

Національна академія наук України  
Державне космічне агентство України  
ІНСТИТУТ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ

Міністерство освіти і науки України  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**ДОЯР ІВАН ОЛЕКСАНДРОВИЧ**



УДК 539.376

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**УЗАГАЛЬНЕНА СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ РУЙНУВАННЯ  
КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ПОВЗУЧОСТІ  
З УРАХУВАННЯМ ПОШКОДЖУВАНОСТІ ТА ЗМІЦНЕННЯ**

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Запоріжжя – 2018



## АНОТАЦІЯ

Дояр І. О. Узагальнена стохастична модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості з урахуванням пошкоджуваності та зміцнення. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Інститут технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України, Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, 2018.

Дисертаційна робота присвячена розробці методів прогнозування довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості. Прогнозування довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості з метою оцінки їх часу до руйнування має важливе практичне значення. Особливу актуальність ця задача представляє для матеріалів, з яких виготовлені відповідальні конструкції для аерокосмічної, енергетичної та інших галузей промисловості.

У роботі виконано аналітичний огляд феноменологічних та структурних моделей руйнування конструкційних матеріалів при повзучості та методів прогнозування їх довговічності. Розглянута велика кількість рівнянь, які описують повзучість, проте складність прогнозування довговічності конструкційних матеріалів авіакосмічної техніки в останні роки суттєво збільшилася, що вимагає зміни основних принципів прогнозування. Кількість експериментів на повзучість великої тривалості є недостатньою, а отже при прогнозуванні довговічності на великі терміни служби треба проводити ретельний систематичний аналіз експериментальних даних з метою уточнення меж застосування різних методів.

Проаналізовано два відомі ймовірнісні підходи прогнозування часу до руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, причому обидва з них

добре узгоджуються з результатами випробувань на довготривалу міцність зразків з корозійностійкої сталі 12X18H10T. Перший підхід базується на позиціях теорії надійності, у ньому припускається, що при руйнуванні зразка під дією постійного навантаження між величиною деформації повзучості і ймовірністю неруйнування зразка існує функціональна залежність. Відмічено, що цей підхід не враховує залежність невідомих параметрів від температури і розглядає їх усереднені значення замість розподілів, що робить його обмеженим у ймовірнісному плані. Другий з підходів базується на використанні катастрофічного критерію відмови, у ньому для опису випадкових властивостей матеріалу розглядається стохастична модель повзучості, яка описує другу та третю її стадії. Відмічено, що даний підхід не враховує залежність невідомих параметрів від температури та зміцнення матеріалу в процесі повзучості, що робить його застосовним лише для обмеженого класу конструкційних матеріалів.

За результатами аналізу вищеприведених методів показана необхідність розробки стохастичної моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, яка б враховувала імовірнісний характер руйнування, всі три стадії повзучості і дозволяла прогнозувати не «усереднений» час до руйнування, а його імовірнісний розподіл. Розроблена модель повинна також застосовуватися для екстраполяції довготривалої міцності на терміни служби, що на декілька порядків перевищують тривалість експериментів. У роботі на підставі системи кінетичних рівнянь Ю. М. Работнова запропоновано підхід до прогнозування довговічності конструкційних матеріалів при повзучості в умовах одновісного стаціонарного навантаження. Новизна даного підходу полягає в тому, що він допускає імовірнісне трактування кінетичних рівнянь, що описують повзучість та критеріїв руйнування. Запропоновані кінетичні рівняння враховують температурну залежність та стадію зміцнення матеріалу в процесі повзучості.

На підставі даного підходу розроблено стохастичну модель руйнування (СМР) конструкційних матеріалів при повзучості, яка дозволяє за заданими зна-

ченнями напруження, температури та результатами експериментальних досліджень на повзучість матеріалу визначати імовірнісний розподіл його часу до руйнування. Розглянуто параметричний, деформаційний та змішаний критерії руйнування матеріалу внаслідок повзучості. Виконано стохастичну лінеаризацію функції, що характеризує криві повзучості для аналітичної оцінки ймовірності неруйнування зразка за деформаційним критерієм руйнування. Вперше запропоновано змішаний критерій руйнування, який є комбінацією параметричного та деформаційного критеріїв і враховує як вплив параметра пошкоджуваності, так і вплив деформації повзучості на час до руйнування матеріалу.

Розроблено методику ідентифікації сталих повзучості матеріалу, яка базується на статистичній обробці сімейства експериментальних кривих повзучості та використанні апарату теорії ймовірностей та математичної статистики, математичного аналізу, а також методів оптимізації. Для оцінки параметрів, що характеризують стадію зміцнення матеріалу, використано метод Левенберга – Марквардта, який є нелінійним методом найменших квадратів і відрізняється найбільш високою адаптивною швидкістю збіжності у порівнянні з іншими відомими методами пошуку екстремуму функції. Алгоритм розрахунку невідомих параметрів моделі було реалізовано за допомогою прикладних програм на мові програмування Python.

За відомими експериментальними даними на повзучість зразків з корозійностійкої сталі 12X18H10T та зразків з алюмінієвого сплаву РА6 (аналог АМг6) проведено розрахунки основних ймовірнісних характеристик розподілу часу до руйнування. Проведена перевірка на адекватність розробленої СМР процесам руйнування при повзучості і показано, що теоретичні розрахунки добре узгоджуються з експериментальними даними на повзучість для обох матеріалів, як за часом до руйнування, так і за його середньоквадратичним відхиленням. Відмічено, що СМР при використанні змішаного критерію переважає, а при використанні параметричного та деформаційного критеріїв поступається по точності

прогнозування перед відомими параметричними методами, але з ймовірнісної точки зору вона є більш коректною, оскільки враховує випадкову природу довготривалої міцності і дозволяє прогнозувати не «усереднений» час до руйнування, а його ймовірнісний розподіл. Проведено аналіз результатів прогнозування кривих повзучості за допомогою СМР. Виявлено, що при варіюванні експериментальних значень напруження і температури в невеликих діапазонах СМР адекватно описує поведінку кривих повзучості.

Розроблено стохастичний метод базових діаграм (СМБД), який застосовується для екстраполяції довготривалої міцності конструкційних матеріалів на терміни служби, які на декілька порядків перевищують тривалість експериментів. В основі цього методу лежить поняття базових діаграм деформування, які описуються деяким співвідношенням, що пов'язує напруження, час та невідомий параметр, який визначає проходження діаграми через точку, з якої здійснюється екстраполяція. Константи, які використовуються у цьому співвідношенні, як правило, отримані шляхом обробки декількох сотень діаграм довготривалої міцності. Використано припущення про лінійну залежність між розглянутими у методі характеристиками, причому один з коефіцієнтів, що описує цю залежність, вважається випадковою величиною.

За відомими експериментальними даними на довготривалу міцність зразків зі сталі 08X18H10 проведено розрахунки основних ймовірнісних характеристик розподілу напруження при фіксованій довговічності. Показано адекватність запропонованого методу при екстраполяції довготривалої міцності на терміни служби, що на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.

Проаналізовано результати прогнозування довготривалої міцності сталі 08X18H10 за допомогою СМБД та інших відомих детермінованих методів та показано, що в більшості випадків СМБД має переваги по точності прогнозування. Більш того, СМБД враховує випадкову природу довготривалої міцності і розглядає гіпотетичне значення напруження при вибраній довговічності як аб-

солотно неперервну випадкову величину, яка, як відомо, набуває будь-якого наперед заданого значення з нульовою ймовірністю, що робить даний метод більш коректним з ймовірнісної точки зору на відміну від усіх детермінованих методів. Стохастична модель руйнування та стохастичний метод базових діаграм разом об'єднуються в узагальнену стохастичну модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, яка в залежності від тривалості експериментів, наявності відомих експериментальних характеристик та необхідного порядку екстраполяції використовує той чи інший ймовірнісний підхід.

