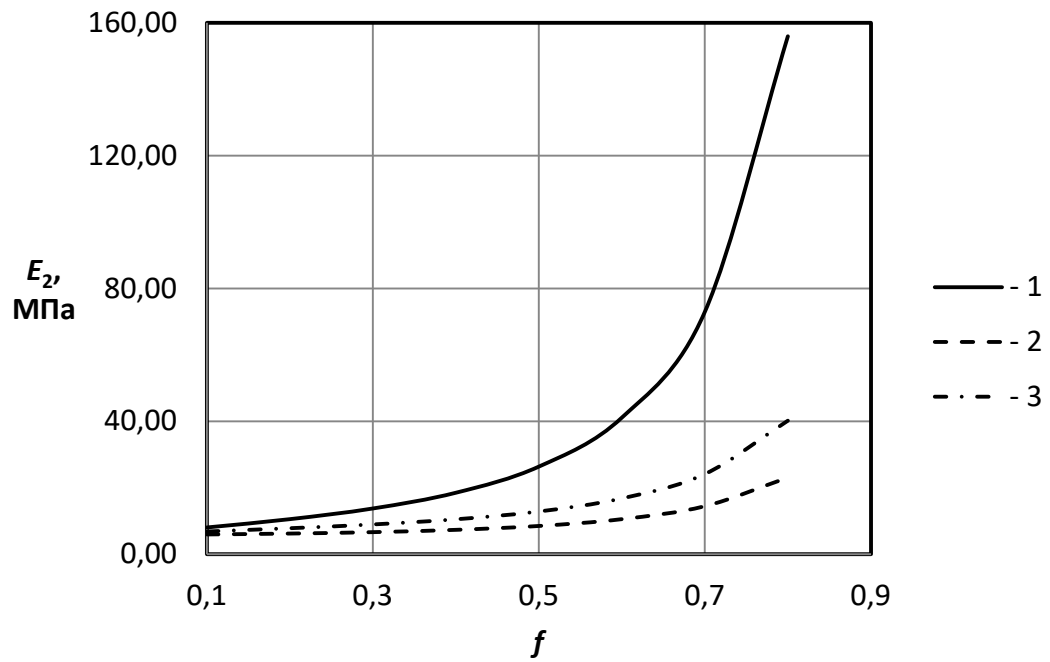
експериментальними даними. Розглянемо спочатку гумовокордний матеріал з ізотропною матрицею та ізотропним кордом з такими пружними характеристиками [83]: модуль пружності текстильного корда $E^\circ = 1,6 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,8$, модуль пружності гуми $E^* = 4,5$ МПа, коефіцієнт Пуассона гуми $\nu^* = 0,49$.

В таблиці 3.1 наведені значення модуля пружності E_2 при об'ємному вмісті корда $f = 0,31$. Як можна зазначити, нижня та верхня оцінки поперечного модуля, отримані за формулами (1.23) та (1.24), дають занадто широкий діапазон. Найкращий результат у порівнянні з експериментальними даними дає формула (3.82), отримана на основі енергетичної умови узгодження. На рисунку 3.1 представлена залежність поперечного модуля пружності E_2 від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$. Залежність коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{23} від об'ємного вмісту корда в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$ представлена на рисунку 3.2.

Таблиця 3.1 – Поперечний модуль пружності E_2 гумовокордного матеріалу

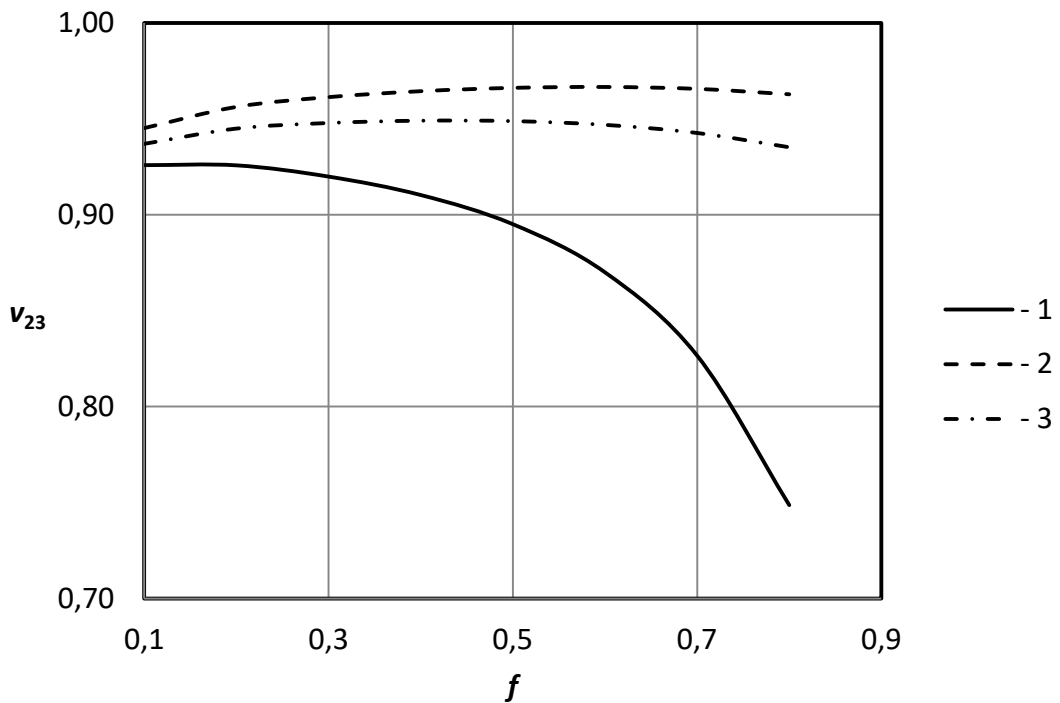
Показник	Експеримент [83]	Формула				
		(1.23)	(1.24)	(2.144)	(2.145)	(3.82)
Значення, МПа	11,60	-133,68	11120,86	14,17	6,71	9,11
Похибка, %	-	1252,41	-95679,48	22,16	-42,16	-21,47

В розглянутій вище задачі і матеріал матриці, і матеріал волокна є ізотропним. Порівняємо тепер значення поперечного модуля пружності E_2 , отримане за формулами (2.144), (2.145) та (3.82), з відомими в літературі експериментальними даними для ізотропної матриці та трансропного волокна.



1 – формула (2.144); 2 – формула (2.145); 3 – формула (3.82)

Рисунок 3.1 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 від об'ємного вмісту корда f в композиті.



1 – формула (2.146); 2 – формула (2.147); 3 – формула (3.84)

Рисунок 3.2 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} від об'ємного вмісту корда f в композиті.

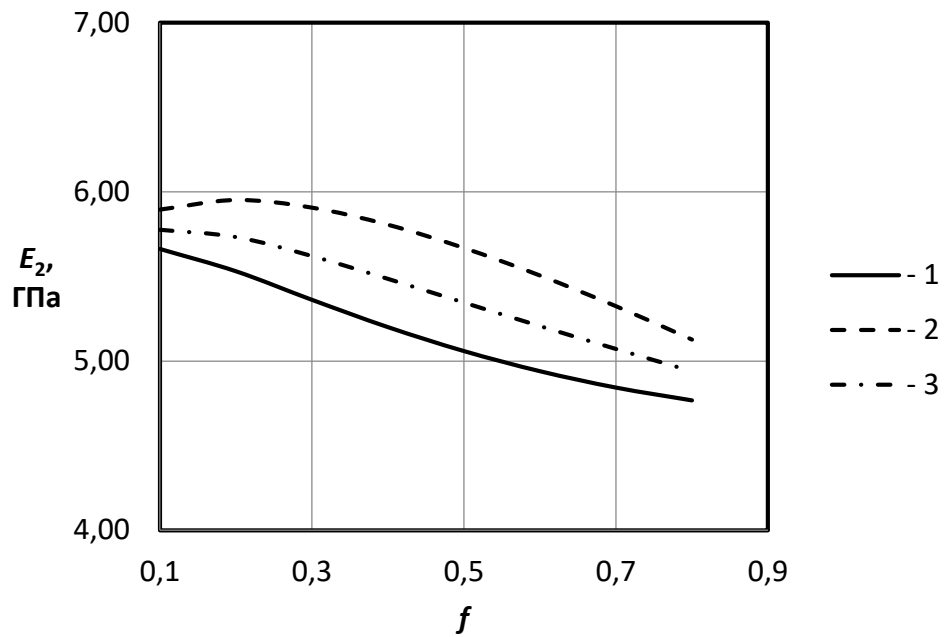
Розглянемо композит UD PFRP з волокном із поліетилену високої щільності (VHDPE Tenfor SN1A) та епоксидною смолою (Ciba-Geigy 913) як матрицею [130]: поздовжній модуль пружності волокна $E_1^{\circ} = 60,4$ ГПа, поперечний модуль пружності волокна $E_2^{\circ} = 4,68$ ГПа, коефіцієнти Пуассона волокна $\nu_{12}^{\circ} = 0,38$ та $\nu_{23}^{\circ} = 0,55$, модуль зсуву волокна $G_{12}^{\circ} = 1,65$ ГПа, модуль пружності матриці $E^* = 5,55$ ГПа, коефіцієнт Пуассона матриці $\nu^* = 0,37$.

В таблиці 3.2 наведені значення модуля пружності E_2 при різному об'ємному вмісті волокна. На рисунку 3.3 представлена залежність поперечного модуля пружності E_2 від об'ємного вмісту волокна в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$.

Таблиця 3.2 – Поперечний модуль пружності E_2 композиційного матеріалу

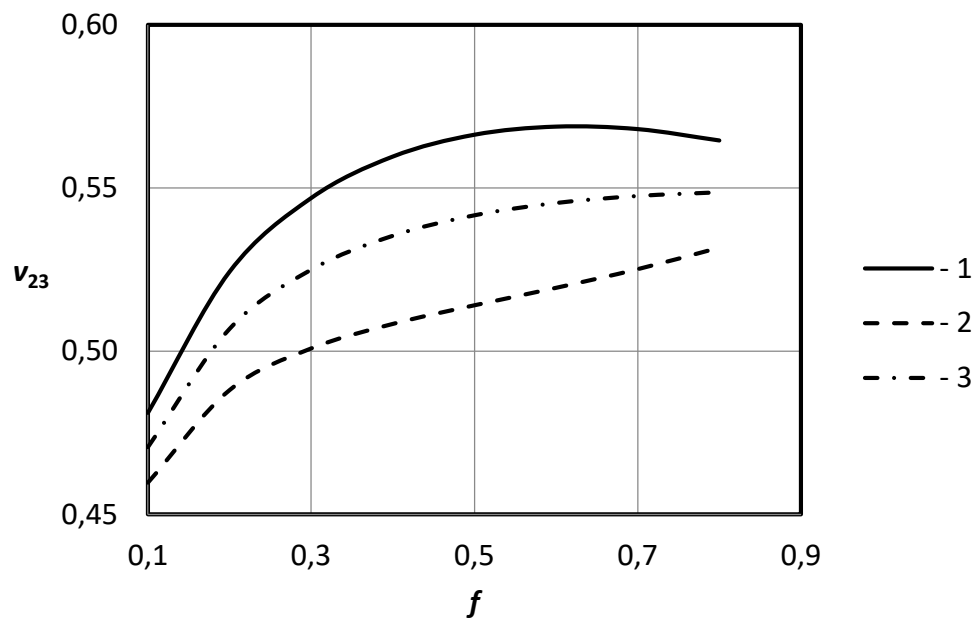
Показник	Об'ємний вміст волокон, f	Експеримент [130]	Формула				
			(1.23)	(1.24)	(2.144)	(2.145)	(3.82)
E_2 , ГПа	0,36	5,35	4,64	6,77	5,26	5,85	5,54
ε , %		-	13,27	-26,54	-1,68	9,35	3,55
E_2 , ГПа	0,56	5,10	4,39	6,49	4,98	5,57	5,26
ε , %		-	13,92	-27,26	-2,35	9,22	3,14
E_2 , ГПа	0,67	4,95	4,26	6,32	4,87	5,38	5,11
ε , %		-	13,94	-27,68	-1,62	8,69	3,23
E_2 , ГПа	0,75	4,89	4,16	6,20	4,80	5,23	5,01
ε , %		-	14,93	-26,79	-1,84	6,95	2,45

Залежність коефіцієнта Пуассона композиційного матеріалу ν_{23} від об'ємного вмісту волокна в діапазоні $f = 0,1 \dots 0,8$ представлена на рисунку 3.4.



1 – формула (2.144); 2 – формула (2.145); 3 – формула (3.82)

Рисунок 3.3 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 від об'ємного вмісту волокна f в композиті.



1 – формула (2.146); 2 – формула (2.147); 3 – формула (3.84)

Рисунок 3.4 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} композиційного матеріалу від об'ємного вмісту волокна f в композиті.

В таблиці 3.3 наведені значення коефіцієнта Пуассона ν_{23} при різному об'ємному вмісті волокна. Як можна помітити з наведених результатів, і поперечний модуль пружності E_2 , і коефіцієнт Пуассона композиту ν_{23} , мають нелінійну залежність від f . Порівняння результатів розрахунків на основі отриманих формул із відомими в літературі експериментальними даними дозволяє зробити висновок, що найкращі результати в цілому дають формули, виведені на основі енергетичної умови узгодження, незважаючи на те, що для деяких значень f це не завжди виконується.

Таблиця 3.3 – Коефіцієнт Пуассона ν_{23} композиційного матеріалу

Показ- ник	Об'ємний вміст волокна, f	Експери- мент [130]	Формула				
			(1.23)	(1.24)	(2.146)	(2.147)	(3.84)
ν_{23}	0,36	0,546	0,588	0,399	0,555	0,506	0,532
ε , %		-	-7,69	26,92	1,65	-7,33	-2,56
ν_{23}	0,56	0,545	0,606	0,417	0,568	0,517	0,544
ε , %		-	-11,19	23,49	4,22	-5,14	-0,18
ν_{23}	0,67	0,547	0,612	0,423	0,569	0,523	0,547
ε , %		-	-11,88	22,67	4,02	-4,39	0,0
ν_{23}	0,75	0,547	0,616	0,427	0,567	0,528	0,548
ε , %		-	-12,61	21,94	3,66	-3,47	0,18

Поздовжній зсув. Розглянемо задачу про сумісний чистий поздовжній зсув матриці та волокна (рис. 2.20).

Використовуючи розв'язок, отриманий у підрозділі 2.5, запишемо основні співвідношення для ненульових компонент напружено-деформованого стану матриці при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))} \left(- (G_{12}^* + G_{12}^\circ) r + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r} \right) \cos \theta, \quad (3.85)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta;$$

$$\gamma_{zr}^*(r, \theta) = - \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (3.86)$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) = - \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (3.87)$$

Використовуючи вищенаведені співвідношення, визначимо енергію пружного деформування для матеріалу матриці при поздовжньому зсуві:

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\sigma_{z\theta}^*(r, \theta) \gamma_{\theta z}^*(r, \theta) + \sigma_{zr}^*(r, \theta) \gamma_{zr}^*(r, \theta) \right) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{(\sigma_0)^2}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))^2} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right)^2 \sin^2 \theta + \right. \\ &+ \left. \frac{(\sigma_0)^2}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))^2} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right)^2 \cos^2 \theta \right) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^2}{2 G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))^2} \left((G_{12}^* + G_{12}^\circ)^2 (1-f) + f (G_{12}^\circ - G_{12}^*)^2 (1-f) \right). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Аналогічно, використовуючи розв'язок, отриманий в підрозділі 2.5, запишемо основні співвідношення для ненульових компонент напружено-деформованого стану волокна при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^\circ(r, \theta) = \frac{-2\sigma_0 r \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}, \quad (3.89)$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}; \quad \gamma_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}, \quad (3.90)$$

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 G_{12}^\circ \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}; \quad \sigma_{z\theta}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 G_{12}^\circ \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}. \quad (3.91)$$

Визначимо енергію пружного деформування для матеріалу волокна при поздовжньому зсуві:

$$\begin{aligned} U^\circ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_{zr}^\circ(\theta) \gamma_{zr}^\circ(\theta) + \sigma_{z\theta}^\circ(\theta) \gamma_{\theta z}^\circ(\theta)) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{4G_{12}^\circ(\sigma_0)^2 \cos^2 \theta}{(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} + \frac{4G_{12}^\circ(\sigma_0)^2 \sin^2 \theta}{(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} \right) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{2\pi h a^2 G_{12}^\circ(\sigma_0)^2}{(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Аналогічна задача про чистий поздовжній зсув для трансропного однорідного матеріалу, що моделює композит, запишеться у вигляді (див. підрозділ 2.5):

$$u_z(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta, \quad (3.93)$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta; \quad \gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta, \quad (3.94)$$

$$\sigma_{zr}(r, \theta) = \sigma_0 \cos \theta; \quad \sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \sin \theta. \quad (3.95)$$

Визначимо енергію пружного деформування для матеріалу, що моделює композит, при поздовжньому зсуві:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b (\sigma_{z\theta}(r, \theta) \gamma_{\theta z}(r, \theta) + \sigma_{zr}(r, \theta) \gamma_{zr}(r, \theta)) r dr d\theta dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b \left(\frac{(\sigma_0)^2}{G_{12}} \sin^2 \theta + \frac{(\sigma_0)^2}{G_{12}} \cos^2 \theta \right) r dr d\theta dz = \frac{(\sigma_0)^2}{2G_{12}} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b r dr d\theta dz = \\
 &= \frac{(\sigma_0)^2}{2G_{12}} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b r dr d\theta dz = \frac{h(\sigma_0)^2}{2G_{12}} \int_0^{2\pi} \int_0^b r dr d\theta = \frac{\pi h(\sigma_0)^2}{G_{12}} \int_0^b r dr = \frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^2}{2G_{12}}. \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

Скористаємося енергетичним критерієм узгодження (3.9) та запишемо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^2}{2G_{12}^* (G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} \left((G_{12}^* + G_{12}^\circ)^2 (1-f) + f(G_{12}^\circ - G_{12}^*)^2 (1-f) \right) + \\
 &\quad + \frac{2\pi h a^2 G_{12}^\circ (\sigma_0)^2}{(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} = \frac{\pi h b^2 (\sigma_0)^2}{2G_{12}}, \\
 &\frac{1}{G_{12}} = \frac{\left((G_{12}^*)^2 + 2G_{12}^* G_{12}^\circ + (G_{12}^\circ)^2 - f^2 (G_{12}^*)^2 + 2f^2 G_{12}^* G_{12}^\circ - f^2 (G_{12}^\circ)^2 \right)}{G_{12}^* (G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2}. \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

Звідки маємо:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{G_{12}^\circ(1-f) + G_{12}^*(f+1)}{G_{12}^* (G_{12}^*(1-f) + G_{12}^\circ(1+f))},$$

або

$$G_{12} = \frac{G_{12}^* (G_{12}^*(1-f) + G_{12}^\circ(f+1))}{G_{12}^\circ(1-f) + G_{12}^*(f+1)}. \quad (3.98)$$

Як можна помітити, формула (3.98), отримана в задачі про сумісний поздовжній зсув матриці та волокна на основі енергетичного критерію узгодження повністю збігається з формулою (2.181), отриманою в задачі про поздовжній зсув на основі кінематичної умови узгодження.

3.3 Визначення пружних сталей композиційного матеріалу, що містить два сорти однаковоспрямованих армуючих волокон

Однією з найбільш розповсюджених схем розташування волокон в однаковоспрямованих композиційних матеріалах є гексагональна укладка волокон. Розглянемо приклад такої схеми армування трикомпонентного композиційного матеріалу двома сортами однаково спрямованих волокон періодичної структури (рис. 3.5). Знайдемо пружні сталі такого композиційного матеріалу, використовуючи формули (3.18), (3.62), (3.82), (3.84) (3.98), отримані для двохкомпонентного волокнистого композиційного матеріалу з транслопними матрицею і волокном.

Розіб'ємо поперечний перетин композиційного матеріалу на гексагональні комірки, так, щоб центр перетину діагоналей шестикутника збігався з центром волокна, як показано на рисунку 3.5. При такому розбитті матеріал матриці в будь-якій гексагональній комірці буде займати однаковий об'єм, якщо діаметр волокон обох сортів однаковий, і об'єм, що займає матеріал матриці, буде різним, якщо діаметр волокна в кожного сорту свій. Таким чином, отримуємо два типи гексагональних комірок – для волокна I сорту (позначено похилою штриховкою), і для волокна II сорту (позначено точками). Далі згідно з процедурою, викладеною в розділі 2, апроксимуємо гексагональну комірку кругом, рівним площі цієї комірки. І після цього визначаємо за формулами, отриманими в розділі 2 і в попередніх підрозділах розділу 3, пружні сталі для двох областей композита, що містять волокна I та II

сорту. Зважаючи на те, що обидва сорти волокна однаково спрямовані, ці області матимуть трансропні властивості з однаковими площинами ізоотропії навіть якщо обидва сорти волокна та матриця матимуть ізоотропні властивості. Далі, апроксимуємо кожену гексагональну область, яка містить матеріал волокна та матеріал матриці і відповідає одному із сортів волокна, наприклад, для волокна I сорту, кругом, рівним площі гексагональної комірки (рис.3.5). В результаті отримаємо «умовний» уже двокомпонентний волокнистий матеріал з розрахованими пружними сталими трансверсально-ізоотропних «умовної» матриці та «умовного» волокна.

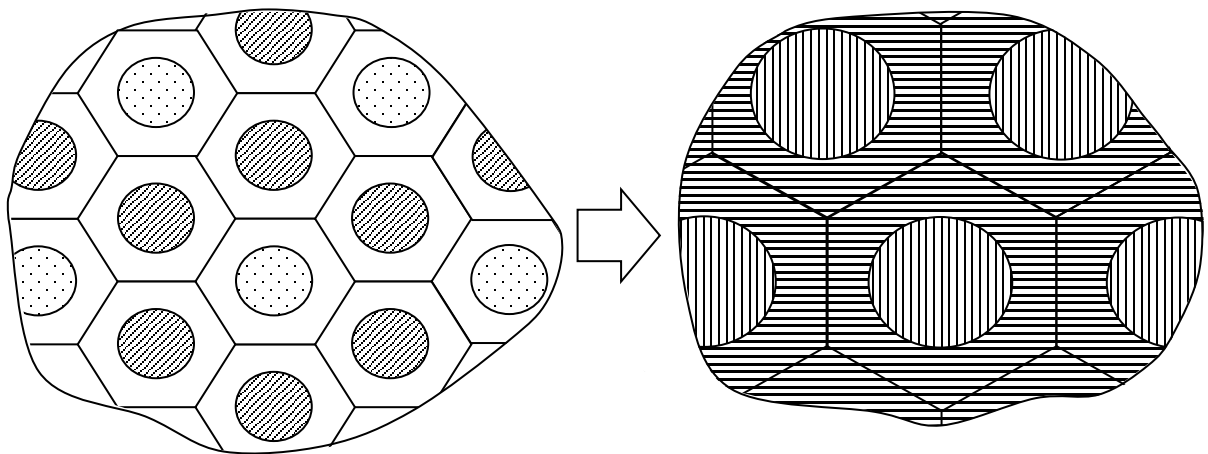


Рисунок 3.5 – Представлення трикомпонентного композиту.

До моделі «умовного» композиційного матеріалу повторно застосуємо процедуру визначення пружних сталих. Тоді перетин цього «умовного» матеріалу розіб'ємо гексагональними комірками, і застосуємо до елементарної гексагональної комірки процедуру визначення пружних сталих за формулами, отриманими в розділі 2 та початкових підрозділах розділу 3, за визначеними раніше пружними сталими «умовної» матриці та «умовного» волокна. Об'ємна частка «умовного» волокна визначається як відношення площі круга, що займає «умовне» волокно, до площі гексагональної комірки. Отримані пружні сталі «умовного» композиційного матеріалу й будуть визначати пружні сталі трикомпонентного композиційного матеріалу з двома сортами волокон.

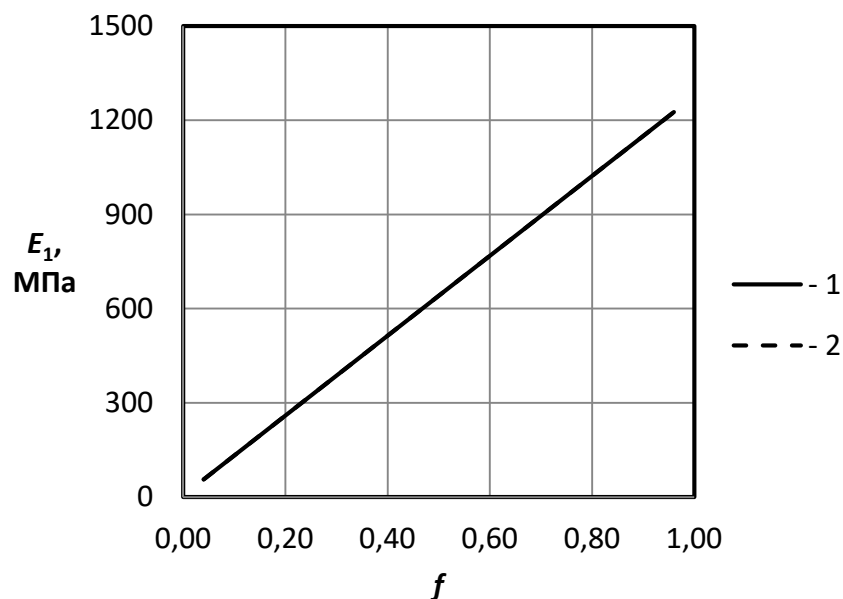
Якщо у вихідному трикомпонентному композиційному матеріалі об'ємна частка волокна I сорту дорівнює f_1 , а волокна II сорту – f_2 , то об'ємна частка матеріалу матриці складатиме $1 - f_1 - f_2$. Тоді згідно з вищевикладеним підходом представлення «умовної» матриці й «умовного» волокна, об'ємна частка «умовної» матриці складатиме величину $(1 - f_1 - f_2) \frac{f_1}{f_1 + f_2} + f_1$, де перший доданок представляє частку вихідної матриці в представленні «умовної» матриці, а другий доданок – об'ємну частку волокна I сорту в представленні «умовної» матриці. Таким чином, об'ємна частка «умовної» матриці в «умовному» композиційному матеріалі складатиме величину, що дорівнює $\frac{f_1}{f_1 + f_2}$. Аналогічно, визначимо об'ємну частку «умовного» волокна в «умовному» композиційному матеріалі. Об'ємна частка «умовного» волокна складатиме величину, що дорівнює $(1 - f_1 - f_2) \frac{f_2}{f_1 + f_2} + f_2$, де перший доданок представляє частку вихідної матриці в представленні «умовного» волокна, а другий доданок – об'ємну частку волокна II сорту в представленні «умовного» волокна. Таким чином, об'ємна частка «умовного» волокна в «умовному» композиційному матеріалі складатиме величину $\frac{f_2}{f_1 + f_2}$.

Однак, слід враховувати, що отримані співвідношення для розрахунку пружних властивостей композиційного матеріалу оперують лише з об'ємною часткою волокон і не враховують діаметр волокна й структуру укладки. Тому вищевикладену методику можна застосовувати і для інших схем армування, слід лише брати до уваги, що чим точніше апроксимується колом межа матеріалу матриці в моделі, тим точніші отримані результати.

Для перевірки правильності міркувань обчислимо пружні сталі двокомпонентного композиційного матеріалу як трикомпонентного за вищевикладеною методикою, розділивши об'ємну частку волокна на дві частини – волокно I сорту і волокно II сорту.

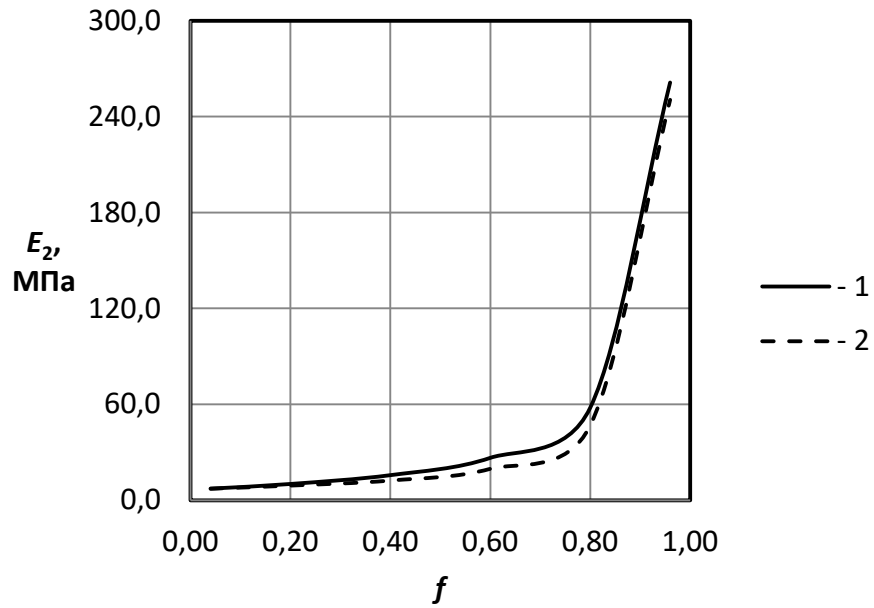
Розглянемо гумовокордний матеріал із такими компонентами: гума марки 2959 з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,49$ та модулем пружності $E = 5,28$ МПа, корд із коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$ та модулем пружності $E = 1277,5$ МПа.

Представимо цей двокомпонентний композиційний матеріал як трикомпонентний згідно зі схемою, показаною на рис. 3.5. При цьому діаметр волокон та пружні властивості волокна I сорту і пружні властивості волокна II сорту будуть однакові. Така схема розташування волокон та висока частота армування дають змогу визначити, що в нашому трикомпонентному матеріалі відношення об'ємних часток волокон I сорту та II сорту – f_1/f_2 – прагне до 3. Об'ємний вміст корда $f = f_1 + f_2$. Побудуємо залежності пружних властивостей композиційного матеріалу від коефіцієнта $f = 0,4 \dots 0,96$, який показує загальну частку волокна в композиті (рис.3.6-3.10).



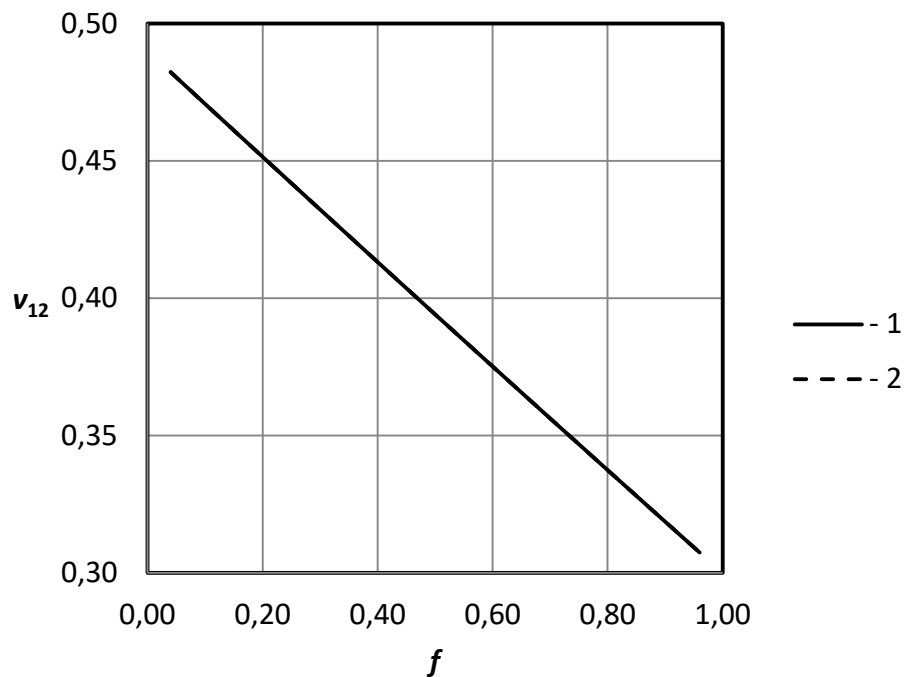
1 – формула (1.25); 2 – трикомпонентна модель матеріалу (збігається з 1)

Рисунок 3.6 – Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від об'ємного вмісту волокна f в композиті.



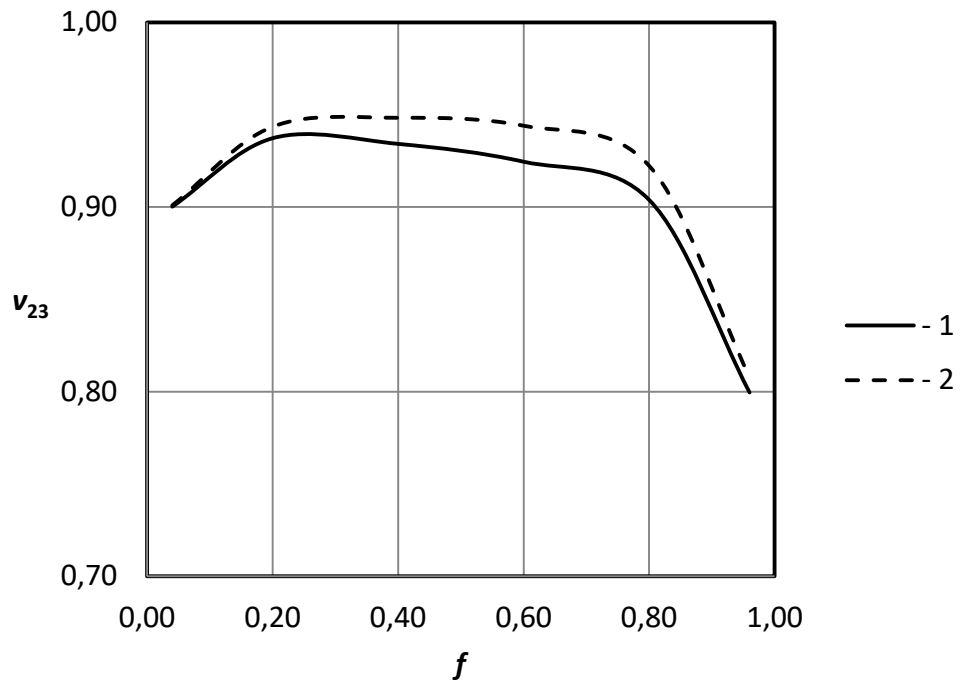
1 – формула (1.26); 2 – трикомпонентна модель матеріалу: формули (2.144), (2.145) та (3.82)

Рисунок 3.7 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 від f .



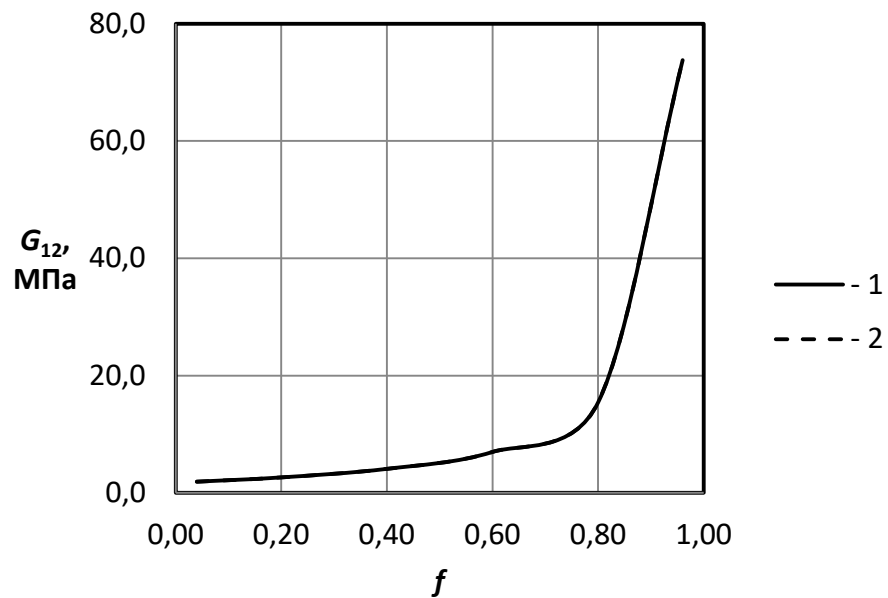
1 – формула (1.26); 2 – трикомпонентна модель матеріалу (збігається з 1)

Рисунок 3.8 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{12} від f .



1 – формули (1.27), (1.29); 2 – трикомпонентна модель матеріалу: формули (2.146), (2.147) та (3.84)

Рисунок 3.9 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} від f .

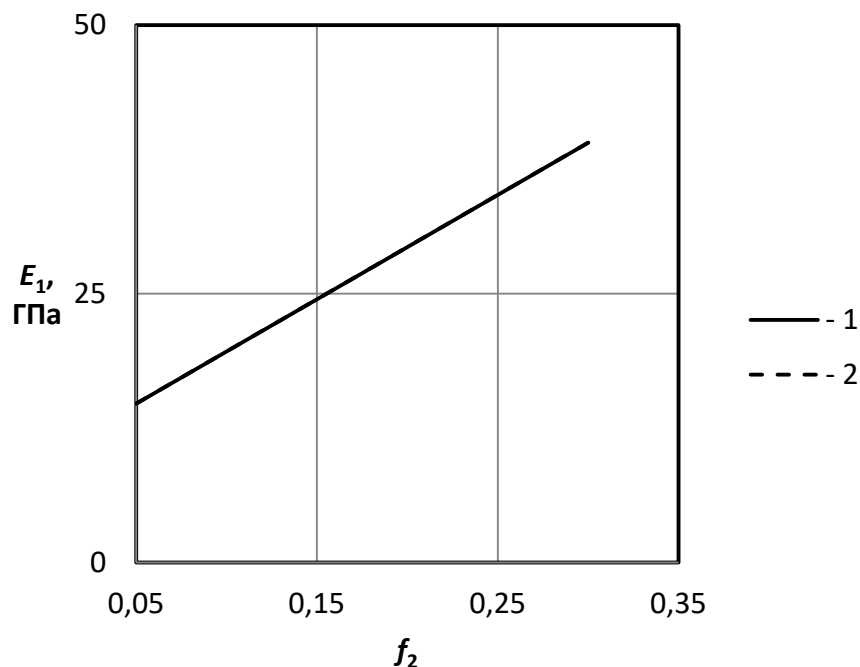


1 – формула (1.28); 2 – трикомпонентна модель матеріалу (співпадає з 1)

Рисунок 3.10 – Залежність модуля зсуву G_{12} від f .

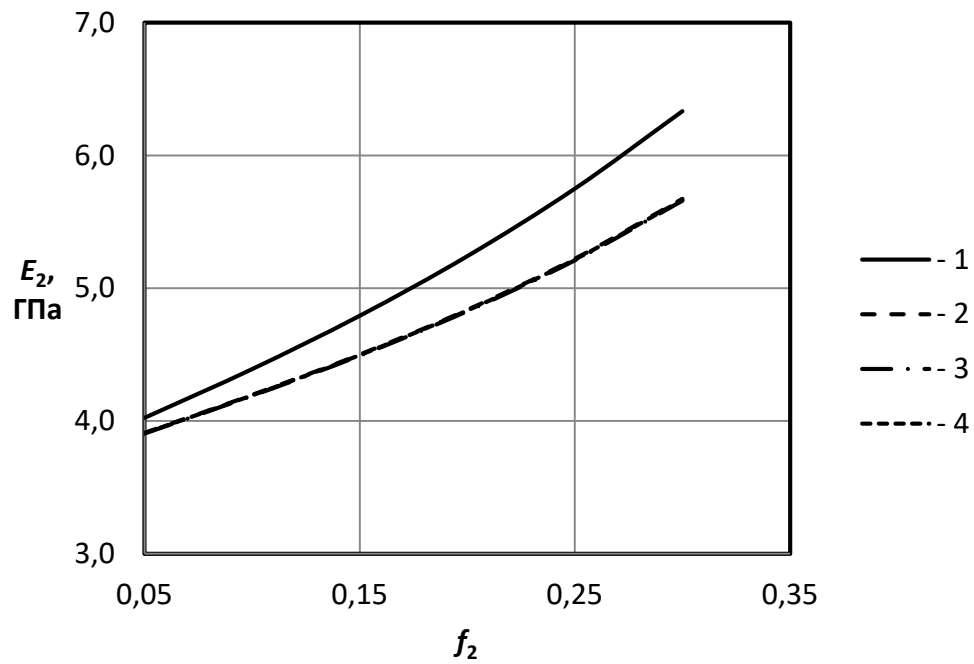
Визначимо пружні сталі трикомпонентного композиційного матеріалу з ізотропними властивостями його складових. Розглянемо композит на основі епоксидного зв'язуючого ЭДТ-10 з пружними властивостями: модуль пружності $E^* = 2,9$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^* = 0,35$ та алюмоборосилікатними та високомодульними волокнами ВМ-1 з пружними властивостями: модуль пружності $E_{(1)}^\circ = 73,1$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu_{(1)}^\circ = 0,25$, модуль пружності $E_{(2)}^\circ = 100$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu_{(2)}^\circ = 0,25$, відповідно. Об'ємний вміст волокна I сорту – $f_1 = 0,1$, вмістом волокна II сорту проваріюємо – $f_2 = 0,05 \dots 0,3$.

При розрахунку пружних сталих «умовного» композиційного матеріалу перерозподілимо матеріал матриці пропорційно до об'ємного вмісту волокон I сорту та II сорту. Побудуємо залежності для пружних властивостей композита від об'ємного вмісту волокна II сорту (рис.3.11-3.15).



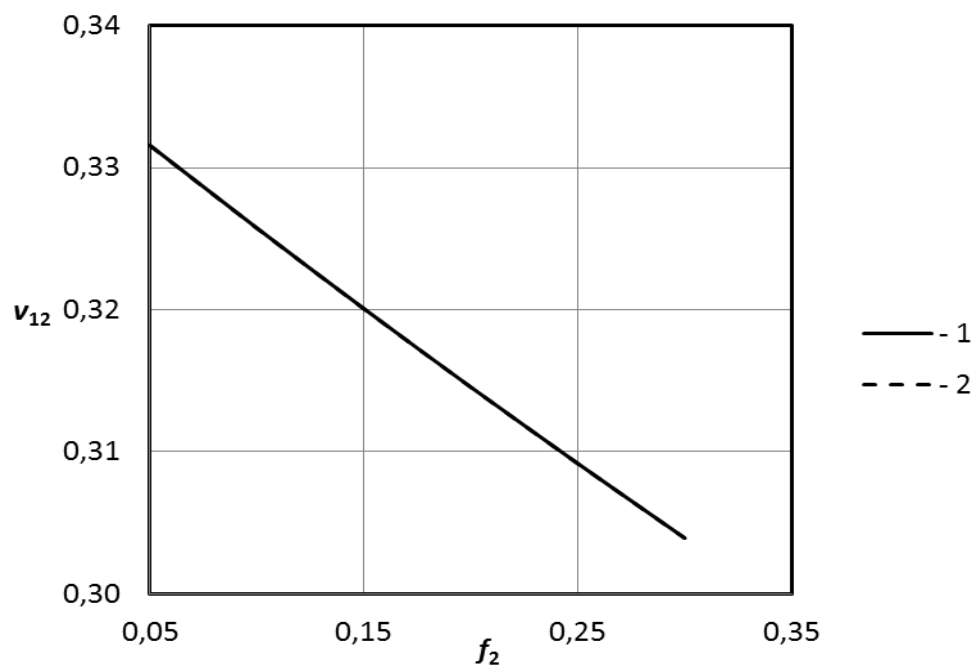
1 – формула (1.25); 2 – трикомпонентна модель матеріалу (збігається з 1)

Рисунок 3.11 – Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 від f_2 .