Результати дисертаційної роботи впроваджені в розрахункову практику ДП «КБ «Південне ім. М. Я. Янгеля» (м. Дніпро), де використовуються для оцінки можливості продовження строку експлуатації окремих вузлів та систем виробів, у яких закінчився гарантійний строк експлуатації. Також результати дисертаційної роботи впроваджені в учбовий процес на механіко-математичному факультеті ДНУ ім. О. Гончара.

Ключові слова: руйнування, повзучість, довготривала міцність, пошкоджуваність матеріалу, час до руйнування, метод базових діаграм, ймовірнісний розподіл.

#### Список публікацій здобувача

1. Дояр И. А., Пошивалов В. П. Вариант вероятностной оценки времени до разрушения при ползучести. *Техническая механика*. 2013. № 2. С. 99 – 108.
2. Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности стали 12Х18Н10Т при изотермической ползучести в условиях одноосного растяжения. *Техническая механика*. 2014. № 1. С. 84 – 94.
3. Пошивалов В. П., Дояр И. А. Оценка времени до разрушения конструкционных материалов при ползучести. *Вісник Дніпропетровського університету. Сер. механіка*. 2014. Вип. 18, т. 2. С. 172 – 181.

4. Пошивалов В. П., Дояр И. А. Стохастическая модель разрушения конструкционных материалов при неизотермической ползучести. *Вестник Запорожского национального университета. Математическое моделирование и прикладная механика: сборник научных трудов*. 2015. № 1. С. 154 – 162.

5. Doyar I., Poshyvalov V. Development of a stochastic model of failure of structural materials in creep at hardening stage. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 3, no. 5 (81). P. 25–31.

6. Дояр И. А. Стохастический метод экстраполяции диаграмм длительной прочности конструкционных материалов. *Техническая механика*. 2017. № 2. С. 99 – 108.

7. Дояр И. А., Пошивалов В. П. Вероятностная оценка времени до разрушения конструкционных материалов при ползучести. XV Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»: збірник тез (10 – 12 квітня 2013, м. Дніпропетровськ). Дніпропетровськ, 2013. С. 246.

8. Дояр И. А. Вероятностное оценивание долговечности конструкционных материалов в условиях изотермической ползучести [Электрон. ресурс]. Информационные технологии в управлении сложными системами – 2013. Сборник докладов научной конференции (19 – 20 июня 2013, г. Днепрпетровск). Секция 1. Моделирование процессов и средств управления. Доклад 1.08. Днепрпетровск, 2013. С. 1–3. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

9. Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности конструкционных материалов при испытаниях на длительную прочность. XVI Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»: збірник тез (9 – 11 квітня 2014, м. Дніпропетровськ). Дніпропетровськ, 2014. С. 228.

10. Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности конструкционных материалов при неизотермической ползучести. Всеукраїнська науково – методична конференція «Проблеми математичного моделювання»:



збірник тез (27 – 29 травня 2015, м. Дніпродзержинськ). Дніпродзержинськ, 2015. С. 31 – 32.

11. Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности конструкционных материалов при изотермической ползучести с учетом стадии упрочнения. XVIII Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»: збірник тез (6 – 8 квітня 2016, м. Дніпропетровськ). Дніпропетровськ, 2016. С. 172.

## ABSTRACT

Doyar I. O. Generalized stochastic model of structural materials failure in creep taking into account damageability and strengthening. – Manuscript.

Thesis for the degree of candidate of technical sciences in specialty 01.02.04 – Mechanics of a Deformable Solid. – Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine, Zaporizhya National Technical University, Zaporizhya, 2018.

The thesis is concerned with the development of methods for the prediction of the durability of structural materials in creep. The prediction of the durability of structural materials in creep with the aim to estimate the time to failure is of great practical importance. This problem is particularly topical for materials from which critical constructions for the aerospace industry, the power industry, and other industries are made.

In the thesis, an analytical overview of phenomenological and structural models of structural material failure in creep and durability prediction methods is made. A large number of creep equations are considered; however, the complexity of durability prediction for structural materials of the aerospace industry has considerably increased in recent years, thus calling for new basic methods of prediction. The number

of long-term creep experiments is insufficient, and thus the long-term durability prediction requires a comprehensive systematic analysis of experimental data to ascertain the range of applicability of different methods.

Two known probabilistic approaches to the prediction of the time to failure of structural materials in creep are analyzed, both being in good agreement with the results of long-term strength tests of 12Kh18N10T corrosion-resistant steel. One approach is based on the reliability theory, and it assumes that in the case of a permanent load there exists a functional relationship between the creep deformation value and the nonfailure probability. It is pointed out that this approach ignores the temperature dependence of unknown parameters and considers their averaged values rather than their distributions, which makes it limited from a probabilistic standpoint. The other approach is based on a catastrophe criterion of failure, and the random properties of a material are described using a stochastic creep model that describes the second and the third creep stage. It is pointed out that this approach ignores the temperature dependence of unknown parameters and material strengthening in creep, which makes it applicable only to a limited class of structural materials.

The analysis of the above methods has shown the need for a stochastic model of structural material creep failure that would account for the probabilistic nature of failure and all the three creep stages and would allow one to predict the probability distribution of the time to failure rather than its “averaged” value and to extrapolate the long-term strength to a service life several orders of magnitude longer than the duration of experiments. In the thesis, based on the system of Y. M. Rabotnov’s kinetic equations, an approach to the prediction of the durability of structural materials in creep under uniaxial steady loading is proposed. The novelty of the approach is that it allows a probabilistic interpretation of failure criteria and kinetic equations that describe creep. The proposed kinetic equations account for the temperature dependence and the material strengthening stage of creep.

Based on this approach, a stochastic model of failure of structural materials in creep is developed. The model allows one to determine the probability distribution of the time to failure from given stress and temperature values and the results of creep tests. A parametric, a deformation, and a mixed criterion for creep failure are considered. A method is developed for the identification of creep constants based on statistical treatment of a family of experimental creep curves and on linear and nonlinear regression analysis methods. A stochastic linearization is performed for the function that characterizes creep curves for analytical estimation of the specimen nonfailure probability by the deformation criterion of failure. The mixed criterion of failure, which is a combination of the parametric and the deformation criterion and takes into account both the effect of the damageability parameter and the effect of the creep deformation on the time to failure, has been proposed for the first time.

A technique is developed for the identification of the creep constants based on statistical analysis of a family of experimental creep curves and on the use of the probability theory, mathematical statistics, mathematical analysis, and optimization methods. To estimate the parameters that characterize the material strengthening stage, use is made of the Levenberg–Marquardt method, which is a nonlinear least squares method and features the highest adaptive convergence rate in comparison with other hill-climbing methods. The algorithm for the calculation of the unknown parameters of the model was implemented using application programs written in Python.

The basic probabilistic characteristics of the time-to-failure distribution are calculated from experimental creep data for specimens of 12Kh18N10T corrosion-resistant steel and PA6 (analogue of AMg6) aluminium alloy. The adequacy of the stochastic models developed in the thesis to actual processes of creep failure is verified. It is shown that the theoretical calculations are in good agreement with the experimental creep data for both materials in terms of the time to failure and its standard deviation. It is pointed out that with the use of the mixed criterion the stochastic mod-

el of failure is superior to existing parametric methods in terms of accuracy, while with the use of the parametric and the deformation criterion it is inferior to them; however, from a probabilistic standpoint, the stochastic model of failure is more adequate because it accounts for the probabilistic nature of the long term strength and allows one to predict the probability distribution of the time to failure rather than its “averaged” value. The results of creep curve prediction are analyzed with the use of the stochastic model of failure. It is found that when the experimental values of the stress and temperature are varied over narrow ranges, the stochastic model of failure adequately describes the behavior of creep curves.

A stochastic method of basic diagrams (SMBD) is developed for extrapolating the long-term strength of structural materials to a service life several orders of magnitude longer than the duration of experiments. This method is based on the concept of basic diagrams of deformation, which are described by a relationship that relates the stress, the time, and an unknown parameter that determines the passage of the diagram through the point from which extrapolation is made. The constants that appear in this relationship are obtained, as a rule, by treatment of several hundreds of long-term strength diagrams. Use is made of the assumption of a linear relationship between the characteristics considered in the method, one of the coefficients of this relationship being considered a random quantity.

The probabilistic characteristics of the stress distribution at a fixed durability are calculated from experimental long-term strength data for specimens of 08Kh18N10 steel. The proposed method is shown to be adequate in extrapolating the long-term strength to a service life several orders of magnitude longer than the duration of experiments. The results of long-term strength prediction for 08Kh18N10 steel with the SMBD and existing deterministic methods are analyzed, and it is shown that in most cases the SMBD has advantages in terms of prediction accuracy. Moreover, the SMBD accounts for the random nature of the long-term strength and considers a hypothetical stress value for a chosen durability as an absolutely continuous random

quantity, which is known to take any preset value with a zero probability, and this makes this method more adequate from a probabilistic standpoint as distinct from all deterministic methods. The stochastic model of failure and the stochastic method of basic diagrams are combined into a generalized stochastic model of failure of structural materials in creep, which, depending on the duration of experiments, the availability of known experimental characteristics, and the necessary order of extrapolation, uses one probabilistic approach or another.

The results obtained in the thesis are introduced into the calculation practice of Yuzhnoye State Design Office (Dnipro), where they are used in estimating the possibility of extending the service life of individual units and systems of products whose warranty life has expired. Also the results obtained in the thesis are introduced into the educational process at the Mechanics and Mathematics Faculty of Oles Honchar Dnipro National University.

Keywords: failure, creep, long-term strength, material damage, time to failure, method of basic diagrams, probability distribution.

#### List of publisher publications

1. Doyar I. A., Poshyvalov V. P. The variant of probabilistic estimation of time to failure under creep. *Tekhicheskaya Mekhanika*. 2013. № 2. P. 99–108.
2. Doyar I. A., Poshyvalov V. P. Forecasting the durability of 12X18H10T steel under isothermal creep under uniaxial tension conditions. *Tekhicheskaya Mekhanika*. 2014. № 1. P. 84–94.
3. Poshyvalov V. P., Doyar I. A. Assessment of time - to - failure of structural materials in creep. *Visnyk of Dnipropetrovsk University. Mechanics*. 2014. Vol. 18, Issue 2. P. 172–181.
4. Poshyvalov V. P., Doyar I. A. Stochastic model of destruction of constructional materials at anisothermic creep. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Mathematical modeling and applied mechanics*. 2015. № 1. P. 154–162.

5. Doyar I. A., Poshyvalov V. P. Development of a stochastic model of failure of structural materials in creep at hardening stage. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 3, Issue 5. P. 25–31.
6. Doyar I. A. Stochastic Method for Extrapolation of Diagrams of Long-Term Strength of Structural Materials. *Tekhnicheskaya Mekhanika*. 2017. № 2. P. 99 – 108.
7. Doyar I. A., Poshyvalov V. P. Probabilistic estimation of the time to failure of structural materials under creep. XIX International Youth Scientific and Practical Conference «Human and Space»: Proceedings (April, 10 – 12, 2013, Dnipropetrovs'k). Dnipropetrovs'k, 2013. P. 246.
8. Doyar I. A. Probabilistic estimation of the durability of structural materials under conditions of isothermal creep. III Scientific conference «Information technologies in the management of complex systems»: Proceedings (June, 19 – 20, 2013, Dnipropetrovs'k). Dnipropetrovs'k, 2013. P. 1 – 3.
9. Doyar I. A., Poshyvalov V. P. Forecasting the durability of structural materials in tests for long-term strength. XVI International Youth Scientific and Practical Conference «Human and Space»: Proceedings (April, 9 – 11, 2014, Dnipropetrovs'k). Dnipropetrovs'k, 2014. P. 228.
10. Doyar I. A., Poshyvalov V. P. Forecasting the durability of structural materials for non-isothermal creep. All-Ukrainian scientific and methodical conference «Problems of mathematical modeling»: Proceedings (May, 27 – 29, 2015, Dniprodzerzynsk). Dniprodzerzynsk, 2015. P. 31–32.
11. Doyar I. A., Poshyvalov V. P. Forecasting the longevity of structural materials in isothermal creep taking into account the hardening stage. XVIII International Youth Scientific and Practical Conference «Human and Space»: Proceedings (April, 6 – 8, 2016, Dnipropetrovs'k). Dnipropetrovs'k, 2016. P. 172.

## ЗМІСТ

Скорочення та умовні позначки .....	18
Вступ.....	19
Розділ 1 Сучасний стан прогнозування повзучості конструкційних матеріалів ..	25
1.1 Детерміновані моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості.....	25
1.1.1 Структурні моделі накопичення пошкоджень.....	25
1.1.2 Феноменологічні моделі накопичення пошкоджень .....	27
1.1.3 Параметричні моделі довготривалої міцності .....	31
1.1.4 Температурно-часові моделі прогнозування довготривалої міцності...	33
1.1.5 Моделі довготривалої міцності на основі термодинаміки незворотних процесів.....	35
1.1.6 Моделі довготривалої міцності на основі ентропійного критерію.....	40
1.1.7 Метод базових діаграм .....	44
1.2 Стохастичні моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості.....	46
1.3 Висновки до розділу 1 .....	50
Розділ 2 Основні ймовірнісні моделі довготривалої міцності конструкційних матеріалів.....	53
2.1 Ймовірнісна модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, що базується на позиціях теорії надійності .....	53
2.2 Ймовірнісний підхід оцінки довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості за катастрофічним критерієм відмови.....	59
2.3 Висновки до розділу 2.....	64
Розділ 3 Опис процесів повзучості за допомогою кінетичних теорій.....	66
3.1 Механічні та кінетичні теорії повзучості.....	66
3.2 Основні гіпотези та визначальні рівняння кінетичної теорії Ю. М. Работнова .....	69
3.3 Параметричний критерій руйнування.....	71

	16
3.4 Деформаційний критерій руйнування.....	72
3.5 Змішаний критерій руйнування.....	73
3.6 Висновки до розділу 3.....	74
Розділ 4 Прогнозування довговічності конструкційних матеріалів при ізотермічній повзучості.....	75
4.1 Стохастична модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості без урахування температурної залежності та стадії зміцнення	75
4.2 Реалізація стохастичної моделі на прикладі параметричного критерію руйнування .....	76
4.3 Реалізація стохастичної моделі на прикладі деформаційного критерію руйнування .....	77
4.4 Реалізація моделі на прикладі змішаного критерію руйнування.....	81
4.5 Методика ідентифікації сталих повзучості матеріалу .....	81
4.6 Аналіз результатів .....	84
4.7 Висновки до розділу 4.....	88
Розділ 5 Прогнозування довговічності конструкційних матеріалів при ізотермічній повзучості з урахуванням температурної залежності та стадії зміцнення .....	89
5.1 Стохастична модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості з урахуванням температурної залежності та стадії зміцнення	89
5.2 Реалізація стохастичної моделі на прикладі параметричного критерію руйнування .....	90
5.3 Реалізація стохастичної моделі на прикладі деформаційного критерію руйнування .....	91
5.4 Реалізація стохастичної моделі на прикладі змішаного критерію руйнування .....	95
5.5 Визначення сталих повзучості матеріалу .....	95
5.5.1 Стадія усталеної повзучості.....	97
5.5.2 Стадія прискореної повзучості .....	97
5.5.3 Стадія неусталеної повзучості.....	100