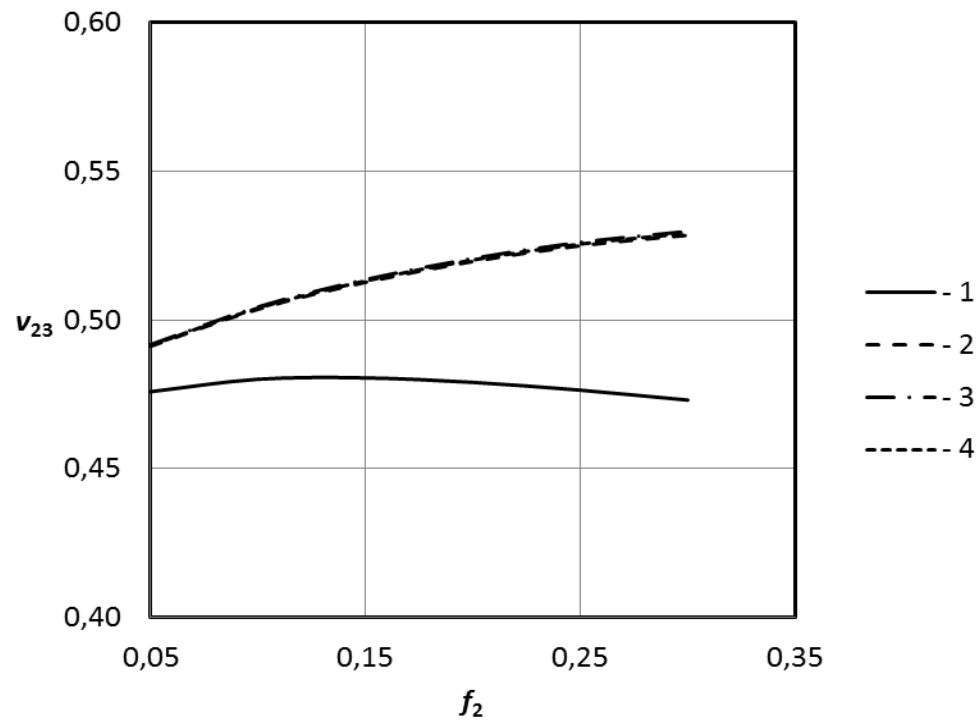
1 – формула (1.27); трикомпонентна модель матеріалу: 2 – формула (2.144), 3 – формула (2.145), 4 – формула (3.82) (лінії 2-4 практично збігаються між собою)

Рисунок 3.12 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 від f_2 .



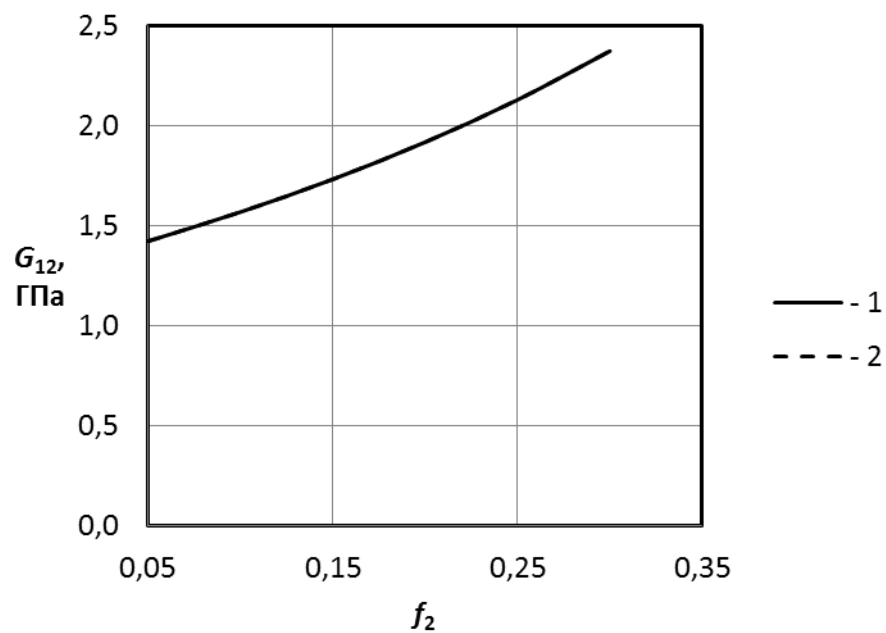
1 – формула (1.26); 2 – трикомпонентна модель матеріалу (збігається з 1)

Рисунок 3.13 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{12} від f_2 .



1 – формула (1.27) та (1.29); трикомпонентна модель матеріалу: 2 – формула (2.146), 3 – формула (2.147), 4 – формула (3.84) (лінії 2-4 практично збігаються між собою)

Рисунок 3.14 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} від f_2 .



1 – формула (1.28); 2 – трикомпонентна модель матеріалу (збігається з 1)

Рисунок 3.15 – Залежність модуль зсуву G_{12} від f_2 .

Визначимо пружні характеристики трикомпонентного композиційного матеріалу, коли його складові мають транстропні властивості. Матрицею є епоксидна смола (Ciba-Geigy 913) з пружними сталими [130]: $E^* = 5,55$ ГПа, $\nu^* = 0,37$. Як волокна I сорту використовуються волокна із поліетилену високої щільності (VHDPE Tenfor SN1A) з пружними сталими [130]: поздовжній модуль пружності $E_1^\circ = 60,4$ ГПа, поперечний модуль пружності $E_2^\circ = 4,68$ ГПа, коефіцієнти Пуассона $\nu_{12}^\circ = 0,38$ і $\nu_{23}^\circ = 0,55$, модуль зсуву $G_{12}^\circ = 1,65$ ГПа. Як волокна II сорту використовуються волокна з Е-скла з пружними сталими [132]: модуль пружності $E^\circ = 73,0$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^\circ = 0,22$. Об'ємний вміст волокна I сорту дорівнює $f_1 = 0,1$, а об'ємний вміст волокна II сорту змінюється в межах $f_2 = 0,05 \dots 0,3$. Побудуємо залежності для пружних властивостей композиційного матеріалу від об'ємного вмісту волокна II сорту (рис.3.16-3.20).

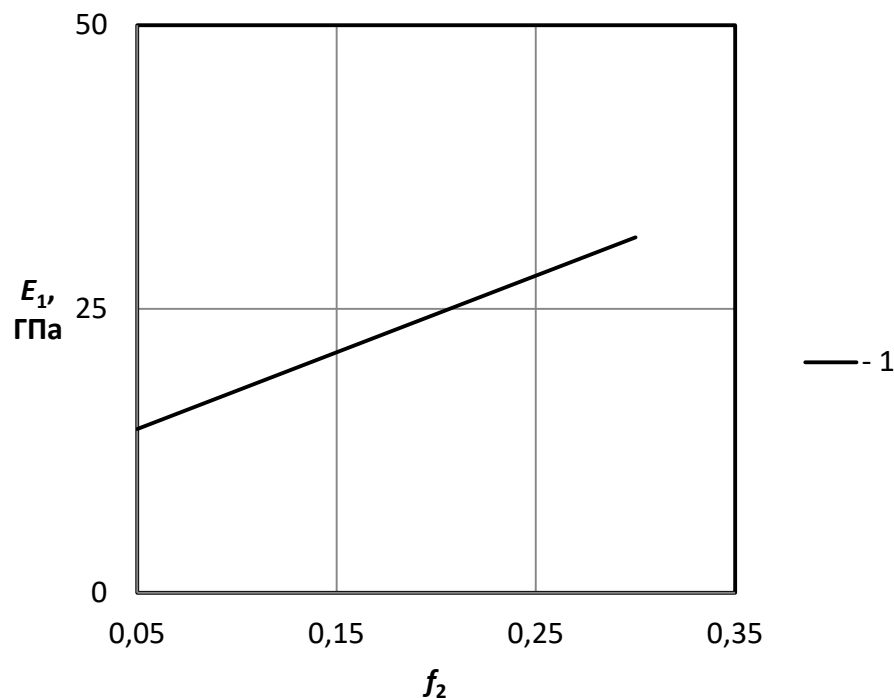
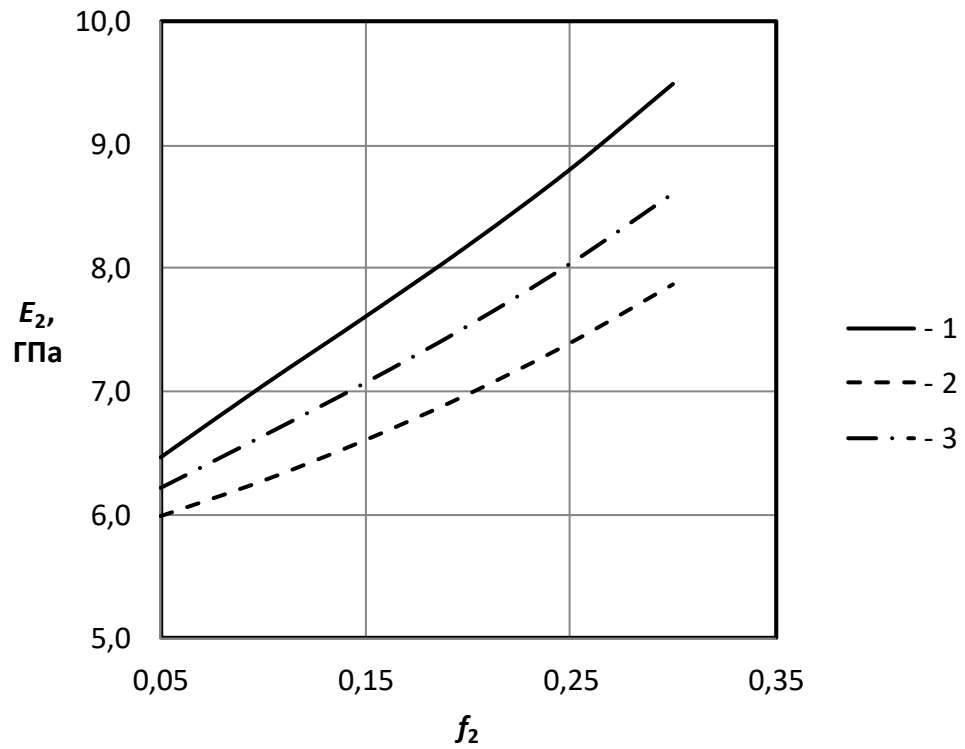


Рисунок 3.16 – Залежність поздовжнього модуля пружності E_1 трикомпонентного композиційного матеріалу від f_2 .



1 – формула (2.144); 2 – формула (2.145); 3 – формула (3.82)

Рисунок 3.17 – Залежність поперечного модуля пружності E_2 трикомпонентного композиційного матеріалу від f_2 .

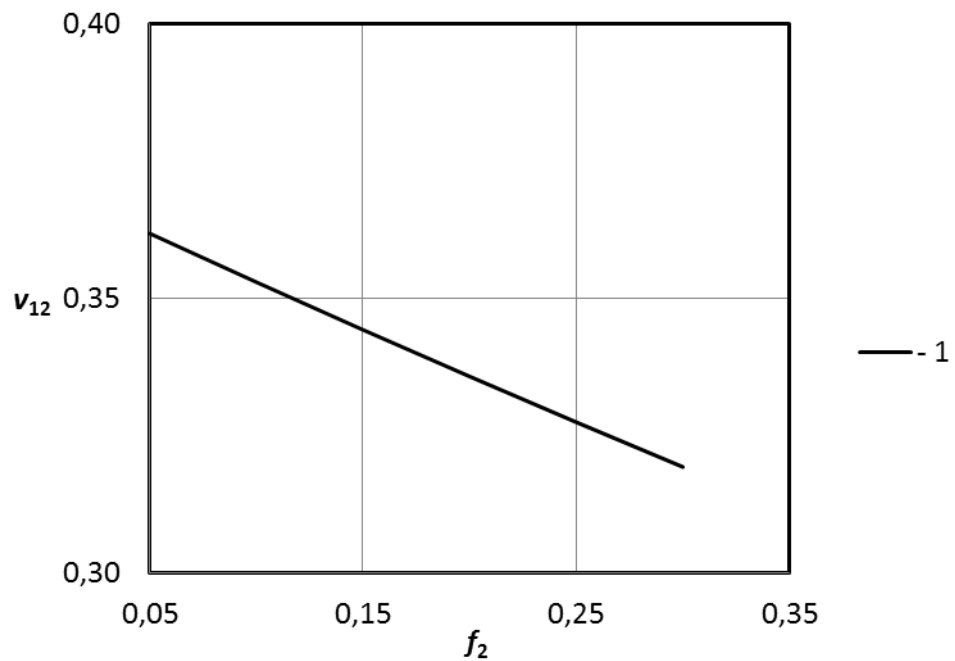
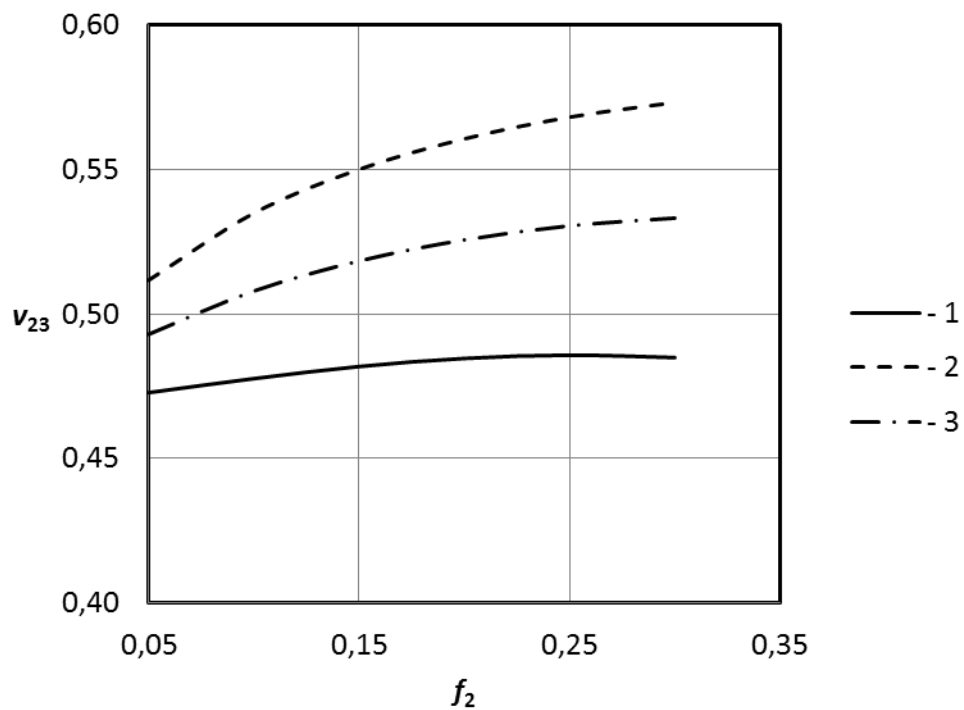


Рисунок 3.18 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{12} трикомпонентного композиційного матеріалу від f_2 .



1 – формула (2.146); 2 – формула (2.147); 3 – формула (3.84)

Рисунок 3.19 – Залежність коефіцієнта Пуассона ν_{23} трикомпонентного композиційного матеріалу від f_2 .

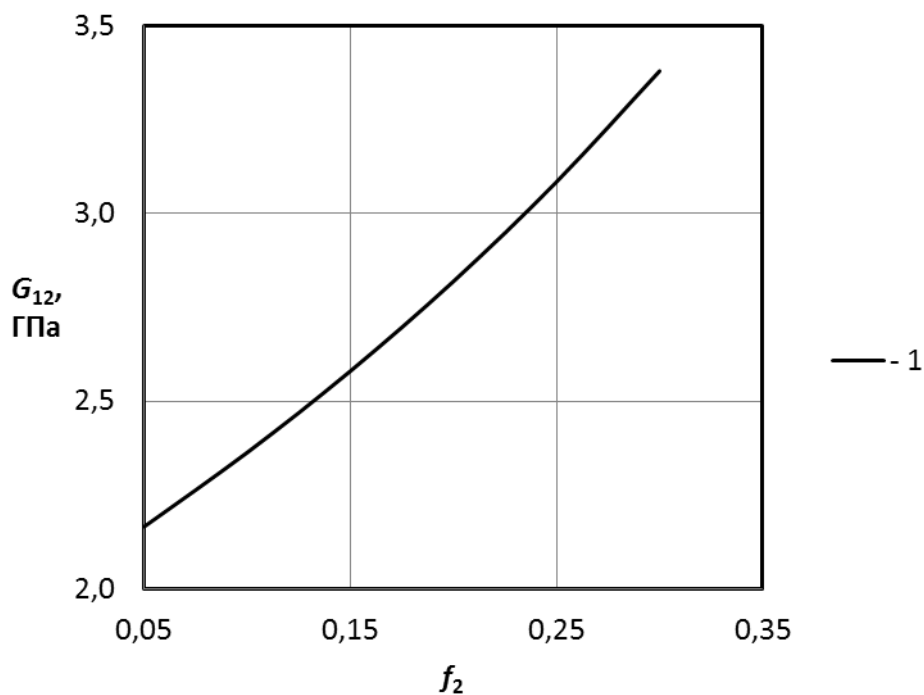


Рисунок 3.20 – Залежність модуля зсуву G_{12} трикомпонентного композиційного матеріалу від f_2 .

3.4 Висновки

У розділі на основі енергетичної умови узгодження отримані формули для визначення пружних сталих E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{23} , G_{12} композиційного матеріалу з матрицею та волокном, що мають трансропні властивості (площина ізоотропії перпендикулярна осі волокон).

Як і в попередньому розділі можна зазначити, що кожна з ефективних пружних сталих композиційного матеріалу E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{23} залежить від пружних сталих матриці E_1^* , E_2^* , ν_{12}^* , ν_{23}^* та волокна E_1° , E_2° , ν_{12}° , ν_{23}° та об'ємного вмісту матриці й волокна в композиті, й не залежить від поздовжніх зсувних властивостей матриці та волокна, що характеризуються модулями зсуву G_{12}^* та G_{12}° . У свою чергу поздовжній модуль зсуву композиційного матеріалу G_{12} залежить тільки від поздовжніх модулів зсуву матриці G_{12}^* і волокна G_{12}° та об'ємного вмісту матриці і волокна в композиті, і не залежить від інших пружних характеристик складових.

Співвідношення, отримані на основі енергетичної умови узгодження для ефективних пружних сталих композиційного матеріалу E_1 , ν_{12} та G_{12} , збігаються з аналогічними співвідношеннями, отриманими на основі кінематичної умови узгодження. Співвідношення для інших двох характеристик E_2 та ν_{23} при застосуванні цих умов узгодження різняться між собою.

Проведено порівняння чисельних розрахунків для отриманих ефективних пружних сталих композиційного матеріалу з результатами інших авторів. Зазначимо, що найбільший збіг із результатами експериментів, у тому числі для гумовокордних матеріалів, дають співвідношення, отримані на основі енергетичної умови узгодження.

Розроблено підхід, що дозволяє на основі аналітичних розв'язків визначати ефективні пружні сталі композиційного матеріалу з трансстропними волокнами 2 сортів та трансстропною матрицею при періодичній структурі армування. Показано, що запропонований підхід дає добре узгодження з результатами, отриманими за формулами інших авторів для ізотропних матриці та волокна. Отримано чисельні результати для ефективних пружних сталей трикомпонентного композита з ізотропною матрицею, ізотропним волокном одного сорту та трансстропним волокном другого сорту.

Основні положення розділу викладено у роботах [1, 73, 76, 97, 290].

РОЗДІЛ 4

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У
ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ ДЛЯ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ
МАТЕРІАЛІВ

На основі моментної схеми отримаємо основні співвідношення для матриці жорсткості скінченного елемента з урахуванням просторової орієнтації волокон композиційного матеріалу.

4.1 Вихідні співвідношення для перетворення величин

Метод скінченних елементів має цілу низку переваг при розрахунку конструкцій складної геометричної форми й дає більші можливості в процесі математичного моделювання реальних умов експлуатації. Крім того, цей метод дозволяє досить просто розраховувати конструкції, що складаються з областей із різними механічними властивостями (шини, віброізолятори, багатошарові конструкції тощо). При застосуванні МСЕ дискретизація таких конструкцій проводиться окремо для кожної з різнорідних областей (але узгоджується на межах між ними), і підходи до побудови матриці жорсткості для кожної з таких областей можуть різнитися.

В нашому випадку доцільно розбити увесь об'єм конструкції \tilde{V} на дві групи підобластей:

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^n \tilde{V}_i^{(одн)} + \sum_{j=1}^m \tilde{V}_j^{(комп)}, \quad (4.1)$$

де $\tilde{V}_i^{(одн)}$ – підобласть конструкції, що характеризується однорідними властивостями, $\tilde{V}_j^{(комп)}$ – підобласть конструкції, що характеризується різномірними властивостями (волокнистий композит).

Тоді глобальна матриця жорсткості такої конструкції $[\tilde{K}]$ може бути представлена таким чином:

$$[\tilde{K}] = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} [K_{ik}^{(одн)}] + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{M_j} [K_{jl}^{(комп)}], \quad (4.2)$$

де $[K_{ik}^{(одн)}]$ – матриця жорсткості k -ого скінченного елемента i -ої підобласті конструкції з однорідними властивостями, $[K_{jl}^{(комп)}]$ – матриця жорсткості l -ого скінченного елемента j -ої підобласті конструкції з волокнистого композита.

Опис основних співвідношень матриці жорсткості для підобластей конструкції з однорідними властивостями на основі моментної схеми скінченного елемента надано в роботах [121, 156], тому тут він не розглядається. Побудова ж матриці жорсткості композита з просторово орієнтованими волокнами потребує застосування низки модифікацій. Для зручності викладу основні співвідношення представимо в тензорному вигляді, спираючись на роботи А.И. Лур'є [151], В.В. Киричевського, С.А. Сахарова [122].

При розрахунку конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів зручніше за все ввести до розгляду три системи координат – базисну та дві місцевих. Кожна з цих систем має низку переваг. Так, базисна система координат є незмінною, в ній доцільно описувати всі геометричні та механічні характеристики конструкції, задавати граничні та початкові умови. Як правило, за базисну систему координат береться прямокутна декартова система

координат, як початок координат для цієї системи вибирається характерна точка конструкції, а напрями осей збігаються, якщо це можливо, з напрямками характерних твірних ліній конструкції. Одна з місцевих систем координат, як правило, є неортогональною криволінійною системою координат, пов'язаною зі скінченним елементом. При цьому як початок координат вибирається центр скінченного елемента, а напрям осей зв'язаний з напрямом ребер скінченного елемента. Ця система координат може змінюватися в процесі деформування конструкції. У цій системі координат зручно отримувати коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента. Друга місцева система координат, як правило, також криволінійна, пов'язана з напрямом армування волокнами. В цій системі координат зручно знаходити пружні сталі матеріалу, обчислювати компоненти тензора деформацій та напружень.

Нехай z^1, z^2, z^3 – координати точки простору в прямокутній декартовій системі координат із напрямними одиничними векторами $\bar{i}^1, \bar{i}^2, \bar{i}^3$ утворює базисну систему, а координати x^1, x^2, x^3 з векторами $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ місцеву криволінійну систему координат (рис.4.1).

Між координатами базисної та місцевої систем координат передбачається зв'язок виду:

$$z^{m'} = \varphi^{m'}(x^1, x^2, x^3). \quad (4.3)$$

Тут функції $\varphi^{m'}(x^i)$ – дійсні та неперервні разом зі своїми похідними. Ці функції є незалежними, для чого необхідно і достатньо, щоб якобіан, складений із похідних, не дорівнював нулю:

$$J = \left| \frac{\partial z^{m'}}{\partial x^i} \right| \neq 0. \quad (4.4)$$

З урахуванням нерівності (4.4) змінні x^i можуть бути виражені через змінні $z^{m'}$ рівністю:

$$x^i = \psi^i(z^{1'}, z^{2'}, z^{3'}). \quad (4.5)$$

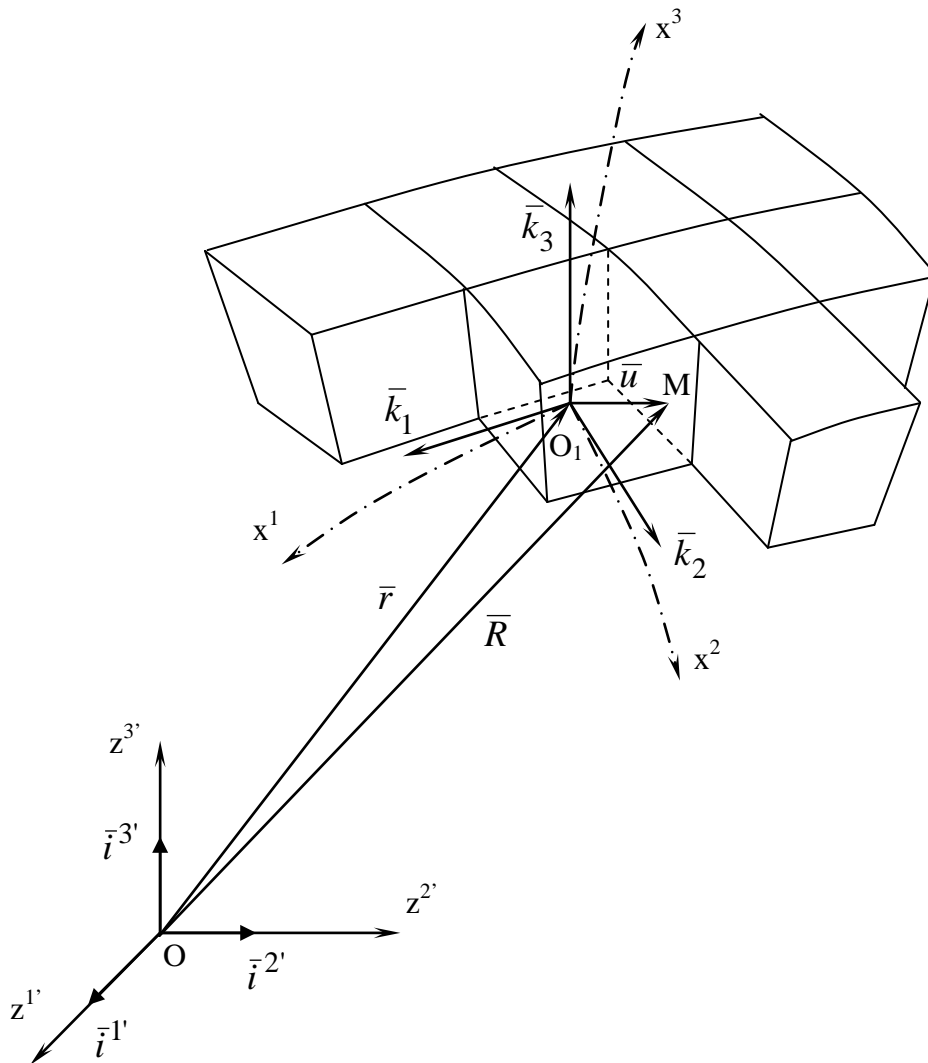


Рисунок 4.1 – Базисна та місцева система координат.

Положення будь-якої точки суцільного середовища в місцевій системі координат визначається радіус-вектором $\bar{r}(x^i)$, тоді його можна представити розкладанням, як у місцевій, так і в базисній системі координат:

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2, x^3) = x^i \bar{k}_i; \quad \bar{r} = \bar{r}(z^1, z^2, z^3) = z^{m'} \bar{i}_{m'}. \quad (4.6)$$

У кожній точці можна ввести два основних базиси векторів. Вектори основних базисів можна представити у вигляді [122]:

$$\bar{r}_{i'} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial z^{i'}}; \quad \bar{r}_j = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^j}. \quad (4.7)$$

Аналогічно можна ввести два взаємних базиси $\bar{r}^{n'}$ та \bar{r}^m ($n', m = 1, 2, 3$), які задовольняють рівностям:

$$\bar{r}_{i'} \cdot \bar{r}^{n'} = \delta_{i'}^{n'}; \quad \bar{r}_j \cdot \bar{r}^m = \delta_j^m, \quad (4.8)$$

де δ_i^j – символ Кронекера, який визначається формулою:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (4.9)$$

Обидві системи координат характеризуються відповідним метричним тензором:

$$g = g_{i'j'} \bar{r}^{i'} \bar{r}^{j'} = \bar{r}^{i'} \cdot \bar{r}_{i'}; \quad g = g_{ij} \bar{r}^i \bar{r}^j = \bar{r}^i \cdot \bar{r}_i, \quad (4.10)$$

де

$$g_{i'j'} = \bar{r}_{i'} \cdot \bar{r}_{j'}; \quad g_{ij} = \bar{r}_i \cdot \bar{r}_j. \quad (4.11)$$

Перехід від однієї системи координат до другої здійснюється за допомогою тензора перетворень:

$$C_n^{m'} = \frac{\partial z^{m'}}{\partial x^n}, \quad C_{m'}^n = \frac{\partial x^n}{\partial z^{m'}}. \quad (4.12)$$

При деформуванні довільна точка тіла займає нове положення, яке характеризується радіус-вектором \bar{R} :

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{u}, \quad (4.13)$$

де \bar{u} – вектор переміщень точки.

Припускаючи, що місцева криволінійна система координат є супроводжуючою, тобто, її координати не залежать від переміщень точок тіла, представимо компоненти G_{ij} метричного тензора в деформованому стані у вигляді:

$$G = G_{ij} \bar{R}^i \bar{R}^j = \bar{R}^i \cdot \bar{R}_i, \quad (4.14)$$

де

$$G_{ij} = \bar{R}_i \cdot \bar{R}_j, \quad (4.15)$$

$$\bar{R}_i = \frac{\partial \bar{R}}{\partial x^i}. \quad (4.16)$$

За допомогою метричних тензорів у початковому та деформованому стані визначається тензор деформацій:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) \bar{r}^i \bar{r}^j. \quad (4.17)$$

Коваріантні компоненти тензора деформацій мають вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}), \quad (4.18)$$

тут G_{ij} – компоненти метричного тензора в деформованому стані тіла V -об'ємі, g_{ij} – компоненти метричного тензора в початковому стані тіла v -об'ємі.

Якщо як базисну систему координат прийнято прямокутну декартову систему, то тензор малих деформацій, що використовується в лінійній теорії пружності, визначається співвідношенням:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j}), \quad (4.19)$$

де

$$u_{m',i} = \frac{\partial u_{m'}}{\partial x^i}. \quad (4.20)$$

Для базисної прямокутної декартової системи координат тензор кінцевих деформацій, що використовується в нелінійній теорії пружності, визначається співвідношенням:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j} + u_{m',i} u_j^{m'}). \quad (4.21)$$

Поле тензора істинних напружень (тензор Коші), може бути розкладене по векторам базису будь-яким із чотирьох способів:

$$\hat{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{k}^i \bar{k}^j = \sigma^{ij} \bar{k}_i \bar{k}_j = \sigma_j^i \bar{k}_i \bar{k}^j = \sigma_i^j \bar{k}^i \bar{k}_j, \quad (4.22)$$

або

$$\hat{\sigma} = \sigma^{ij} \bar{R}_i \bar{R}_j = \sigma_i^j \bar{R}^i \bar{R}_j. \quad (4.23)$$

При переході від однієї системи координат із векторами базису \bar{k}^i до другої з векторами базису \bar{k}^i компоненти тензора напружень перетворюються за залежностями:

$$\sigma^{m'n'} = \sigma_{ij} C^{im'} C^{jn'} = \sigma^{ij} C_i^{m'} C_j^{n'} = \sigma_j^i C_i^{m'} C^{jn'}, \quad (4.24)$$

де $C^{im'} = \bar{k}^i \cdot \bar{k}^{m'}$.

4.2 Особливості побудови матриці жорсткості просторового скінченного елемента для трансверсально-ізотропного матеріалу на основі моментної схеми

При використанні традиційного підходу в методі скінченних елементів для визначення напружено-деформованого стану просторових конструкцій проявляються такі негативні явища, як неврахування переміщень скінченного елемента як абсолютно жорсткого цілого і так званий ефект «хибного зсуву». Перше явище проявляється в уповільненій збіжності чисельних результатів, якщо прийнятий варіант апроксимації переміщень не дозволяє точно описати зміщення СЕ як жорсткого цілого [100, 155]. Друге явище проявляється в тому, що при згині тонких пластин та оболонок за допомогою просторових скінченних елементів значно зростають похибки, пов'язані з появою фіктивних зсувних деформацій [122].

Для усунення цих негативних явищ було розроблено так звану моментну схему скінченного елемента [122]. Основна ідея цієї схеми така: компоненти поля переміщень розкладаються в ряд в околі початку координат, і утримується деяка кількість початкових доданків, аналогічно розкладаються в ряд компоненти тензора деформацій. Після цього перевіряється відповідність останнього розкладання розкладанню переміщень, і якщо в це розкладання входять доданки, відсутні в розкладанні переміщень, то відповідні доданки

видаляються з розкладання. Перетворені в такий спосіб розкладання використовуються при отриманні матриці жорсткості скінченного елемента.

Одним із найбільш розповсюджених скінченних елементів, які отримуються в процесі дискретизації просторових областей, є паралелепіпедний скінченний елемент. Розглянемо побудову матриці жорсткості в місцевій системі координат, пов'язаній зі скінченним елементом. В цій системі в загальному випадку криволінійний паралелепіпедний елемент відображається в ізопараметричний скінченний елемент в вигляді куба з довжиною ребра, що дорівнює 2 (рис.4.2).

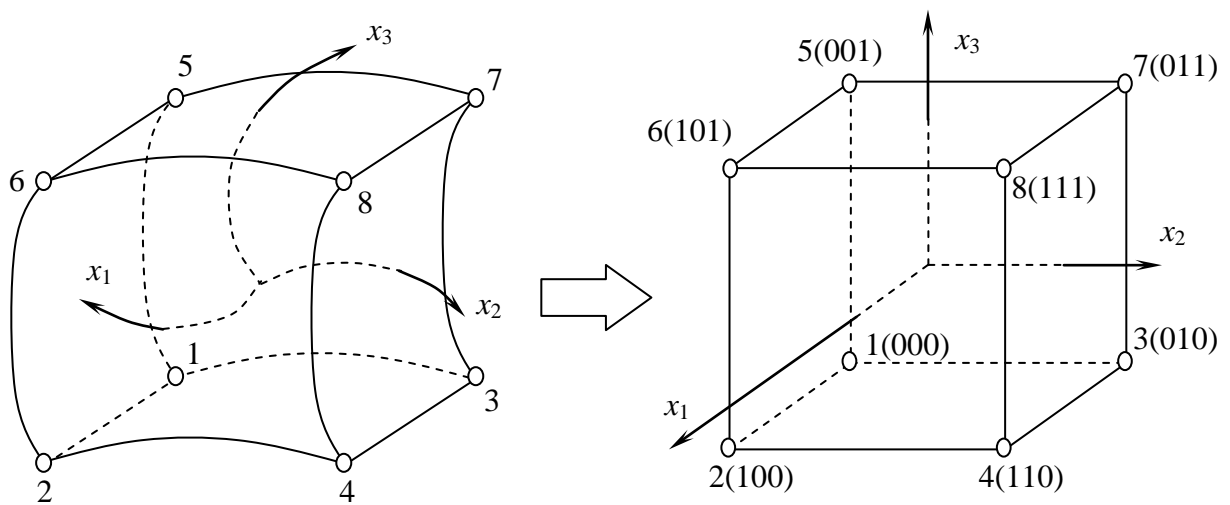


Рисунок 4.2 – Відображення криволінійного просторового скінченного елемента в куб.

Помістимо початок місцевої системи координат в центр куба, а напрямки осей виберемо такими, що збігаються з напрямками ребер куба (рис. 4.2). На рисунку показана локальна нумерація вузлів скінченного елемента та їх сіткові координати.

Введемо до розгляду також місцеву систему координат, пов'язану з напрямом армування матеріалу волокнами (рис. 4.3). Для зручності помістимо початок координат цієї системи в центр куба. Будемо вважати волокно довільно орієнтованим у просторі, напрям армування якого в системі координат скінченного елемента визначається двома кутами – α та β (кут β

відкладається у площині x_1Ox_2). На відміну від більшості запропонованих скінченних елементів, для таких матеріалів армування задається в площинах, паралельних граням скінченного елемента. Це звужує клас розв'язуваних задач або приводить до великих неточностей при розрахунку через похибки при описі напрямку армування. При побудові сіток для таких скінченних елементів виникають жорсткі вимоги щодо прив'язки напрямку армування до напрямку сіткових ліній, що обмежує можливості автоматичної генерації сіток.

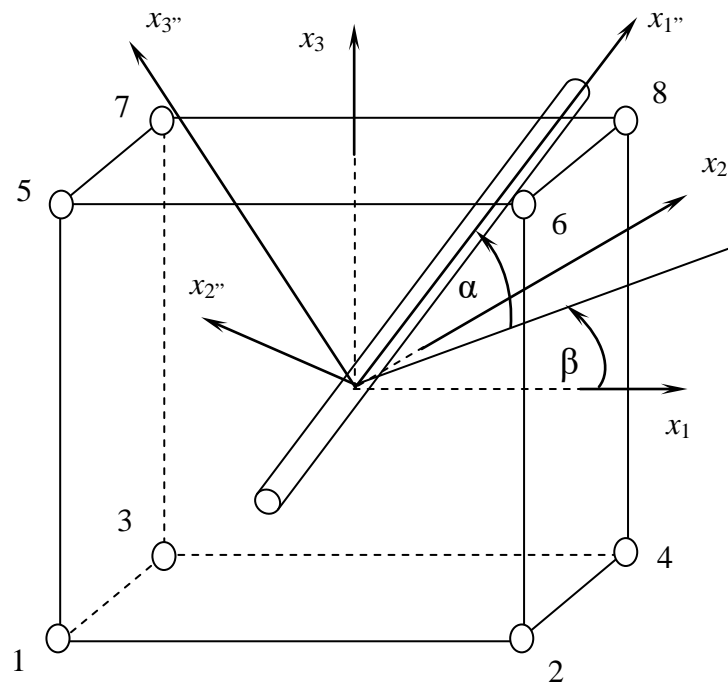


Рисунок 4.3 – Система координат армування.

Скористаємося варіаційним підходом при виведенні основних співвідношень матриці жорсткості, розглянемо варіаційний принцип Лагранжа при розв'язанні крайової задачі для просторової конструкції. Потенціальну енергію для конструкції $\tilde{\Pi}$ можна визначити так:

$$\tilde{\Pi} = \tilde{W} - \tilde{A}, \quad (4.25)$$

де \tilde{W} – енергія пружної деформації конструкції, \tilde{A} – робота зовнішніх сил, що діють на конструкцію.

Згідно з запропонованою вище дискретизацією можемо записати варіацію потенціальної енергії конструкції:

$$\delta\tilde{\Pi} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} \delta W_{ik}^{(одн)} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{M_j} \delta W_{jl}^{(комн)} + \delta\tilde{A}. \quad (4.26)$$

Щоб побудувати матрицю жорсткості скінченного елемента для композиційного матеріалу, розглянемо окремо варіацію енергії пружної деформації скінченного елемента $\delta W_{jl}^{(комн)}$, що займає об'єм V (надалі позначимо $W_{jl}^{(комн)}$ як W):

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

або, скориставшись законом Гука, маємо

$$\delta W = \iiint_V C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

або в матричному вигляді

$$\delta W = \iiint_V \{\delta \varepsilon_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\varepsilon_{kl}\} dV, \quad (4.27)$$

де $\{\varepsilon_{kl}\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}\}^T$ – вектор деформацій, $[C^{ijkl}]$ – матриця пружних сталей ортотропного тіла в системі координат скінченного елемента x_i .

Однак компоненти тензора пружних сталей зручніше обчислювати в системі координат армування x_m , тоді матриця пружних сталей ортотропного тіла матиме такий вигляд:

$$[C^{i''j''k''l''}] =$$

$$= \begin{bmatrix} C^{1''1''1''1''} & 0 & 0 & 0 & C^{1''1''2''2''} & 0 & 0 & 0 & C^{1''1''3''3''} \\ 0 & C^{1''2''1''2''} & 0 & C^{1''2''2''1''} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{1''3''1''3''} & 0 & 0 & 0 & C^{1''3''3''1''} & 0 & 0 \\ 0 & C^{2''1''1''2''} & 0 & C^{2''1''2''1''} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C^{2''2''1''1''} & 0 & 0 & 0 & C^{2''2''2''2''} & 0 & 0 & 0 & C^{2''2''3''3''} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2''3''2''3''} & 0 & C^{2''3''3''2''} & 0 \\ 0 & 0 & C^{3''1''1''3''} & 0 & 0 & 0 & C^{3''1''3''1''} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{3''2''2''3''} & 0 & C^{3''2''3''2''} & 0 \\ C^{3''3''1''1''} & 0 & 0 & 0 & C^{3''3''2''2''} & 0 & 0 & 0 & C^{3''3''3''3''} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Компоненти тензора пружних сталих $C^{i''j''k''l''}$ для ортотропного тіла в системі координат армування $x_{m''}$ обчислюються за допомогою таких співвідношень [4]:

$$\begin{aligned} C^{1''1''1''1''} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (1 - \nu_{23}\nu_{32}); & C^{1''1''2''2''} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}); \\ C^{1''1''3''3''} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (\nu_{12}\nu_{23} + \nu_{13}); & C^{2''2''1''1''} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}); \\ C^{2''2''2''2''} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (1 - \nu_{13}\nu_{31}); & C^{2''2''3''3''} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}); \\ C^{3''3''1''1''} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (\nu_{21}\nu_{32} + \nu_{31}); & C^{3''3''2''2''} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}); \\ C^{3''3''3''3''} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (1 - \nu_{21}\nu_{12}); & C^{1''2''1''2''} &= \frac{G_{12}}{2}; & C^{1''3''1''3''} &= \frac{G_{13}}{2}; & C^{2''3''2''3''} &= \frac{G_{23}}{2}; \\ \Delta_* &= (1 - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності у відповідних напрямках системи армування, G_{ij} – модулі зсуву трансверсально-ізотропного матеріалу, ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона (перший індекс вказує напрям діючого напруження, другий – напрям поперечної деформації, що виникає при цьому).

Решта компонент тензора пружних сталих $C^{i''j''k''l''}$ в представленні (4.29) знаходяться із властивості симетрії [160]:

$$\begin{aligned} C^{i''j''k''l''} &= C^{k''l''i''j''}; & C^{i''j''k''l''} &= C^{i''j''l''k''}; \\ C^{i''j''k''l''} &= C^{j''i''k''l''}; & C^{i''j''k''l''} &= C^{j''i''l''k''}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Якщо врахувати симетричність тензора деформацій, то вектор деформацій у виразі варіації енергії пружної деформації (4.27) можна записати у вигляді $\{\varepsilon_{kl}\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T$. Тоді матрицю пружних сталих ортотропного тіла (4.29) можна представити у вигляді:

$$[C^{i''j''k''l''}] = \begin{bmatrix} C^{1''1''1''1''} & C^{1''1''2''2''} & C^{1''1''3''3''} & 0 & 0 & 0 \\ C^{2''2''1''1''} & C^{2''2''2''2''} & C^{2''2''3''3''} & 0 & 0 & 0 \\ C^{3''3''1''1''} & C^{3''3''2''2''} & C^{3''3''3''3''} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C^{1''2''1''2''} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C^{1''3''1''3''} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C^{2''3''2''3''} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

А якщо врахувати трансверсально-ізотропні властивості матеріалу та співвідношення (4.30), матриця пружних сталих трансверсально-ізотропного тіла набуде вигляду:

$$[C^{i''j''k''l''}] = \begin{bmatrix} C^{1''1''1''1''} & C^{1''1''2''2''} & C^{1''1''2''2''} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1''1''2''2''} & C^{2''2''2''2''} & C^{2''2''3''3''} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1''1''2''2''} & C^{2''2''3''3''} & C^{2''2''2''2''} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C^{1''2''1''2''} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C^{1''2''1''2''} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C^{2''3''2''3''} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Система координат скінченного елемента та система координат армування перетворюються одна в другу шляхом просторового повороту (рис.4.3). Зв'язок між ними визначається співвідношеннями:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1'' \cos \alpha \cos \beta + x_2'' \cos \alpha \sin \beta + x_3'' \sin \alpha, \\x_2 &= -x_1'' \sin \beta + x_2'' \cos \beta, \\x_3 &= -x_1'' \sin \alpha \cos \beta - x_2'' \sin \alpha \sin \beta + x_3'' \cos \alpha.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Зворотний зв'язок запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}x_1'' &= x_1 \cos \alpha \cos \beta - x_2 \sin \beta - x_3 \sin \alpha \cos \beta, \\x_2'' &= x_1 \cos \alpha \sin \beta + x_2 \cos \beta - x_3 \sin \alpha \sin \beta, \\x_3'' &= x_1 \sin \alpha + x_3 \cos \alpha.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Для перетворення компонентів тензора пружних сталей із системи координат армування $C^{i''j''k''l''}$ в систему координат скінченного елемента C^{ijkl} скористаємося формулою:

$$C^{ijkl} = C^{i''j''k''l''} a_{i''}^i a_{j''}^j a_{k''}^k a_{l''}^l, \quad (4.35)$$

де $a_{i''}^i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{i''}}$ – компоненти тензора перетворень координат.

При повороті системи координат на кути α та β , як показано на рисунку 4.3, з урахуванням (4.33) можемо отримати матрицю перетворень координат:

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Апроксимацію переміщень по об'єму всередині цього скінченного елемента доцільно представити у вигляді лінійного закону за всіма трьома напрямками:

$$u_{k'} = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^L \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \\ + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(111)}, \quad (4.37)$$

де $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладання; $\psi^{(pqr)}$ – набір степеневих координатних функцій вигляду:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x_1)^p (x_2)^q (x_3)^r}{p!q!r!}, \quad (4.38)$$

де $p = 0, \dots, M$; $q = 0, \dots, N$; $r = 0, \dots, L$ – степені апроксимуючого полінома за відповідними координатними напрямками.

Для координатних функцій $\psi^{(pqr)}$ виконується умова диференціювання:

$$\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \psi^{(pqr)} = \psi^{(p-\alpha \ q-\beta \ r-\gamma)}. \quad (4.39)$$

Враховуючи формули (4.37)-(4.39), отримаємо вираз для похідних функції переміщень всередині скінченного елемента:

$$u_{k',1} = \omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)}; \\ u_{k',2} = \omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)}; \\ u_{k',3} = \omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)}. \quad (4.40)$$

Компоненти тензора деформацій розкладемо в ряд Маклорена в околі початку місцевої системи координат у такий спосіб:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^L e_{ij}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (4.41)$$

де $e_{ij}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладання.

В матричній формі запису це розкладання можна представити у вигляді:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{\psi_{ij}\} \{e_{ij}\}. \quad (4.42)$$

Коефіцієнти розкладання тензора деформацій e_{ij} , які визначаються в центрі скінченного елемента, можна представити через коефіцієнти апроксимації переміщень $\omega_{k'}^{(pqr)}$ за допомогою перетворення:

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (4.43)$$

Підставивши співвідношення (4.42) в (4.27), отримаємо:

$$\delta W = \iiint_V \{\delta e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \{e_{kl}\} dV. \quad (4.44)$$

Враховуючи обчислювальні аспекти побудови матриці жорсткості та необхідність отримання енергії пружної деформації скінченного елемента, для перетворення величин із однієї системи координат до іншої запишемо співвідношення, які зв'язують базисну систему координат та систему координат скінченного елемента. Зв'язок базисної системи координат $z_{k'}$ з системою координат просторового ізопараметричного скінченного елемента x_i з лінійною апроксимацією переміщень визначається співвідношеннями:

$$z_{k'} = \sum_{L=0}^8 N_L(x_1, x_2, x_3) z_{k'}^L, \quad (4.45)$$

де $z_{k'}^L$ – k' -а координата L -ого вузла в базисній системі координат (рис.4.2), $k'=1,2,3$; $L=1,\dots,8$, $N_L(x_1, x_2, x_3)$ – функції форми L -ого вузла, які визначаються для скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень формулою виду [121]:

$$N_L = \frac{1}{8} \left(1 + x_1 x_1^L\right) \left(1 + x_2 x_2^L\right) \left(1 + x_3 x_3^L\right), \quad (4.46)$$

де x_i^L – i -а координата L -ого вузла в системі координат скінченного елемента (рис.4.2), $i=1,2,3$; $L=1,\dots,8$.

Запишемо функції форми N_L для кожного вузла скінченного елемента у відповідності з формулою (4.46):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3), & N_2 &= \frac{1}{8}(1+x_1)(1-x_2)(1-x_3), \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1-x_1)(1+x_2)(1-x_3), & N_4 &= \frac{1}{8}(1+x_1)(1+x_2)(1-x_3), \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-x_1)(1-x_2)(1+x_3), & N_6 &= \frac{1}{8}(1+x_1)(1-x_2)(1+x_3), \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1-x_1)(1+x_2)(1+x_3), & N_8 &= \frac{1}{8}(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Згідно з формулами (4.19) та (4.20), матимемо в нашому випадку:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_{m'}}{\partial x_j} u_{m',i} + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_i} u_{m',j} \right), \quad (4.48)$$

а враховуючи вираз (4.37), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial z_{k'}}{\partial x_1} \left(\omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right); \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial z_{k'}}{\partial x_2} \left(\omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right); \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial z_{k'}}{\partial x_3} \left(\omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right); \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_{k'}}{\partial x_2} \left(\omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial z_{k'}}{\partial x_1} \left(\omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right) \right); \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_{k'}}{\partial x_3} \left(\omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial z_{k'}}{\partial x_1} \left(\omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right) \right); \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_{k'}}{\partial x_3} \left(\omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial z_{k'}}{\partial x_2} \left(\omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right) \right). \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Коефіцієнти розкладання $e_{ij}^{(pqr)}$ в співвідношенні (4.41), визначимо за формулою:

$$e_{ij}^{(pqr)} = \frac{\partial^{p+q+r} \varepsilon_{ij}}{(\partial x_1)^p (\partial x_2)^q (\partial x_3)^r} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}. \quad (4.50)$$

Формальний запис коефіцієнтів розкладання $e_{ij}^{(pqr)}$ буде такий же, як і для ізотропного матеріалу [122]:

$$\begin{aligned}
e_{11}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} f_{(p+1-\mu q-\nu r-\eta)}^{k'}; \\
e_{22}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} f_{(p-\mu q+1-\nu r-\eta)}^{k'}; \\
e_{33}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} f_{(p-\mu q-\nu r+1-\eta)}^{k'}; \\
e_{12}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} f_{(p-\mu+1q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} f_{(p-\mu q-\nu+1r-\eta)}^{k'} \right); \\
e_{13}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} f_{(p-\mu+1q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} f_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right); \\
e_{23}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} f_{(p-\mu q-\nu+1r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} f_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right), \quad (4.51)
\end{aligned}$$

де прийнято позначення

$$f_{(\mu\nu\eta)}^{k'} = \frac{\partial^{\mu+\nu+\eta} z_{k'}}{(\partial x_1)^\mu (\partial x_2)^\nu (\partial x_3)^\eta} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}. \quad (4.52)$$

Отримані коефіцієнти розкладання $e_{ij}^{(pqr)}$ наведені в додатку Б.

Аналізуючи отримані співвідношення для коефіцієнтів розкладання деформацій $e_{ij}^{(pqr)}$ (додаток Б), можемо помітити, що не всі коефіцієнти $\omega_{k'}^{(pqr)}$, що входять до розкладання для $e_{ij}^{(pqr)}$, присутні в розкладанні переміщень (4.37). Тому ті доданки розкладання деформацій (4.41), які містять хоча б один із членів, що не входять до розкладання переміщень (4.37), повинні бути опущені в розкладанні (4.41). Тоді компоненти тензора деформацій з урахуванням вказаних вище зауважень набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{11} = e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)} \Psi^{(010)} + e_{11}^{(001)} \Psi^{(001)} + e_{11}^{(011)} \Psi^{(011)},$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{22}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{22}^{(101)} \psi^{(101)}, \\
\varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{33}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{33}^{(110)} \psi^{(110)}, \\
\varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)} \psi^{(001)}, \\
\varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)} \psi^{(010)}, \\
\varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \psi^{(100)}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Щоб записати вищенаведені співвідношення в матричному вигляді, необхідно сформулювати матрицю $[F_{ij}^{k'}]$, що входить в (4.43), з урахуванням співвідношень для коефіцієнтів розкладання деформацій $e_{ij}^{(pqr)}$ (додаток Б) та (4.53).

Тоді в матричному вигляді варіація енергії пружної деформації, з урахуванням (4.42) та (4.43), набуде вигляду:

$$\delta W = \iiint_V \{\delta \omega_{k'}\}^T [F_{ij}^{k'}]^T \{\psi_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} [F_{kl}^{m'}] \{\omega_{m'}\} dV. \tag{4.54}$$

А враховуючи, що (4.54) можна записати у вигляді:

$$\delta W = \{\delta \omega_{k'}\}^T [F_{ij}^{k'}]^T \iiint_V \{\psi_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} dV [F_{kl}^{m'}] \{\omega_{m'}\}, \tag{4.55}$$

або

$$\delta W = \{\delta \omega_{k'}\}^T [F_{ij}^{k'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{m'}] \{\omega_{m'}\}, \tag{4.56}$$

де $[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3$ – матриця пружних

сталей, яка з урахуванням метрики простору характеризує транслопні властивості композиційного матеріалу на основі (4.32).

Компоненти вектора переміщень $u_{k'}$ в глобальній системі координат для просторового ізопараметричного скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень визначаються через вузлові значення вектора переміщень $u_{k'}^L$ та функції форми $N_L(x_1, x_2, x_3)$ (4.47) співвідношеннями:

$$u_{k'} = \sum_{L=0}^8 N_L(x_1, x_2, x_3) u_{k'}^L, \quad (4.57)$$

де $u_{k'}^L$ – переміщення L -ого вузла за k' -им напрямом в базисній системі координат (рис.4.2).

Для побудови матриці жорсткості перейдемо в виразі (4.37) від коефіцієнтів $\omega_{k'}^{(pqr)}$ до значень переміщень $u_{k'}^L$ в вузлах скінченного елемента за допомогою матриці перетворень $[A]$. Матриця $[A]$ задає зв'язок між апроксимуючими функціями Лагранжа (функції форми N_L) та степеневими функціями $\psi^{(pqr)}$. Вираз (4.37) можна записати у вигляді:

$$u_{k'} = \{\psi_{ij}^*\} \{\omega_{k'}^*\}^T, \quad (4.58)$$

де $\{\omega_{k'}^*\} = \{\omega_{k'}^{(000)}, \omega_{k'}^{(100)}, \omega_{k'}^{(010)}, \omega_{k'}^{(110)}, \omega_{k'}^{(001)}, \omega_{k'}^{(101)}, \omega_{k'}^{(011)}, \omega_{k'}^{(111)}\}$ – вектор коефіцієнтів розкладання, $\{\psi_{ij}^*\} = \{1, x_1, x_2, x_1x_2, x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$ – вектор степеневих функцій.

З іншого боку, згідно з (4.57), маємо

$$u_{k'} = \{N_L\} \{u_{k'}^*\}^T, \quad (4.59)$$

де $\{u_{k'}^*\} = \{u_{k'}^{(1)}, u_{k'}^{(2)}, u_{k'}^{(3)}, u_{k'}^{(4)}, u_{k'}^{(5)}, u_{k'}^{(6)}, u_{k'}^{(7)}, u_{k'}^{(8)}\}$ – вектор вузлових переміщень, $\{N_L\} = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8)$ – вектор функцій форми виду (4.47).

Матриця $[A]$ визначається на основі прийнятого закону апроксимації переміщень. Представимо функції форми через степеневі функції у вигляді:

$$\{N_L\} = \{\psi_{ij}^*\} [A^*]^T, \quad (4.60)$$

де $[A^*]$ – підматриця матриці $[A]$ (див. додаток В).

Тоді, враховуючи рівність правих частин виразів (4.58) та (4.59), можемо записати:

$$\{\omega_{k'}^*\}^T = [A^*]^T \{u_{k'}^*\}^T, \quad (4.61)$$

або, в загальному випадку, маємо:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]^T \{u_{k'}^L\}. \quad (4.62)$$

Варіація енергії пружної деформації з урахуванням (4.62) запишеться у вигляді:

$$\delta W = \{\delta u_{k'}^L\}^T [A] [F_{ij}^{k'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{m'}] [A]^T \{u_{m'}^L\}, \quad (4.63)$$

або

$$\delta W = \{\delta u_{k'}^L\}^T [K^{k'm'}] \{u_{m'}^L\}. \quad (4.64)$$

Матриця жорсткості скінченного елемента на основі моментної схеми для просторово-армованого волокнистого композита має вигляд:

$$\left[K^{k'm'} \right] = [A] \left[F_{ij}^{k'} \right]^T \left[H^{ijkl} \left[F_{kl}^{m'} \right] \right] [A]^T. \quad (4.65)$$

Загальний вигляд матриць $[A]$, $\left[F_{ij}^{k'} \right]$, що використовуються при побудові матриці $\left[K^{k'm'} \right]$, наведено в додатку В. Розмірність матриці жорсткості 24×24 .

Глобальну матрицю жорсткості отримаємо на основі (4.26) підсумовуванням по всім скінченим елементам.

4.3 Дослідження збіжності розв'язків на основі матриці жорсткості скінченного елемента

Теоретичні докази збіжності моментної схеми скінченного елемента викладені в монографії [157]. Дослідимо збіжність розв'язків при використанні запропонованої матриці жорсткості скінченного елемента чисельно.

Розглянемо плоску вісесиметричну задачу для порожнистого циліндра із волокнистого композита під внутрішнім тиском та зацементованою зовнішньою циліндричною поверхнею. Розглянемо плосконапружений стан. Загальний аналітичний розв'язок плоскої задачі для однорідного ортотропного матеріалу наведено в роботі [121]. Для радіальних переміщень маємо:

$$u_r = Ar \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + B / r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}, \quad (4.66)$$

де E_r , E_θ – модулі пружності ортотропного матеріалу в радіальному і тангенціальному напрямі.

Невідомі сталі A та B визначимо з указаних граничних умов ($\sigma_r(r_1) = -q$, $u_r(r_2) = 0$, де r_1, r_2 – внутрішній та зовнішній радіус циліндра, q – внутрішній тиск). У підсумку маємо:

$$u_r = A \left(r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - r_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} / r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \right);$$

$$A = \frac{-qr_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + 1 (1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r})}{\left(r_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (\sqrt{E_r E_\theta} - E_\theta \nu_{r\theta}) + r_1^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (\sqrt{E_r E_\theta} + E_\theta \nu_{r\theta}) \right)}, \quad (4.67)$$

де $\nu_{r\theta}, \nu_{\theta r}$ – коефіцієнти Пуассона.

В системі координат армування композиційний матеріал представимо однорідним транстропним матеріалом на основі правила сумішей:

$$E_1'' = E^* (1 - f) + E^\circ f; \quad E_2'' = \frac{E^* E^\circ}{E^* f + E^\circ (1 - f)}, \quad E_2'' = E_3'';$$

$$\nu_{1''2''} = \nu^\circ f + \nu^* (1 - f); \quad \nu_{2''1''} = \frac{E_2''}{E_1''} \nu_{1''2''};$$

$$G_{2''3''} = G^* \frac{g + f + (1 - f)G^*/G^\circ}{g(1 - f) + (1 + fg)G^*/G^\circ};$$

$$\nu_{2''3''} = \frac{E_2''}{2G_{2''3''}} - 1; \quad \nu_{2''3''} = \nu_{3''2''}, \quad (4.68)$$

де E^*, G^*, ν^* – модуль пружності, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці, $E^\circ, G^\circ, \nu^\circ$ – модуль пружності, модуль зсуву та коефіцієнт

Пуассона матеріалу волокна, f – об'ємна частка волокна в композиті,
 $g = 3 - 4\nu^*$.

Для вісесиметричної задачі можливі три випадки армування:

– в тангенціальному напрямі, тоді у формулах (4.66), (4.67) необхідно прийняти $E_r = E_2''$, $E_\theta = E_1''$, $\nu_{r\theta} = \nu_2''1''$, $\nu_{\theta r} = \nu_1''2''$;

– в осьовому напрямі, тоді у формулах (4.66), (4.67) необхідно прийняти $E_r = E_2''$, $E_\theta = E_3''$, $\nu_{r\theta} = \nu_2''3''$, $\nu_{\theta r} = \nu_3''2''$;

– в радіальному напрямі, тоді у формулах (4.66), (4.67) необхідно прийняти $E_r = E_1''$, $E_\theta = E_2''$, $\nu_{r\theta} = \nu_1''2''$, $\nu_{\theta r} = \nu_2''1''$.

Матеріал матриці це каркасна гума 2и8338 з механічними характеристиками $E^* = 4,4$ МПа; $\nu^* = 0,49$. Матеріал волокна – це поліамідний корд 23КНТС із механічними характеристиками $E^\circ = 1277,5$ МПа; $\nu^\circ = 0,3$. Внутрішній радіус циліндра $r_1 = 0,1$ м, зовнішній радіус циліндра $r_2 = 0,15$ м, внутрішній тиск $q = 5$ МПа. Результати розрахунку при різних сітках дискретизації показують стійку збіжність до аналітичного розв'язку. Аналітичні та чисельні результати при сітці дискретизації $10 \times 21 \times 3$ наведені в таблиці 4.1.

Представлена похибка чисельних результатів $\varepsilon = \frac{u_n - u_a}{u_a} 100\%$ (u_a – аналітичний розв'язок, u_n – чисельний розв'язок).

Не враховуючи граничних випадків ($f = 0$ та $f = 1$), найменші значення переміщень отримуємо при радіальному армуванні, найбільші – при осьовому. Це пояснюється тим, що при радіальному армуванні радіальне навантаження сприймають більш жорсткі волокна, а при осьовому – менш жорсткий матеріал матриці. Тангенціальне армування дає проміжний результат.

Результати розрахунку показують, що запропонований підхід дає хороше узгодження з аналітичними розв'язками. Похибка розрахунків, як правило, не

перевищує 1 %. При $f = 0$ похибка складає близько 8 %. Це пов'язано з тим, що матеріал при такому f є гумою і стає слабкостисливим. Для врахування слабкої стисливості необхідне застосування спеціальних підходів. Одним із них є моментна схема скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів [122].

Таблиця 4.1. – Переміщення внутрішньої точки циліндра

f	Армування					
	тангенціальне		радіальне		осьове	
	Формула (4.66), м	МССЕ, м (похибка, %)	Формула (4.66), м	МССЕ, м (похибка, %)	Формула (4.66), м	МССЕ, м (похибка, %)
0	$4,093 \times 10^{-2}$	$3,759 \times 10^{-2}$ (-8,16 %)	$4,093 \times 10^{-2}$	$3,759 \times 10^{-2}$ (-8,16 %)	$4,093 \times 10^{-2}$	$3,759 \times 10^{-2}$ (-8,16 %)
0,2	$1,401 \times 10^{-2}$	$1,392 \times 10^{-2}$ (-0,64 %)	$7,810 \times 10^{-4}$	$7,821 \times 10^{-4}$ (0,26 %)	$3,629 \times 10^{-2}$	$3,631 \times 10^{-2}$ (0,06 %)
0,4	$8,539 \times 10^{-3}$	$8,444 \times 10^{-3}$ (-1,12 %)	$3,940 \times 10^{-4}$	$3,948 \times 10^{-4}$ (0,20 %)	$2,694 \times 10^{-2}$	$2,696 \times 10^{-2}$ (0,07 %)
0,6	$5,684 \times 10^{-3}$	$5,634 \times 10^{-3}$ (-0,88 %)	$2,640 \times 10^{-4}$	$2,640 \times 10^{-4}$ (0,00 %)	$1,720 \times 10^{-2}$	$1,721 \times 10^{-2}$ (0,06 %)
0,8	$3,493 \times 10^{-3}$	$3,477 \times 10^{-3}$ (-0,46 %)	$1,980 \times 10^{-4}$	$1,983 \times 10^{-4}$ (0,15 %)	$8,203 \times 10^{-3}$	$8,207 \times 10^{-3}$ (0,05 %)
1	$1,550 \times 10^{-4}$	$1,539 \times 10^{-4}$ (-0,71 %)	$1,550 \times 10^{-4}$	$1,539 \times 10^{-4}$ (-0,71 %)	$1,550 \times 10^{-4}$	$1,539 \times 10^{-4}$ (-0,71 %)

4.4 Висновки

У розділі отримані основні співвідношення матриці жорсткості для композиційного матеріалу з довільно орієнтованими волокнами на основі моментної схеми скінченного елемента, яка полягає у подвійній апроксимації

полів переміщень та компонент тензора деформацій. Це дозволяє поліпшити збіжність чисельних результатів та нівелювати такі негативні якості традиційного МСЕ, як ефект «хибного» зсуву та неврахування зміщень скінченного елемента як абсолютно жорсткого цілого.

Можливість завдання просторового напрямку армування дає можливість полегшити завдання вихідних даних, зменшити обчислювальні похибки за рахунок зниження кількості елементарних обчислювальних операцій. Також при побудові дискретної моделі конструкції знижуються вимоги до використання автоматичних генераторів побудови сіток за рахунок відсутності прив'язки до напрямку армування.

За допомогою запропонованої матриці здійснено розрахунок вісесиметричної задачі для волокнистого композиційного матеріалу при різних сітках дискретизації. Проведене порівняння з аналітичним розв'язком для вісесиметричної конструкції для гумовокордного матеріалу показало добру узгодженість чисельних результатів для усього діапазону об'ємного вмісту волокна, окрім $f=0$, коли матеріал є гумою. Для розрахунку в цьому випадку необхідно застосування спеціальних скінченних елементів для слабкостисливих матеріалів.

Матеріали розділу відображені в роботах [53, 57, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 70, 72, 74, 75, 77, 78, 97, 102, 115, 116, 119, 128, 156, 158, 175, 176, 177, 193, 240, 274, 289].

РОЗДІЛ 5

ПАКЕТ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ «КОМПОЗИТ» ДЛЯ РОЗРАХУНКУ
КОНСТРУКЦІЙ ІЗ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТИВ У ПРОГРАМНОМУ
КОМПЛЕКСІ «МІРЕЛА+»

У розділі надається опис програмної реалізації запропонованих раніше підходів та наводиться чисельний підхід до врахування геометричної нелінійності на основі моментної схеми скінченного елемента.

5.1 Структура програмного комплексу «МІРЕЛА+»

Програмний комплекс «МІРЕЛА+» (міцність і руйнування еластомерних матеріалів) призначений для розрахунку еластомерних та композитних елементів конструкцій на міцність, руйнування та довговічність при статичних та динамічних навантаженнях. Основні підсистеми в структурі програмного комплексу «МІРЕЛА+» наведені на рис. 5.1.

Розрахунок конструкцій методом скінченних елементів можна представити у вигляді трьох взаємопов'язаних послідовних процесів:

- 1) підготовка вихідних даних – опис топології конструкції, кінематичних та силових граничних умов, фізико-механічних характеристик композиційного матеріалу, скінченно-елементна дискретизація конструкції та інших;
- 2) чисельний розрахунок скінченно-елементної моделі – обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості скінченних елементів, формування глобальної системи розв'язувальних рівнянь та її розв'язок;

3) обробка результатів розв'язання – обчислення параметрів напружено-деформованого стану конструкції; їх візуальне представлення у вигляді таблиць, графіків, двовимірних або тривимірних зображень.

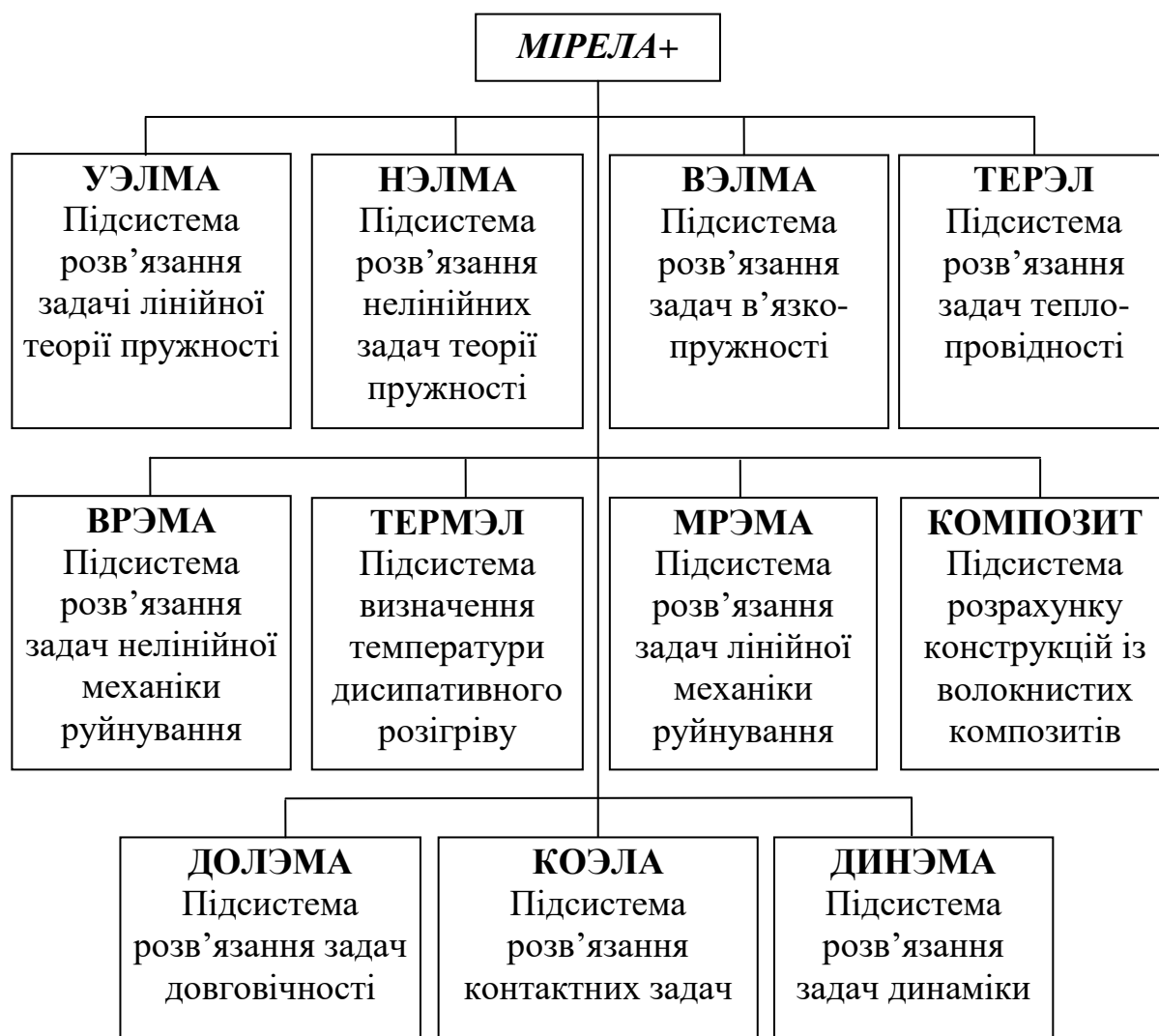


Рисунок 5.1 – Структура програмного комплексу «МІРЕЛА+».

Ці процеси при програмній реалізації традиційно виконуються трьома підсистемами – *препроцесором*, *процесором* та *постпроцесором*, відповідно.

Основна частина прикладних програм підсистеми КОМПОЗИТ, у тому числі й програми, спільні для інших підсистем комплексу «МІРЕЛА+», написані мовою програмування ФОРТРАН, деяка частина програм, яка реалізує візуальне представлення вихідних даних та результатів розрахунку, написана на мові програмування C++. Підсистема КОМПОЗИТ призначена для визначення параметрів напружено-деформованого стану конструкцій із

волокнистих композитів з урахуванням анізотропних властивостей його компонентів.

Наведені в попередніх розділах математичні моделі та підходи, які описують роботу конструкцій із композиційного матеріалу, реалізовані у вигляді окремих програм, які в процесі роботи взаємодіють між собою і кожна з яких виконує певні функціональні дії. Основні блоки підсистеми КОМПОЗИТ та їх взаємодія із загальними програмними блоками комплексу «МІРЕЛА+» в ході визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів представлені на рис. 5.2.

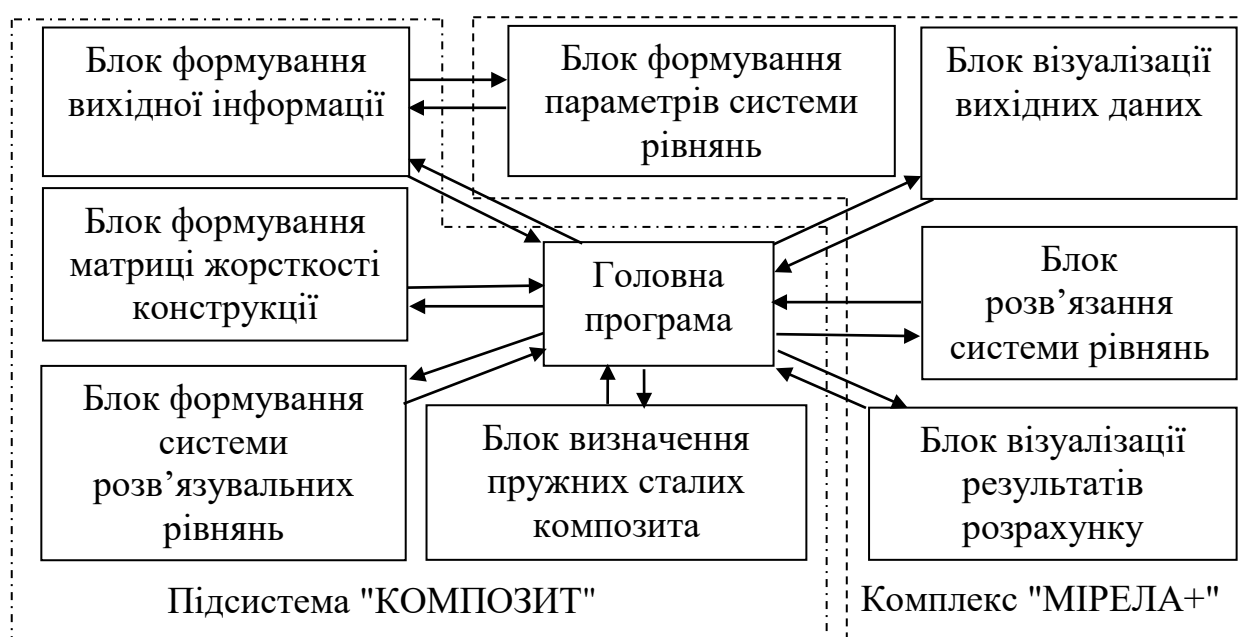


Рисунок 5.2 – Взаємодія програм підсистеми "КОМПОЗИТ" із програмами комплексу "МІРЕЛА+".

5.2 Скінченно-елементний підхід до розв'язання геометрично нелінійної задачі

Скористаємося підходами до розв'язання геометрично нелінійних задач, які описані в роботах [122], та поширимо їх на конструкції із композиційних матеріалів. З формальної точки зору, ці підходи не змінюються. Єдине, що

необхідно врахувати, – зміну матриці жорсткості конструкції, в якій для скінченних елементів, що відносяться до композиційного матеріалу, необхідно використовувати процедуру, описану в розділі 4.

Нелінійний характер залежності між тензором деформацій та напружень моделюється вектором додаткового навантаження. Для його визначення скористаємося традиційним підходом побудови розв’язувальних рівнянь МСЕ на основі варіації повної потенційної енергії системи:

$$\delta\Pi = \delta W - \delta A. \quad (5.1)$$

Тут δA – варіація роботи розподілених об’ємних P_i та поверхневих F_i сил

$$\delta A = \iiint_v P^i \delta u_i dv + \iint_s F^i \delta u_i ds, \quad (5.2)$$

δW – варіація внутрішньої енергії пружної деформації:

$$\delta W = \iiint_v \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv. \quad (5.3)$$

Для однорідних та неоднорідних складових конструкції запишемо тензор скінченних деформацій у вигляді:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(l)} + \varepsilon_{ij}^{(n)}, \quad (5.4)$$

де $\varepsilon_{ij}^{(l)} = \frac{1}{2}(C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j})$ – лінійна частина тензора деформацій,

$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} u_{m',i} u_{m',j}$ – нелінійна частина тензора деформацій.

Тоді на основі визначальних співвідношень закону Гука з урахуванням тензора скінченних деформацій (5.3) можна представити тензор напружень у вигляді, аналогічному (5.4):

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}^{(l)} + \varepsilon_{kl}^{(h)} \right), \quad (5.5)$$

або

$$\sigma^{ij} = \sigma_{(l)}^{ij} + \sigma_{(h)}^{ij}. \quad (5.6)$$

Підставимо компоненти тензора напружень (5.6) у вираз для варіації енергії деформацій (5.1) з урахуванням співвідношення (5.4). В цьому випадку варіація повної потенціальної енергії деформацій набуде вигляду:

$$\delta\Pi = \iiint_V \left(\sigma_{(l)}^{ij} + \sigma_{(h)}^{ij} \right) \delta \left(\varepsilon_{ij}^{(l)} + \varepsilon_{ij}^{(h)} \right) dV - \delta A. \quad (5.7)$$

У виразі (5.7) виокремимо лінійні складові варіації енергії пружної деформації. Ці складові є основою формування матриці жорсткості скінченного елемента як для однорідних, так і неоднорідних складових конструкції, їх можна записати в виді:

$$\iiint_V \sigma_{(l)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(l)} dV = K^{ph} u_p \delta u_h. \quad (5.8)$$

Доданки, що залишилися у виразі (5.7), визначають нелінійну частину, яку можна записати у вигляді:

$$\iiint_V \left(\sigma_{(l)}^{ij} + \sigma_{(h)}^{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij}^{(h)} dV + \iiint_V \sigma_{(h)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(l)} dV = N^{ph} u_p \delta u_h. \quad (5.9)$$

Припускаючи, що конструкція випробовує дію тільки розподілених поверхневих навантажень, які можна звести до зосереджених вузлових сил, та враховуючи співвідношення (5.8), (5.9), зазначимо, що варіація потенційної енергії набуде вигляду:

$$\left[K^{ph} u_p + N^{ph} u_p - F^h \right] \delta u_h = 0. \quad (5.10)$$

У цьому виразі варіація переміщень не дорівнює нулю, тому нулю повинен дорівнювати вираз у дужках. Цей вираз являє систему лінеаризованих розв'язувальних рівнянь для геометрично нелінійної теорії пружності:

$$K\bar{u} = \bar{P} - \bar{N}. \quad (5.11)$$

де $K = K^{ph}$ – матриця жорсткості композитної конструкції; $\bar{u} = u_p$ – вектор невідомих переміщень; $\bar{P} = F^h$ – вектор розподілених поверхневих навантажень; $\bar{N} = N^{ph} u_p$ – вектор нелінійних добавок.

Розв'язання нелінійних задач, які описуються рівняннями типу (5.11), як правило, зводяться до розв'язання послідовності лінійних задач. Одним із найбільш поширених методів розв'язку таких задач є кроковий ітераційний модифікований метод Ньютона-Канторовича. Розв'язання геометрично нелінійних задач на основі метода Ньютона-Канторовича використовує метод інтегрування за параметром навантаження або за параметром переміщень характерних точок конструкції з перевіркою рівнянь рівноваги.

Наведемо послідовність операцій при роботі крокового алгоритму розв'язання нелінійних задач, якщо параметром спуску є значення навантаження P [122].

1. Спочатку на основі дискретної моделі конструкції – координат вузлів сіткової області $\{z_i^{(n-1)}\}$ – обчислюється матриця жорсткості композитної конструкції $[F_{(n)}^*]$.

2. Задається крок по навантаженню $\Delta P_{(n)}$ і визначається поточне значення навантаження за формулою

$$P_{(n)} = P_{(n-1)} + \Delta P_{(n)}. \quad (5.12)$$

При $n=1$ (перший крок), алгоритм продовжує роботу з пункту 4.3, у якому як вектор $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ приймають вектор вузлових навантажень $\{P_{(n)}^{(k)}\}$.

3. Заходиться початкове наближення вектору переміщень $\{\Delta u_{(n)}^{(1)}\}$, на основі різних екстраполяційних формул. Скористаємося наступною екстраполяційною формулою:

$$\{u_{(n)}^{(1)}\} = \{u_{(n-1)}\} \frac{\Delta P_{(n)}}{\Delta P_{(n-1)}}. \quad (5.13)$$

4. Ітераційний алгоритм розв'язку нелінійної задачі пружності.

4.1. Наближення вектору переміщень $\{u_{(n)}^{(k)}\}$ підставляється в рівняння (5.5) та визначається вектор вузлових відхилів $\{R_{(n)}^{(k)}\}$, інтегральною характеристикою якого є сума квадратів компонентів вектору вузлових відхилів $\left\{R_{(n)}^{(k)*}\right\}$, величина якого дозволяє оцінити збіжність отриманих результатів.

4.2. Проводиться аналіз вектора вузлових відхилів $\{R_{(n)}^{(k)}\}$. Перевищення

величиною $\left\{ R_{(n)}^{*} \right\}$ суми квадратів компонентів вузлових навантажень $\{P_{(n)}^{(k)}\}$ на

N порядків, свідчить про різке збільшенні вектора відхилів $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ і веде до переривання ітераційного процесу. Для поліпшення збіжності перераховується (зменшується) крок за навантаженням, і процес переходить до виконання пункту 2. Іншим критерієм, що характеризує збіжність процесу, є кількість ітерацій k на даному кроці. Якщо ця кількість перевищує деяку максимальну величину, також зменшується крок за навантаженням, і процес переходить до виконання пункту 2.

Критерієм виконання умов рівноваги у вузлах композитної конструкції при визначеному векторі переміщень $\{u_{(n)}^{(k)}\}$ із заданим рівнем точності ε , є виконання нерівності:

$$\left\{ R_{(n)}^{*} \right\} < \left\{ P_{(n)}^{*} \right\} \varepsilon. \quad (5.14)$$

Виконання умови (5.14) переводить роботу алгоритму до пункту 5. Якщо цей критерій не виконується, то процес переходить до виконання наступного пункту.

4.3. Вектор відхилів $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ підставляється в праву частину лінеаризованої системи рівнянь.

4.4. Розв'язується система лінеаризованих рівнянь і знаходиться вектор переміщень $\{\Delta u_{(n)}^{(k)}\}$, який потім підсумовується з вектором $\{u_{(n)}^{(k)}\}$:

$$\{u_{(n)}^{(k+1)}\} = \{u_{(n)}^{(k)}\} + \{\Delta u_{(n)}^{(k)}\}. \quad (5.15)$$

4.5. Номер ітерації збільшується і приймає значення $k:=k+1$ і алгоритм повторює операції, починаючи з пункту 4.1.

5. Перераховується напружений та деформований стан, а також координати вузлів сіткової області конструкції за формулами

$$\{\varepsilon_{ij}^{(n)}\} = \{\varepsilon_{ij}^{(n-1)}\} + \{\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}\}, \quad (5.16)$$

$$\{\sigma_{ij}^{(n)}\} = \{\sigma_{ij}^{(n-1)}\} + \{\Delta\sigma_{ij}^{(n)}\}, \quad (5.17)$$

$$\{z_i^{(n)}\} = \{z_i^{(n-1)}\} + \{u_i^{(n)}\}. \quad (5.18)$$

6. Проводиться перевірка, чи досягнула величина навантаження заданого значення

$$P_{(n)} = P_{\max}. \quad (5.19)$$

Якщо умова (5.19) виконується, тоді алгоритм завершує свою роботу. Якщо ж умова (5.19) не виконується, тоді алгоритм переходить до виконання наступної операції.

7. Номер крок збільшується і приймає значення $n:=n+1$. Алгоритм починає виконання операцій з пункту 1 при розв'язанні задачі в геометрично нелінійній постановці, і з пункту 2 при розв'язанні задачі в геометрично лінійній постановці.