	17
5.6 Аналіз результатів .....	102
5.7 Аналіз ефективності стохастичної моделі руйнування.....	107
5.8 Аналіз результатів прогнозування кривих повзучості за допомогою стохастичної моделі для невеликих варіювань експериментальних значень напруження та температури .....	108
5.9 Висновки до розділу 5.....	114
Розділ 6 Стохастичний метод базових діаграм .....	115
6.1 Екстраполяція довготривалої міцності методом базових діаграм.....	115
6.2 Стохастичний метод базових діаграм .....	116
6.2.1 Методика ідентифікації невідомих параметрів моделі .....	117
6.2.2 Методика прогнозування напруження при заданій довговічності .....	119
6.3 Аналіз результатів .....	119
6.4 Аналіз ефективності стохастичного методу базових діаграм.....	125
6.5 Висновки до розділу 6.....	126
Висновки .....	128
Список використаних джерел.....	130
Додаток А Довідка про практичне використання результатів дисертаційної роботи в ДП «КБ «Південне ім. М. Я. Янгеля» .....	146
Додаток Б Довідка про впровадження результатів дисертаційної роботи в учбовий процес на механіко-математичному факультеті ДНУ ім. О. Гончара .....	148
Додаток В Список публікацій здобувача за темою дисертації.....	150
Додаток Г Відомості про апробацію результатів дисертації .....	152

## СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

BC	– вибіркове середнє
BCB	– вибіркове середньоквадратичне відхилення
ДКР	– деформаційний критерій руйнування
ЗКР	– змішаний критерій руйнування
МС	– математичне сподівання
ПКР	– параметричний критерій руйнування
СВ	– середньоквадратичне відхилення
СМБД	– стохастичний метод базових діаграм
СМР	– стохастична модель руйнування
$\varepsilon$	– деформація повзучості
$\dot{\varepsilon}$	– швидкість деформації повзучості
$\dot{\varepsilon}_0$	– швидкість усталеної повзучості у початковий момент часу
$\varepsilon_{t_p}$	– деформація повзучості у момент руйнування
$\nu$	– швидкість хімічної реакції
$\omega$	– структурний параметр пошкоджуваності
$\sigma$	– напруження
$\tau$	– довговічність
$E$	– модуль пружності матеріалу
$Q$	– енергія активації
$R$	– універсальна газова стала
$T$	– температура
$t_1$	– тривалість першої стадії повзучості
$t_p$	– час до руйнування
08X18H10	– сталь корозійностійка, нержавіюча
12X18H10T	– сталь корозійностійка, нержавіюча
РА6	– алюмінієвий сплав (аналог АМг6)

## ВСТУП

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Прогнозування довговічності елементів конструкцій є одним з найважливіших завдань сучасного машинобудування. В теперішній час для обґрунтованого призначення терміну експлуатації конструкцій, що працюють в екстремальних умовах, особливою важливістю представляє питання розробки методів прогнозування довготривалої міцності різних класів конструкційних матеріалів. При цьому визначальні співвідношення, що застосовуються для описання процесу повзучості матеріалу, повинні бути з одного боку фізично обґрунтованими, а з іншого – досить простими та зручними для їх використання в інженерних розрахунках.

Найбільш природний шлях описання розкиду часу до руйнування конструкційних матеріалів в умовах повзучості полягає в побудові фізично адекватної стохастичної моделі і використанні методів статистичної фізики. Цей шлях пов'язаний з великими труднощами через складність і різномасштабну неоднорідність структурних елементів твердих тіл. Можливості отримання таким чином кількісних характеристик довговічності сучасних технічних матеріалів достатньо обмежені. З прикладної точки зору більш ефективним є застосування статистичних методів, що спираються на експериментальні дані по розкиду часу до руйнування і побудову найпростіших імовірнісних моделей руйнування матеріалів при повзучості.

**Актуальність теми.** Визначення достовірних характеристик довговічності конструкційних матеріалів є одним з найважливіших завдань атомної енергетики, авіаційної, космічної техніки та інших галузей промисловості. При цьому необхідно враховувати, що для зразків, виготовлених з однієї виливки металу, при випробуваннях на повзучість і довготривалу міцність має місце великий розкид по часу до руйнування навіть в ідеальних лабораторних умовах. У зв'язку з

цим виникла необхідність розробки стохастичних моделей повзучості і довготривалої міцності, які з одного боку обґрунтовують імовірнісний характер руйнування, а з іншого – дозволяють з достатньою точністю визначати час до руйнування і його можливий розкид. Ця проблема особливо актуальна для визначення показників довготривалої міцності алюмінієвих сплавів і різних марок сталей, що працюють при постійних навантаженнях і високих температурах, коли проявляється ефект повзучості.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана здобувачем у відділі міцності і надійності механічних систем Інституту технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України (ІТМ НАНУ і ДКАУ) при виконанні науково-дослідних робіт за 2012 – 2015 роки в рамках фундаментальних досліджень за відомчою темою «Підвищення довговічності елементів конструкцій за рахунок збудження самоорганізаційних процесів» (шифр – III-71-11, номер державної реєстрації 0111U001440) та 2016 – 2017 роки за темою «Моделювання напружено-деформованого стану елементів конструкцій неоднорідної структури та прогнозування надійності і довговічності складних технічних систем» (шифр – III-92-16, номер державної реєстрації 0116U004125), де здобувач був виконавцем окремих розділів.

**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є побудова стохастичної моделі руйнування при повзучості конструкційних матеріалів, що працюють при підвищених температурах і навантаженнях, яка дозволяє за заданими значеннями напруження і температури визначати імовірнісний розподіл часу до руйнування матеріалу, а також здійснювати екстраполяцію довготривалої міцності на терміни служби, що перевищують на декілька порядків тривалість експериментів.

Досягнення мети передбачає вирішення наступних задач:

– розробку стохастичної моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, яка б відображала випадкову природу довготривалої міцності та була зручною для проведення розрахунків;

– розробку методики ідентифікації сталих повзучості матеріалу, що базується на обробці сімейства експериментальних кривих повзучості;

– перевірку адекватності побудованої моделі за результатами експериментальних досліджень на повзучість зразків зі сталі 12X18H10T та алюмінієвого сплаву РА6 (аналог АМг6);

– розробку стохастичного методу базових діаграм, що застосовується для екстраполяції довготривалої міцності конструкційних матеріалів;

– перевірку адекватності побудованого методу за результатами експериментальних досліджень на довготривалу міцність зразків зі сталі 08X18H10.

**Об’єктом дослідження** є явище руйнування при повзучості конструкційних матеріалів, що працюють при підвищених температурах і навантаженнях.

**Предметом дослідження** є узагальнена стохастична модель руйнування при повзучості конструкційних матеріалів, що працюють при підвищених температурах і навантаженнях.

**Методи дослідження.** Для вирішення поставлених задач було використано загальнонаукові та спеціальні методи дослідження, зокрема:

– використано методи теорії ймовірностей та математичної статистики для побудови узагальненої стохастичної моделі руйнування та перевірки її адекватності за результатами деяких експериментальних досліджень на повзучість та довготривалу міцність;

– використано методи оптимізації (лінійний та нелінійний методи найменших квадратів) для ідентифікації невідомих параметрів узагальненої стохастичної моделі руйнування та аналітичної оцінки ймовірності неруйнування зразка за деформаційним критерієм руйнування.

Достовірність та обґрунтованість результатів досліджень забезпечується: коректною математичною постановкою задачі, застосуванням сучасних розрахункових засобів. Розрахунки виконувались на базі оптимізаційних методів, апарату теорії ймовірності та математичної статистики. Алгоритм розрахунку невідомих параметрів моделі було реалізовано за допомогою прикладних програм на мові програмування Python. Отримані результати добре узгоджуються з експериментальними даними та можуть бути використані для прогнозування часу до руйнування конструкційних матеріалів, що працюють при підвищених температурах і навантаженнях. Отримані у роботі результати не суперечать даним інших авторів. Інформаційною базою дослідження є наукова українська та зарубіжна література.

#### **Наукова новизна отриманих результатів:**

- розроблено стохастичну модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, яка враховує як зміцнення так і пошкоджуваність матеріалу, що розширює область використання даної моделі у порівнянні з відомими лінійними моделями накопичення пошкоджень;
- вперше розглянуто змішаний критерій руйнування, який є комбінацією параметричного та деформаційного критеріїв і враховує як вплив параметра пошкоджуваності, так і вплив деформації повзучості на час до руйнування матеріалу;
- запропоновано методику ідентифікації сталих повзучості матеріалу, що базується на обробці сімейства експериментальних кривих повзучості;
- вперше розроблено стохастичний метод базових діаграм, що застосовується для екстраполяції довготривалої міцності конструкційних матеріалів на терміни служби, які на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.

**Практичне значення отриманих результатів.** Прогнозування довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості з метою оцінки їх часу до

руйнування має важливе практичне значення. Результати дисертаційної роботи впроваджені в розрахункову практику ДП «КБ «Південне ім. М. Я. Янгеля» (м. Дніпро), де використовуються для оцінки можливості продовження строку експлуатації окремих вузлів та систем виробів, у яких закінчився гарантійний строк експлуатації (довідка про практичне використання результатів від 14.04.2017 р. приведена у додатку А), та в учбовий процес на механіко-математичному факультеті ДНУ ім. О. Гончара (довідка про впровадження результатів від 10.04.2017 р. приведена у додатку Б).

**Особистий внесок здобувача.** Усі основні результати, які виносяться на захист, отримані автором особисто. В роботах, виконаних у співавторстві і опублікованих спільно у наукових виданнях, здобувачу належать (додаток В):

- побудова стохастичної моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, без урахування температурної залежності та стадії зміцнення матеріалу [41]–[42], [101], [В.7]–[В.9];

- побудова стохастичної моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, яка враховує температурну залежність та стадію зміцнення матеріалу [102], [140], [В.10]–[В.11];

- розробка алгоритму ідентифікації невідомих параметрів моделі з урахуванням всіх стадій повзучості [102], [140], [В.10]–[В.11].

Розробка стохастичного методу базових діаграм виконана здобувачем самостійно [40].

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародних молодіжних науково-практичних конференціях «Людина і космос» (Дніпропетровськ, 2013, 2014, 2016), науковій конференції «Інформаційні технології в управлінні складними системами» (Дніпропетровськ, 2013), всеукраїнській науково-методичній конференції «Проблеми математичного моделювання» (Дніпропетровськ, 2015) (додаток Г). У повному обсязі робота обговорювалась на науко-

вих семінарах відділу міцності і надійності механічних систем ІТМ НАНУ і ДКАУ (Дніпро, 2013 – 2016 рр., керівник семінару – член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор В. С. Гудрамович), на семінарах Запорізького національного технічного університету (Запоріжжя, 2016 – 2017 рр., керівник семінару – доктор фізико-математичних наук, професор В. І. Пожуєв), на Вченій раді Інституту технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України (Дніпро, 2017 р., голова Вченої ради – член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор О. В. Пилипенко).

**Публікації.** За матеріалами дисертації опубліковано 11 наукових праць. З них 6 статей у провідних фахових виданнях, одна з яких входить до міжнародної наукометричної бази – SCOPUS та перекладена на англійську мову і опублікована в іноземному рейтинговому журналі “Eastern-European Journal of Enterprise Technologies”, 5 тез доповідей у збірках праць міжнародних конференцій. Список цих праць міститься у додатку В.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел і чотирьох додатків. Повний обсяг дисертації становить 152 сторінки, об’єм основного тексту – 111 сторінок, 18 рисунків, 14 таблиць. Список використаних джерел включає 153 найменування і займає 16 сторінок. Додатки займають 7 сторінок.



# РОЗДІЛ 1

## СУЧАСНИЙ СТАН ПРОГНОЗУВАННЯ ПОВЗУЧОСТІ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

### 1.1 Детерміновані моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості

Однією із головних проблем сучасного машинобудування є задача збільшення строків служби конструкцій в умовах екстремальних режимів роботи. Особливе значення набуває проблема довготривалої міцності металів та сплавів, з яких виготовлені ці конструкції, а також оцінка показників надійності елементів конструкцій в умовах повзучості [126]. Для опису процесів накопичення пошкодженості в матеріалах, що експлуатуються в широких діапазонах напружень і температур, широко використовуються структурні та феноменологічні моделі.

#### 1.1.1 Структурні моделі накопичення пошкоджень

Структурні моделі засновані на математичному описанні фізики процесу накопичення пошкоджень на одному або декількох рівнях структури [50] – [53], [77]. За допомогою них стає можливим обґрунтовано оцінювати ризик настання граничного стану, здійснювати перенесення модельних результатів на великогабаритні конструкції, а також об'єднувати в рамках однієї моделі опис процесів накопичення пошкоджень і руйнування матеріалу. Руйнування тут розглядається як незворотній процес накопичення мікротріщин, що виникають в результаті термофлуктуаційних розривів міжатомних зв'язків в механічно напруженому матеріалі. При будь-якому вигляді навантаження основною характеристикою

вважається довговічність, тобто час з моменту прикладання навантаження до появи макротріщини.

Структурні моделі також дозволяють знайти спосіб переносу експериментальних даних, отриманих для одного з видів навантажування та поведінки матеріалу на інші, а також дозволяють об'єднувати експериментальні дані, що відносяться до різних видів напруженого стану та зовнішнього впливу. Нещодавно розвиток структурних моделей стримувався недостатчею експериментальних даних на мікро і субмікроскопічних рівнях та їх формальною математичною складністю. У зв'язку з розвитком зручних експериментальних засобів для дослідження мікроструктури матеріалів, таких як електронний скануючий мікроскоп, а також статистичних математичних методів і потужних обчислювальних засобів, структурний підхід в новому тисячолітті зазнав новий етап розвитку, пов'язаний як з новими можливостями теоретичних досліджень процесів руйнування, так і з практичним застосуванням структурних моделей.

До класу структурних моделей відносяться імовірнісні та фізичні моделі. Існує велика кількість фізичних моделей, наприклад, побудованих В. С. Зарубіним [46] – [47], [49], К. Н. Русінко [113], С. Б. Батдорфом [17], Д. А. Гохфельдом, О. С. Садаковим [33], Ю. І. Кадашевичем, М. А. Кузьмінім [48], В. В. Новожиловим [55] – [57], [95], Ю. Н. Шевченко, Р. Г. Тереховим [129], Д. Ф. Бесселінгом [136] та іншими авторами із залученням чисто формальних міркувань для подання матеріалу у вигляді конструкцій різного рівня складності. Головне призначення цих моделей полягає у встановленні характеру деформування та обґрунтованому виборі функціональної залежності між макрохарактеристиками деформацій і напружень, що описують на феноменологічному рівні такі процеси.