При розв'язанні нелінійної задачі у випадку, коли параметром спуску є переміщення, алгоритм розв'язання аналогічний наведеному, за винятком окремих пунктів.

Збільшення параметра навантаження $\Delta P_{(n)}$ (пункт 2) обчислюється за заданими переміщеннями характерних вузлів із умови їх рівноваги. Поточне значення навантаження обчислюється за формулою (5.12).

Переміщення інших вузлів конструкції в початковому наближенні (пункт 3) знаходяться за формулою:

$$\{\Delta u_{(n)}^{(1)}\} = u_k^{i'} \{u_{u_K=1}\} + \Delta P_{(n)} \{u_{P=1}\}, \quad (5.20)$$

де $\{u_{u_K=1}\}, \{u_{P=1}\}$ – вектори вузлових переміщень композитної конструкції при вимушеному одиничному зміщенні та одиничному навантаженні відповідно.

Пункт 6 запропонованого алгоритму при розв'язанні задачі про вимушені зміщення набуде вигляду:

$$\{u_k^{i'}\}_{(n)} = \{u_k^{i'}\}_{\max}. \quad (5.21)$$

Інші пункти алгоритму аналогічні описаним вище.

5.3 Особливості організації препроцесора системи

Препроцесор являє собою блок підпрограм, що забезпечують завдання геометрії досліджуваного об'єкта, граничних умов, фізико-механічних характеристик матеріалу, законів стану, режимів управління, обробки та видачі результатів розрахунку та реалізують процедуру скінченно-елементної дискретизації об'єкта. Структура препроцесора представлена на рис. 5.3.

Для опису конструкції, як уже згадувалось, вводяться три системи координат. В базисній декартовій системі координат $z^{k'}$ задаються геометричні координати вузлів, поля навантажень та граничних умов. У місцевій криволінійній системі координат x^i , пов'язаній зі скінченним

елементом, задаються нумерація та сіткові координати вузлів (рис.5.4). У місцевій криволінійній системі координат $x^{i''}$, пов'язаній із напрямом армування, задаються пружні сталі матеріалу.

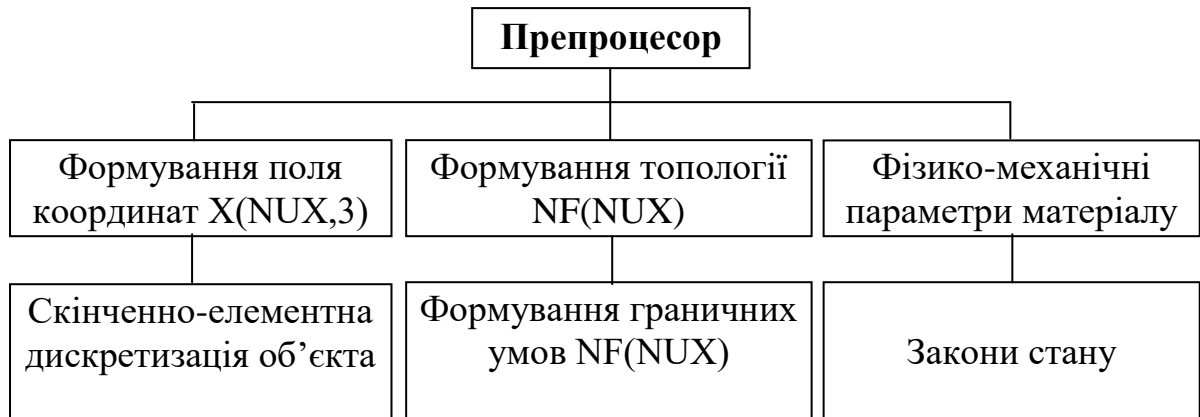


Рисунок 5.3 – Структура препроцесора.

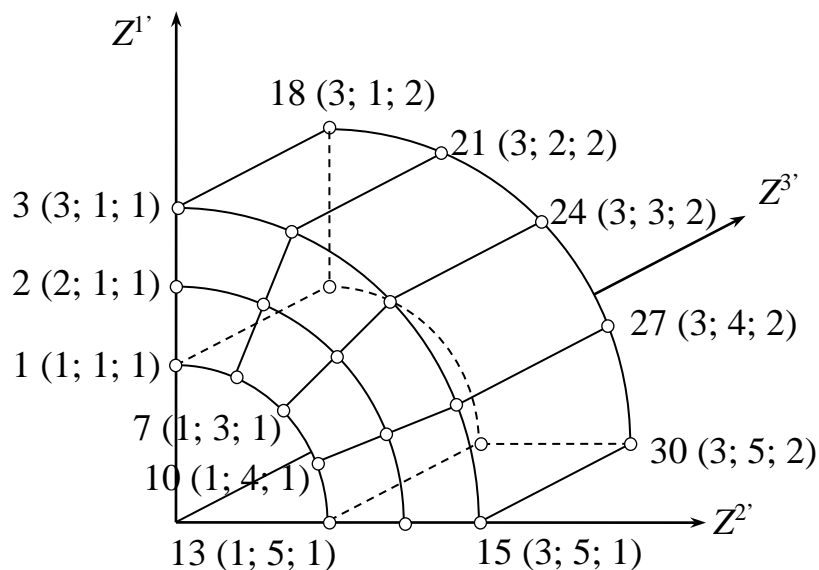


Рисунок 5.4 – Просторова та сіткова нумерація вузлів.

Геометрія конструкції описується в підпрограмі KOORD, де у випадку регулярних сіток задається сітка розбиття на скінченні елементи $M1 \times M2 \times M3$, де $M1$ – кількість вузлів по першій осі x^1 , $M2$ – кількість вузлів по осі x^2 , $M3$ – кількість вузлів по осі x^3 . Сітка скінченних елементів наноситься в залежності від силових чинників, геометрії конструкції. Для складних конструкцій передбачено застосування автоматичного розбиття на нерегулярні сітки. Для

зменшення машинного часу для розрахунку конструкції рекомендується вибирати сітки таким чином, щоб кількість вузлів у напрямі x^1 була мінімальною. Геометрія конструкції задається у вигляді масиву координат вузлових точок $X(NUX,3)$, де NUX – зарезервований розмір масиву.

Інформація про наявні отвори та вирізи задається за допомогою підпрограми TELOS:

CALL TELOS(N1, N2, N3, K1, K2, K3, NF),

де $N1, N2, N3$ – початкові номери вузлів області, а $K1, K2, K3$ – кінцеві номери, NF – масив ознак:

$NF = 7$ – для вузлів, у яких немає скінченного елемента;

$NF = 71$ – для вузлів, у яких є скінченний елемент.

Приналежність скінченного елемента до вузла визначається додатнім напрямом осей місцевої системи координат.

Вид апроксимуючих функцій за напрямками осей координат задається параметрами M, N, L , які приймають значення: 2 – для лінійного закону апроксимації, 3 – для квадратичного.

Масив вузлових навантажень $Q(NUX,3)$ формується в підпрограмі HAGPO3. Структура цієї підпрограми така:

CALL HAGPO3(N1, N2, N3, K1, K2, K3, KG, NUX, NF, X, Q),

де $N1, N2, N3$ – початкові номери вузлів області дії поверхневого навантаження, $K1, K2, K3$ – кінцеві номери вузлів області дії поверхневого навантаження, KG – номер грані, на яку діє навантаження (KG приймає значення від 1 до 6).

Кінематичні граничні умови формуються в підпрограмі ZAKREP у вигляді заборони на переміщення в тому чи іншому напрямі осей:

CALL ZAKREP(N1, N2, N3, K1, K2, K3, F, NF),

де $N1, N2, N3$ – початкові номери вузлів області заборони переміщень, $K1, K2, K3$ – кінцеві номери вузлів області заборони переміщень, F – параметр, що визначає тип граничної умови:

$NF = 1$ – заборона переміщень вздовж осі z^1 ;

NF = 2 – заборона переміщень вздовж осі z^2 ;

NF = 3 – заборона переміщень вздовж осі z^1 та z^2 ;

NF = 4 – заборона переміщень вздовж осі z^3 ;

NF = 5 – заборона переміщень вздовж осі z^1 та z^3 ;

NF = 6 – заборона переміщень вздовж осі z^2 та z^3 ;

NF = 7 – повне закріплення.

В підпрограмі даних DAN3 задаються пружні сталі компонентів волокнистого композита:

для волокна у випадку трансверсальної ізотропії маємо: $EC11$ – поздовжній модуль пружності волокна; $EC22$ – поперечний модуль пружності волокна; $VC12$ – коефіцієнт Пуассона волокна, що характеризує поперечне стискання за 2-им напрямом при розтягуванні за 1-им напрямом; $VC23$ – коефіцієнт Пуассона волокна, що характеризує поперечне стискання за 3-им напрямом при розтягуванні за 2-им напрямом (або $GC23$ – модуль поперечного зсуву волокна); $GC12$ – модуль поздовжнього зсуву волокна;

для матриці у випадку трансверсальної ізотропії маємо: $ER11$ – поздовжній модуль пружності матриці; $ER22$ – поперечний модуль пружності матриці; $VR12$ – коефіцієнт Пуассона матриці, що характеризує поперечне стискання за 2-им напрямом при розтягуванні за 1-им напрямом; $VR23$ – коефіцієнт Пуассона матриці, що характеризує поперечне стискання за 3-им напрямом при розтягуванні за 2-им напрямом (або $GR23$ – модуль поперечного зсуву матриці); $GR12$ – модуль поздовжнього зсуву матриці.

У випадку ізотропії як матриці, так і волокна, кількість пружних сталих зменшується до двох.

Враховуючи дискретне представлення конструкції, напрям армування задається в центрі скінченного елемента напрямом дотичної до просторової кривої, що описує геометрію армування. Цей напрям у просторі характеризується двома кутами (рис. 4.2) $ALFA(X)$ та $BETA(X)$ (X – координати точки в глобальній декартовій системі координат).

5.4 Чисельна реалізація запропонованих підходів і методів у процесорі системи

Блок процесора займає центральне місце при розв'язанні задач методом скінченних елементів – це ядро системи. Він включає в себе підпрограми обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості скінченних елементів (див. розділ 4). Глобальна матриця формується з матриць жорсткості СЕ з подальшим підсумовуванням за однойменними вузлами. Аналогічним чином формується глобальний вектор вузлових навантажень.

В результаті приходимо до традиційної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що характеризується симетрією та стрічковою структурою:

$$[K^{ij}] \{u_j\} = \{P^i\}. \quad (5.22)$$

Інша задача блока – це розв'язання системи (5.22) модифікованим блочним методом Гауса для стрічкових [122], симетричних матриць або іншим точним чи наближеним методом (комплекс дозволяє розширення).

При розв'язанні нелінійних задач процедура, описана формулою (5.22), повторюється декілька разів у ітераційному процесі.

5.5 Візуальне представлення результатів розв'язання задач у постпроцесорі системи

Результатом розв'язання системи (5.22) є вектор вузлових переміщень $\{u_j\}$. За обчисленим вектором вузлових переміщень $\{u_j\}$ визначаються компоненти тензора деформацій та компоненти тензора напружень.

Результатом розрахунку конструкції є масиви переміщень, деформацій та напружень у будь-якій точці конструкції (зазвичай у вузлах і центрах скінченних елементів). Аналіз отриманого чисельного розв'язку, пов'язаний з двома основними проблемами:

- наявністю великого масиву числової інформації, який необхідно дослідити на вірогідність, точність та адекватність смислу задачі;
- необхідністю синтезу додаткової інформації (наприклад, пошук максимальних (мінімальних) значень, інтенсивності деформацій та напружень тощо).

Досвід застосування МСЕ для розв'язання інженерних та наукових задач показує, що фаза аналізу числових результатів розрахунку за трудомісткістю й тривалістю часто суттєво переверше перші два етапи розв'язання задачі – підготовку вихідних даних і розрахунок задачі на ЕОМ. Всі сучасні програмні системи розв'язання задач механіки МСЕ містять спеціальні модулі, що автоматизують процес аналізу результатів. Найбільш ефективним способом такого аналізу є візуалізація отриманих числових значень – тобто їх певне графічне представлення, зручне для подальшого сприйняття й дослідження.

Існує достатня кількість різних способів візуалізації результатів розрахунку. Серед найбільш поширених – побудова різних двовимірних та тривимірних графіків, а також ліній рівня. Однак, одним із найбільш ефективних методів візуального представлення розподілення числової величини за деякою дво- або тривимірною областю є зображення напівтонової або колірної картини, де кожному відтінку або кольору відповідає відомий діапазон числових значень.

У більшості випадків видима поверхня геометричної області, що досліджується методом скінченних елементів, являє собою скінченну сукупність плоских геометричних фігур простої форми, що не перетинаються й отримані в результаті дискретизації (частіше за все трикутники або чотирикутники). Тому, зображення скінченно-елементного об'єкта зазвичай

зводиться до візуалізації в просторі деякої кількості плоских геометричних фігур – граней СЕ.

У загальному випадку проблема візуалізації результатів чисельних розрахунків задач механіки методом скінченних елементів зводиться до розв'язання двох таких задач:

а) побудови математичного апарату проєціювання тривимірної геометричної області на екранну площину з реалізацією можливості видалення невидимих ліній та граней;

б) зафарбовування отриманої проєкції кольорами та відтінками, що відповідають розподіленню по вихідній геометричній області фазового параметра, що візуалізується.

Одним із можливих алгоритмів побудови напівтонової картини розподілення деякої функції u по трикутній області є такий підхід. Нехай діапазон числових значень функції u , яка візуалізується, відповідає інтервалу від u_{\min} до u_{\max} і кількість градацій кольору (напівтонів), необхідних для візуалізації трикутної області, дорівнює n . Тоді діапазон значень u , зафарбованих на рисунку одним кольором, матиме вигляд $[u_i, u_{i+1}]$, де

$$u_i = u_{\min} + ih, \quad h = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{n - 1}.$$

Тоді, номер кольору, що відповідає деякому значенню u^* , можна визначити за формулою:

$$j = \frac{u^* - u_{\min}}{h}. \quad (5.23)$$

Нехай необхідно побудувати напівтонове зображення для трикутника $P_1P_2P_3$ з вузловими значеннями u_{P_1} , u_{P_2} , u_{P_3} . І при цьому u_{P_1} – максимальне вузлове значення на трикутнику, а u_{P_2} – мінімальне. Вочевидь m_{12} – кількість

колірних градацій на стороні P_1P_2 – буде максимальною, при цьому $m_{12} = m_{13} + m_{32}$, де

$$\begin{aligned} m_{12} &= \text{int}\left(\frac{u_{P_1} - u_{\min}}{h}\right) - \text{int}\left(\frac{u_{P_2} - u_{\min}}{h}\right); \\ m_{13} &= \text{int}\left(\frac{u_{P_1} - u_{\min}}{h}\right) - \text{int}\left(\frac{u_{P_3} - u_{\min}}{h}\right); \\ m_{32} &= \text{int}\left(\frac{u_{P_3} - u_{\min}}{h}\right) - \text{int}\left(\frac{u_{P_2} - u_{\min}}{h}\right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

де $\text{int}(u)$ – ціла частина числа u .

У цьому випадку візуалізація трикутника зводиться до зображення сукупності із m_{12} чотирикутників та трикутників, колір кожного з яких відповідає його номеру в заданій колірній шкалі.

На рис. 5.5 наведено приклад такого розбиття трикутника на колірні зони при $m_{12} = 4$, $m_{13} = 3$ та $m_{32} = 1$. Легко помітити, що набір колірних полігонів являє собою два трикутники та $m_{12} - 2$ чотирикутники, при цьому колір кожної такої зони відповідає номеру його індексу.

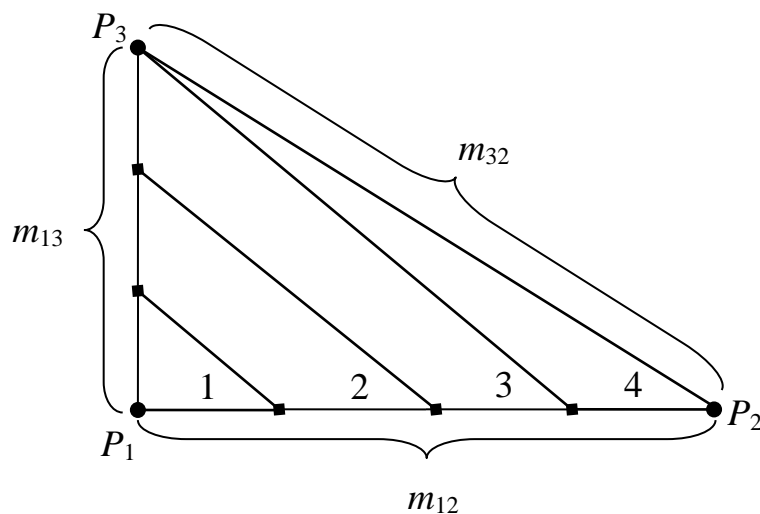


Рисунок 5.5 – Розбиття трикутника на колірні зони.

Приклад роботи вищеприписаного алгоритму для плоскої трикутної області зображено на рис. 5.6.

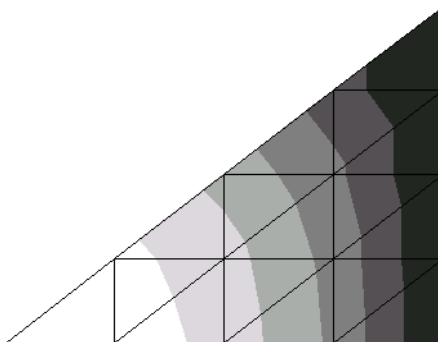


Рисунок 5.6 – Приклад роботи напівтонового алгоритму для плоскої області.

На рис. 5.7 наведено приклад візуалізації розподілення деякого фазового параметра по просторовій області.

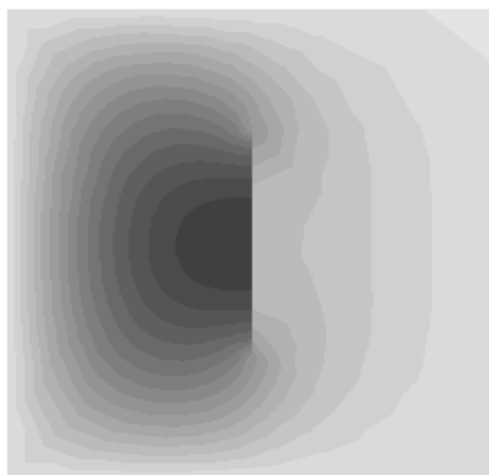


Рисунок 5.7 – Напівтонове розподілення функції.

Отже, очевидно, що цей підхід, реалізований у програмному комплексі «МІРЕЛА+» для візуального представлення чисельних результатів розрахунку, дозволяє підвищити наочність їх сприйняття і, в кінцевому підсумку, спростити процес їх аналізу.

5.6 Висновки

У розділі описана програмна реалізація розрахунку конструкцій із волокнистих композитів на основі отриманих співвідношень для ефективних пружних сталей і розробленої матриці жорсткості скінченного елемента.

Із застосуванням методу Ньютона-Канторовича розроблений ітераційний підхід до врахування геометричної нелінійності волокнистого композиту. Описана методика його застосування для розробленої матриці жорсткості на основі моментної схеми скінченного елемента.

Представлена структура програмного комплексу та надана коротка характеристика його складових. Програмний комплекс має традиційну структуру – препроцесор, процесор та постпроцесор.

Описані особливості задання вихідної інформації (механічних характеристик матеріалів, геометрії та розмірів конструкції, схеми армування волокнами, параметрів дискретної моделі, умов закріплення конструкції та умов силового навантаження тощо) за допомогою препроцесора програмного комплексу.

Коротко охарактеризована робота процесора програмного комплексу – основна процедура якого полягає в побудові матриці жорсткості – детально описана в розділі 4.

При наданні інформації про постпроцесор основна увага приділена процедурі візуалізації великих масивів числових даних, що отримуються при розв'язанні задачі методом скінчених елементів. Описано один із найбільш ефективних методів візуального представлення розподілення числової величини за дво- або тривимірною областю – зображення напівтонової або колірної картини, де кожному відтінку або кольору відповідає відомий діапазон числових значень.

Матеріали розділу відображені у роботах [51, 52, 53, 55, 60, 62, 63, 64, 66, 69, 70, 72, 74, 75, 97, 102, 115, 116, 118, 124, 127, 128, 131, 156, 158, 174, 175, 176, 177, 189, 207, 222, 236, 274, 305].

РОЗДІЛ 6

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОГРАМНОЇ СИСТЕМИ ДО ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ З ГУМОВОКОРДНИХ МАТЕРІАЛІВ

Для того, щоб зрозуміти особливості гумовокордних матеріалів, зупинимося більш детально на характерних властивостях їх компонентів.

Гума є специфічним конструкційним матеріалом. В реальних умовах експлуатації в гумі проявляються такі специфічні властивості та явища, як слабка стисливість, нелінійність, в'язко- й термопружність, дисипативний розігрів, можливість піддаватися великим деформаціям без руйнування та низка інших. Гумова матриця в композиційному матеріалі надає конструкції необхідну форму й утворює монолітний матеріал, поєднуючи в єдине ціле численні волокна. Це дозволяє сприймати композиції в цілому різного роду зовнішні навантаження. Також завдяки хорошему зчепленню гуми та кордових волокон та здатності гуми випробовувати значні деформації без руйнування, такий матеріал дає можливість передавати зусилля на більш міцний корд, уникаючи при цьому відділення матриці від волокон.

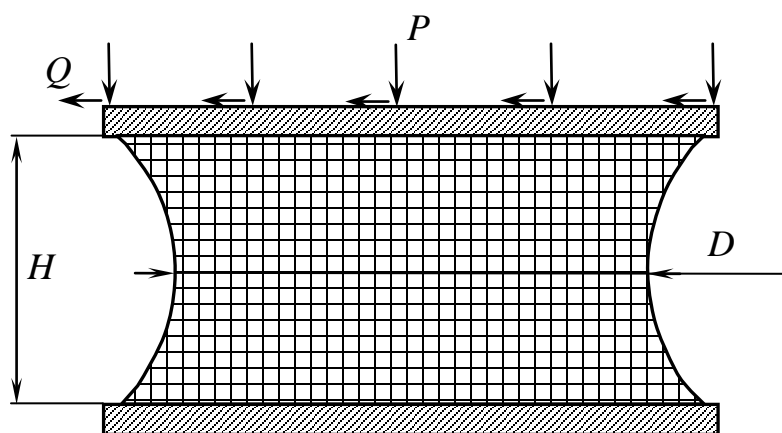
У гумовокордному матеріалі гумова матриця оберігає корд від механічних пошкоджень, окислення, дії агресивних середовищ. Отримані у такий спосіб матеріали дають змогу варіювання властивостями за рахунок зміни структури армування, дозволяють знизити матеріалоемність при великій міцності та жорсткості. Крім того, ряд специфічних якостей роблять такі матеріали незамінними при створенні цілих груп конструкцій. Так, виробництво шин неможливе без використання гумовокордних матеріалів з їх хорошими демпфуючими можливостями, високим коефіцієнтом зчеплення та іншими.

6.1 Особливості напружено-деформованого стану віброакустичного ізолятора

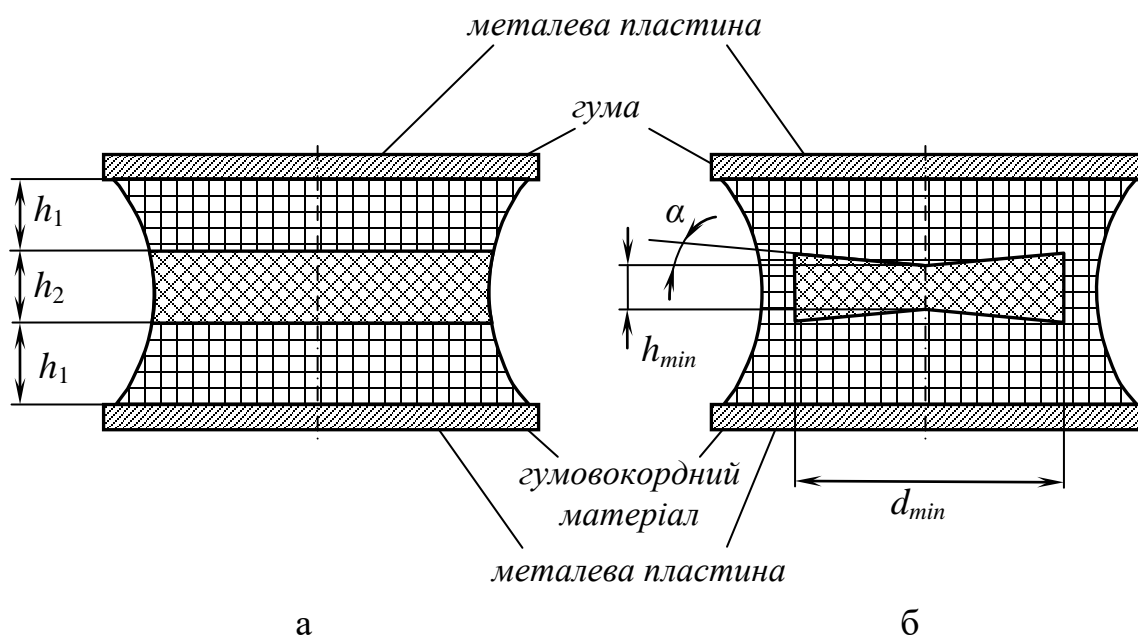
Однією з актуальних проблем є захист машин, механізмів, будівель, споруд від вібрацій, що виникають із причин техногенного та природного характеру. Аналіз конструктивних особливостей вібро- та сейсмоізоляції машин, будівель, споруд, інфраструктурних об'єктів показує, що одним із найбільш перспективних напрямів є застосування віброізоляторів на основі гумовометалевих конструкцій.

Складність процесу деформування таких елементів конструкцій приводить до необхідності застосування чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів.

Віброакустичні ізолятори являють собою пружні опори, які використовуються при віброізоляції машин загального, гірничо-металургійного, агропромислового комплексу та в спеціальній вібраційній техніці. Конструкція віброакустичного ізолятора розроблена в Інституті геотехнічної механіки НАН України (м. Дніпро), і складається вона з двох металевих пластин та гумового елемента у вигляді циліндра з увігнутою бічною поверхнею (рис. 6.1).



Для поліпшення віброізоляційних та міцнісних характеристик наведеного ізолятора була запропонована його модифікація, в якій пропонується наявність у гумовому масиві вставки з гумовокордного матеріалу. Для дослідження напружено-деформованого стану розглянемо конструктивні варіанти, представлені на рис. 6.2.



а – суцільна композитна вставка; б – внутрішня композитна вставка

Рисунок 6.2 – Віброакустичний ізолятор з композитними вставками.

Одним із основних розрахунків при проектуванні віброізоляційних амортизаторів є статичний розрахунок на міцність. Для цього необхідно визначити напружено-деформований стан віброізолятора за реальних умов навантаження. Конструктивна складність віброізолятора, наявність різнорідних матеріалів у конструкції, а також складні граничні умови не дають змоги застосовувати до такого розрахунку аналітичні методи. Тому при розрахунку таких конструкцій доцільно використовувати чисельні методи, зокрема, метод скінченних елементів.

Для того, щоб при розрахунку гумових частин віброізолятора нівелювати негативні властивості традиційного методу скінченних елементів, такі як неврахування зміщень скінченного елемента як абсолютно жорсткого цілого,

ефект «хибного» зсуву та слабку стисливість гуми, застосуємо моментну схему скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів [121], а для гумовокордного матеріалу застосуємо процедуру побудови матриці жорсткості, описану у розділі 4.

Розглянемо два конструктивних варіанти віброакустичного ізолятора (рис. 6.2а, б). Розміри ізолятора: $H = 0,1$ м, $D = 0,18$ м, $h_1 = 0,035$ м, $h_2 = 0,03$ м, $d_{\min} = 0,12$ м, $\alpha = 10^\circ$, $h_{\min} = 0,02$ м. Матеріал гумового елемента – гума марки 2959 з такими механічними характеристиками: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,49$, модуль пружності $E = 5,28$ МПа. В гумовокордному матеріалі гумовою матрицею виступає гума марки 2959, а корд волокна має такі механічні характеристики: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль пружності $E = 1277,5$ МПа.

Що у першому, що у другому варіанті проведемо розрахунок при різних схемах укладки корду у гумовокордному матеріалі, а саме при армуванні у окружному напрямку, радіальному напрямку та при використанні як гумовокордної вкладки пакету перехресно армованих під кутом 90° один до одного шарів.

Розглянемо віброізолятор із суцільним композиційним шаром у вигляді пакета чотирьох перехресно армованих під кутом 90° один до одного шарів. Характер розподілу переміщень у віброізоляторі для такого армування та осьового навантаження $P = 0,6$ МПа показаний на рис. 6.3-6.7.

Як можна помітити, нелінійний розв'язок (див. рис. 6.7) дає максимальну осадку в середньому на 10...15 % нижче, ніж лінійний, хоча якісна картина для лінійного та нелінійного випадку співпадають. Збільшення об'ємної частки волокна (від 0 до 0,3) у гумовокордному матеріалі приводить до посилення жорсткісних характеристик амортизатору та зменшенню величини осадки на 10...12 %.

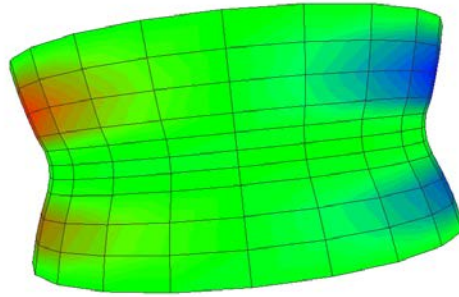


Рисунок 6.3 – Розподіл переміщень u_1 (м) віброізолятора із суцільним композиційним шаром при осьовому навантаженні (перехресне армування, $f = 0,3$).

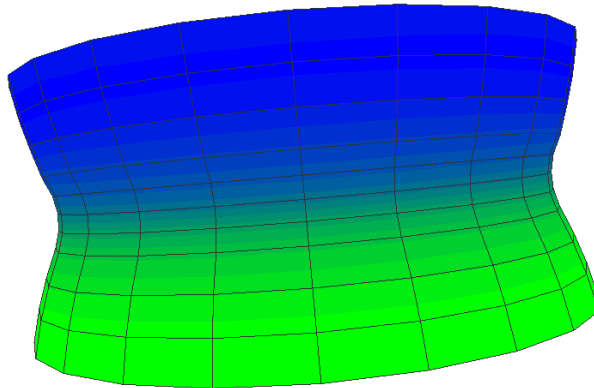
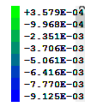


Рисунок 6.4 – Розподіл осевих переміщень u_3 (м) віброізолятора із суцільним композиційним шаром при осьовому навантаженні (перехресне армування, $f = 0,3$).

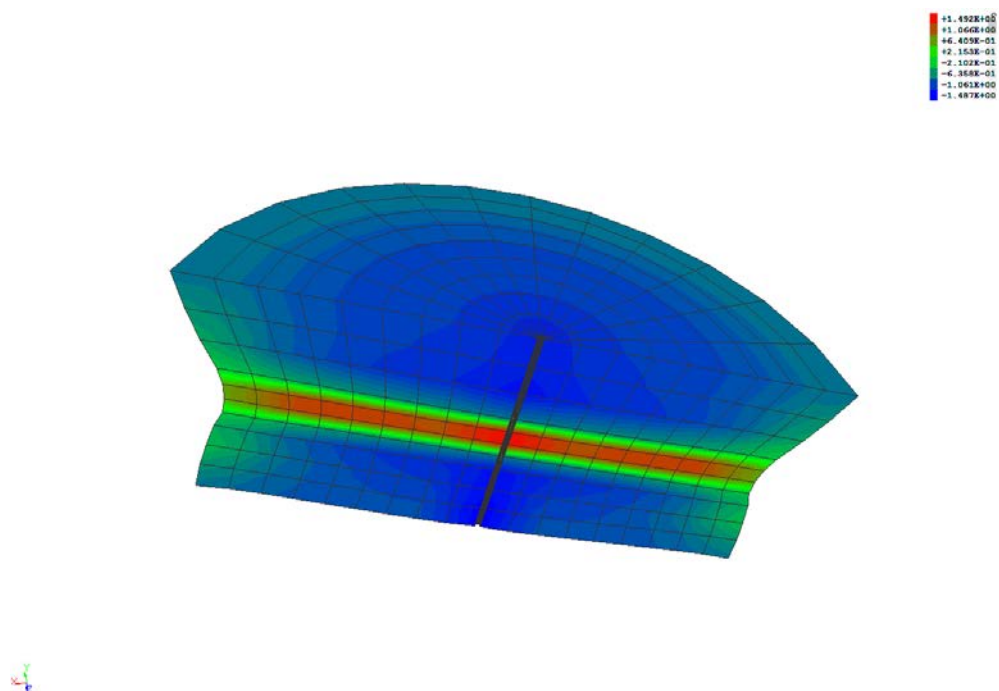


Рисунок 6.5 – Розподіл напружень σ_{22} (МПа) віброізолятора із суцільним композиційним шаром при осьовому навантаженні (перехресне армування, $f = 0,3$).

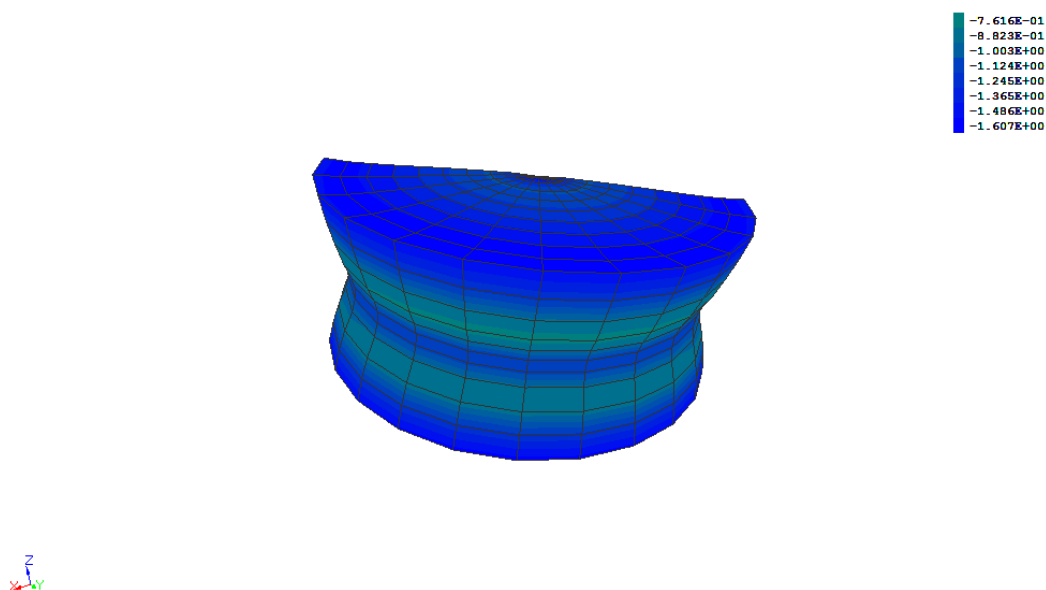
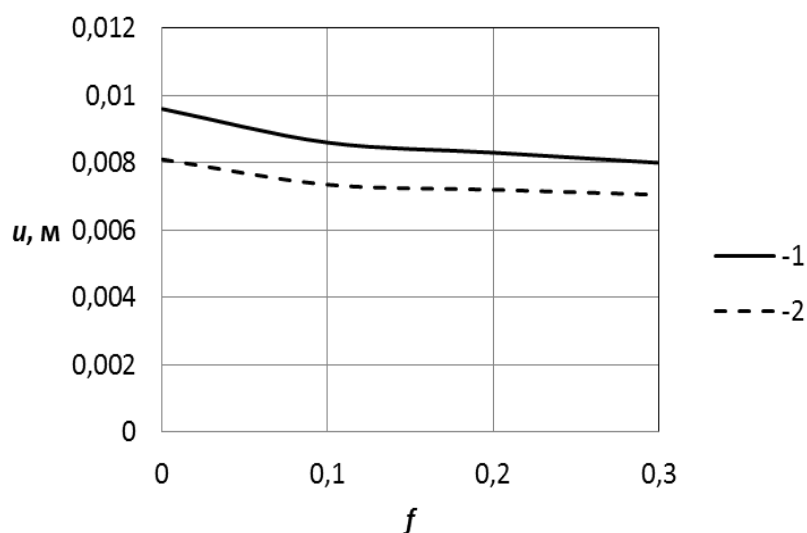


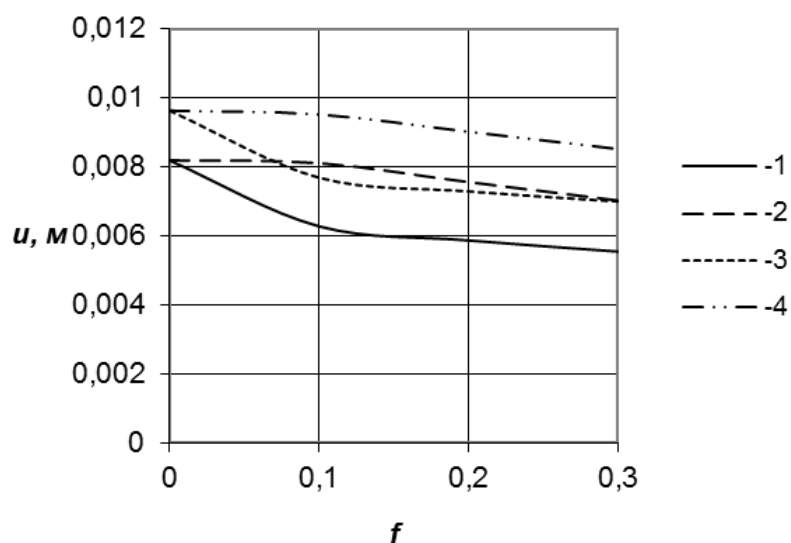
Рисунок 6.6 – Розподіл напружень σ_{33} (МПа) віброізолятора із суцільним композиційним шаром при осьовому навантаженні (перехресне армування, $f = 0,3$).

Осадка конструкції залежно від об'ємної частки волокна в композиті для різних схем армування й комбінації осьового ($P = 0,6$ МПа) та зсувного ($Q = 0,3$ МПа) навантаження показана на рис. 6.8, 6.9.



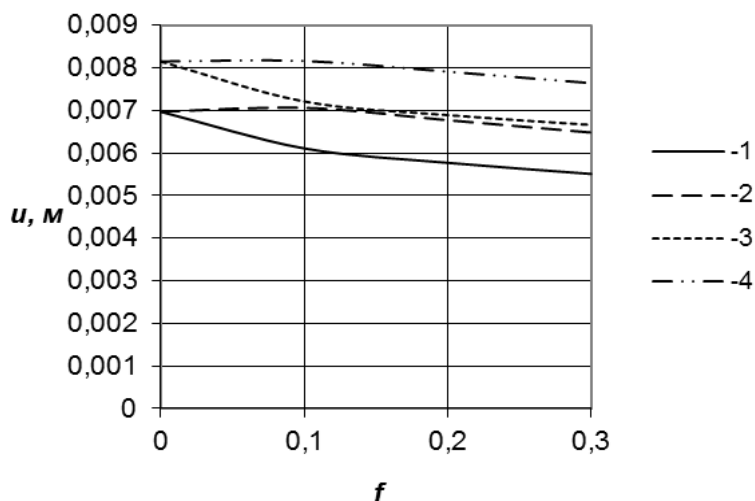
1 – лінійний розв’язок; 2 – нелінійний розв’язок

Рисунок 6.7 – Осадка віброізолятора із суцільним композиційним шаром та перехресним армуванням при осьовому навантаженні.



1 – осьове навантаження, радіальне армування; 2 – осьове навантаження, окружне армування; 3 – осьове та зсувне навантаження, радіальне армування; 4 – осьове та зсувне навантаження, окружне армування

Рисунок 6.8 – Осадка віброізолятора із суцільним композиційним шаром.



1 – осьове навантаження, радіальне армування; 2 – осьове навантаження, окружне армування; 3 – осьове та зсувне навантаження, радіальне армування; 4 – осьове та зсувне навантаження, окружне армування

Рисунок 6.9 – Осадка віброізолятора із внутрішнім композиційним шаром.

Характер розподілу переміщень та напружень (1-ий напрям – напрям дії зсувного навантаження) для різних схем армування волокнами й різних схем навантаження показаний на рис. 6.10-6.13.

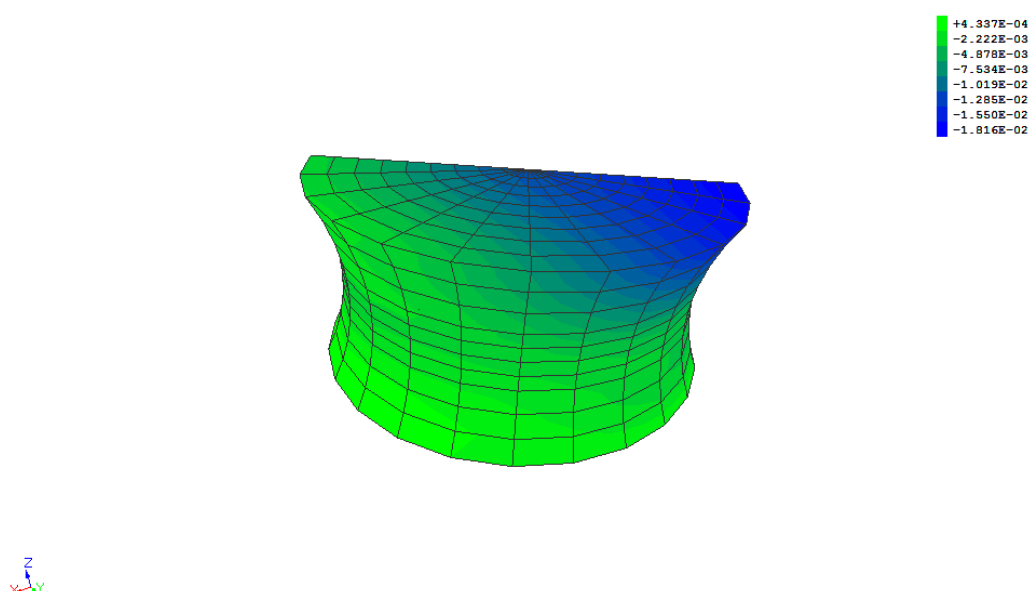


Рисунок 6.10 – Розподіл переміщень u_1 (м) віброізолятора із суцільним композиційним шаром при осьовому та зсувному навантаженні (радіальне армування, $f = 0,2$).