Цю групу можна розбити на моделі, що базуються на кінетичному підході і моделі, що базуються на континуальній теорії дефектів. В основі моделей кінетичного підходу лежить кінетична залежність, яка отримана Арреніусом при

дослідженні процесу інверсії сахарози, і С. Н. Журковим для опису процесу плавлення. У роботах В. Р. Регеля і А. І. Слуцкера [111] була використана ця залежність для опису процесів тривалого руйнування. У цьому випадку було отримано опис тільки ряду ефектів.

Інша група підходів базується на застосуванні континуальної теорії дефектів. Концептуальні ідеї цього напрямку були закладені в роботі А. Н. Коттрелла [73]. У цій роботі були отримані визначаючі рівняння для матеріалу, що враховують його структуру і наявність її дефектів. Це дозволило зокрема описати вплив ряду параметрів на цей процес. Крім мікро та макрорівнів процесу був введений проміжний мезорівень. У цій моделі хід процесу деформування розбивається на кілька стадій: на першому етапі пластичне деформування відбувається тільки на мікрорівні, на другому етапі розвиваються мезоскопічні процеси, третій етап характеризується макропластичним деформуванням.

Основоположні результати по застосуванню імовірнісних моделей були отримані в роботах В. Вейбула [25], В. В. Болотіна [21], [22], В. П. Когаєва [68] і М. М. Афанасьєва [13]. Ці моделі дозволили досить точно описати вплив різних конструкційних факторів на хід процесу повзучості. В цілому розробка структурних моделей пошкодження і руйнування – одне з найбільш актуальних напрямків механіки матеріалів в ХХІ столітті.

### 1.1.2 Феноменологічні моделі накопичення пошкоджень

Феноменологічні моделі є більш простими з математичної точки зору і на макрорівні досить повно відображають основні закономірності процесу пошкодження матеріалів, хоча і не включають опису його механізмів. У цих моделях використовуються параметри пошкоджуваності, які відображають відносне

напрацювання деталей, а за критерій руйнування приймається миттєве перевищення накопиченою пошкоджуваністю гранично допустимого рівня.

При дослідженні феноменологічних моделей слід розрізнити два підходи. Один з них – кінетичний, в рамках якого застосовуються різні критерії руйнування. На практиці залежно від умов і характеру навантаження використовуються різні уявлення про міцність матеріалу і одиниці виміру його працездатності. Різні види кінетичних рівнянь пошкоджуваності були запропоновані в роботах Л. М. Качанова [60], М. М. Малініна, Ю. М. Работнова [106], С. О. Шестерикова [133], О. В. Сосніна, J. Bult, F. A. Leckie [144], D. R. Nayhurst, S. Murakami, J. Lemaitre [145], Shen Huairong [152] та ін. У багатьох теоретичних дослідженнях параметр пошкоджуваності має феноменологічний характер, зв'язок якого з реальною зміною структури матеріалу не розглядається. Пізніше були опубліковані роботи, в яких цей параметр визначався через зміну структури матеріалу за допомогою фізичних або металографічних методів.

В найпростішому варіанті пошкоджуваність описують деяким скаляром, параметром суцільності  $0 < \psi < 1$  Л. М. Качанова або параметром пошкоджуваності  $0 < \omega < 1$  Ю. М. Работнова. У початковому стані, при відсутності пошкоджуваності, маємо  $\psi = 1$ ,  $\omega = 0$ . З плином часу функція  $\psi$  спадає, а пошкоджуваність  $\omega$  зростає. Можна вважати, що  $\psi = 1 - \omega$ . Величину  $\omega$  можна інтерпретувати як відносну площу поперечного перерізу, яка зайнята тріщинами, мікропорами, мікродефектами. Згідно цього можна зробити висновок, що за класичною теорією Качанова – Работнова поточний стан внутрішньої пошкоджуваності зразка може бути представлений за допомогою єдиного скалярного параметра  $\omega$ , який являє собою монотонно зростаючу функцію часу.

Другий підхід – критеріальний, що передбачає вибір критеріїв опору металів тривалому руйнуванню. Серед таких слід відзначити критерії, які базу-

ються на концепції так званого еквівалентного напруження. При цьому основна увага приділяється встановленню залежності еквівалентного напруження  $\sigma_e$  від головних напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) при різних видах складного напруженого стану та залежності часу руйнування від  $\sigma_e$ .

Однак, використовувані останнім часом феноменологічні моделі повзучості, а також доступні результати розрахунків на довготривалу міцність звичайно обмежені ізотермічними умовами. Розширення наявних моделей до варіантів, що враховують зміну температури, вимагає дорогих експериментів на повзучість і, як наслідок, великої кількості сталих повзучості матеріалу.

Значний внесок в області теорії повзучості внесли професори А. О. Лебедєв, В. С. Гудрамович, В. П. Пошивалов, Д. В. Бреславський, П. О. Стеблянко і В. Г. Карнаухов. У роботах [87], [88] наведено результати експериментальних досліджень закономірностей низькотемпературного деформування деяких легованих конструкційних сталей при плоскому напруженому стані, що імітує умови роботи матеріалу в трубно-оболонкових конструкціях. Експериментальна частина досліджень виконана при навантаженні тонкостінних трубчастих зразків осьовою силою (розтягнення, стиснення) і внутрішнім тиском, в тому числі при низьких температурах. Висвітлено нові методичні підходи до створення випробувальних засобів, описані конструкції установок для дослідження різних аспектів тріщиностійкості конструкційних матеріалів в умовах двовісного розтягування з контрольованим співвідношенням головних напружень при статичному, циклічному і імпульсному навантаженні. У роботах [34] – [38] основну увагу приділено питанням дослідження міцності, розробки і узагальненню ресурсозберігаючих технологій виготовлення тонкостінних конструкцій антено-хвильової техніки, концентраторів сонячної енергії і розробки ефективних обчислювальних схем скінчено-елементного аналізу тіл і тонкостінних конструкцій з локальними концентраторами напружень: вирізами, пора-

ми, тріщинами, включеннями при пружно-пластичному деформуванні матеріалу. У роботах [97], [99], [100] розглянуті питання підвищення довговічності конструкційних матеріалів за рахунок проведення енергетичної обробки в умовах повзучості, технічної діагностики і прогнозування ресурсу технічних систем, надійності ергатичних систем. Показано, що введення проміжної енергетичної обробки сплаву АМгбМ при випробуваннях на повзучість підвищує його характеристики короткочасної і довготривалої міцності. Розроблено методи прогнозування і оцінки можливості продовження безпечної експлуатації об'єктів служби, що вичерпали нормативний строк, на основі експертного оцінювання та технічної діагностики. Запропоновано підхід для визначення комплексних показників надійності ергатичних систем, що базується на моделі надійності у вигляді послідовної відновлюваної системи. Отримані співвідношення дозволяють розраховувати показники структурної і функціональної надійності ергатичних систем при апріорній невизначеності параметрів надійності. В роботі [23] описаний метод розрахунку повзучості та пошкоджуваності елементів конструкцій при циклічному навантаженні. Розглянуто матеріали, які виявляють анізотропію властивостей повзучості і пошкоджуваності. Наведено результати розрахунку деформування і руйнування елементів конструкцій при плоскому напруженому стані. В роботі [24] представлений метод вирішення завдань високотемпературної циклічної повзучості і пошкоджуваності елементів конструкцій. Відзначено, що процедури асимптотичних розкладів і осереднення як на періоді вимушених коливань тіла, так і на періоді повільно змінюючих навантажень використані для системи рівнянь, що описують процеси повзучості і пошкоджуваності в тонкостінних елементах конструкцій. У роботах [122], [123] розглядаються питання визначення поведінки нестационарного термонапруженого стану циліндричної труби, яка росте за певним законом. Характерною особливістю циліндричних тіл при таких термомеханічних процесах є перерозподіл температури, напруг і деформацій, обумовлене безперервним або дис-