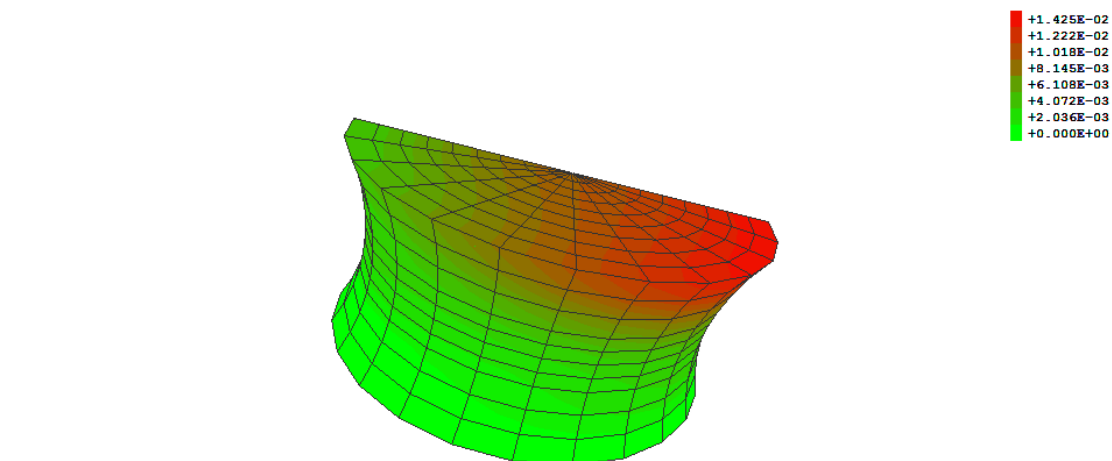


Рисунок 6.11 – Розподіл напружень σ_{11} (МПа) віброізолятора із суцільним композиційним шаром при осьовому та зсувному навантаженні (радіальне армування, $f = 0,2$).

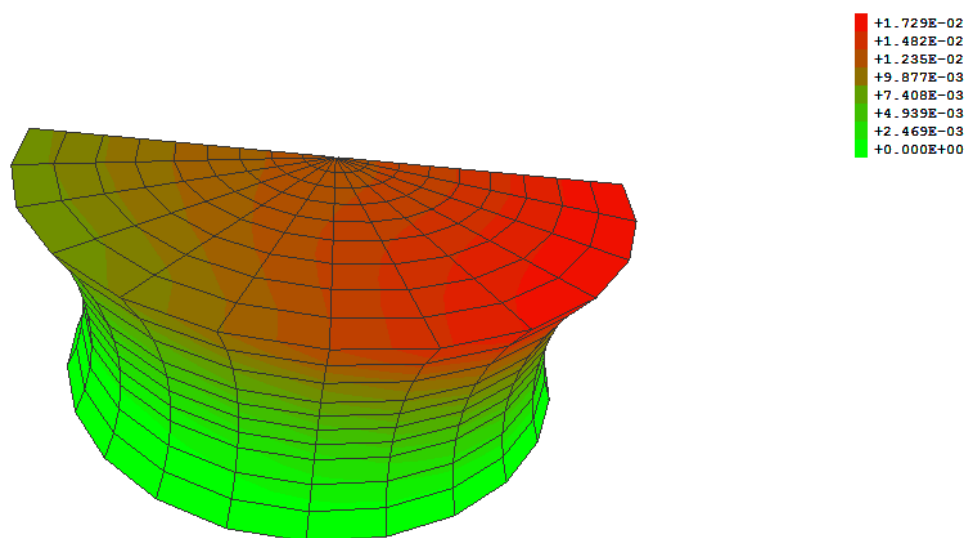


Рисунок 6.12 – Розподіл напружень σ_{11} (МПа) віброізолятора із внутрішнім композиційним шаром при осьовому та зсувному навантаженні (радіальне армування, $f = 0,2$).

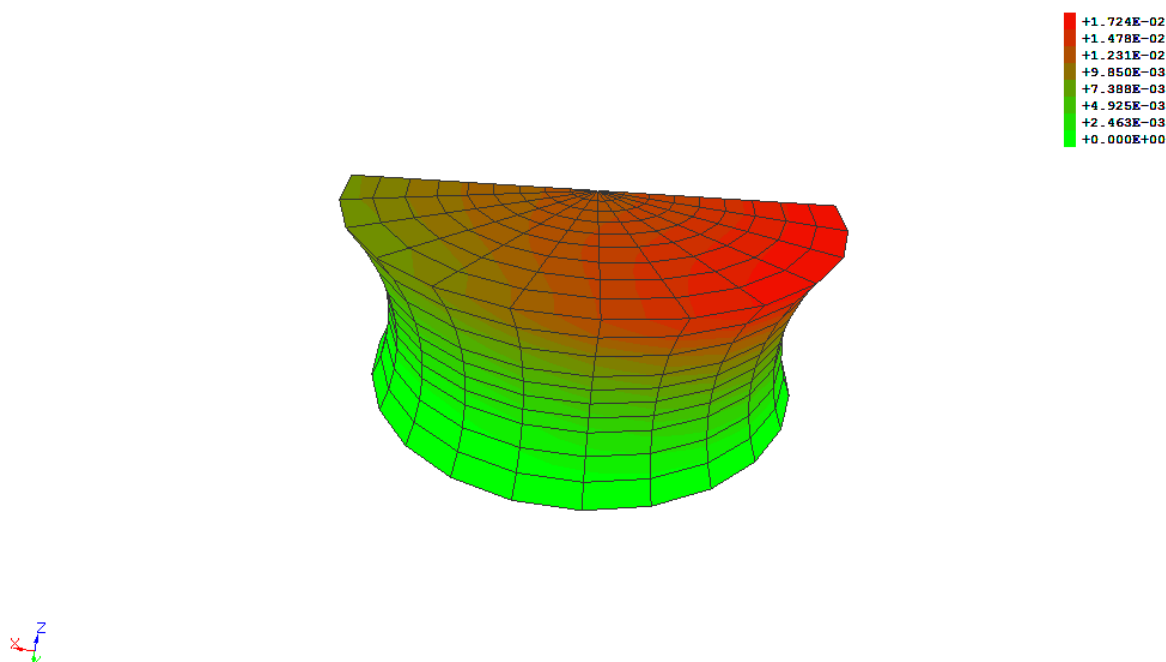


Рисунок 6.13 – Розподіл напружень σ_{11} (МПа) віброізолятора із внутрішнім композиційним шаром при осьовому та зсувному навантаженні (окружне армування, $f = 0,2$).

Застосування гумовокордних вставок змінює форму деформованого віброізолятора від бочкоподібної для $f = 0$ до хвилеподібної при наявності волокон, що обумовлено збільшенням жорсткості у радіальному напрямку.

Аналізуючи напружено-деформований стан віброізолятора, можна зробити такі висновки. Незалежно від того є композиційний шар суцільним чи внутрішнім, збільшення в ньому частки волокна (від 0 до 0,3) зменшує осадку віброізолятора при різних схемах навантаження: для перехресних шарів – на 10...15 %, для радіального армування – на 15...20 %, для окружного армування – до 8 %.

Конструктивне представлення віброізолятора із внутрішнім розташуванням композиційного шару знижує максимальну осадку на величину до 20% у порівнянні із суцільним розташуванням композиційного шару для всіх схем армування.

Максимальні значення стискаючих напружень при різних схемах армування приймають більші значення для випадку внутрішнього

розташування композиційного шару в порівнянні із суцільним розташуванням (до 30 %).

Таким чином, розглянуто різні конструкції віброізолятора з композиційним шаром та вплив цих конструктивних особливостей на величину осадки в умовах дії механічних навантажень. Із усіх розглянутих конструкційних рішень найбільша осадка спостерігається для віброізолятора з суцільним композиційним шаром та окружним армуванням, а найменша – для віброізолятора із внутрішнім композиційним шаром та радіальним армуванням. Різниця між осадками при об'ємній частці волокна 0,1...0,3 досягає 25 %.

6.2 Визначення напружено-деформованого стану автомобільної шини

Важливою галуззю, яку неможливо уявити без застосування волокнистих композиційних матеріалів, є автомобілебудування. Зокрема, однією з основних конструкцій, необхідних при створенні автомобіля, є шина.

Конструкції автомобільних шин можуть бути різні, і ці відмінності обумовлені вимогами до міцнісних, функціональних та інших можливостей шини. Серед основних функціональних вимог до них – амортизація ударних та коливальних навантажень у процесі руху, зчеплення протектора шини з дорогою тощо. Автомобільна шина являє собою багат шарову конструкцію, що складається з пакетів гумових та гумовокордних шарів (рис. 6.14). Як корд застосовується металокорд або текстильний корд.

Розглянемо конструкцію діагональної шини. Основне силове навантаження в таких шинах несе на собі каркас, який являє собою комбінацію декількох пар перехресно армованих гумовокордних шарів. Кут армування змінюється від точки до точки по меридіану й на екваторі досягає величини 50°...65°.

Наступним важливим конструктивним елементом шини є брекер, який іноді відділяється від каркаса шаром м'якої еластичної гуми. Брекер розташовується у біговій частині шини та виготовляється із розріджених у порівнянні з каркасом перехресно армованих гумовокордних шарів. У діагональній шині брекер функціонально необхідний для запобігання механічним пошкодженням каркаса, зниження навантажень, котрі передаються від дороги, поліпшення зв'язку між каркасом та протектором.

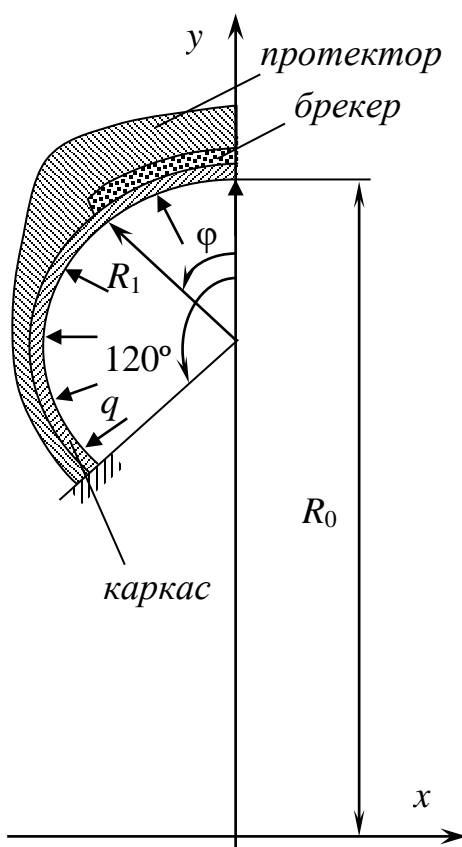


Рисунок 6.14. – Схема діагональної шини.

Протектор являє собою масивний шар жорсткої зносостійкої гуми, який на боковині поступово переходить у тонкий гумовий шар, основне призначення якого – запобігання зовнішнім пошкодженням каркаса. Для спрощення моделі протектор передбачається гладким.

При проектуванні шин однією із суттєвих умов є розрахунок рівноважної конфігурації профілю шини, який, по суті, є розрахунком шини під внутрішнім

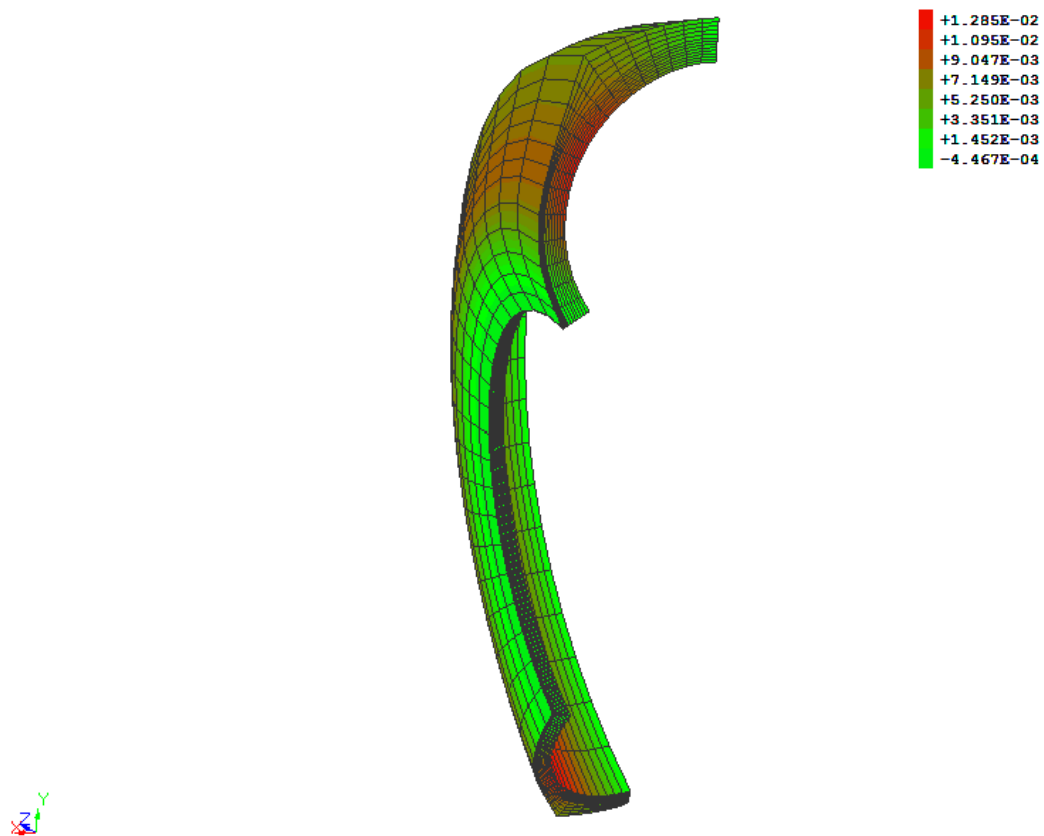
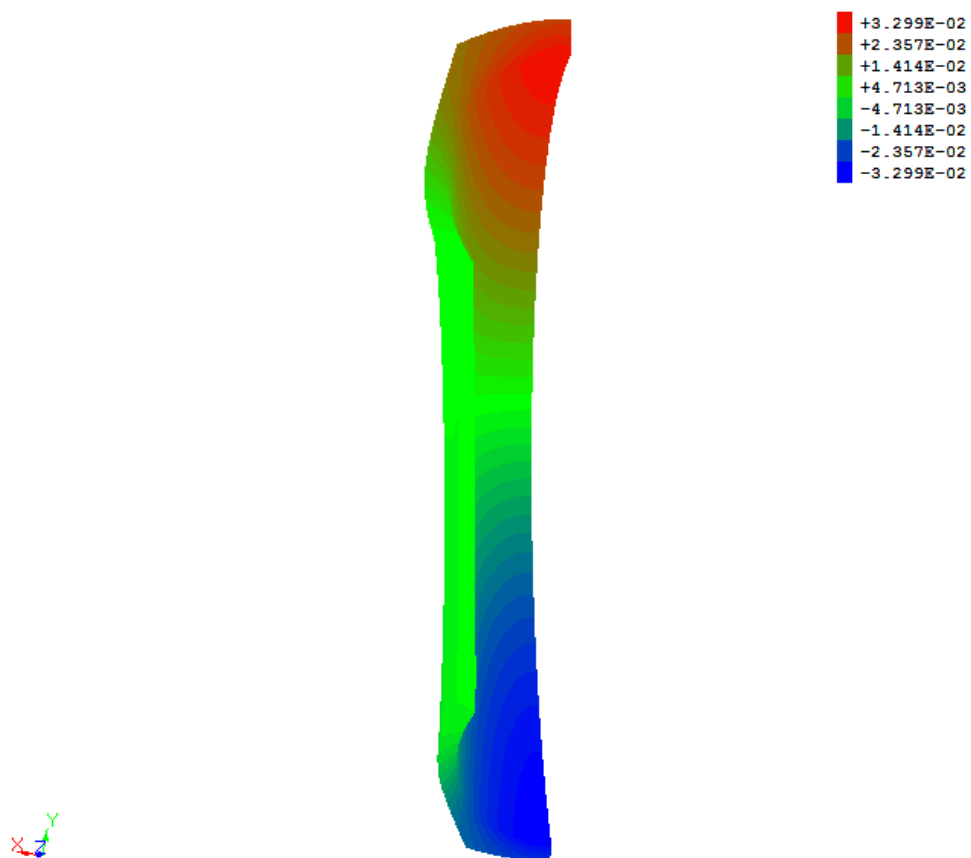
тиском. Розв'язання цієї задачі дає попередню інформацію про конструктивні параметри шини та є основою для вивчення складнішого напружено-деформованого стану, у якому перебувають шини під час експлуатації.

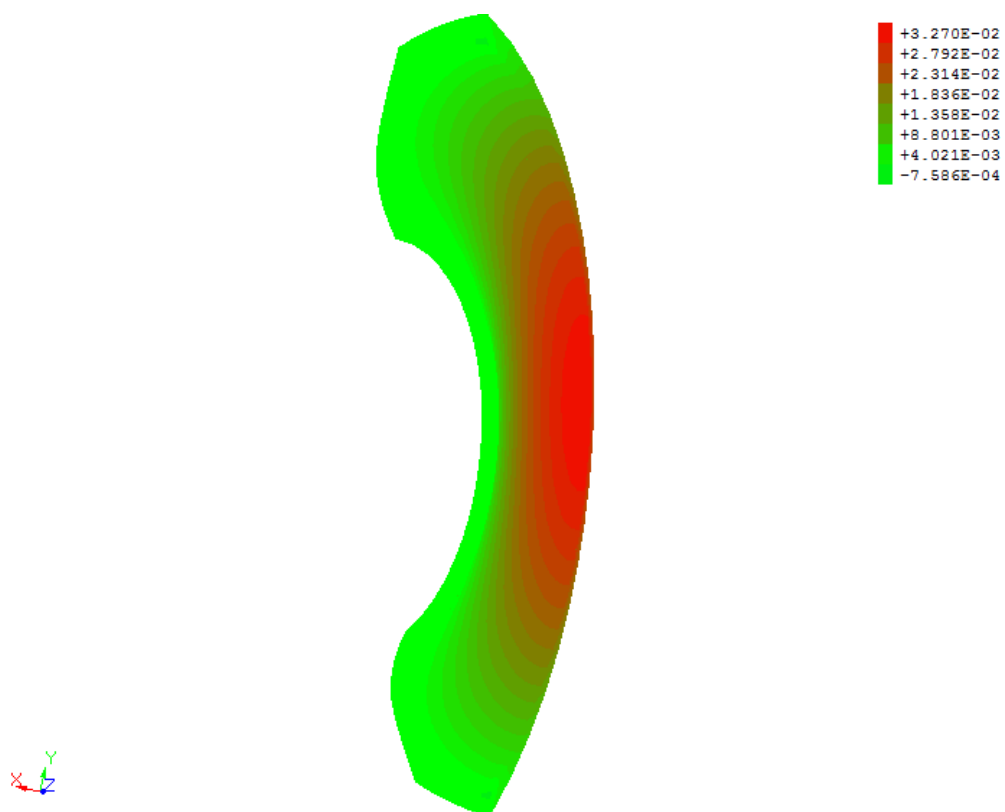
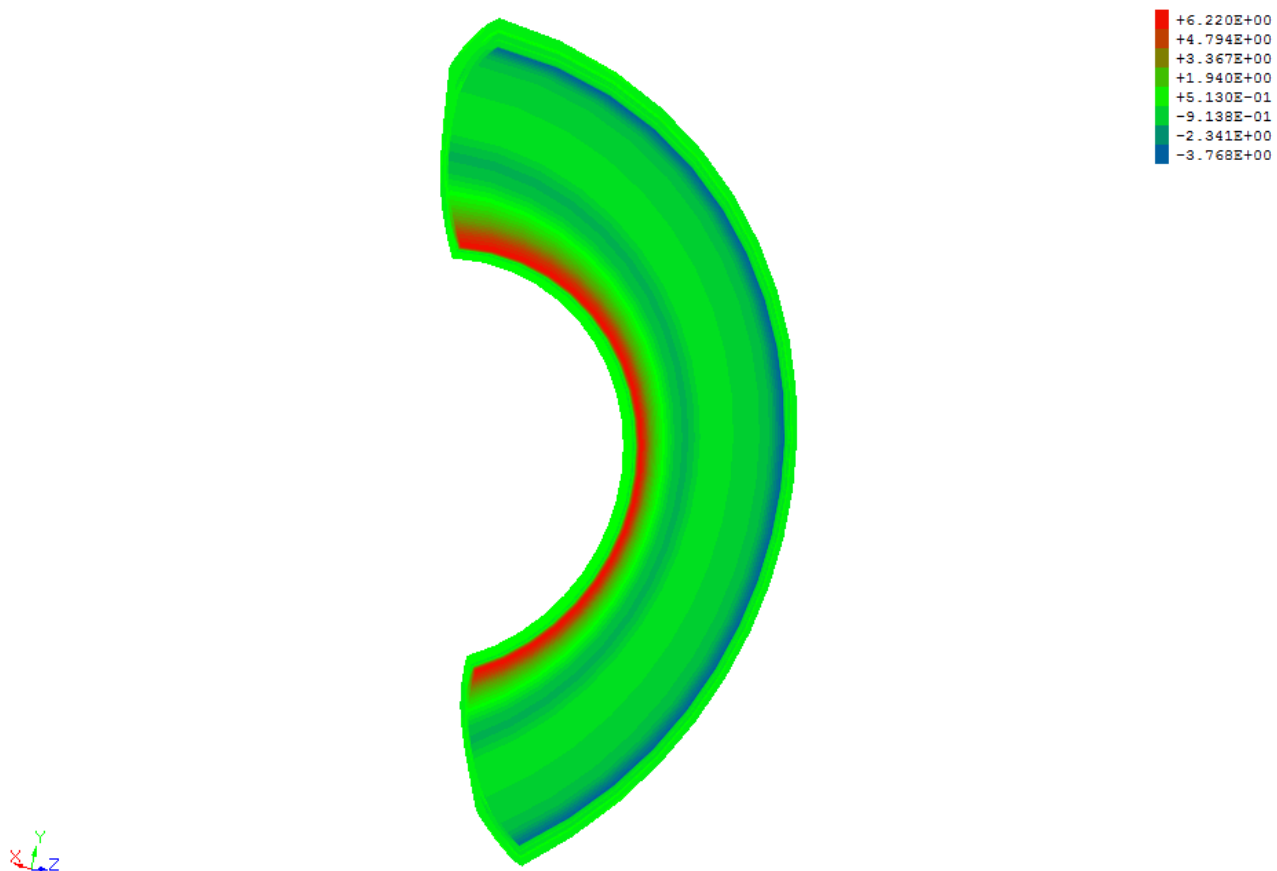
Розглянемо вантажну діагональну шину з каркасом та бреккером, що складаються із чотирьох гумовокордних шарів кожний. Кути нахилу ниток корда на екваторі для цих восьми шарів такі $-52^\circ, 52^\circ, -52^\circ, 52^\circ, -52^\circ, 52^\circ, -52^\circ, 52^\circ$. Діаметр ниток корда $d_c=0,07$ см. Товщина гумовокордного односпрямованого шару $h_0=0,12$ см. Щільність ниток на екваторі $i_0=9$ ниток/см для каркаса та $i_0=7$ ниток/см для бреккера. Внутрішній тиск $q=0,5$ МПа. Геометричні параметри шини (рис. 6.14): $R_1=10$ см, $R_0=40$ см. Корд будемо вважати трансверсально-ізотропним. Пружні характеристики металокорду 40л15 [214]: модуль пружності $E_1^\circ=36970$ МПа, модуль зсуву $G_{12}^\circ=7000$ МПа, коефіцієнти Пуассона $\nu_{12}^\circ=0,41$, $\nu_{23}^\circ=1$. Поперечний модуль пружності, як і в роботі [213], прийнятий $E_2^\circ = E_1^\circ$. Пружні характеристики гуми: модуль пружності $E^*=3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu^*=0,49$.

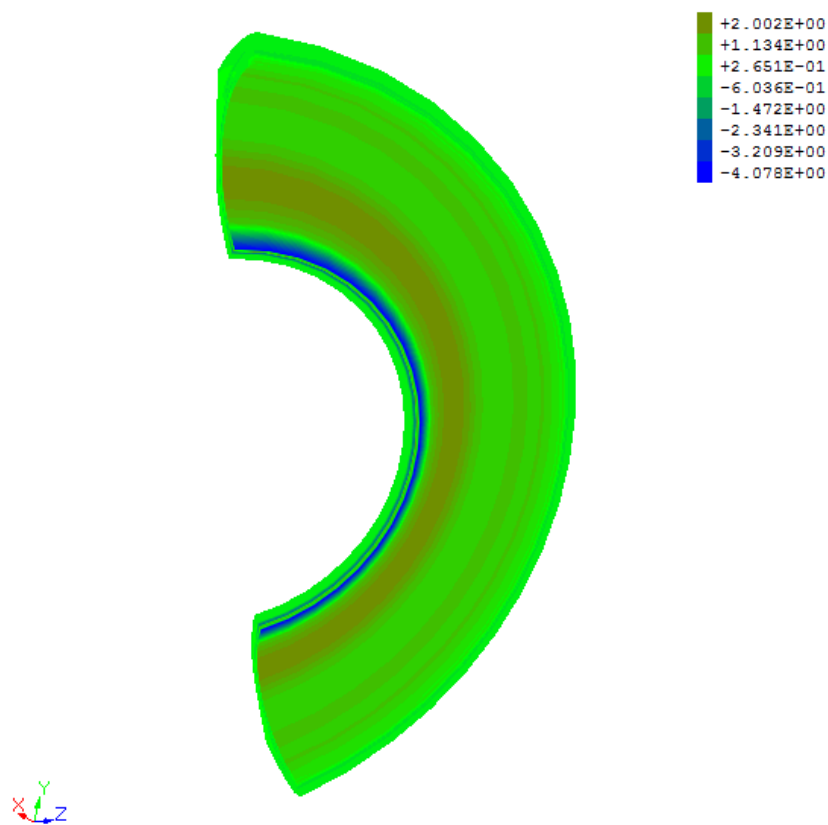
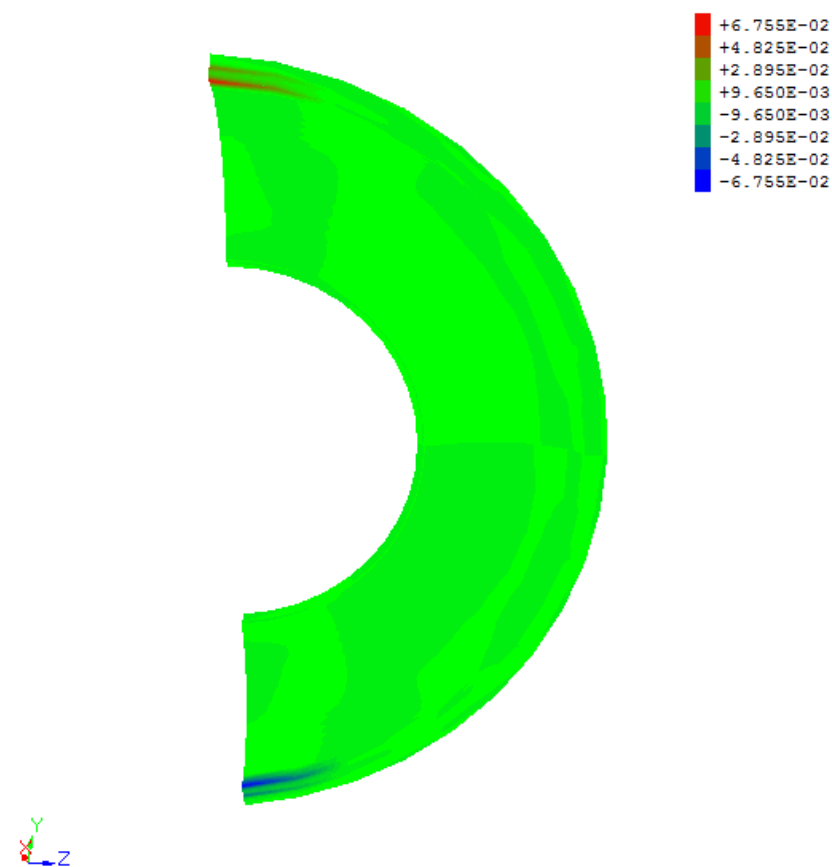
Сформулюємо граничні умови. На екваторі для $\varphi=0^\circ$ виконується умова симетрії, а при $\varphi=120^\circ$, у місці прилягання шини до ободу вважатимемо край шини жорстко защемленим.

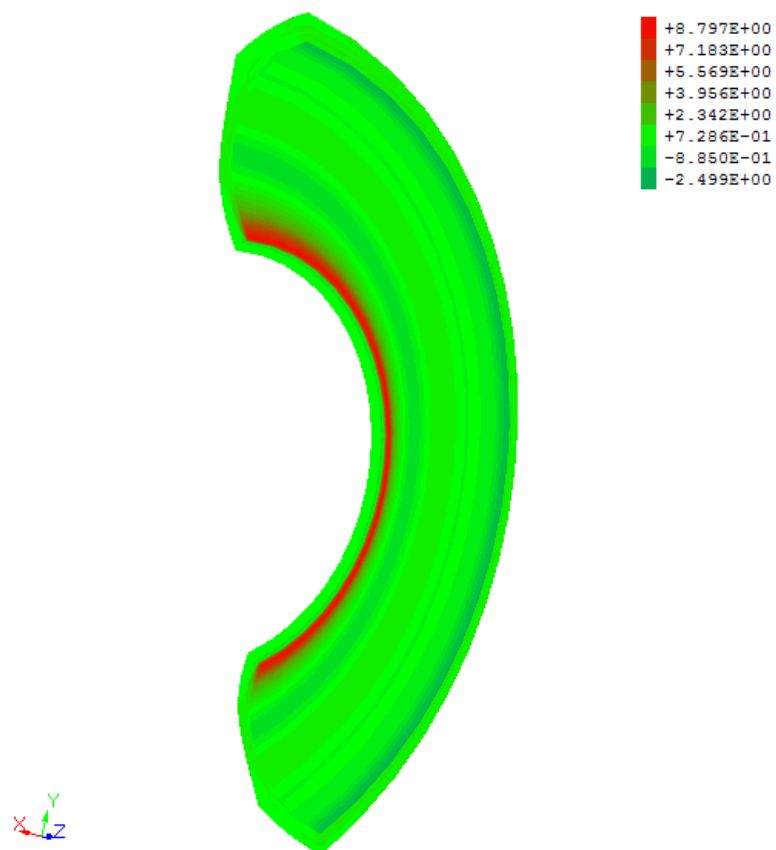
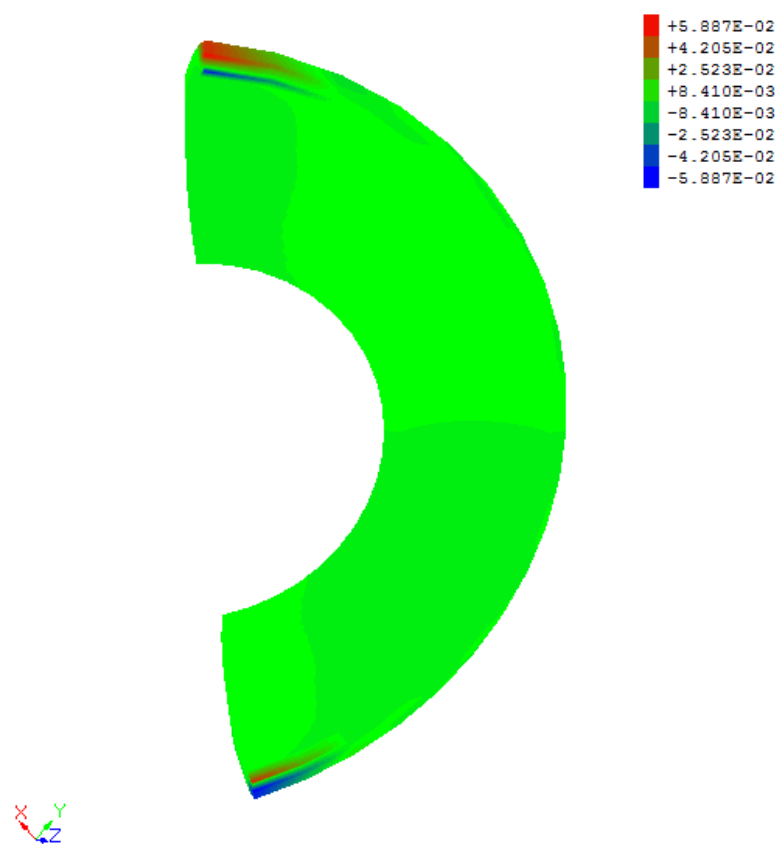
Розподіл переміщень для вказаних даних показано на рисунках 6.15-6.17. Розподіл напружень показано на рисунках 6.18-6.23. Розрахунки, які проводилися для різних сіток розбиття показують добру збіжність розв'язків. Результати розрахунків наведені для сітки дискретизації $14 \times 20 \times 21$.

При дії внутрішнього тиску основне навантаження сприймає більш жорсткий каркас, тому напруження на внутрішній поверхні перевищують напруження у глибині масиву шини та на її зовнішній поверхні, хоча наявність неоднорідних областей матеріалу й приводить до появи зон концентрації напружень (хоча величина напружень у цих зонах і менше ніж на внутрішній поверхні).

Рисунок 6.15 – Розподіл переміщень u_1 .Рисунок 6.16 – Розподіл переміщень u_2 .

Рисунок 6.17 – Розподіл переміщень u_3 .Рисунок 6.18 – Розподіл напружень σ_{11} .

Рисунок 6.19 – Розподіл напружень σ_{12} .Рисунок 6.20 – Розподіл напружень σ_{13} .

Рисунок 6.21 – Розподіл напружень σ_{22} .Рисунок 6.22 – Розподіл напружень σ_{23} .

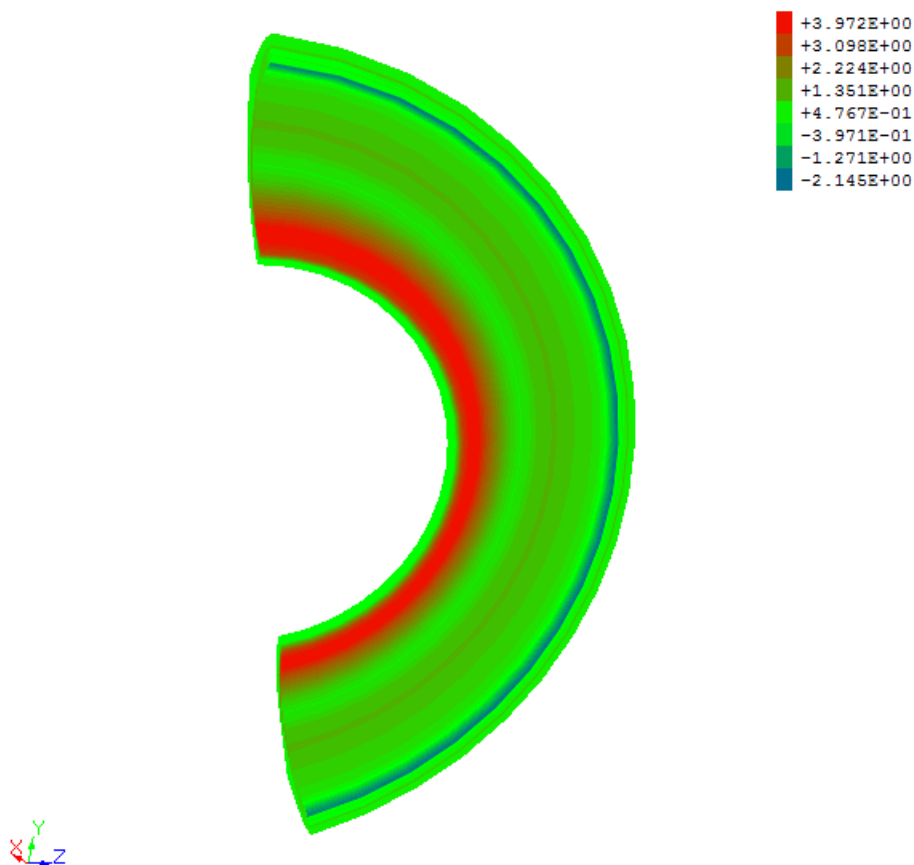


Рисунок 6.23 – Розподіл напружень σ_{33} .

Місцями концентрації напружень у шині при такому навантаженні є зони стику брекера та протектора, особливо кутові точки, в меншій мірі такими місцями є зони стику брекера та каркасу.

Максимальні значення нормальних напружень виникають у зонах поблизу закріплення каркасу до ободу колеса, це пов'язане із жорстким защемленням краю шини і неможливістю переміщень під дією внутрішнього тиску.

В процесі деформування внутрішня тороїдальна поверхня шини зміщується у напрямку близькому до радіального, при цьому переміщення змінюються від нуля у місті защемлення до максимальних значень у зоні екватора не зважаючи на наявність досить жорстких шарів брекера та каркасу.

В умовах реальної експлуатації ця картина дещо змінюється, що пов'язане з появою періодичних зовнішніх навантажень у процесі контакту шини із дорожнім покриттям.

6.3 Висновки

За допомогою розроблених підходів до визначення ефективних пружних сталих композита, матриці жорсткості скінченного елемента та програмного комплексу визначено напружено-деформований стан гумовокордних конструкцій.

Для віброакустичного ізолятора отримано розв'язки як у геометрично лінійній так і нелінійній постановці. Виявлено, що врахування геометричної нелінійності зменшує осадку віброізолятора на 10-15 % для розглянутих варіантів конструкцій, найбільша осадка спостерігається для віброізолятора з суцільним композиційним шаром та окружним армуванням, а найменша – для віброізолятора із внутрішнім композиційним шаром та радіальним армуванням.

Визначено напружено-деформований стан вантажної автомобільної діагональної шини при використанні трансверсально-ізотропних волокон під дією внутрішнього тиску. Знайдено конфігурацію профілю шини у деформованому стані та характер розподілу напружень у конструкції при такому навантаженні. Виявлено, що максимальний рівень напружень спостерігається на внутрішній поверхні у зоні кріплення каркасу шини до ободу колеса.

Основні положення розділу викладено у роботах [58, 68, 102, 124, 127, 190, 219].

РОЗДІЛ 7

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТІВ
РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ З ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ
МАТЕРІАЛІВ

Для визначення напружено-деформованого стану елементів ракетно-космічної техніки застосовуємо моментну схему скінченного елемента [122]. Основна ідея цієї схеми для волокнистого композиційного матеріалу викладена у розділі 4. Узагальнюючи досить значну кількість досліджень, можна зробити наступні висновки. МССЕ досить добре зарекомендував себе як для розрахунку масивних об'єктів, так і розрахунку тонкостінних тіл не поступаючись оболонковим скінченим елементам, завдяки усуненню ефекту «хибного зсуву» та менш жорсткої вимоги до співвідношення лінійних розмірів сторін SE [201].

7.1 Напружено-деформований стан головного обтічника ракетноносія в умовах експлуатаційного навантаження

Розглянемо конструкцію головного обтічника ракетноносія (рис. 7.1). Головний відсік ракетноносія представляє собою тришарову оболонку, що складається із зовнішньої, внутрішньої обшивок, стільникового заповнювача та стикувальних шпангоутів.

Обшивки виконані товщиною 0,99 мм в передній частині відсіку зі схемою армування $0^\circ, +45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, -45^\circ, +45^\circ, 0^\circ$ та товщиною 1,1 мм в задній частині зі схемою армування $0^\circ, +45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, -45^\circ, +45^\circ, 0^\circ$. В конструкції оболонки між обшивками розташований стільниковий заповнювач ПСП-1-2,5 із спеціального паперу висотою 34,9 мм. Для

забезпечення якісної формовки в містах переходу стільникового заповнювача до шпангоутів застосовані вкладиші із пінопласту Divinycell HP80.

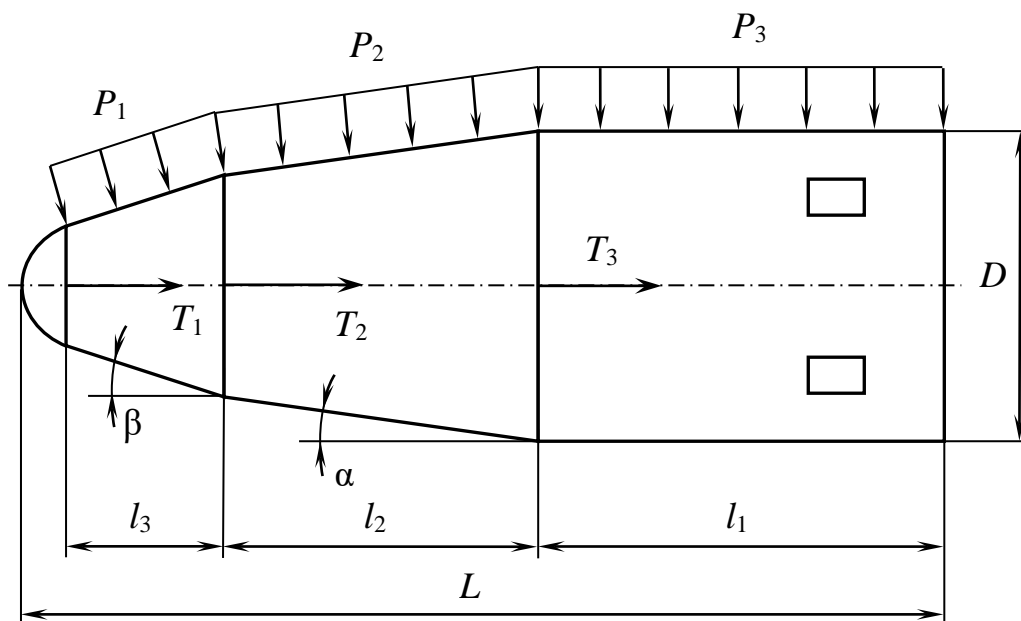


Рисунок 7.1 – Загальний вигляд головного обтічника ракетносія.

Як матеріал обшивок та шпангоутів використовується односпрямований вуглепластик ТС-36S+ЭДТ-69У. Пружні сталі вуглецевого волокна ТС-36S: модуль пружності при розтягненні (при $t=20^\circ\text{C}$) $E=230$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,26$. Пружні сталі сполучного матеріалу ЭДТ-69У: модуль пружності при розтягненні (при $t=20^\circ\text{C}$) $E=2,8$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,35$.

Проведемо розрахунок зовнішньої обшивки, яка в процесі експлуатації сприймає основне силове навантаження. Розміри конструкції: довжина $L=9,59$ м, $l_1=4,99$ м, $l_2=3,028$ м, $l_3=1,159$ м, діаметр відсіку $D=4,0$ м, кути нахилу $\alpha=15^\circ$ та $\beta=25^\circ$.

Моделювання робочих навантажень представляється у двох варіантах в залежності від φ – кута положення зони корпусу відносно площини та напрямку поперечної складової набігаючого потоку. Еквівалентні навантаження при $\varphi=180^\circ$ такі: поверхневі – $P_1=0,0403$ МПа, $P_2=0,0261$ МПа, $P_3=0,0065$ МПа,

осьові – $T_1=220$ кН, $T_2=506,7$ кН, $T_3=1333,61$ кН. Еквівалентні навантаження при $\varphi=0^\circ$ такі: поверхневі – $P_1=0,0507$ МПа, $P_2=0,0364$ МПа, $P_3=0,0091$ МПа, осьові – $T_1=131,7$ кН, $T_2=246,9$ кН, $T_3=422,84$ кН. При розрахунках нижня основа (торцева частина) обтічника приймалась защемленою.

Характер розподілу переміщень (в метрах) та напружень (у МПа) у випадку $\varphi=180^\circ$ показаний на рис. 7.2-7.9.

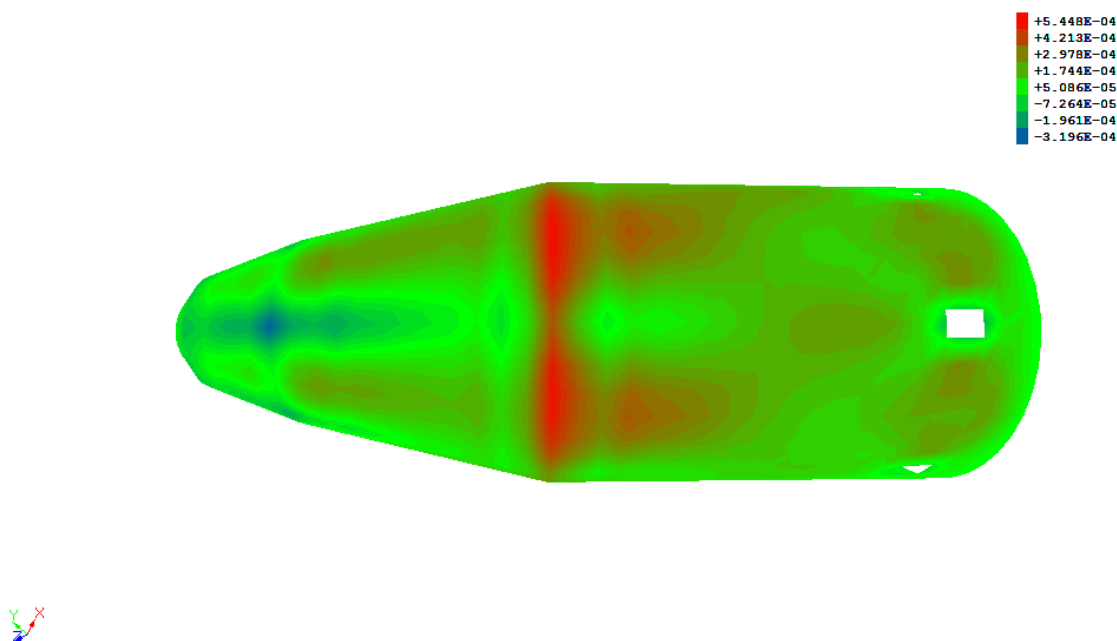


Рисунок 7.2 – Розподіл переміщень u_1 для випадку $\varphi=180^\circ$.

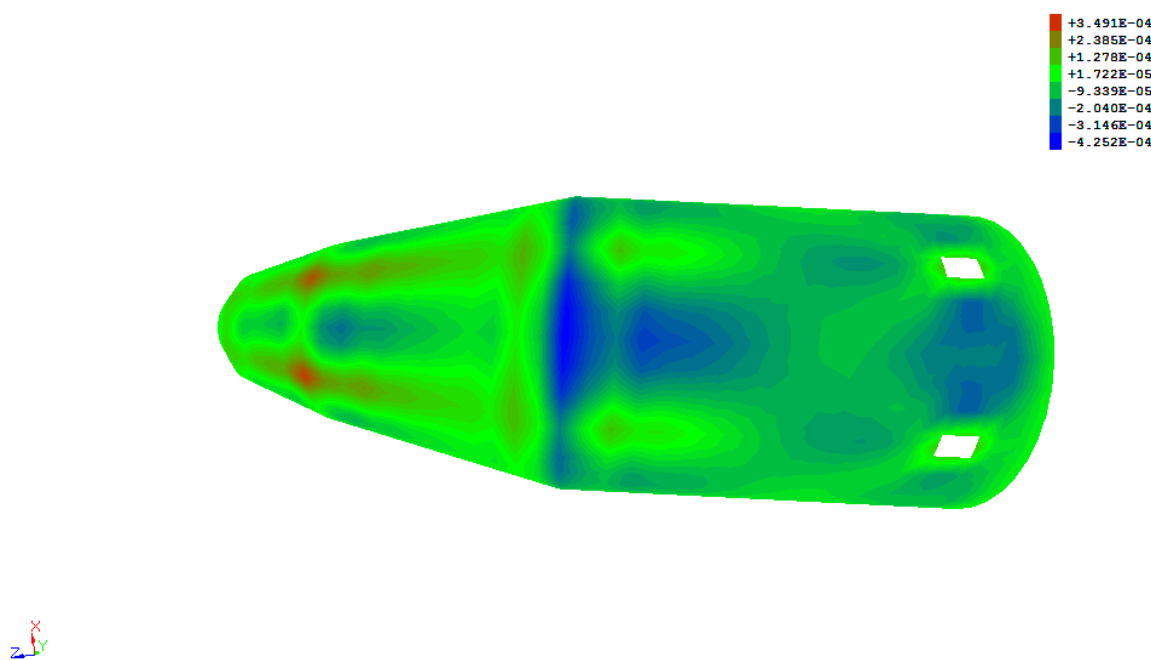


Рисунок 7.3 – Розподіл переміщень u_2 для випадку $\varphi=180^\circ$.

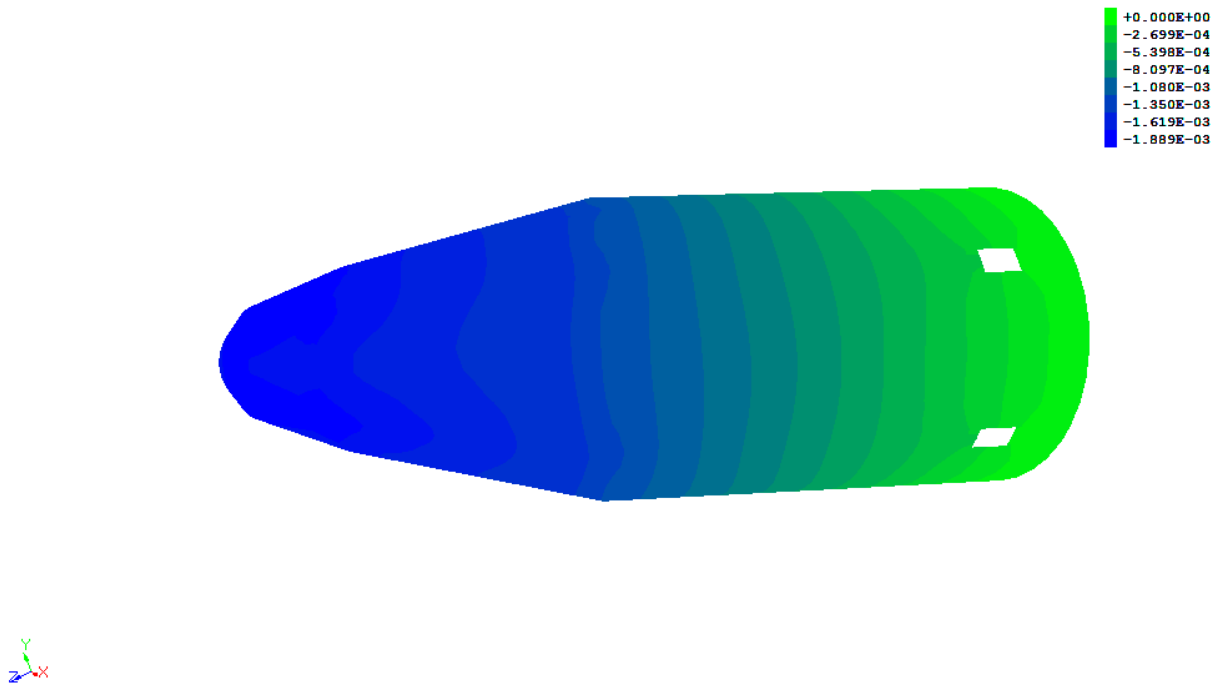


Рисунок 7.4 – Розподіл осьових переміщень u_z для випадку $\varphi=180^\circ$.

Характер зовнішнього навантаження та порушення симетрії, пов'язане з наявністю отворів у конструкції приводить до того, що переміщення в радіальному напрямку мають як додатній та від'ємний знак, тобто є зони, котрі випинаються, а є зони, котрі прогинаються. Хоча ці переміщення є на порядок меншими за осьові.

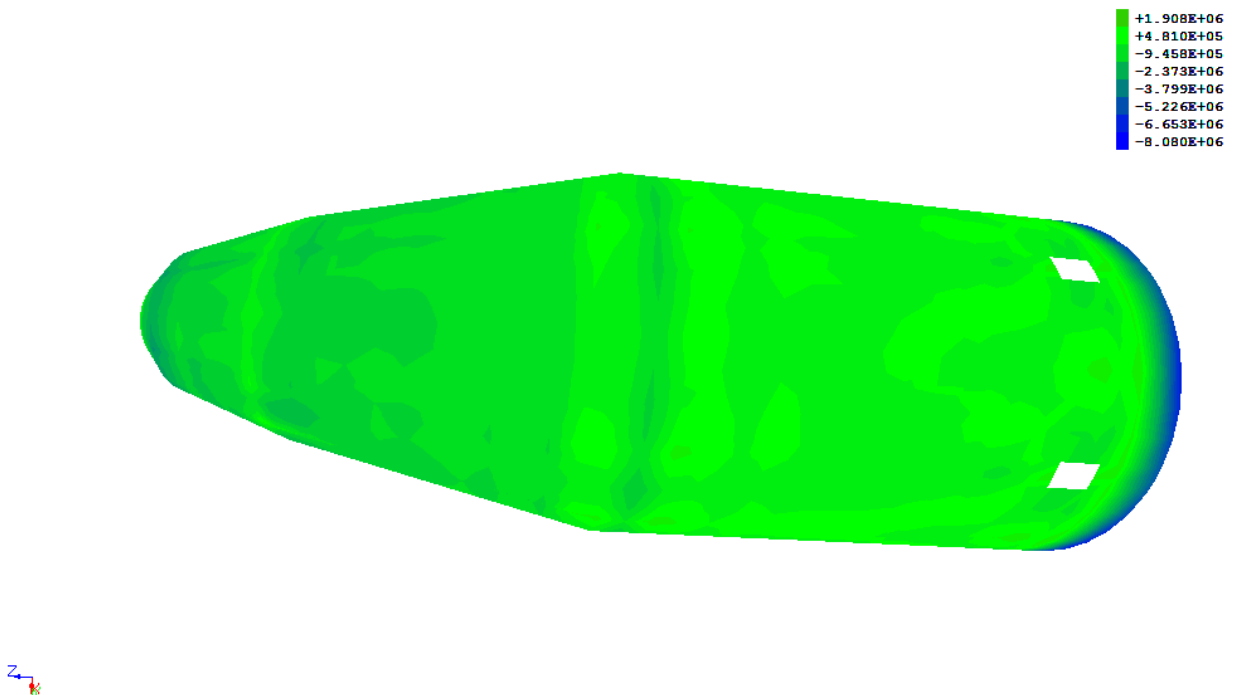


Рисунок 7.5 – Розподіл напружень σ_{11} для випадку $\varphi=180^\circ$.

Значення осьових переміщень у перетинах, перпендикулярних осі конструкції, близькі до сталих, хоча й не є такими, що обумовлено наявністю прямокутних отворів й відповідно несиметричністю постановки задачі.

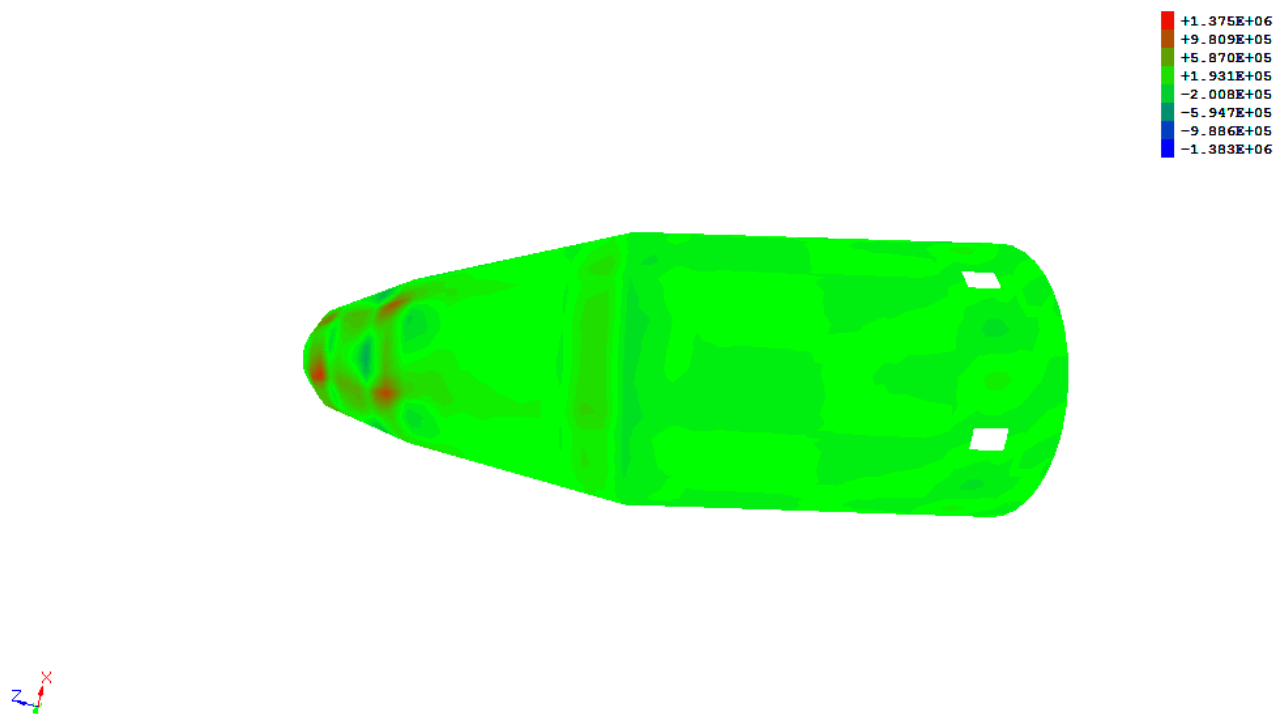


Рисунок 7.6 – Розподіл напружень σ_{12} для випадку $\varphi=180^\circ$.

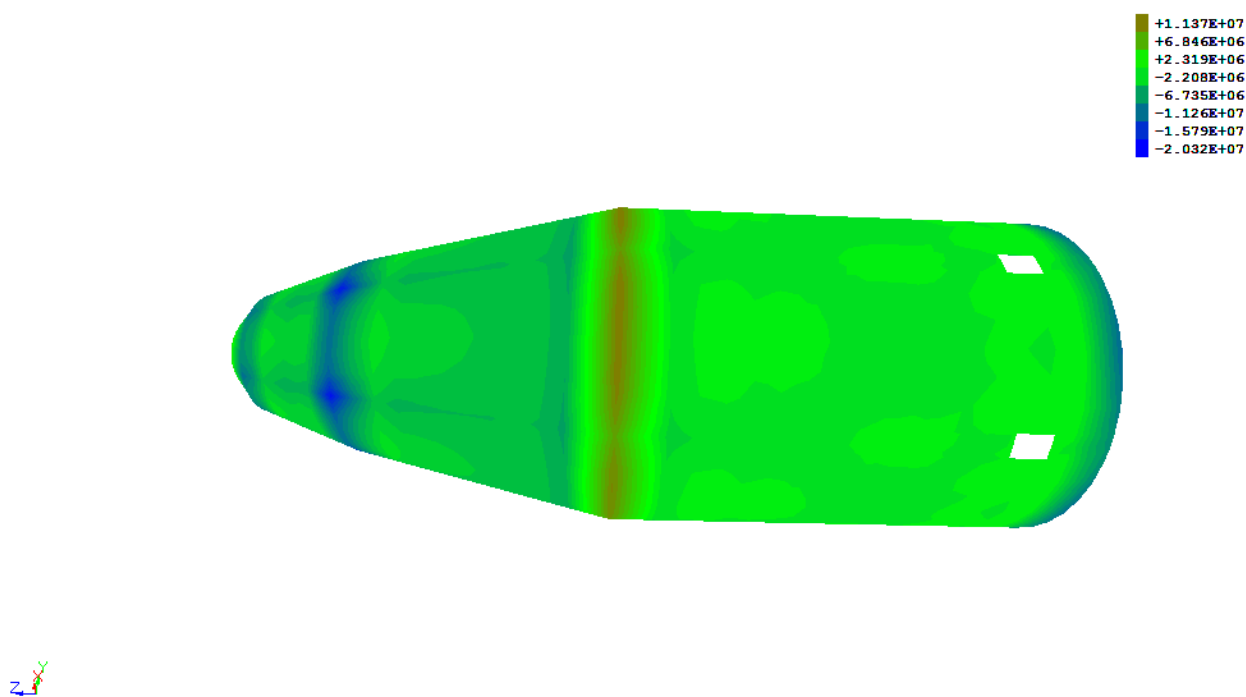


Рисунок 7.7 – Розподіл напружень σ_{22} для випадку $\varphi=180^\circ$.

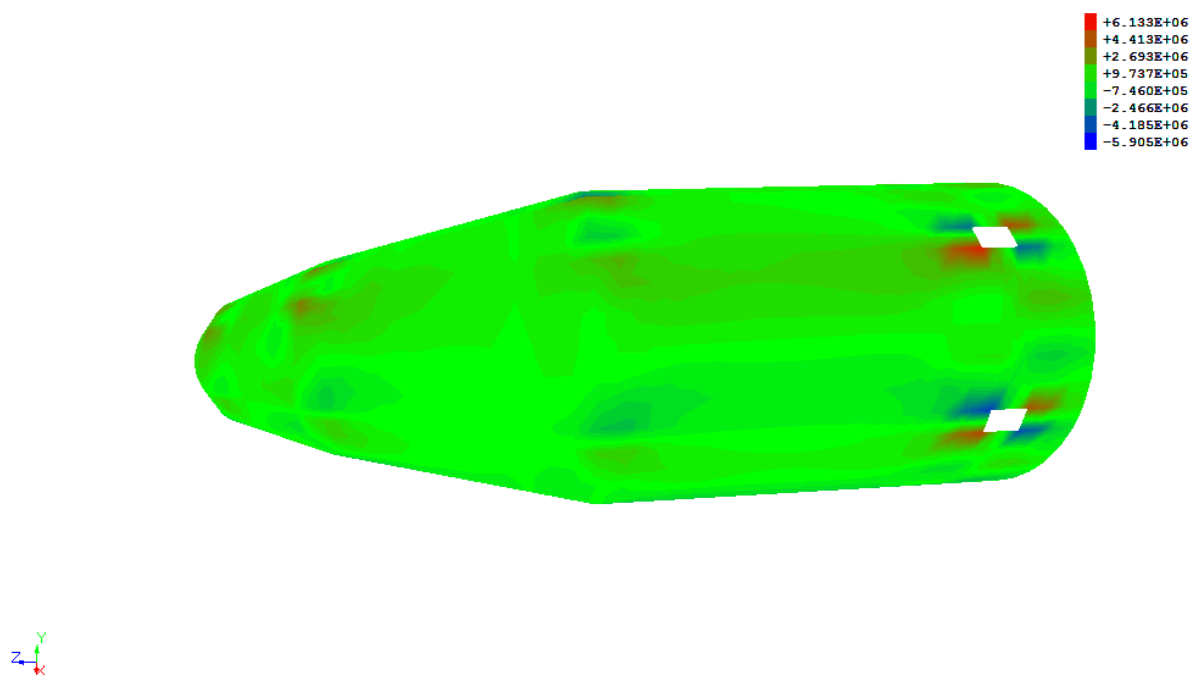


Рисунок 7.8 – Розподіл напружень σ_{23} для випадку $\varphi=180^\circ$.

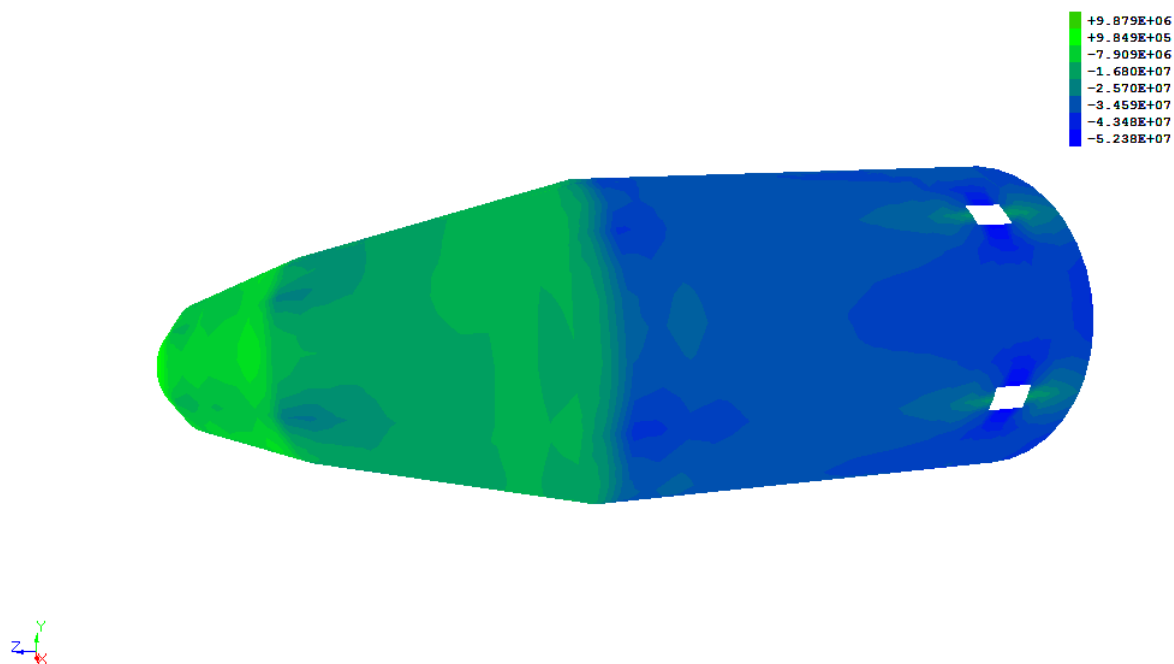


Рисунок 7.9 – Розподіл напружень σ_{33} для випадку $\varphi=180^\circ$.

При визначенні міцнісних характеристик конструкції одним із параметрів, який використовують при порівнянні з критичними значеннями, є інтенсивність напружень, яка обчислюється за наступною формулою:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right)}$$
 Розподіл величини інтенсивності напружень σ_i для випадку $\varphi=180^\circ$ показаний на рис. 7.10.

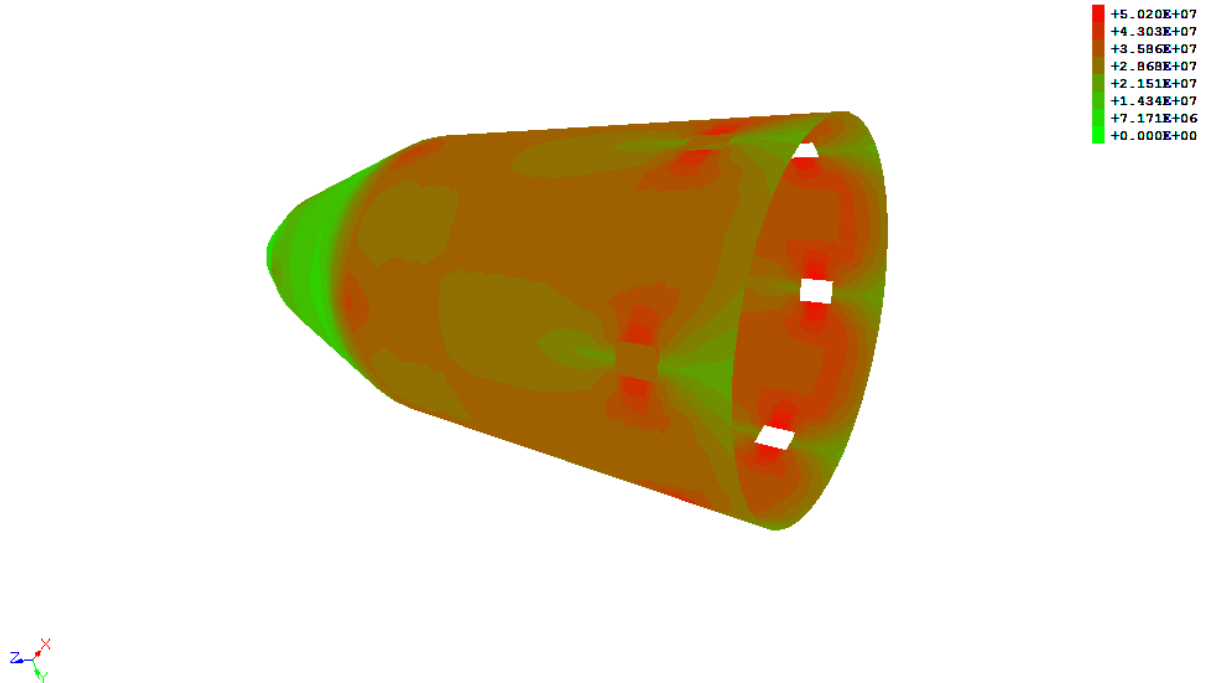


Рисунок 7.10 – Розподіл інтенсивності напружень σ_i для випадку $\varphi=180^\circ$.

Розподіл переміщень та напружень для випадку $\varphi=0^\circ$ показаний на рис. 7.11-7.13.

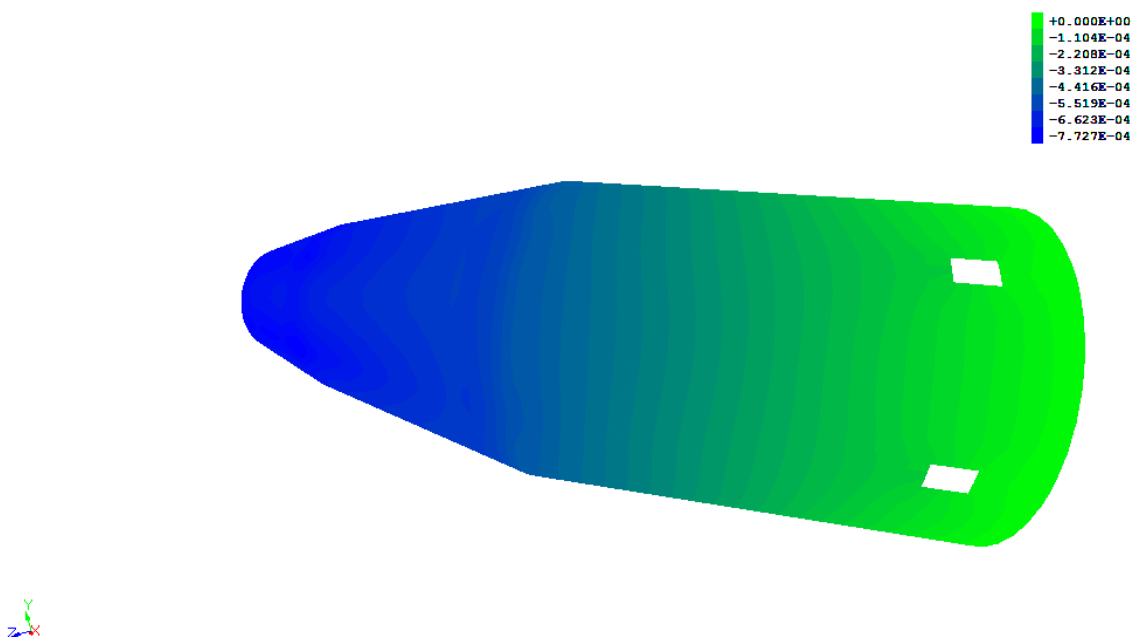


Рисунок 7.11 – Розподіл осевих переміщень u_z для випадку $\varphi=0^\circ$.

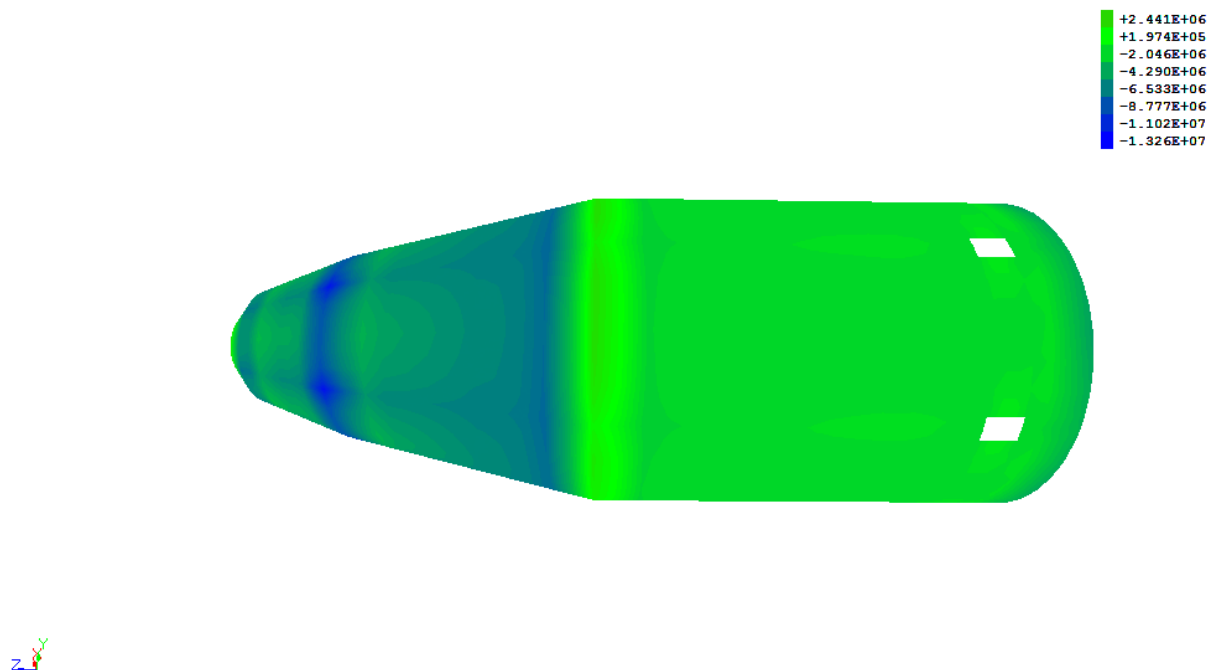


Рисунок 7.12 – Розподіл напружень σ_{22} для випадку $\varphi=0^\circ$.

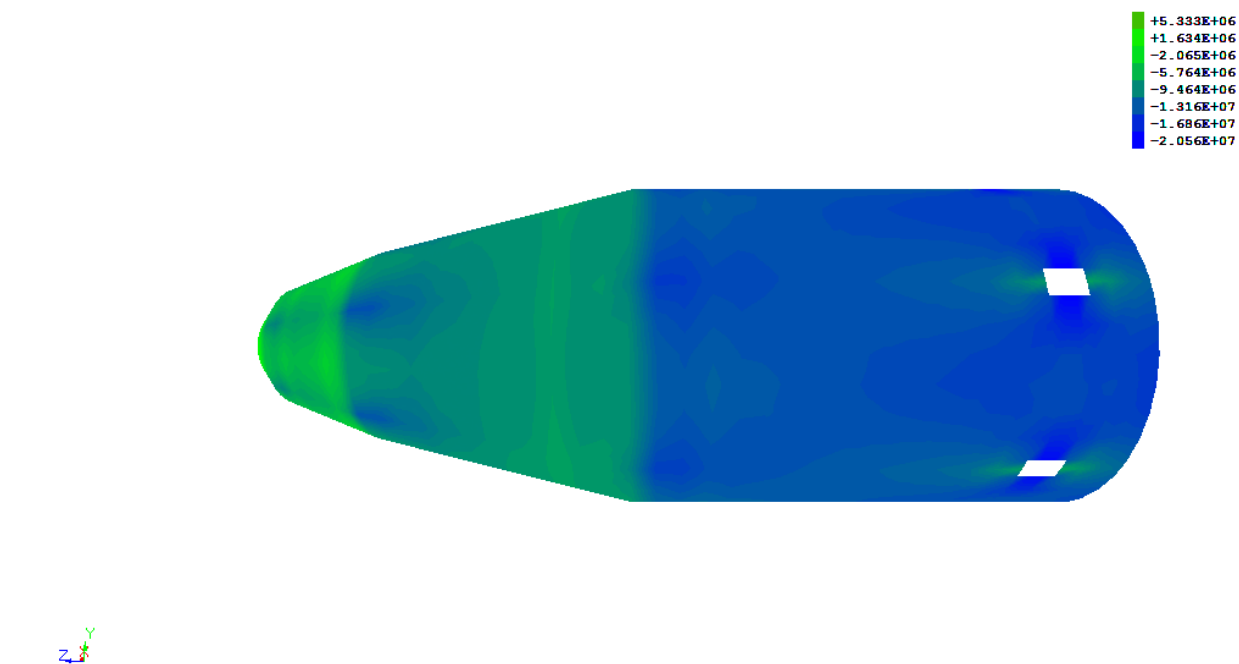


Рисунок 7.13 – Розподіл напружень σ_{33} для випадку $\varphi=0^\circ$.

Розподіл величини інтенсивності напружень σ_i для випадку $\varphi=0^\circ$ показаний на рис. 7.14.

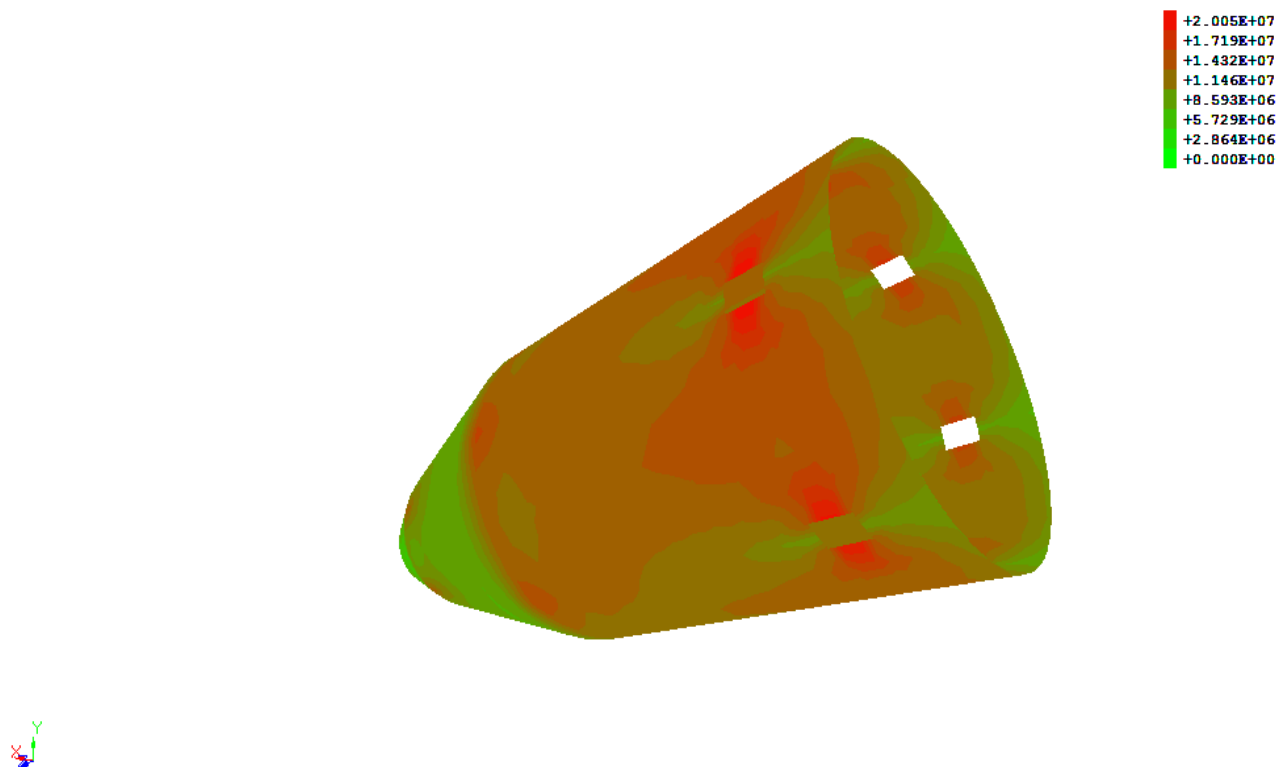


Рисунок 7.14 – Розподіл інтенсивності напружень σ_1 для випадку $\varphi=0^\circ$.

Як можна зазначити, осьові еквівалентні навантаження для випадку $\varphi=180^\circ$ перевищують осьові навантаження для випадку $\varphi=0^\circ$, а радіальні поверхневі навпаки, у першому випадку менші, ніж у другому. Однак результати розрахунків показують, що визначальними є осьові навантаження, тому максимальні значення інтенсивності напружень у 2,5 рази вищі у першому випадку, ніж у другому. Якісна картина розподілу інтенсивності напружень у обох випадках приблизно співпадає. Найбільш «небезпечними» з точки зору міцності (максимальні значення інтенсивності напружень) є зони конструкції, що примикають безпосередньо до прямокутних отворів у окружному напрямку, причому на зовнішній поверхні величини інтенсивності напружень дещо більші, ніж на внутрішній. Відмінністю для цих двох випадків є той факт, що для $\varphi=0^\circ$ величина інтенсивності напружень між отворами (на деякій відстані від них) значно спадає і на зовнішній поверхні значно перевищує величину інтенсивності напружень на внутрішній поверхні. У випадку ж $\varphi=180^\circ$ величина інтенсивності напружень на зовнішній поверхні

також значно спадає у порівнянні із максимальними значеннями навколо отворів, а на внутрішній поверхні зменшується незначно і перевищує значення на зовнішній поверхні.

Також до «небезпечних» зон можна віднести міста стиковки сферичних, конічних та циліндричних частин обтічника, де також величина інтенсивності напружень досягає досить значних величин, але менших ніж біля прямокутних отворів. У сферичній частині обтічника величини інтенсивності напружень є незначними, як для випадку $\varphi=0^\circ$, так і для випадку $\varphi=180^\circ$.

З точки зору інженерних рішень для вдосконалення конструкції обтічника слід посилити вразливі місця – зони навколо прямокутних отворів та зони стиковки сферичних, конічних та циліндричних частин конструкції – за допомогою шпангоутів та інших конструктивних елементів.

7.2 Висновки

На основі розроблених підходів до визначення ефективних пружних сталей композита та запропонованої матриці жорсткості за допомогою програмного комплексу визначено напружено-деформований стан головного обтічника ракетносія.

Розрахунки проводилися в умовах комбінованого осьового та поверхневого радіального навантаження для двох режимів роботи – в залежності від кута φ положення зони корпусу відносно площини та напрямку поперечної складової набігаючого потоку.

Встановлено, що при обох режимах визначальними при деформуванні головного обтічника ракетносія є осьові навантаження, поверхневі навантаження вносять значно менший вклад при деформуванні конструкції. Більш небезпечним для міцності є режим роботи для випадку $\varphi=180^\circ$.

Визначено, що найбільш «небезпечні» з точки зору міцності конструкції є зони навколо квадратних отворів, зони стиковки сферичних, конічних та циліндричних частин обтічника.

Основні положення даного розділу викладено у наукових роботах [154, 267].

ВИСНОВКИ

Основним результатом роботи є вирішення науково-технічної проблеми вдосконалення моделей та методів розв'язання задач про визначення напружено-деформованого стану просторових конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів, а саме:

1. На основі кінематичної та енергетичної умови узгодження запропоновані аналітичні співвідношення для визначення ефективних пружних характеристик волокнистого композиційного матеріалу, що дають змогу враховувати трансропні властивості матриці і волокна. Порівняння з експериментальними даними показує, що співвідношення, отримані на основі енергетичної умови узгодження, дають більш точний результат.

2. Розроблено підхід до визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, армованого двома сортами періодичних волокон, що дає можливість на основі аналітичних співвідношень врахувати трансропні властивості матриці та волокон.

3. Для дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів запропоновані співвідношення для матриці жорсткості тривимірного скінченного елемента композиційного матеріалу з трансропними компонентами з урахуванням просторового армування волокнами на основі моментної схеми скінченного елемента. Моментна схема дозволяє уникнути недоліків, притаманних традиційній схемі скінченного елемента, а врахування просторового характеру розташування волокон послаблює вимоги при дискретизації конструкцій.

4. Розроблено чисельний підхід для розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій із гумовокордних матеріалів з урахуванням геометричної нелінійності на основі моментної схеми скінченного елемента.

5. Для визначення ефективних характеристик волокнистого композиційного матеріалу та скінченно-елементного розв'язання просторових задач визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів розроблено й верифіковано пакет прикладних програм «Композит».

6. Досліджено особливості напружено-деформованого стану конструкцій із гумовокордних матеріалів. Отримано величину осадки для різних модифікацій віброакустичного ізолятора та особливості деформування автомобільної шини під дією внутрішнього тиску.

7. Досліджено особливості напружено-деформованого стану аерокосмічних конструкцій із волокнистих композитів в умовах експлуатаційного навантаження. Аналіз результатів показує, що найбільш вразливими з точки зору міцності є зони біля прямокутних отворів, де величини інтенсивності напружень набувають максимальних значень.