кретним додаванням матеріалу. Для визначення термонапруженого стану використовується один з найбільш ефективних прийомів при чисельному розв'язанні просторових нестационарних задач теорії термопружнопластичності – метод покомпонентного розщеплення у поєднанні з представленням невідомих величин у вигляді сплайн-функцій. В роботі [58] розглянуто проблему демпфірування коливань тонкостінних елементів конструкцій, яка є актуальною для багатьох галузей сучасної техніки: авіа-, судно-, турбобудування і ін. З цією метою широкого поширення набуло пасивне демпфірування коливань, при яких амплітуда коливань зменшується за рахунок включення в конструкцію компонент з високими гістерезисними втратами, наприклад, в'язкопружних шарів.

### 1.1.3 Параметричні моделі довготривалої міцності

Параметричні моделі довготривалої міцності базуються на використанні теорії швидкостей хімічних реакцій [146], [148]. Найбільш популярні параметричні моделі описуються залежностями Менсона – Хеферда, Ларсона – Міллера та Орра – Шербі – Дорна. Ці моделі базуються на наступному рівнянні (1.1), яке було запропоноване Арреніусом:

$$v = A \exp(-Q/(RT)) \quad (1.1)$$

де  $T$  – температура;

$v$  – швидкість хімічної реакції;

$Q$  – енергія активації;

$R$  – універсальна газова стала.

Параметр Менсона – Хеферда визначається співвідношенням (1.2):

$$\eta = \frac{\lg \tau - \lg t_a}{T - T_a}, \quad (1.2)$$

де  $\tau$  – довговічність;

$T$  – температура;

$T_a, \lg t_a$  – константи.

Для параметру Ларсона – Міллера має місце рівність (1.3):

$$\eta = T(C + \lg \tau) = -\frac{Q}{2,3R} \quad (1.3)$$

де  $\tau$  – довговічність;

$C$  – константа.

Для параметру Орра – Шербі – Дорна має місце наступне співвідношення (1.4):

$$\eta = \lg \tau - D/T, \quad (1.4)$$

де  $T$  – температура;

$D$  – константа.

Приведені співвідношення для параметрів Ларсона – Міллера та Орра – Шербі – Дорна отримані на основі одного і того ж рівняння і є фізично обґрунтованими, тому важко розраховувати на перевагу використання одного з цих параметрів. Що стосується параметру Менсона – Хеферда, то він вважається найбільш вдалим з приведених вище методів і відрізняється тим, що точка полюса  $C$  у ньому є випадковою.

Основною перевагою параметричних методів можна вважати простоту використання і можливості вивчення за більш короткий строк закономірностей деформування матеріалів при більш високих температурах випробувань і екстраполяцію їх на менші температури і більші тривалості. Також приведемо безпосередньо залежності, які пов'язують діючі напруження  $\sigma$ , температуру  $T$  і довговічність  $\tau$  для моделей Ларсона – Міллера (1.5) та Орра – Шербі – Дорна (1.6) [142], [151]:



$$\lg(\tau) = A_0 + A_1 T^{-1} + A_2 T^{-1} \lg(\sigma) + A_3 T^{-1} \lg^2(\sigma) \quad (1.5)$$

$$\lg(\tau) = A_0 + A_1 \lg(\sigma) + A_2 \lg^2(\sigma) + A_3 T^{-1} \quad (1.6)$$

де  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) є константами матеріалу.

Для їхнього знаходження, як правило, користуються експериментальними даними та багатофакторною лінійною регресією [124]. Аналізуючи все вищезазначене, можна виділити основні переваги параметричних моделей довготривалої міцності:

- простота їх використання та можливості отримання за більш короткий час повного циклу закономірностей деформування матеріалів;
- можливість здійснити апроксимацію діаграм довготривалої міцності в деяких діапазонах напружень і температур.

Серед недоліків параметричних моделей треба відзначити те, що вони:

- не враховують кінетику структурного стану матеріалу при тривалій дії навантаження;
- не дають можливість зробити екстраполяцію діаграм довготривалої міцності на терміни служби, які на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.

#### 1.1.4 Температурно-часові моделі прогнозування довготривалої міцності

При тривалих високотемпературних випробуваннях одночасно мають місце різні механізми руйнування:

- 1) в'язке руйнування, яке відбувається шляхом зрізу під дією дотичних напружень. Йому завжди передують значна пластична деформація;
- 2) крихке руйнування, яке відбувається за рахунок відриву одних верств атомів від інших під дією нормальних розтягуючих напружень;

3) змішане руйнування, яке характеризується переломом кривої довготривалої міцності.

Як правило температурно-часові моделі прогнозування довготривалої міцності описуються залежностями температурно-силового прогнозування. Найбільш відомі з цих залежностей були запропоновані С. О. Шестериковим, А. Л. Аршакуні та В. І. Ковпаком [1], [2], [62] – [67], [132] – [134].

С. О. Шестериков [132] запропонував описувати діаграми довготривалої міцності за допомогою співвідношення Дорна (1.7):

$$\lg \tau = A + D/T - n \cdot \lg \sigma \quad (1.7)$$

де  $\sigma$  – напруження;

$T$  – температура;

$\tau$  – довговічність;

$A, D, n$  – сталі повзучості матеріалу.

Для прогнозування часу до руйнування за допомогою даної залежності необхідно підібрати три невідомі сталі повзучості матеріалу. Згідно методу В. І. Ковпака діаграми довготривалої міцності при різних температурах розглядаються у вигляді ламаних кривих кути нахилу яких визначають границі переходу різних механізмів деформування матеріалу. І. І. Трунін для того, щоб описати процес тривалого руйнування матеріалів, запропонував використовувати наступне співвідношення (1.8):

$$\tau = A(T^l / \sigma^k) \cdot \exp[(U_0 - c\sigma) / RT] \quad (1.8)$$

де  $T$  – температура;

$\sigma$  – напруження;

$A, c, l, k$  – сталі повзучості матеріалу;

$U_0$  – енергія активації процесу руйнування;

$R$  – універсальна газова стала.

Підсумовуючи все вищесказане, можна виділити основну перевагу температурно-часових моделей прогнозування довготривалої міцності – можливість значно зменшити тривалість експериментальних досліджень, враховуючи дані отримані при більш високих температурах.

Серед недоліків вищеописаних моделей можна відмітити:

- складність у визначенні меж переходу різних механізмів руйнування;
- відсутність наявності фізичних та структурних характеристик матеріалів у моделях;
- неможливість зробити екстраполяцію діаграм довготривалої міцності на терміни служби, які на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.

#### 1.1.5 Моделі довготривалої міцності на основі термодинаміки незворотних процесів

Процес деформації матеріалів є типовим термодинамічним процесом. У механіці рідини і газу вже давно розгляд практично всіх питань ведеться на термодинамічному рівні. У механіці твердого тіла, що деформується, зазвичай більшість задач розглядається на механічному рівні і тільки в деяких випадках застосовується термодинаміка.