8. Підходи, запропоновані в дисертаційній роботі, та результати розрахунків були використані у відділі механіки еластомерних конструкцій інституту геотехнічної механіки НАН України (м. Дніпро) при розрахунку та створенні віброізоляторів із проміжним шаром із гумовокордного матеріалу та в КБ «Південне» (м. Дніпро) для визначення напружено-деформованого стану головного обтічника ракетносія.

9. Підходи до визначення ефективних пружних характеристик та застосування моментної схеми до побудови матриці жорсткості скінченного елемента впроваджені в навчальний процес і використовуються при читанні спецкурсу «Метод скінченних елементів» для студентів спеціальності «Прикладна математика» та при виконанні кваліфікаційних та дипломних робіт у Запорізькому національному університеті.

СПИСОК ВИКОРИСНИХ ДЖЕРЕЛ

1. А.с. № 43043. Комп'ютерна програма «Система автоматизованого проектування FORTU-FEM» («FORTU-FEM») / С.І. Гоменюк, В.З. Грищак, С.М. Гребенюк та інші. – Дата реєстрації 02.04.2012.
2. Аболиныш Д.С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала / Д.С. Аболиныш // Механики полимеров. – 1965. – №4. – С. 52-59.
3. Алфатов Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфатов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
6. Андреев А.Н. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек / А.Н. Андреев, Ю.В. Немировский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1977. – № 5. – С. 87-96.
7. Андреев А.Н. Осесимметричный изгиб и начальное “разрушение” многослойных армированных цилиндрических оболочек / А.Н. Андреев // Пространственные конструкции в Красноярском крае. – Красноярск: Красноярск. политехн. ин-т. – 1978. – Вып. 11. – С. 47-56.
8. Ахундов В.М. Деформационные характеристики резинокомпозитов со значительными наполнениями нитями корда / В.М. Ахундов, Т.А. Скрипочка // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 27-37.

9. Ахундов В.М. Задачи механики волокнистых композитов при больших деформациях: дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.02.04 / В.М. Ахундов. – М.: Институт прикладной механики РАН, 2003. – 389 с.
10. Ахундов В.М. Методика расчета тонких оболочек с малым количеством однонаправленных слоев на основе пространственных моделей деформирования / В.М. Ахундов // Механика композитных материалов. – 2012. – Т. 48, №3. – С. 419-436.
11. Ахундов В.М. Расчет и экспериментальное исследование кручения цельнорезиновой и резинокордной муфт при больших деформациях / В.М. Ахундов // Механика композитных материалов. – 2010. – Т. 46, №5. – С. 701-708.
12. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1972. – 216 с.
13. Баженов В.А. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок / В.А. Баженов, В.К. Цихановський, В.М. Кислокий. – К.: КНУБА, 2000. – 386 с.
14. Бакулин В.Н. Метод конечных элементов и голографическая интерферрометрия в механике композитов / В.Н. Бакулин, А.А. Рассоха. – М.: Машиностроение, 1987. – 311 с.
15. Бардзокас Д.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 376 с.
16. Бахвалов Н.С. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов / Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 352 с.
17. Белкин А.Е. Верификация метода расчета радиальных шин по теории трехслойных оболочек / А.Е. Белкин, Т.Н. Володина, Л.П. Горская // Труды VIII симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Дорога, шина, автомобиль». – М.: НИИШП. – Т. 1. – 1997. – С. 40-46.

18. Белкин А.Е. Влияние слабой сжимаемости резины на работу низкого цилиндрического резинометаллического амортизатора / А.Е. Белкин, В.Л. Бидерман // Расчеты на прочность. – 1975. – № 16. – С. 5-24.
19. Белкин А.Е. Динамический контакт шины как вязкоупругой оболочки с опорной поверхностью при стационарном качении / А.Е. Белкин, Н.Л. Нарская // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. – 1997. – № 1. – С. 62-73.
20. Белкин А.Е. О выборе оболочечного конечного элемента для определения жесткостных характеристик шин / А.Е. Белкин, А.А. Блинков, Н.Л. Нарская // Труды двенадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: НИИШП. – Т. 1. – 2001. – С. 65-73.
21. Белкин А.Е. Приближенное решение контактной задачи об обжатии шины на плоскую или цилиндрическую опорную поверхность / А.Е. Белкин, А.В. Улешкин // Изв. вузов. Машиностроение. – 1993. – № 10–12. – С. 14-21.
22. Белкин А.Е. Расчет шин радиальной конструкции как трехслойных ортотропных оболочек вращения / А.Е. Белкин // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение. – 1989. – Вып. 30. – С. 40-47.
23. Белов Д.А. Гомогенизация и гетерогенизация однонаправленных упругих волокнистых композитов: дис. ... кандидата тех. наук: 01.02.06 / Д.А. Белов. – СПб.: ГОУВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет», 2009. – 195 с.
24. Белозеров Л.Г. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях / Л.Г. Белозеров, В.А. Киреев. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. – 388 с.
25. Бидерман В.Л. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / В.Л. Бидерман // Прочность, устойчивость, колебания. – М.: Машиностроение. – 1968. – Т. 2. – С. 211-242.

26. Бидерман В.Л. Расчет конического резинометаллического амортизатора / В.Л. Бидерман, В.А. Коровяков // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1976. – № 2. – С. 37-41.
27. Бидерман В.Л. Расчет напряжений и деформаций, вызываемых давлением, в шинах типа “Р” / В.Л. Бидерман, Э.Я. Левковская // Изв. вузов. Машиностроение. – 1969. – № 3. – С. 107-112.
28. Бидерман В.Л. Расчет формы профиля и напряжений в элементах пневматической шины, нагруженной внутренним давлением / В.Л. Бидерман // Тр. НИИШП. – 1957. – № 3. – С. 16-51.
29. Блох В.И. Теория упругости / В.И. Блох. – Харьков: изд-во Харьковского университета, 1964. – 483 с.
30. Блумберг Н.Н. Краевые эффекты и концентрация напряжений в многослойных композитных пластинах / Н.Н. Блумберг, В.П. Тамуж // Механика композитных материалов. – 1980. – № 3. – С. 424-435.
31. Болотин В.В. К теории слоистых плит / В.В. Болотин // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 3. – С. 65-72.
32. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
33. Болотин В.В. Основные уравнения теории армированных сред / В.В. Болотин // Механика полимеров. – 1965. – № 2. – С. 27-37.
34. Болтыров А.А. Определение упругих эффективных характеристик однонаправленного резинокордного материала / А.А. Болтыров // Труды восемнадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во ООО «Научно-технический центр «НИИШП»», Т.1. – 2007. – С. 73-86.
35. Большаков В.И. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры / В.И. Большаков, И.В. Андрианов, В.В. Данишевский. – Днепропетровск: «Пороги», 2008. – 196 с.

36. Булычев Г.Г. Динамическое разрушение предварительно-напряженного волокнистого композита, вызванное обрывом волокна / Г.Г. Булычев, В.Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1993. – № 3. – С. 169-176.
37. Бурдун Е.Т. Оптимизация структуры намоточной тороидальной оболочки при ограничениях по устойчивости / Е.Т. Бурдун, А.В. Криптюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – 2011. – Вип. 12. – С. 24-32.
38. Бурдун Е.Т. Упругие характеристики намоточной тороидальной оболочки / Е.Т. Бурдун, А.В. Криптюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – 2010. – Вип. 11. – С. 40-48.
39. Бурлаков А.В. Ползучесть тонких оболочек / А.В. Бурлаков, Г.И. Львов, О.К. Морачковский. – Х.: «Вища школа», 1977. – 124 с.
40. Бурьян О.Ю. Моделирование межфазного слоя в композитах с полимерной матрицей. Определение его структуры и механических свойств / О.Ю. Бурьян, В.У. Новиков // Механика композитных материалов. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 289-304.
41. Бухин Б.Л. Применение теории сетчатых оболочек к расчету пневматических шин / Б.Л. Бухин // Механика пневматических шин как основа рационального конструирования и прогнозирования эксплуатационных свойств. – М.: НИИШП. – 1974. – С. 59-74.
42. Бухин Б.Л. Расчет равновесной конфигурации пневматической шины с учетом удлинения нитей корда / Б.Л. Бухин // Каучук и резина. – 1963. – № 10. – С. 35-38.
43. Ван Фо Фы Г.А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты / Г.А. Ван Фо Фы // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 593-602.
44. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

45. Верещака С.М. Термопружний напружений стан склопластикового шарнірно обпертого циліндра з урахуванням неідеального контакту між шарами / С.М. Верещака, А.В. Дейнека, В.В. Данільцев // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки, №3, 2015. – С. 42-50.
46. Вильдеман В.Э. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В.Э. Вильдеман, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.
47. Ганеева М.С. Основные нелинейные соотношения уточненной теории многослойных ортотропных нетонких оболочек / М.С. Ганеева // Статистика и динамика оболочек. – Казань: КФТИ АН СССР. – 1977. – Вып. 8. – С. 19-31.
48. Гарт Э.Л. Численный анализ процесса упруго-пластического деформирования структурированных сред / Э.Л. Гарт, В.С. Гудрамович // Доповіді Національної академії наук України, № 5. – 2012. – С. 49-56.
49. Гозман Е.А. Применение метода конечных элементов к расчету РТИ при больших деформациях / Е.А. Гозман, В.А. Дружинин, С.И. Дымников // Вопр. динамики и прочности. – 1980. – Вып. 36. – С. 147-156.
50. Головчан В.Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов / В.Т. Головчан. – К.: Наукова думка, 1987. – 304 с.
51. Гоменюк С.И. Дискретизация трехмерных объектов в методе конечных элементов / С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, В.В. Киричевский // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – Запоріжжя: ЗНТУ. – 2004. – № 2. – С. 95-98.
52. Гоменюк С.І. Моделювання напружено-деформівного стану конструкцій у програмному комплексі «МІРЕЛА+» / С.І. Гоменюк, С.М. Гребенюк // Міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2008»: тези доповідей. – Харків: Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 2008. – С. 106-107.

53. Гребенюк С. Визначення напружено-деформованого стану пористого гумового буфера в умовах нелінійного деформування / С. Гребенюк, В. Юречко // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль: ТНТУ ім. Івана Пулюя, 2013. – № 2(70). – С.52-62.
54. Гребенюк С.М. Визначення ефективного модуля пружності композита при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці / С.М. Гребенюк, М.І. Клименко // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вип. 3(50). – С.254-258.
55. Гребенюк С.М. Визначення параметрів механіки руйнування у композиційних матеріалах / С.М. Гребенюк, Вал.В. Киричевський // Тезисы докладов: Шестой Международный симпозиум «Механика эластомеров – 2005». – Днепропетровск, 2005. – С. 38.
56. Гребенюк С.М. Визначення пружних сталей композита з трансропними матрицею та волокном на основі кінематичної умови узгодження / С.М. Гребенюк // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2012. – № 1. – С. 62-76.
57. Гребенюк С.М. Напружено-деформований стан порожнистого циліндру із волокнистого композита з трансропними компонентами / С.М. Гребенюк // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Труды VII Международной научной конференции. – Донецк: ДонНУ, 2013. – Т. 1. – С. 117-120.
58. Гребенюк С.М. Скінченно-елементне моделювання напружено-деформованого стану автомобільної шини / С.М. Гребенюк, М.І. Клименко, А.О. Лісняк // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2015. – Вип.3 (54). – С. 108-112.
59. Гребенюк С.Н. Вязкоупругое деформирование конструкций из композиционного материала / С.Н. Гребенюк, В.В. Киричевский,

С.И. Гоменюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2003. – № 12(70). – С. 226-231.

60. Гребенюк С.Н. Использование различных критериев для расчета прочности волокнистых композитов / С.Н. Гребенюк, О.П. Мелашенко // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Харків: Видавництво Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 2012. – Вип. 3(32). – С. 134-136.
61. Гребенюк С.Н. Матрица жесткости конечного элемента для тканого композиционного материала / С.Н. Гребенюк, О.П. Мелашенко // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Харьков: ХАИ, 2010. – Вып. 4(64). – С. 71-82.
62. Гребенюк С.Н. Моделирование и расчет резинокордных конструкций с применением МКЭ / С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная // Математичні проблеми технічної механіки-2011. Матеріали конференції. – Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ. – 2011. – Т. 2. – С. 89.
63. Гребенюк С.Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитной пластины с трещиной / С.Н. Гребенюк, Вал.В. Киричевский // Міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2004»: Тези доповідей. – Харків: ХАІ, 2004. – С. 42.
64. Гребенюк С.Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния и разрушения композитных конструкций в условиях упругого и вязкоупругого деформирования / С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная, В.В. Киричевский // Тезисы докладов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». – Харьков: ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины. – 2006. – С. 63.
65. Гребенюк С.Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния резинокордных материалов / С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк, В.В. Леонтьева // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2010. – Вип. 3(39). – С. 126-131.

66. Гребенюк С.Н. Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования / С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – Луганськ: СУНУ, 2010. – № 10(152), Ч. 2. – С. 41-48.
67. Гребенюк С.Н. Напряженно-деформированное состояние композитных конструкций с трещинами / С.Н. Гребенюк, Вал.В. Киричевский // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – 2006. – № 3(97). – С. 46-50.
68. Гребенюк С.Н. Напряженно-деформированное состояние резинового виброизолятора с композитными вставками / С.Н. Гребенюк // Геотехнічна механіка. – Дніпропетровськ: Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України. – Вип. 121. – 2015. – С. 190-195.
69. Гребенюк С.Н. Напряженно-деформированное состояние эластомерных конструкций при абразивном износе / С.Н. Гребенюк, А.А. Бова, В.З. Юречко // Известия Саратовского университета. Серия «Математика. Механика. Информатика». – Саратов: СГУ, 2014. – Т. 14, вып. 4, ч. 1. – С. 455-463.
70. Гребенюк С.Н. Напряженное состояние заземленной по торцам многослойной резинокордной цилиндрической оболочки / С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины. – 2007. – Вып. 71. – С. 166-170.
71. Гребенюк С.Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с транслопными матрицей и волокном / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 92-98.

72. Гребенюк С.Н. Определение напряженно-деформированного состояния композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования / С.Н. Гребенюк, В.В. Киричевский, В.А. Толок // Труды двенадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во НИИШП, 2001. – Т. 1. – С. 147-151.
73. Гребенюк С.Н. Определение продольного модуля упругости композита на основе энергетического условия согласования / С.Н. Гребенюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2012. – Вып. 2(45). – С. 106-110.
74. Гребенюк С.Н. Определение прочности тканевого композита / С.Н. Гребенюк, О.П. Мелашенко // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Харків: Видавництво Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 2011. – Вып. 3(29). – С. 163-167.
75. Гребенюк С.Н. Определение прочностных характеристик композитной цилиндрической оболочки / С.Н. Гребенюк, О.П. Мелашенко // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины. – 2007. – Вып. 71. – С. 163-165.
76. Гребенюк С.Н. Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вып. 11. – С. 79-86.
77. Гребенюк С.Н. Применение моментной схемы конечного элемента при расчете конструкций из волокнистых композитов / С.Н. Гребенюк // Математичні проблеми технічної механіки-2011. Матеріали конференції. – Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ. – 2011. – Т. 2. – С. 102.

78. Гребенюк С.Н. Сингулярный конечный элемент серендипова семейства для композита с трещиной / С.Н. Гребенюк, Вал.В. Киричевский // Радиоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2006. – № 1. – С. 48-57.
79. Гребенюк С.Н. Упругие характеристики композиционного материала с транслопной матрицей и волоконом / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип. 12. – С. 62-68.
80. Григолюк Э.И. Влияние граничных условий в точке обода на напряженно-деформированное состояние радиальных шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Труды девятого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Надежность, стабильность – качество». – М.: НИИШП. – 1998.– Т.1.– С.105-111.
81. Григолюк Э.И. Контактная задача для многослойной анизотропной оболочки вращения / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Труды одиннадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: НИИШП. – 2000.– Т. 1.– С. 189-197.
82. Григолюк Э.И. Контактная задача для пневматической шины, взаимодействующей с жестким основанием / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. – 2004.– Т. 40, № 5.– С. 661-674.
83. Григолюк Э.И. Методы исследования напряженно-деформированного состояния многослойных композитных оболочек с приложением к механике пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов // Научно-технический прогресс в машиностроении. – М.: Международный центр научной и технической информации, институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 1993. – Вып. 39. – 49 с.
84. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.

85. Григолюк Э.И. Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // МТТ. – 1967. – № 1. – С. 163-169.
86. Григолюк Э.И. Расчет радиальных шин методом конечных элементов / Э.И. Григолюк, П.Я. Носатенко. – М.: 1984. – 25 с. – Деп. в ВИНТИ 11.03.84, № 1527-84.
87. Григолюк Э.И. Расчет радиальных шин на основе обобщенной теории Тимошенко / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1984. – № 4. – С. 166-174.
88. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости / Я.М. Григоренко. – К.: Наук. думка, 1973. – 228 с.
89. Григоренко Я.М. Численное решение краевых задач статики ортотропных слоистых оболочек вращения на ЭВМ типа М-220 / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Т. Василенко, Г.П. Голуб. – К.: Наук. думка, 1971. – 151 с.
90. Грищак В.З. Упругие характеристики резинокордного материала с учетом трансверсально-изотропных свойств корда / В.З. Грищак, С.Н. Гребенюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2013. – Вип. 2(47). – С. 110-114.
91. Гузь А.Н. Введение в механику нанокompозитов / А.Н. Гузь, Я.Я. Рущицкий, И.А. Гузь. – К.: Ин-т механики им. С.П. Тимошенко, 2010. – 398 с.
92. Гуральник В.Е. Напряженно-деформированное состояние боковой стенки и борта шин радиальной конструкции при различных видах нагружения / В.Е. Гуральник // Тр. шестого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Математические методы в механике, конструировании и технологии». – М.: НИИШП. – 1995. – Т. 1. – С. 79-84.

93. Димитриенко Ю.И. Исследование процессов разрушения композиционных материалов на базе метода асимптотической гомогенизации / Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». – 2012. – № 6. – С. 101-113.
94. Димитриенко Ю.И. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов / Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, №5. – С. 3-20.
95. Димитриенко Ю.И. Об упругих свойствах композиционных материалов / Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, №4. – С. 96-110.
96. Дохняк Б.М. Метод конечных элементов в исследовании оболочечных конструкций из композиционных материалов / Б.М. Дохняк, В.В. Киричевский, А.Д. Карпушин // Тр. девятого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Надежность, стабильность – качество». – М.: НИИШП,– 1998.– Т.1. – С.133-140.
97. Дырда В.И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей / В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк. – Днепропетровск-Запорожье: Запорожский национальный университет, 2012. – 370 с.
98. Елизаров С.В. Композиционные материалы, их механико-структурный анализ и некоторые новые области применения: дис. ... доктора тех. наук: 05.23.05 / С.В. Елизаров. – СПб.: ПГУПС, 2000. – 313 с.
99. Жук Я.А. К вопросу об определении макрохарактеристик однонаправленного волокнистого композита из физически нелинейного материала при гармоническом нагружении / Я.А. Жук, И.К. Сенченков // Системні технології. – 2003. – № 4(27). – С. 62-67.
100. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике / О.К. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
101. Зингерман К.М. Расчет напряжений вблизи жестких включений в телах из резиноподобного вязкоупругого материала с четырехпараметрическим

- ядром релаксации при конечных плоских деформациях / К.М. Зингерман, О.А. Рябова // Труды восемнадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во ООО «Научно-технический центр «НИИШП»», Т.1. – 2007. – С. 158-163.
102. Исследование напряженно-деформированного состояния резинометаллической опоры / С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, А.А. Бова [и др.] // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – Самара: СГТУ, 2014. – № 2(35). – С. 64-81.
103. Исследование теплопроводности листовых металлокомпозитов системы нержавеющей сталь-вольфрам в широком диапазоне температур / А.С. Лавренко, А.В. Коробко, В.Е. Ольшанецкий [и др.] // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич». – 2008. – № 2. – С. 136-140.
104. Ищенко В.А. Тороидальная ортотропная резинокордная оболочка под воздействием несесимметричных нагрузок / В.А. Ищенко // Труды III конф. молодых ученых и специалистов по механике композитных материалов. – Рига: Зинатне. – 1981. – С. 103-104.
105. Ищенко И.А. Расчет температурных полей пневматических шин с учетом их напряженно-деформированного состояния / В.А. Ищенко, Л.Е. Никитина // Каучук и резина. – 1982. – № 10. – С. 24–25.
106. Карнаухов В.Г. Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоактуаторов при активном демпфировании колебаний прямоугольной пластины / В.Г. Карнаухов, В.И. Козлов, Т.В. Карнаухова // Доповіді Національної академії наук України, № 2, 2015. – С. 50-54.
107. Карнаухов В.Г. Вынужденные колебания анизотропной прямоугольной пластины с пьезосенсорами при учете сдвиговых деформаций / В.Г. Карнаухов, В.И. Козлов, Т.В. Карнаухова // Доповіді Національної академії наук України, № 3. – 2015. – С. 45-49.

108. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
109. Карпушин А.Д. Математическая модель нелинейного деформирования пространственно-армированных конструкций на основе конечно-элементного анализа / А.Д. Карпушин, В.В. Киричевский // Вісник Східноукр. нац. ун-ту.– 2000.– №9(31). – С. 171-176.
110. Каспаров А.А. Упругие характеристики и механика деформирования текстильных кордов / А.А. Каспаров // Геотехническая механика. – 1999. – № 11. – С. 69-83.
111. Кваша Э.Н. Контакт пневматической шины с упругим полупространством / Э.Н. Кваша, Е.А. Погасий // Тр. шестого симп. «Проблемы шин и резинокордных композитов. Математические методы в механике, конструировании и технологии». – М.: НИИШП. – 1995. – Т. 1. – С. 122-127.
112. Кваша Э.Н. Неклассический вариант моментной теории пневматических шин / Э.Н. Кваша, А.В. Плеханов, А.П. Прусаков // Материалы Междунар. конф. по каучуку и резине. – М. – 1984. – С. 42-45.
113. Кеплер Х. Основы тензорного исчисления и его применение в механике твердого тела: Учебное пособие / Х. Кеплер, В.В. Киричевский, Г.Б. Ковнеристов. – К.: УМК ВО, 1992. – 184 с.
114. Киричевский В.В. Анализ численного нелинейного решения оболочечной резинокордной пневматической конструкции / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, А.Д. Карпушин // Труды одиннадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: НИИШП. – 2000. – Т. 1. – С. 17-24.
115. Киричевский В.В. Влияние вязкоупругих свойств эластомера на напряженно-деформированное состояние композитных конструкций / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная // Тезисы докладов: Шестой Международный симпозиум «Механика эластомеров – 2005». – Днепропетровск, 2005. – С. 39.

116. Киричевский В.В. Вязкоупругое деформирование многослойных конструкций из композиционных материалов / В.В. Киричевский, В.А. Толок, С.Н. Гребенюк // Труды тринадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во ФГУП НИИШП, 2002. – Т.1. – С. 199-204.
117. Киричевский В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния многослойной анизотропной конструкции методом конечных элементов / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, А.Д. Карпушин // Тр. II Междунар. симп. – Днепропетровск: Институт геотехн. механики НАН Украины, 1998. – Т. 3. – С. 385-390.
118. Киричевский В.В. Исследование процессов разрушения эластомерных конструкций в условиях нелинейного вязкоупругого деформирования / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк // Проблемы прочности. – 2001. – № 3. – С. 129-140.
119. Киричевский В.В. К решению задачи термоупругости для композиционных материалов / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2000. – № 9(31). – С. 177-181.
120. Киричевский В.В. Матрица жесткости пространственного конечного элемента для исследования конструкций из композиционных материалов / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, А.Д. Карпушин // Вісник Східноукр. держ. ун-ту. – 1999. – № 3(18). – С. 109-116.
121. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В.В. Киричевский. – К.: Наук. думка, 2002. – 655 с.
122. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К.: Будівельник, 1992. – 215 с.
123. Киричевский В.В. Расчет пространственно-армированных конструкций в геометрически нелинейной постановке / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, А.Д. Карпушин // Тр. десятого симп. «Проблемы шин и резинокордных

- композитов. Десятый юбилейный Симпозиум». – М.: НИИШП, 1999. – С.127-133.
124. Киричевский В.В. Расчет тороидальной оболочки в условиях вязкоупругого деформирования / В.В. Киричевский, В.А. Толок, С.Н. Гребенюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2001. – № 2(36). – С. 204-208.
125. Киричевський В.В. Вплив кута армування на наведені пружні характеристики композиційних матеріалів, армованих суцільними волокнами / В.В. Киричевський, Б.М. Дохняк, О.Д. Карпушин // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КДТУБА, 1999. – Вип. 65. – С. 108-114.
126. Киричевський В.В. Нелінійний напружено-деформований стан тороїдальної оболонки на основі скінчено-елементного аналізу / В.В. Киричевський, Б.М. Дохняк, О.Д. Карпушин // Вісник Запорізького державного ун-ту. – 2000. – № 1. – С. 54-60.
127. Киричевський В.В. Нелінійні деформації тороїдальної оболонки / В.В. Киричевський, В.О. Толок, С.М. Гребенюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2001. – № 11(45). – С. 220-225.
128. Киричевський В.В. Розрахунок багат шарової композитної пластини в умовах в'язкопружної деформації / В.В. Киричевський, С.М. Гребенюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2002. – № 3(49). – С. 95-100.
129. Киричевський В.В. Чисельне дослідження напружено-деформівного стану армованих просторових конструкцій з урахуванням анізотропії / В.В. Киричевський, Б.М. Дохняк, О.Д. Карпушин // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА. – 2000. – Вип. 67. – С. 84-91.
130. Класторны М. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов / М. Класторны, П. Кондерла, Р. Пиекарский // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 109-144.

131. Компактная схема решения сверхбольших систем линейных алгебраических уравнений в задачах механики / С.И. Гоменюк, В.А. Толок, В.В. Киричевский [и др.] // Складні системи і процеси. – 2003. – № 1. – С. 15-20.
132. Композиционные материалы: Справочник / [В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.]; Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
133. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – К.: Наук. думка, 1985. – 592 с.
134. Конструктивно-технологическое решение и несущая способность межступенного отсека ракеты-носителя «Циклон-4» из полимерных композиционных материалов / А.М. Зиновьев, А.П. Кушнарев, А.В. Кондратьев [и др.] // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 33(100). – С. 46-52.
135. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / В.И. Королев. – М.: Машиностроение, 1965. – 272 с.
136. Куимова Е.В. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами / Е.В. Куимова, Н.А. Труфанов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2009. – №4(70) – С. 129-148.
137. Куликов Г.М. Исследование некоторых геометрически нелинейных задач многослойных анизотропных пластин и оболочек / Г.М. Куликов // Изв. АН СССР. – 1980. – № 3. – С. 189-190.
138. Куликов Г.М. К теории многослойных пологих оболочек конечного прогиба / Г.М. Куликов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – № 3. – С. 188-192.
139. Куликов Г.М. Программный комплекс расчета пневматических шин на IBM PC / Г.М. Куликов, С.А. Химушкин // Труды шестого симпозиума

- «Проблемы шин и резинокордных композитов. Математические методы в механике, конструировании и технологии». – М.: НИИШП. – 1995. – Т. 1. – С. 149-151.
140. Кучер М.К. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів / М.К. Кучер, М.М. Заразовский // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія Машинобудування, №58. – 2010. – С. 24-29.
141. Кучер Н.К. Деформирование и прочность слоистых углепластиков при статическом термомеханическом нагружении / Н.К. Кучер, М.Н. Заразовский, Е.Л. Данильчук // Механика композитных материалов. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 963-980.
142. Кучер Н.К. Определение несущей способности слоистых армированных пластиков с учетом деградации механических параметров отдельных слоев / Н.К. Кучер, М.Н. Заразовский // Проблемы прочности. – 2010. – № 2. – С. 111-124.
143. Кучер Н.К. Оценка прочности слоистых эпоксикарбоволоконитов, армированных однонаправленными волокнами / Н.К. Кучер, М.Н. Заразовский // Проблемы прочности. – 2006. – № 6. – С. 95-112.
144. Лазарев С.О. Конечноэлементная система STAR для расчета и проектирования РТИ / С.О. Лазарев, В.Л. Полонский // Труды десятого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Десятый юбилейный симпозиум». – М.: НИИШП. – 1999. – С. 153-156.
145. Лапин А.А. Плоская деформация резинокордовой ткани / А.А. Лапин // Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз, 1955. – С. 87-99.
146. Левковская Э.Я. Теоретическое и экспериментальное исследование напряжений и деформаций в брекере шин типа Р: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04 / Э.Я. Левковская. – М.: НИИШП, 1970. – 157 с.

147. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. – 416 с.
148. Либреску Л. К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек. Ч.1. / Л. Либреску // Механика полимеров. – 1975. – № 6. – С. 1038-1050.
149. Либреску Л. Нелинейная теория упругих анизотропных многослойных оболочек / Л. Либреску // Избр. Пробл. Приклад. механики. – М.: Наука. – 1974. – С. 453-466.
150. Лізунов П.П. Універсальний алгоритм чисельного моделювання нелінійних процесів деформування залізобетонних конструкцій / П.П. Лізунов, О.І. Гуляр, І.І. Солодей // Опір матеріалів і теорія споруд, № 92. – 2014. – С. 17-29.
151. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
152. Марчук А.В. Применение полуаналитического метода конечных элементов для решения задач устойчивости слоистых конструкций с отслоениями / А.В. Марчук, В.Г. Пискунов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1998. – Т.4. – № 3. – С. 3-9.
153. Математическое моделирование в нелинейной механике (Обзор программных комплексов для решения задач моделирования сложных систем) / Е.Н. Чумаченко, Т.В. Полякова, А.С. Аксенов [и др.] // Пр-2155, Институт космических исследований РАН. – М., 2009. – 43 с.
154. Математическое моделирование и исследование прочности силовых элементов конструкций космических летательных аппаратов / Д.В. Акимов, В.З. Грищак, С.И. Гоменюк [и др.] // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – № 3. – С. 6-13.
155. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел / Д.В. Вайнберг, А.С. Городецкий, В.В. Киричевский [и др.] // Прикладная механика. – 1972. – №8, вып. VIII. – С. 3-28.

156. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / [В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др.]. – К.: Наук. думка, 2005. – 416 с.
157. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
158. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / [В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк и др.]. – К.: Наук. думка, 2003. – 316 с.
159. Метод ориентационного усреднения в механике материалов / [А.Ж. Лагздинь, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс, А.Ф. Креггерс]. – Рига: Зинатне, 1989. – 190 с.
160. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3 т. – К.: Наук. думка, 1982. – Т. 1: Механика материалов / [А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванин и др]. – 368 с.
161. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3 т. – К.: Наук. думка, 1983. – Т. 2: Механика элементов конструкций / [А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванин и др]. – 464 с.
162. Механика композитов. Т.1. Статика материалов / [В.Т. Головчан, А.Н. Гузь, Ю.В. Коханенко и др]. – К.: Наук. думка, 1993. – 455 с.
163. Механика композитов. Т.10. Устойчивость элементов конструкций / И.Ю. Бабич и др.; ред. И.Ю. Бабич. – К.: Наук. думка, 2001. – 375 с.
164. Механика композитов. Т.11. Численные методы / Я.М. Григоренко и др.; под ред. акад. НАН Украины Я.М. Григоренко, акад. НАН Украины Ю.Н. Шевченко. – К.: Наук. думка, 2002. – 448 с.
165. Механика композитов. Т.12. Прикладные исследования / Под ред. А.Н. Гузя и Л.П. Хорошуна. – К.: Наук. думка, 2003. – 398 с.
166. Механика композитов. Т.2. Динамика и устойчивость материалов / Под ред. Н.А. Шульги. – К.: Наук.думка, 1993. – 429 с.

167. Механика композитов. Т.3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / [Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов, Е.Н. Шикула, Л.В. Назаренко]; ред. Л.П. Хорошун. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с.
168. Механика композитов. Т.4. Механика материалов с искривленными структурами / С.Д. Акбаров и др.; ред. А.Н. Гузь, С.Д. Акбаров. – К.: Наук. думка, 1995. – 320 с.
169. Механика композитов. Т.5. Механика разрушения / А.Н. Гузь и др.; ред. А.А. Каминский. – К.: Наук. думка, 1996. – 340 с.
170. Механика композитов. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах / А.Н. Гузь и др.; ред. Н.А. Шульга, В.Т. Томашевский. – К.: Наук. думка, 1997. – 394 с.
171. Механика композитов. Т.7. Концентрация напряжений / А.Н. Гузь и др. – К.: Наук. думка, 1998. – 387 с.
172. Механика композитов. Т.8. Статика элементов конструкций / Я.М. Григоренко и др. – К.: Наук. думка, 1999. – 379 с.
173. Механика композитов. Т.9. Динамика элементов конструкций / В.Д. Кубенко и др.; ред. В.Д. Кубенко. – К.: Наук. думка, 1999. – 379 с.
174. Мизерная Е.Л. Моделирование вязкоупругого деформирования композитных материалов в программном комплексе «МІРЕЛА+» / Е.Л. Мизерная, С.Н. Гребенюк // Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій у науці, освіті та економіці: Матеріали ІV Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Луганськ: Phoenix, 2010. – С. 66-67.
175. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с круговым отверстием / С.Н. Гребенюк, Н.Н. Лисица, Е.Л. Мизерная [и др.] // Геотехнічна механіка. – Дніпропетровськ: Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України. – 2006. – Вип. 63. – С. 154-160.
176. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитных конструкций в условиях вязкоупругого деформирования /

- В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк, Вал.В. Киричевский [и др.] // Матеріали одинадцятої міжнародної наукової конференції імені М. Кравчука. – К.: Задруга. – 2006. – С. 976.
177. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитов и конструкций на их основе / С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк, Е.Л. Мизерная [и др.] // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2006. – № 2. – С. 50-54.
178. Моделювання магнітних властивостей гібридних волокнистих феромагнітних композитів регулярної структури / Л.А. Фильштинський, Ю.В. Шрамко, Г.Ф. Бурнатна [та інші.] // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2013. – Вып.2(47). – С. 357-362.
179. Москаленко В.Н. Изгиб толстых многослойных оболочек / В.Н. Москаленко, Ю.Н. Новичков // Механика твердого тела. – 1968. – №3. – С. 149-153.
180. Мухин О.Н. Растяжение двухслойной резинкордной полосы / О.Н. Мухин // Труды десятого симпозиума «Проблемы шин и резинкордных композитов. Десятый юбилейный симпозиум». – М.: НИИШП. – 1999. – С. 290-309.
181. Муштари Х.М. Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины / Х.М. Муштари, И.Г. Терегулов // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 60-67.
182. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл / [В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров]. – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
183. Нарусберг В.Л. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов / В.Л. Нарусберг, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1988. – 299 с.
184. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек / [В.А. Баженов, А.С. Сахаров, А.В. Гондляр, С.Л. Мельников]. – К.: НИИ строймеханики, 1994. – 264 с.

185. Немировский Ю.В. Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю.В. Немировский, Б.С. Резников. – Новосибирск: Наука, 1986. – 166 с.
186. Нечипоренко А.Г. Теоретические и экспериментальные исследования особенностей нагружения резинокордных оболочек в пневмоподвесках транспортных средств / А.Г. Нечипоренко, Э.Н. Кваша, Е.А. Погасий // Труды II Международного симпозиума по механике эластомеров. – Днепропетровск: Изд-во «Полиграфист». – 1998. – Том 3. – С. 274-280.
187. Новиков В.У. Моделирование межфазного слоя в анизотропных композитах / В.У. Новиков, О.Ю. Бурьян // Прикладная физика. – 2000. – № 1. – С. 67-78.
188. Носатенко П.Я. Исследование геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния анизотропных оболочек вращения методом конечных элементов / МАМИ / П.Я. Носатенко. – М., 1984. – 38 с. – Деп. в ВИНТИ 11.03.84, №1526-84.
189. Определение напряженно-деформированного состояния композиционных материалов в условиях температурного нагружения / В.В. Киричевский, В.А. Толоч, С.Н. Гребенюк [и др.] // Труды Одиннадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. – М.: Изд-во НИИШП, 2000. – С. 25-30.
190. Определение напряженно-деформированного состояния резинометаллических сейсмоопор / [В.И. Дырда, Н.И. Лисица, А.В. Новикова и др.] // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 152-158.
191. Определение средней температуры поверхности автомобильной шины при её качении / В.А. Гудков, В.А. Дербенев, С.А. Ширяев [и др.] // Труды шестого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Математические методы в механике, конструировании и технологии». – М.: НИИШП, 1995. – С. 69-73.

192. Оптимизация слоистых ортотропных оболочек вращения при несимметричном нагружении / А.П. Дзюба, П.И. Булакаев, Т.В. Ткачева [и др.] // Прикладные задачи математики и механики: Материалы XII научн. конф. учен. Украины, России, Белоруси. – Севастополь. – 2003. – С. 148-150.
193. Оценка напряженно-деформированных состояний в жаропрочном композиционном материале матрица (12Х18Н10Т) – волокна (ВР27-3ВП) для разных схем линейного армирования / С.Б. Беликов, А.С. Лавренко, В.Е. Ольшанецкий [и др.] // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич». – 2008. – № 2. – С. 151-159.
194. Оценка работоспособности автомобильной шины по ее среднemasсовой температуре / В.А. Гудков, В.А. Дербенев, С.А. Ширяев [и др.] // Труды седьмого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Задачи на пороге XXI века». – М.: НИИШП, 1996. – С. 47-51.
195. Пагано Н.Дж. Роль эффективных модулей в исследовании упругих свойств слоистых композитов / Н.Дж. Пагано // Механика композиционных материалов / ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – Том 2. – С. 13-37.
196. Пагано Н.Дж. Точные модули анизотропных слоистых композитов / Н.Дж. Пагано // Механика композиционных материалов / ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – Том 2. – С. 38-60.
197. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
198. Пипкин А.С. Конечные деформации идеальных волокнистых композитов / А.С. Пипкин // Механика композиционных материалов / ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – Том 2. – С. 287-353.
199. Пискунов В.Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко. – К.: Будівельник, 1986. – 176 с.

200. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.
201. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформированных тел / [В.А. Баженов, А.И. Гуляр, А.С. Сахаров, А.Г. Топор]. – К.: НДІБМ, 1993. – 376 с.
202. Понятовский В.В. К теории изгиба анизотропных пластин / В.В. Понятовский // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 6. – С. 1033-1039.
203. Применение различных теорий определения упругих характеристик композиционного материала при расчете конструкций / С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, В.Е. Ольшанецкий [и др.] // Вісник двигунобудування. – Запоріжжя: ОАО «Мотор Сич». – 2009. – № 2. – С. 139-142.
204. Прогнозирование температуры протектора в пятне контакта автомобильной шины / В.И. Новопольский, О.Б. Третьяков, А.М. Ободов [и др.] // Каучук и резина. – 1993. – № 2. – С. 27-31.
205. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
206. Пэйгано Н. Межслойные эффекты в композитных материалах: Пер. с англ. / Под ред. Н. Пэйгано. – М.: Мир, 1993. – 346 с.
207. Развитие метода конечных элементов и его применение в САПР / В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк [и др.] // Вісник Запорізького національного університету. – 2006. – № 1. – С. 38-55.
208. Разработка алгоритмов и вычислительных программ для расчета автомобильных шин. Научный отчет, № 02830062629. – М. – Днепропетровск: МАМИ-НИИКГШ, 1983. – 129 с.
209. Рассказов А.О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек / А.О. Рассказов // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 50-56.

210. Рассказов А.О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с.
211. Рассказов А.О. Уравнения равновесия многослойных пологих оболочек и пластин / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 5. – С. 45-50.
212. Растеряев Ю.К. Составные резинокордные материалы и механика их деформирования / Ю.К. Растеряев, Г.Н. Агальцов // Геотехническая механика. – 2005. – № 60. – С. 200-248.
213. Растеряев Ю.К. Теория деформирования брекера / Ю.К. Растеряев, А.А. Каспаров // Геотехническая механика. – 1999. – № 11. – С. 100-142.
214. Растеряев Ю.К. Теория деформирования составных анизотропных резинокордных материалов, используемых в каркасах пневматических шин / Ю.К. Растеряев, А.А. Каспаров // Геотехническая механика. – 1999. – № 11. – С. 84-100.
215. Растеряев Ю.К. Упругие характеристики и механика деформирования составных анизотропных резинокордных систем пневматических шин / Ю.К. Растеряев, А.А. Каспаров // Труды I Международного симпозиума по механике эластомеров. – Днепропетровск. – 1996. – Т. II – С. 47-66.
216. Растеряев Ю.К. Уточненный метод расчета равновесной конфигурации профиля пневматической шины / Ю.К. Растеряев, А.А. Каспаров // Геотехническая механика. – 1999. – № 11. – С. 143-156.
217. Растеряев Ю.К. Физико-механические свойства резин пневматических шин / Ю.К. Растеряев // Геотехническая механика. – Днепропетровск. – 1999, Вып. 11. – С. 157-179.
218. Расчет композитных конструкций с учетом расслоений / [В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, А.И. Оглобля и др.]. – К.: Будівельник, 1992. – 136 с.
219. Расчет напряженно-деформированного состояния виброизоляторов сложной формы / В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк, Н.И. Лисица [и др.] // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць. Ін-т геотехнічної механіки

- ім. М.С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2012. – Вып. 106. – С. 105-110.
220. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов / [В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко, В.К. Присяжнюк и др.]. – К.: Вища школа, 1987. – 200 с.
221. Расчетный комплекс проектирования шин на основе МКЭ / С.И. Марченко, С.Л. Соколов, А.Б. Ненахов [и др.] // Труды десятого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Десятый юбилейный симпозиум». – М.: НИИШП. – 1999. – С. 165-171.
222. Решение сверхбольших систем линейных алгебраических уравнений в рамках вычислительного комплекса FORTU / В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк [и др.] // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2004. – № 5(75). – С. 158-162.
223. Рикардс Р.Б. Устойчивость оболочек из композитных материалов / Р.Б. Рикардс, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
224. Рябов А.Ф. К теории многослойных пластин несимметричной структуры с ортотропными слоями / А.Ф. Рябов, А.О. Рассказов // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10, вып. 2. – С. 62-68.
225. Рябова О.А. Об учете взаимовлияния кордных нитей в резинокордном композите при конечных деформациях / О.А. Рябова, К.М. Зингерман // Труды восемнадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во ООО «Научно-технический центр «НИИШП»», Т.2. – 2007. – С. 146-149.
226. Савосин В.С. Массивные шины (конструкция, изготовление, эксплуатация) / В.С. Савосин, М.Л. Бограчев. – М.: Химия, 1981. – 112 с.
227. Сахаров А.С. Уточненная теория многослойных композитных оболочек в задачах статики и динамики / А.С. Сахаров, А.В. Гондляр, С.Л. Мельников // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1986. – Вып. 49. – С. 38-41.

228. Сендецки Дж. Упругие свойства композитов / Дж. Сендецки // Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – С. 61-101.
229. Скорняков Э.С. Модернизация вычислительного комплекса «Мираж» для расчета пневматических шин / Э.С. Скорняков, С.Г. Бурыгин, О.А. Рассказов // Труды I Междунар. симпоз. по механике эластомеров. – Днепропетровск. – 1994. – Т. II. – С. 3-13.
230. Скорняков Э.С. Теоретические основы расчета и численное исследование напряженно-деформированного состояния крупногабаритных шин / Э.С. Скорняков. – Днепропетровск: Гос. НИИ крупногабаритн. Шин, 1995. – 46 с.
231. Скудра А.М. Прочность армированных пластиков / А.М. Скудра, Ф.Я. Булавс. – М.: Химия, 1982. – 216 с.
232. Сметанкіна Н.В. Моделювання коливань шаруватих циліндричних оболонок складної форми при ударному навантаженні / Н.В. Сметанкіна / Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки, № 1, 2015. – С. 162-170.
233. Соловей М.О. Визначення ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу / М.О. Соловей, О.П. Кривенко, О.О. Міщенко // Опір матеріалів і теорія споруд, № 92. – 2014. – С. 30-48.
234. Соловьев М.Е. Распределение напряжений в эластомерной матрице при выдергивании кордной нити / М.Е. Соловьев // Труды тринадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: НИИШП. – 2002. – Т. 2. – С. 95-100.
235. Структура и свойства композиционных материалов / [К.И. Портной, С.Е. Салибеков, И.Л. Светлов, В.М. Чубаров]. – М.: Машиностроение, 1979. – 255 с.
236. Схема компактного хранения матриц коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений в задачах механики сплошной среды /

- С.И. Гоменюк, В.А. Толок, В.В. Киричевский [и др.] // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2004. – № 5(75). – С. 30-35.
237. Тангорра Г. Упрощенные расчеты многослойных резинокордных пластин как комбинации ортотропных слоев / Г. Тангорра // Труды международной конференции по каучуку и резине. – М: Химия, 1971. – С. 459-467.
238. Терегулов А.Г. К теории многослойных анизотропных оболочек / А.Г. Терегулов // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Казан. ун-т, 1970. – Вып. 6-7. – С. 762-767.
239. Терегулов И.Г. Предельное состояние многослойных композитных оболочек / И.Г. Терегулов, Э.С. Сигбатуллин, О.А. Маркин // Механика композитных материалов. – 1988. – № 4. – С. 715-720.
240. Термопружне деформування композитної пластини / В.В. Киричевський, В.О. Толок, С.І. Гоменюк [и др.] // Системні технології. – 2003. – № 4(27). – С. 109-113.
241. Тетерс Г.А. Оптимизация оболочек из слоистых композитов / Г.А. Тетерс, Р.Б. Рикардс, В.Л. Нарусберг. – Рига: Зинатне, 1978. – 240 с.
242. Тканые конструкционные композиты: Пер. с англ. / Под ред. Т.-В. Чу, Ф. Ко. – М.: Мир, 1991. – 432 с.
243. Трехмерное моделирование напряженно-деформированного состояния пневматических шин / Б.Е. Победря, С.В. Шешенин, С.А. Маргарян [и др.] // Труды девятого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Надежность, стабильность – качество». – М.: НИИШП. – 1998. – Т. 2. – С. 290-294.
244. Ульяшина А.Н. Напряженно-деформированное состояние ортотропных многослойных оболочек / А.Н. Ульяшина // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – № 1. – С. 155-166.
245. Федоров В.А. Симметрия в задаче поперечного сдвига однонаправленных композитов / В.А. Федоров // Актуальные проблемы

- механики деформируемого твердого тела: Труды VII Международной научной конференции. – Т. 1. – Донецк: ДонНУ, 2013. – С. 153-156.
246. Фильштинський Л.А. Моделювання композитного матеріалу з в'язкопружними компонентами / Л.А. Фильштинський, П.І. Загряжська // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2010. – № 2. – С. 141-144.
247. Фомичев Ю.И. Напряженно-деформированное состояние многослойных ортотропных оболочечных конструкций в проблеме расчета резинкордных композитов и шин / Ю.И. Фомичев // Труды восьмого симпозиума «Проблемы шин и резинкордных композитов. Дорога, шина, автомобиль». – М.: НИИШП. – 1997. – Т. 2. – С. 418-423.
248. Формирование и свойства двухфазных композитов «фибрового» типа / С.Б. Беликов, В.Е. Ольшанецкий, В.В. Киричевский [и др.] // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич». – 2006. – № 2. – С. 169-174.
249. Фотинич О.В. К расчету радиальных шин / О.В. Фотинич // Механика пневматических шин как основа рационального конструирования и прогнозирования эксплуатационных свойств. – М.: НИИШП. – 1974. – С. 45-58.
250. Хечумов Р.А. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: учебное пособие для технических вузов / Р.А. Хечумов, Х. Кешлер, В.И. Прокопьев. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов. – 1994. – 353 с.
251. Хорошун Л.П. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов / Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов. – К.: Наук. думка, 1980. – 156 с.
252. Чебанюк А.М. Поле температур в массивной шине опорного катка / А.М. Чебанюк, Э.А. Темило // Труды седьмого симпозиума «Проблемы шин и резинкордных композитов. Задачи на пороге XXI века». – М.: НИИШП, 1996. – С. 241-246.

253. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / Г.П. Черепанов. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1983. – 296 с.
254. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость / К.Ф. Черных. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1988. – 192 с.
255. Численное моделирование разрушения железобетонных конструкций по методу конечных элементов / [В.А. Баженов, А.И. Гуляев, А.Л. Козак и др.]. – К.: Наукова думка, 1996. – 360 с.
256. Численное моделирование термоупругого поведения конструкций из резинокордных композитов / Ю.Г. Козуб, Б.М. Дохняк, Г.А. Козуб [и др.] // Труды семнадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во ООО «Научно-технический центр «НИИШП»», Т.1. – 2006. – С. 129-134.
257. Численный анализ температурных деформаций листового линейноармированного металлокомпозита Ti-Nb / С.Б. Беликов, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк [и др.] // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич». – 2007. – № 2. – С. 167-171.
258. Шины для сельскохозяйственных машин: Справочное пособие / [В.Н. Белковский, Б.А. Индейкин, В.Н. Лаптев и др.]. – М.: Химия, 1980. – 128 с.
259. Шишкин Б.М. Численный алгоритм идентификации характеристик жесткости однонаправленно армированного слоя по заданным модулям упругости и коэффициенту Пуассона пакета композиционных слоев / Б.М. Шишкин, А.П. Левашов // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013). – М.: Изд-во МАИ, 2013. – С. 457-459.
260. Шкурко Г.А. Механічні особливості шин низького тиску / Г.А. Шкурко, В.О. Іщенко // Хім. пром-сть України. – 1995. – № 6. – С. 38-40.

261. Элементы автоматизированного проектирования и расчет напряженного состояния радиальных шин / А.Е. Белкин, А.Ю. Беликов, Н.Л. Нарская [и др.] // Каучук и резина. – 1993. – № 2. – С. 11-14.
262. A homogenization method for pre-impregnated composite materials [Электронный ресурс] / Н. Teodorescu-Draghicescu, S. Vlase, A. Chiru [and otc.] // Proceedings of the World Congress on Engineering, 2009, Vol. II, WCE 2009, July 1-3, 2009, London, U.K. – Режим доступа: http://www.iaeng.org/publication/WCE2009/WCE2009_pp1563-1568.pdf
263. A model for predicting the evolution of damage in viscoelastic particle-reinforced composites / G.D. Seidel, D.H. Allen, K.L.E. Helms [and otc.] // Mechanics of Materials. – V. 37, 2005. – P. 163-178.
264. A transversely isotropic viscoelastic constitutive equation for brainstem undergoing finite deformation / X. Ning, Q. Zhu, Y. Lanir [and otc.] // Journal of Biomechanical Engineering. – 2006. – Vol. 128. – P. 925-933.
265. Aboudi J. Micromechanics of Composite Materials: A Generalized Multiscale Analysis Approach / J. Aboudi, S.M. Arnold, B.A. Bednarczyk. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. – 1006 p.
266. Akasaka T. Structural mechanics of radial tires / T. Akasaka // Rubber Chemistry and Technology. – 1981. – V. 54, N 3. – P. 461-492.
267. An investigation of a spacecraft's propellant tank's shell's bearing strength / V.Z. Gristchak, S.I. Gomeniuk, S.N. Grebeniuk, [and otc.] // Proceedings. The sixth world congress «Aviation in the XXI-st century». – Kyiv, 2014. – Vol. 1. – P. 49-51.
268. Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the variation of shape and size / V.K. Srivastava, U. Gabbert, H. Berger [and otc.] // International Journal of Engineering, Science and Technology. – 2011. – Vol. 3, № 1. – P. 52-68.
269. Ashton J.E. Primer on composite materials: analysis / J.E. Ashton, J.C. Halpin, P.H. Petit. – Stamford: Technomic, 1969. – 124 p.

270. Barbero E.J. Finite Element Analysis of Composite Materials (Composite Materials: Design and Analysis) / E.J. Barbero. – Boca Raton: CRC Press, 2007. – 360 p.
271. Bavan D.S. Finite element analysis of a natural fiber (maize) composite beam [Електронний ресурс] / D.S. Bavan, G.C.M. Kumar // Journal of Engineering. – 2013. – V. 2013. – 7 p. – Режим доступу: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/450381>
272. Bazhenov V.A. Modeling of nonlinear deformation and buckling of elastic inhomogeneous shells / V.A. Bazhenov, N.A. Solovei, O.P. Krivenko // Опір матеріалів і теорія споруд, № 92. – 2014. – С. 121-147.
273. Bogdanovich A. Mechanics of Textile and Laminated Composites: With Applications to Structural Analysis / A. Bogdanovich, C.M. Pastore. – London: Chapman & Hall, 1996. – 570 p.
274. Calculation of destruction mechanics parameters and temperature of dissipative heating by singular three-dimensional finite elements in conditions of nonlinear viscoelastic deformation / V.V. Kirichevsky, V.A. Tolok, S.N. Grebenyuk [and etc.] // Fasta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. – 2001. – Vol. 1., N 8. – P. 947-954.
275. Cisilino A.P. Three-dimensional boundary element assessment of a fibre/matrix interface crack under transverse loading / A.P. Cisilino, J.E. Ortiz // Computers & Structures. – 2005. – V. 83, Issues 10-11. – P. 856-869.
276. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents – I. Elastic and square symmetry / R. Rodríguez-Ramos, F.J. Sabina, R. Guinovart-Díaz [and etc.] // Mechanics of Materials. – 2001. – Vol. 33. – P. 223-235.
277. Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry / R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos [and etc.] // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2001. – Vol. 49. – P. 1445-1462.

278. Concise encyclopedia of composite materials / edited by A. Kelly. – Cambridge: MIT Press, 1989. – 317 p.
279. Dvorak G. Micromechanics of Composite Materials / G. Dvorak. – New York-London: Springer, 2013. – 442 p.
280. Ebrahimi S.H. An extended finite element (XFEM) approach for crack analysis in composite media / S.H. Ebrahimi, S. Mohammadi, A. Asadpoure // International Journal of Civil Engineering. – V. 6, № 3, 2008. – P. 198-207.
281. Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers / J.C. López-Realpozo, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz [and etc.] // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Volume 51, Issue 6. – P. 1253-1262.
282. Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber / S. Grebenyuk, M. Klymenko, O. Titiva [and etc.] // 20th International Scientific Conference Mechanika 2015. – Kaunas: Kaunas University of Tehnology, 2015. – P. 96-100.
283. Effective properties evaluation for smart composite materials / R. Medeiros, M.E. Moreno, F.D. Marques [and etc.] // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. – 2012. – Vol. 34. – P. 362-370.
284. Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites / S. Kari, H. Berger, U. Gabbert [and etc.] // Composites Science and Technology. – 2008. – Vol. 68, Issues 3-4. – P. 684-691.
285. Finite element modelling of composite materials and structures / [F.L. Matthews, G.A.O. Davies, D. Hitchings, C. Soutis]. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2000. – 214 p.
286. Gopalakrishnan S. Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogenous Structures / S. Gopalakrishnan, A. Chakraborty, D.R. Mahapatra. – London: Springer, 2008. – 440 p.

287. Gosz M. Effect of a viscoelastic interface on the transverse behavior of fiber-reinforced composites / M. Gosz, B. Moran, J.D. Achenbach // *International Journal of Solids and Structures*. – 1991. – Vol. 27. – P. 1757-1771.
288. Gough V.E. Stiffness of cord and rubber constructions / V.E. Gough // *Rubber Chemistry and Technology*. – 1968. – V. 41, N 4. – P. 988-1021.
289. Grebenyuk S. Moment Scheme of the Finite Element for Spatially Reinforced Composite Materials / S. Grebenyuk, O. Titiva // *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology* – Vol. 4, Issue 3, 2016. – P. 1629-1635.
290. Grebenyuk S.N. The shear modulus of a composite material with a transversely isotropic matrix and a fibre / S.N. Grebenyuk // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2014. – Vol. 78, N 2. – P. 270-276.
291. Homogenization methods to approximate the effective response of random fibre-reinforced composites / N. Willoughby, W.J. Parnell, A.L. Hazel [and etc.] // *International Journal of Solids and Structures*. – 2012. – Vol. 49. – P. 1421-1433.
292. Hrebenuk S. Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber / S. Hrebenuk, M. Klymenko, K. Omelchenko // *Вісник Запорізького національного університету*. – Запоріжжя: ЗНУ, 2014. – № 1. – С. 14-23.
293. Influence of imperfect elastic contact condition on the effective properties of piezoelectric fibrous composites [Електронний ресурс] / R. Rodríguez-Ramos, J.C. López-Realpozo, R. Guinovart-Díaz [and etc.] // XXII ICTAM, 25-29 August 2008, Adelaide, Australia. – Режим доступа: <https://www.google.com.ua/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCwQFjAA&url=http%3A%2F%2Fextras.springer.com%2F2013%2F978-94-007-5967-1%2FCD%2FSM11%2F11885.pdf.gz&ei=5mvFUqiJE8TqywOyooKICA&usg=AFQjCNHofAkNGXysEBmo5WIdUzFp mP2UBA&sig2=4zSz-0DYZQiqCV4TQGKcvg>

294. Influence of parallelogram cells in the axial behaviour of fibrous composite / R. Guinovart-Díaz, J.C. López-Realpozo, R. Rodríguez-Ramos [and otc.] // International Journal of Engineering Science. – 2011. – Vol. 49, Issue 1. – P. 75-84.
295. Ju J.W. Effective Elastoplastic Damage Mechanics for Fiber-reinforced Composites with Evolutionary Complete Fiber Debonding / J.W. Ju, Y.F. Ko, H.N. Ruan // International Journal of Damage Mechanics. – 2008. – Vol. 17(6). – P. 493-537.
296. Kamiński M. Homogenization of fiber-reinforced composites under the stochastic aging process / M. Kamiński // International Journal for Multiscale Computational Engineering. – 2008. – Vol. 6. – P. 361-370.
297. Klusemann B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks / B. Klusemann, B. Svendsen // Technische mechanic. – 2010. – Vol. 30(4). – P. 374-386.
298. Knight M.G. Micromechanical response of fibre-reinforced materials using the boundary element technique / M.G. Knight, L.C. Wrobel, J.L. Henshall // Composite Structures. – 2003. – V. 62, Issues 3–4. – P. 341-352.
299. Ko Y.-F. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers / Y.-F. Ko, J.W. Ju // Acta Mechanica. – 2012. – Vol. 223. – S. 2437-2458.
300. Kwon Y.W. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures / Y.W. Kwon, D.H. Allen, R. Talreja. – New York: Springer, 2007. – 630 p.
301. MacLaughlin M.M. Review of validation of the discontinuous deformation analysis (DDA) method. / M.M. MacLaughlin, D.M. Doolin // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2006. – Volume 30, Issue 4. – P. 271-305.

302. Maimi´ P. A three-dimensional damage model for transversely isotropic composite laminates / P. Maimi´, J.A. Mayugo, P.P. Camanho // Portugal Journal of Composite Materials. – 2008. – Vol. 42, № 25. – P. 2717-2745.
303. Mechanical properties of hybrid elliptical fiber reinforced lamina with equal fiber volume fractions / V.S. Sai, V.B.K. Murthy, Satyanarayana [and etc.] // International Journal of Current Engineering and Technology. – 2013. – V. 3, № 1. – P. 102-107.
304. Micromechanical analysis of hybrid composites reinforced with unidirectional natural fibres, silica microparticles and maleic anhydride / L.J. Silva, T.H. Panzera, A.L. Christoforo [and etc.] // Materials Research. – 2012. – Vol. 15(6). – P. 1003-1012.
305. Modeling of features is intense - is deformed statuses of designs from composite materials / S.N. Grebenuk, V.V. Kirichevskiy, Val.V. Kirichevskiy [and etc.] // XXXIV Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”. – St. Petersburg, 2006. – P. 40.
306. Moreno M.E. Finite element analysis applied to evaluation of effective material coefficients for piezoelectric fiber composites [Электронный ресурс] / M.E. Moreno, V. Tita, F.D. Marques // in 2009 Brazilian Symposium on Aerospace Eng. & Applications, September 14-16, 2009, S. J. Campos, SP, Brazil. – Режим доступа: <http://www.cta-dlr2009.ita.br/Proceedings/PDF/59053.pdf>
307. Moreno M.E. Influence of boundary conditions on the determination of effective material properties for active fiber composites [Электронный ресурс] / M.E. Moreno, V. Tita, F.D. Marques // in 2010 Pan-American Congress of Applied Mechanics, January 04-08, 2010, Foz do Iguaçu, PR, Brazil. – Режим доступа: http://www.set.eesc.usp.br/pacam2010/pacam_cd/proceedings/sympD-micromechanicalModeling/PAC0207-TitaV.pdf
308. Mukhopadhyay M. Mechanics of Composite Materials and Structures / M. Mukhopadhyay. – Hyderabad: Universities Press, 2005. – 371 p.

309. Muneswara R.M.G. Micromechanical Analysis of FRP Composite with Orthotropic Fibers Subjected To Longitudinal and Transverse Loading / M.G. Muneswara Rao, Sk. Zareena // Journal of Engineering Research and Applications. – 2014. – Vol. 4, Issue 5. –P. 132-137.
310. Ochoa O.O. Finite Element Analysis of Composite Laminates / O.O. Ochoa, J.N. Reddy. – Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1992. – 206 p.
311. Pagano H.J. Exact solutions for composite laminites in cylindrical bending / H.J. Pagano // J. Composite Materials. – 1969. – Vol. 3. – P. 398-411.
312. Pande G.N. Numerical methods in rock mechanics / G.N. Pande, G. Beer, J.R. Williams. – Chichester: Wiley, 1990. – 327 p.
313. Parnell W.J. Dynamic homogenization in periodic fibre reinforced media. Quasi-static limit for SH waves / W.J. Parnell, I.D. Abrahams // Wave Motion. – 2006. – Vol. 43. – P. 474-498.
314. Patel H.P. Nonlinear finite element analysis for composite structures of axisymmetric geometry and loading / H.P. Patel, R.H. Kennedy // Computers and Structures. – 1982. – Vol. 15, № 1. – P. 79-84.
315. Riahi A. Full 3D finite element Cosserat formulation with application in layered structures / A. Riahi, J.H. Curran // Applied Mathematical Modelling. – 2009. – № 33. – P. 3450-3464.
316. Seddak A. Finite element analysis of delamination in a new woven composite / A. Seddak, D. Benzerga, A. Haddi // Композиты и наноструктуры. – 2009. – № 3. – С. 18-24.
317. Sharma R. Finite element analysis for mechanical characterization of 4D inplane carbon/carbon composite with imperfect microstructure / R. Sharma, A.R. Bhagat, P. Mahajan // Latin American Journal of Solids and Structures. – 2014. – V. 11, № 2. – P. 170-184.
318. Simulation of elastic properties of sheet molding compounds / H. Teodorescu-Draghicescu, S. Vlase, A. Chiru [and otc.] // Recent advances in applied mathematics, Proceedings of the American conference on applied mathematics

- (American-Math '10), Harvard University, Cambridge, USA, January 27-29, 2010. – P. 642-646.
319. Soares C.A.M. Mechanics of composite materials and structures / C.A.M. Soares, C.M.M. Soares, M.J.M. Freitas. – Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1999. – 517 p.
320. Sockalingam S. Fiber-matrix interface characterization through the microbond test / S. Sockalingam, G. Nilakantan // International Journal of Aeronautical and Space Sciences. – 2012. – Vol. 13(3). – P. 282-295.
321. Some averaging methods in the micromechanics of composite materials with periodic structure / H. Teodorescu, S. Vlase, I. Candea [and otc.] // 10th WSEAS Int. Conf. on Automatic Control, Modelling and Simulation (ACMOS'08). – Istanbul, 2008. – P. 210-214.
322. Soutis C. Multi-scale modelling of composite material systems: the art of predictive damage modelling / C. Soutis, P.W.R. Beaumont. – Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2005. – 506 p.
323. Suwatnodom P. Three-dimensional Micromechanical Damage Models, Fiber Pullout Models and Fracture Toughness of Discontinuous Steel Fiber Reinforced Cementitious Composites / P. Suwatnodom // A dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in Civil Engineering. – Los Angeles: ProQuest, 2008. – 451 p.
324. Tang T. A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials / T. Tang, W. Yu // Journal of mechanics of materials and structures. – 2007. – Vol. 2, N 9. – P. 1813-1830.
325. Tang T. Variational Asymptotic Micromechanics Modeling of Composite Materials / T. Tang. – Logan: Utah State University, 2008. – 280 p.
326. Tenek L.T. Finite Element Analysis for Composite Structures / L.T. Tenek, J. Argyris. – Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1997. – 339 p.
327. Tucker C.L. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation / C.L. Tucker, E. Liang // Composites Science and Technology. – 1999. – Vol. 59. – P. 655-671.

328. Walter J.D. Approximate expressions for the elastic constants of cord-rubber laminates / J.D. Walter, H.P. Patel // Rubber Chemistry and Technology. – 1979. – V. 52, N 4. – P. 710-724.
329. Williams J.R. Discrete element simulation and the contact problem / J.R. Williams, R. O'Connor // Archives of Computational Methods in Engineering. – 1999. – Volume 6, Issue 4. – P. 279-304.
330. Wilson M.J. Finite element analysis of glass fibre reinforced thermoplastic composites for structural automotive components / M.J. Wilson // Thesis submitted to the university of Nottingham for the degree of doctor of philosophy. – Nottingham, 2003. – 248 p.
331. Würkner M. Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface / M. Würkner, H. Berger, U. Gabbert // International Journal of Engineering Science. – 2013. – Vol. 63. – P. 1-9.
332. Würkner M. On numerical evaluation of effective material properties for composite structures with rhombic fiber arrangements / M. Würkner, H. Berger, U. Gabbert // International Journal of Engineering Science. – 2011. – Vol. 49. – P. 322-332.
333. Yan P. An eigenfunction expansion-variational method for the anti-plane electroelastic behavior of three-phase fiber composites / P. Yan, C.P. Jiang, F. Song // Mechanics of Materials. – 2011. – Vol. 43. – P. 586-597.
334. Yang F. Influence of interphase material property gradients on the micromechanics of fibrous thermosetting-matrix composites [Электронный ресурс] / F. Yang, R. Pitchumani // 14th International Conference on Composite Materials (ICCM 14), San Diego, July 14th -18th 2003. – Режим доступа: http://brabantio.me.vt.edu/sites/aml/index_htm_files/c0302.pdf
335. Yao Y. The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite / Y. Yao, S. Chen, P. Chen // Mechanics of Materials. – 2013. – V. 58. – P. 35-54.

336. Yao Y. The effects of fiber's surface roughness on the mechanical properties of fiber-reinforced polymer composites / Y. Yao, S. Chen // *Journal of Composite Materials*. – 2012. – V. 47(23). – P. 2909-2923.
337. Yu W. A variational asymptotic micromechanics model for predicting thermoelastic properties of heterogeneous materials / W. Yu, T. Tang // *International Journal of Solids and Structures*. – 2007. – Vol. 44. – P. 7510-7525.
338. Yu W. Variational asymptotic method for unit cell homogenization / W. Yu, T. Tang // *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures*. – New York: Springer, 2010. – P. 116-130.
339. Zeng T. Mechanical analysis of 3D braided composites: a finite element model / T. Zeng, L. Wu, L. Guo // *Composite Structures*. – 2004. – Vol. 64. – P. 399-404.
340. Zhang Y. Nonlinear viscoelastic micromechanical analysis of fibre-reinforced polymer laminates with damage evolution / Y. Zhang, Z. Xia, F. Ellyin // *International Journal of Solids and Structures*. – 2005. – V. 42, Issue 2. – P. 591-604.
341. Zhong W. A computer simulation of single fiber pull out process in a composite / W. Zhong, N. Pan // *Journal of Composite Materials*. – 2003. – Vol. 37, № 21. – P. 1951-1969.

ДОДАТОК А
ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ
СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (\text{A.6})$$

Рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + G_r = 0; \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + G_\theta = 0; \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + G_z = 0. \quad (\text{A.9})$$

Закон Гука для ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{rr} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \quad (\text{A.11})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{zz} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\theta z}; \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zr}; \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{r\theta}, \quad (\text{A.15})$$

або

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{rr} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \right); \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{\theta\theta} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \right); \quad (\text{A.17})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{zz} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \right); \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\sigma_{zr}}{G}; \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{G}; \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{G}. \quad (\text{A.21})$$

Зворотний закон Гука:

$$\sigma_{rr} = 2G \left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (\text{A.24})$$

$$\sigma_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}; \quad (\text{A.25})$$

$$\sigma_{zr} = G\gamma_{zr}; \quad (\text{A.26})$$

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}, \quad (\text{A.27})$$

або

$$\sigma_{rr} = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) \right); \quad (\text{A.29})$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \right); \quad (\text{A.30})$$

$$\sigma_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}; \quad (\text{A.31})$$

$$\sigma_{zr} = G\gamma_{zr}; \quad (\text{A.32})$$

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}. \quad (\text{A.33})$$

Рівняння стану трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{zz} + \frac{1}{E_2} \sigma_{rr} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{rr} - (\nu_{21} \sigma_{zz} + \nu_{23} \sigma_{\theta\theta})); \quad (\text{A.34})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{zz} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{rr} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_2} (\sigma_{\theta\theta} - (\nu_{21} \sigma_{zz} + \nu_{23} \sigma_{rr})); \quad (\text{A.35})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_{zz} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{rr} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{zz} - \nu_{12} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})); \quad (\text{A.36})$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} \sigma_{r\theta}; \quad (\text{A.37})$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{zr}; \quad (\text{A.38})$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{z\theta}. \quad (\text{A.39})$$

Зворотний закон Гука для ортотропного матеріалу:

$$\sigma_{zz} = \frac{E_1((1 - \nu_{23}\nu_{32})\varepsilon_{zz} + (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})\varepsilon_{rr} + (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A.40})$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2((\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})\varepsilon_{zz} + (1 - \nu_{13}\nu_{31})\varepsilon_{rr} + (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A.41})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_3((\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})\varepsilon_{zz} + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})\varepsilon_{rr} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}; \quad (\text{A.42})$$

$$\sigma_{zr} = G_{12}\gamma_{zr}; \quad (\text{A.43})$$

$$\sigma_{z\theta} = G_{31}\gamma_{z\theta}; \quad (\text{A.44})$$

$$\sigma_{r\theta} = G_{23}\gamma_{r\theta}. \quad (\text{A.45})$$

Зворотний закон Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\sigma_{zz} = \frac{E_1((1 - \nu_{23}^2)\varepsilon_{zz} + \nu_{21}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{rr} + \nu_{21}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A.46})$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E_2(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{rr} + (\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A.47})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_2(\nu_{12}(1 + \nu_{23})\varepsilon_{zz} + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12})\varepsilon_{rr} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})\varepsilon_{\theta\theta})}{1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{21}\nu_{23}\nu_{12}}; \quad (\text{A.48})$$

$$\sigma_{zr} = G_{12}\gamma_{zr}; \quad (\text{A.49})$$

$$\sigma_{z\theta} = G_{12}\gamma_{z\theta}; \quad (\text{A.50})$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}\gamma_{r\theta}. \quad (\text{A.51})$$

ДОДАТОК Б
КОЕФІЦІЄНТИ РОЗКЛАДАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ

$$\begin{aligned}
e_{11}^{(000)} &= \varepsilon_{11} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(100)} f_{(100)}^{k'}, \\
e_{11}^{(100)} &= \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(100)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(200)} f_{(100)}^{k'}, \\
e_{11}^{(010)} &= \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(100)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(100)}^{k'}, \\
e_{11}^{(001)} &= \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(100)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(100)}^{k'}, \\
e_{11}^{(110)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(100)} f_{(210)}^{k'} + \omega_{k'}^{(200)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(210)} f_{(100)}^{k'}, \\
e_{11}^{(101)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(100)} f_{(201)}^{k'} + \omega_{k'}^{(200)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(201)} f_{(100)}^{k'}, \\
e_{11}^{(011)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(100)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(100)}^{k'}, \\
e_{11}^{(111)} &= \frac{\partial^3 \varepsilon_{11}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(100)} f_{(211)}^{k'} + \omega_{k'}^{(200)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(201)}^{k'} + \\
&+ \omega_{k'}^{(101)} f_{(210)}^{k'} + \omega_{k'}^{(210)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(201)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(211)} f_{(100)}^{k'}, \quad (\text{Б.1}) \\
e_{22}^{(000)} &= \varepsilon_{22} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(010)} f_{(010)}^{k'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{22}^{(100)} &= \left. \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(010)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(010)}^{k'}, \\
e_{22}^{(010)} &= \left. \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(010)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(010)}^{k'}, \\
e_{22}^{(001)} &= \left. \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(010)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(010)}^{k'}, \\
e_{22}^{(110)} &= \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(010)} f_{(120)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(120)} f_{(010)}^{k'}, \\
e_{22}^{(101)} &= \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(010)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(010)}^{k'}, \\
e_{22}^{(011)} &= \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_2 \partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(010)} f_{(021)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(021)} f_{(010)}^{k'}, \\
e_{22}^{(111)} &= \left. \frac{\partial^3 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(010)} f_{(121)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(021)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(111)}^{k'} + \\
&+ \omega_{k'}^{(011)} f_{(120)}^{k'} + \omega_{k'}^{(120)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(021)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(121)} f_{(010)}^{k'}, \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

$$e_{33}^{(000)} = \varepsilon_{33} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(001)} f_{(001)}^{k'},$$

$$e_{33}^{(100)} = \left. \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(001)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(001)}^{k'},$$

$$e_{33}^{(010)} = \left. \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(001)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(001)}^{k'},$$

$$\begin{aligned}
e_{33}^{(001)} &= \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(001)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(001)}^{k'}, \\
e_{33}^{(110)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(001)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(001)}^{k'}, \\
e_{33}^{(101)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(001)} f_{(102)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(102)} f_{(001)}^{k'}, \\
e_{33}^{(011)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \omega_{k'}^{(001)} f_{(012)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(012)} f_{(001)}^{k'}, \\
e_{33}^{(111)} &= \frac{\partial^3 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \omega_{k'}^{(001)} f_{(112)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(012)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(102)}^{k'} + \\
&+ \omega_{k'}^{(002)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(102)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(012)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(112)} f_{(001)}^{k'}, \quad (\text{Б.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{12}^{(000)} &= \varepsilon_{12} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(010)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(010)}^{k'} \right), \\
e_{12}^{(100)} &= \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(010)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(200)} f_{(010)}^{k'} \right), \\
e_{12}^{(010)} &= \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(010)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(010)}^{k'} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{12}^{(001)} &= \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(010)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(010)}^{k'} \right), \\
e_{12}^{(110)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(010)} f_{(210)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(120)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(110)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(200)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(120)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(210)} f_{(010)}^{k'} \right), \\
e_{12}^{(101)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(010)} f_{(201)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(101)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(200)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(201)} f_{(010)}^{k'} \right), \\
e_{12}^{(011)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(010)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(021)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(101)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(110)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(021)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(010)}^{k'} \right), \\
e_{12}^{(111)} &= \frac{\partial^3 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(010)} f_{(211)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(121)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(111)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(200)} f_{(021)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(201)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(210)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(120)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(120)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(210)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(201)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(021)} f_{(200)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(111)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(121)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(211)} f_{(010)}^{k'} \right), \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$e_{13}^{(000)} = \varepsilon_{13} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(001)}^{k'} \right),$$

$$\begin{aligned}
e_{13}^{(100)} &= \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(200)} f_{(001)}^{k'} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{13}^{(010)} &= \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{13}^{(001)} &= \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{13}^{(110)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(210)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(110)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(200)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(210)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{13}^{(101)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(201)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(102)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(101)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(200)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(200)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(102)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(201)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{13}^{(011)} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(012)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(101)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(110)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(012)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{13}^{(111)} &= \frac{\partial^3 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(211)}^{k'} + \omega_{k'}^{(100)} f_{(112)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(111)}^{k'} + \right. \\
&\quad + \omega_{k'}^{(200)} f_{(012)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(201)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(102)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(210)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(111)}^{k'} + \\
&\quad + \omega_{k'}^{(111)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(210)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(102)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(201)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(012)} f_{(200)}^{k'} + \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(111)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(112)} f_{(100)}^{k'} + \omega_{k'}^{(211)} f_{(001)}^{k'} \right), \tag{B.5} \\
e_{23}^{(000)} &= \varepsilon_{23} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(010)}^{k'} + \omega_{k'}^{(010)} f_{(001)}^{k'} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{23}^{(100)} &= \left. \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(010)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(010)}^{k'} + \omega_{k'}^{(110)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{23}^{(010)} &= \left. \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(010)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(010)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{23}^{(001)} &= \left. \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(010)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(010)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{23}^{(110)} &= \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(120)}^{k'} + \omega_{k'}^{(010)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(020)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(110)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(010)}^{k'} + \omega_{k'}^{(120)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{23}^{(101)} &= \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(010)} f_{(102)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(011)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(110)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(110)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(102)} f_{(010)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{23}^{(011)} &= \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(021)}^{k'} + \omega_{k'}^{(010)} f_{(012)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(011)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(020)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(012)} f_{(010)}^{k'} + \omega_{k'}^{(021)} f_{(001)}^{k'} \right), \\
e_{23}^{(111)} &= \left. \frac{\partial^3 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \frac{1}{2} \left(\omega_{k'}^{(001)} f_{(121)}^{k'} + \omega_{k'}^{(010)} f_{(112)}^{k'} + \omega_{k'}^{(101)} f_{(021)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(110)} f_{(012)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(111)}^{k'} + \omega_{k'}^{(020)} f_{(102)}^{k'} + \omega_{k'}^{(002)} f_{(120)}^{k'} + \omega_{k'}^{(011)} f_{(111)}^{k'} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{k'}^{(111)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(120)} f_{(002)}^{k'} + \omega_{k'}^{(102)} f_{(020)}^{k'} + \omega_{k'}^{(111)} f_{(011)}^{k'} + \omega_{k'}^{(012)} f_{(110)}^{k'} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \omega_{k'}^{(021)} f_{(101)}^{k'} + \omega_{k'}^{(112)} f_{(010)}^{k'} + \omega_{k'}^{(121)} f_{(001)}^{k'} \Big). \quad (\text{B.6})$$

ДОДАТОК В
ЗАГАЛЬНИЙ ВИД ПІДМАТРИЦЬ МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ

Вектор моментів деформацій $\{e_{ij}\}$

$$\{e_{ij}\} = \left(\{e_{11}^*\}, \{e_{22}^*\}, \{e_{33}^*\}, \{e_{12}^*\}, \{e_{13}^*\}, \{e_{23}^*\} \right)^T, \quad (\text{B.1})$$

$$\text{де } \{e_{ij}^*\} = \{e_{ij}^{(000)}, e_{ij}^{(100)}, e_{ij}^{(010)}, e_{ij}^{(110)}, e_{ij}^{(001)}, e_{ij}^{(101)}, e_{ij}^{(011)}, e_{ij}^{(111)}\}.$$

Вектор вузлових переміщень $\{u_{k'}^L\}$

$$\{u_{k'}^L\} = \left(\{u_{1'}^*\}, \{u_{2'}^*\}, \{u_{3'}^*\} \right)^T, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{де } \{u_{k'}^*\} = \{u_{k'}^{(1)}, u_{k'}^{(2)}, u_{k'}^{(3)}, u_{k'}^{(4)}, u_{k'}^{(5)}, u_{k'}^{(6)}, u_{k'}^{(7)}, u_{k'}^{(8)}\}.$$

Вектор коефіцієнтів розкладання переміщень $\{\omega_{k'}\}$

$$\{\omega_{k'}\} = \left(\{\omega_{1'}^*\}, \{\omega_{2'}^*\}, \{\omega_{3'}^*\} \right)^T, \quad (\text{B.3})$$

$$\text{де } \{\omega_{k'}^*\} = \{\omega_{k'}^{(000)}, \omega_{k'}^{(100)}, \omega_{k'}^{(010)}, \omega_{k'}^{(110)}, \omega_{k'}^{(001)}, \omega_{k'}^{(101)}, \omega_{k'}^{(011)}, \omega_{k'}^{(111)}\}.$$

Загальний вигляд матриці степеневих функцій $\{\psi_{ij}\}$

$$\{\psi_{ij}\} = \begin{pmatrix} \{\psi_{ij}^*\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\psi_{ij}^*\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{\psi_{ij}^*\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{\psi_{ij}^*\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{\psi_{ij}^*\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{\psi_{ij}^*\} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

де $\{\Psi_{ij}^*\} = \{1, x_1, x_2, x_1x_2, x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$, $\{0\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

Значення коефіцієнтів матриці перетворень [A]

$$[A] = \begin{pmatrix} [A^*] & [0^*] & [0^*] \\ [0^*] & [A^*] & [0^*] \\ [0^*] & [0^*] & [A^*] \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$\text{де } [A^*] = \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[0^*] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний вигляд матриці $[F_{ij}^{k'}]$

$$[F_{ij}^{k'}] = \begin{bmatrix} F_{11}^{1'} & F_{11}^{2'} & F_{11}^{3'} \\ F_{22}^{1'} & F_{22}^{2'} & F_{22}^{3'} \\ F_{33}^{1'} & F_{33}^{2'} & F_{33}^{3'} \\ F_{12}^{1'} & F_{12}^{2'} & F_{12}^{3'} \\ F_{13}^{1'} & F_{13}^{2'} & F_{13}^{3'} \\ F_{23}^{1'} & F_{23}^{2'} & F_{23}^{3'} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

ДОДАТОК Г

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
 Заступник Генерального конструктора
 з наукової та навчальної роботи
 ДП «Конструкторське бюро «Південне»
 О.Е. Кашанов
 2016 р.



Акт

про впровадження результатів наукових досліджень за темою
 «Напружено-деформований стан просторових конструкцій
 із волокнистих композитів»

Комісія в складі: І.Ф. Ларіонов, В.М. Сіренко, Д.В. Клименко склала цей акт про те, що розроблена теорія, підходи та пакет прикладних програм, які представлені у докторській дисертаційній роботі Гребенюка Сергія Миколайовича «Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів», були впроваджені та використані для розрахунків при проектуванні головного обтічника з волокнистих композитів у ДП «Конструкторське бюро «Південне» в процесі виконання наукової роботи по договору № 1/15 від 05.02.2015 року «Разработка программно-методического обеспечения для определения разрушающих нагрузок оболочек трехслойной конструкции из композиционного материала в условиях комплексного эксплуатационного нагружения».

Члени комісії:

Начальник розрахунково-теоретичного комплексу,
кандидат технічних наук



В.М. Сіренко

Головний науковий співробітник,
кандидат технічних наук



І.Ф. Ларіонов

Начальник відділу
міцності і навантажень,
кандидат технічних наук



Д.В. Клименко

Вчений секретар
ДП «КБ «Південне»,
кандидат технічних наук



Л. П. Потапович

ДОДАТОК Д

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи
Запорізького національного університету
професор

Васильчук Г.М.
2016 р.



ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з наукової роботи
ІГТМ НАН України
доктор технічних наук

Круковський О.П.
2016 р.



АКТ

впровадження методики «Розробка підходів та пакета прикладних програм
визначення напружено-деформованого стану гумовокордних віброізоляторів»
ГРЕБЕНЮКА СЕРГІЯ МИКОЛАЙОВИЧА

Комісія у складі:

Голова комісії

Дирда В.І.

– завідувач відділу механіки еластомірних конструкцій
гірничих машин ІГТМ НАН України

і члени комісії

Лисиця М.І.

– старший науковий співробітник ІГТМ НАН України

Новікова А.В.

– молодший науковий співробітник ІГТМ НАН України

склала цей акт про те, що розроблена теорія, підходи та пакет прикладних програм, які представлені у докторській дисертаційній роботі Гребенюка С.М. «Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів», були впроваджені та використані у відділі механіки еластомірних конструкцій гірничих машин Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України при розрахунку та створенні віброізоляторів технологічних машин.

Голова комісії

В.І. Дирда

Члени комісії

М.І. Лисиця

А.В. Новікова

ДОДАТОК Ж

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
 Ректор Запорізького національного
 університету _____, проф. Фролов М.О.
 _____ 2016 р.



АКТ

про впровадження результатів докторської дисертації
 ГРЕБЕНЮКА СЕРГІЯ МИКОЛАЙОВИЧА «Напружено-деформований стан
 просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів»

Комісія в складі: завідувача кафедри математичного моделювання, к.ф.-м.н., доцента Лісняка А.О., заступника декана математичного факультету Спиці О.Г., доцента кафедра математичного моделювання, к.т.н. Чопорова С.В. склала теперішній акт про те, що наукові дослідження, отримані Гребенюком С.М. у докторській дисертації впроваджені в навчальний процес і використовуються при підготовці бакалаврів і магістрів математичного факультету Запорізького національного університету спеціальностей «Прикладна математика» і «Математика» при викладанні спеціального курсу «Метод скінченних елементів» та виконанні кваліфікаційних робіт.

Члени комісії:

Завідувач кафедри
 математичного моделювання ЗНУ,
 к.ф.-м.н., доцент

А.О. Лісняк

Заступник декана математичного
 факультету ЗНУ

О.Г. Спиця

Доцент кафедри
 математичного моделювання ЗНУ, к.т.н.

С.В. Чопоров