Ситуацію що склалася зазвичай виправдовують твердженням, що при незначних теплових ефектах розглядання процесу деформації на механічному рівні забезпечує необхідну точність. Незважаючи на це, в останні роки при розробці рівнянь, що описують процеси деформації і руйнування матеріалів внаслідок повзучості, знаходять все більше застосування термодинамічні методи. Вони накладають суттєві обмеження на характер визначальних рівнянь термоповзучості, при яких виявляється можливим описання релаксаційних процесів.

Розглянемо побудову моделей довготривалої міцності конструкційних матеріалів на основі термодинаміки незворотних процесів. При підвищенні температури, як правило, швидкість повзучості збільшується, і та ж сама деформація досягається при тому ж напруженні за менший час. Для детального опису впливу температури на криву повзучості потрібно було б вивчити залежність від температури всіх параметрів, що входять в будь-яке з рівнянь, яке описує хід кривої повзучості. На жаль, таких рівнянь занадто багато, а експериментальні дані мають суттєвий розкид.

У всіх теоріях повзучості передбачається, що пластична деформація пов'язана з рухом деяких структурних елементів, викликаних температурними флуктуаціями. Кожен з цих елементів в даний момент часу має енергію, причому розподіл енергій між окремими елементами підпорядкований закону Максвелла. Нехай  $PdP$  це ймовірність того, що енергія певного елемента в певний момент часу знаходиться між  $U$  і  $U + dU$ .

По закону Максвелла має місце рівність (1.9):

$$P = \frac{1}{RT} \exp\left(-\frac{U}{RT}\right), \quad (1.9)$$

де  $R$  – газова стала.

Множник  $\frac{1}{RT}$  перед експонентою визначається з умови (1.10):

$$\int_0^{\infty} PdU = 1. \quad (1.10)$$

Якщо енергія деякого елемента перевищить величину  $U_0$ , звану енергією активації, то цей елемент переміститься, внаслідок чого з'явиться деяка деформація. Імовірність активації елемента або відносна кількість активованих елементів визначається співвідношення (1.11):

$$\int_{U_0}^{\infty} PdU = \exp\left(-\frac{U_0}{RT}\right). \quad (1.11)$$

Припустимо, що швидкість деформації повзучості пропорційна кількості активованих структурних елементів. Таким чином, при даному напруженні і даному структурному стані матеріалу маємо співвідношення (1.12):

$$\dot{\varepsilon} = \exp\left(-\frac{U_0}{RT}\right)f(\sigma), \quad (1.12)$$

де  $\dot{\varepsilon}$  – швидкість деформації повзучості;

$f(\sigma)$  – деяка функція напруження.

У цих припущеннях залишено в стороні питання, про які саме структурні елементи йде мова. Різні фізичні теорії повзучості конструюють різним чином ці структурні елементи – гіпотетично або реально спостережувані. Відповідно до цього можна говорити про різні механізми повзучості. Величина енергії активації  $U_0$  може бути визначена експериментально. Якщо для одного і того ж матеріалу енергія активації змінюється в залежності від умов (наприклад, в різних діапазонах зміни напруження і температури), то робиться заключення про те, що переважає той чи інший механізм повзучості.

Якщо матеріал структурно-стійкий, це означає, що зміни в ньому, що призводять до зменшення швидкості повзучості (перша ділянка кривої повзучості), викликані накопиченням деформації, але не структурними перетвореннями, що відбуваються з плином часу незалежно від прикладеного напруження [70], [116]. Припустимо, що температура змінюється в залежності від часу згідно наступного закону (1.13):

$$\vartheta = \int_0^t \exp\left(-\frac{U_0}{RT}\right) dt. \quad (1.13)$$

Величина  $\mathcal{G}$  може розглядатися як наведений час. Зі співвідношення (див. (1.12)) випливає, що швидкість деформації повзучості по відношенню до цього наведеного часу  $\frac{d\varepsilon}{d\mathcal{G}}$  залежить тільки від напруження і структурного стану, обумовленого величиною накопиченої деформації. Тому крива повзучості при постійному напруженні, але змінній температурі може бути задана залежністю (1.14):

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{G}). \quad (1.14)$$

Таким чином, якщо відома крива повзучості при постійній температурі, то криву повзучості при змінній температурі можна отримати в результаті відповідної зміни масштабу часу. Дорном були проведені металографічне і рентгенографічне дослідження зразків, підданих повзучості, а також випробування цих зразків на розтяг. Слід зауважити, що дослідження Дорна і обробка їм даних інших дослідників відносилися до чистих металів. Для сплавів, особливо жароміцних, температурні залежності можуть бути більш складними.

Поряд з найпростішою формою температурної залежності типу (див. (1.12)) інші фізичні теорії призводять до дещо інших формул. Так, ряд авторів, відштовхуючись від різних гіпотетичних схем, отримують залежності швидкості повзучості від напруження і температури наступного вигляду (1.15):

$$\dot{\varepsilon} = \exp\left(-\frac{U_0 - \gamma\sigma}{RT}\right), \quad (1.15)$$

де  $U_0$  – деяка постійна енергія активації;

$\gamma$  – структурно-чутливий коефіцієнт.

Різниця у порівнянні з (див. (1.10)) полягає в тому, що енергія активації процесу залежить від напруження. Температурна залежність типу (див. (1.13)) проводилася на широкому колі матеріалів Журковим зі співробітниками [43] –

[44]. Формула вигляду (див. (1.13)) дає хороші результати в області помірних температур, при більш високих температурах слід користуватися залежністю (див. (1.10)).

Для області низьких температур Набарро [149] була запропонована модель, для якої швидкість повзучості пропорційна  $T^{2/3}$ . Припускалось, що кристалічна ґратка містить велику кількість рівномірно розсіяних виділень, на яких затримуються дислокації. Внаслідок термічних флуктуацій окремі ділянки ліній дислокацій між перешкодами перекидаються в стан стійкої рівноваги. Процес повзучості виявляється різко загасаючим, він вичерпується, коли всі петлі з низькою енергією активації переходять у стійкі положення.

З іншого боку, при дуже високих температурах, близьких до температури плавлення, принципово можливий зовсім інший механізм повзучості, чисто дифузійного характеру. Спрямований потік атомів призводить до формування нових атомних площин, а отже, до видимої деформації кристала. На цій основі будується теорія дифузійно-в'язкої течії полікристалічних тіл, залежність швидкості від напруження і температури виявляється при цьому за допомогою наступних співвідношень (1.16), (1.17):

$$\dot{\varepsilon} = \sigma \frac{D}{T}, \quad (1.16)$$

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{U_0}{RT}\right), \quad (1.17)$$

де  $D$  – коефіцієнт самодифузії, який в свою чергу залежить від температури.

Необхідно пам'ятати, що кожна з наведених залежностей відноситься до того чи іншого окремого механізму, який передбачається здійсненим в ідеальному об'єкті. Для технічних сплавів, як правило, спостерігаються систематичні відхилення. У той же час прямі експериментальні дані не завжди допускають однозначне тлумачення. Слід зауважити, що фізичні теорії, покладені в основу

виведення наведених формул, строго кажучи, відносяться лише до фази усталеної повзучості, на першій ділянці кривої повзучості положення ще більш ускладнюється.

При визначенні часу до руйнування, розглядався процес накопичення пошкоджень, що розвиваються в тілі на фоні деформації повзучості. Обидва ці процеси (накопичення пошкоджень і повзучість) є типовими термодинамічно незворотними процесами. Внаслідок цього передбачається природним при дослідженні короткочасної і особливо довготривалої міцності скористатися поняттями і методами термодинаміки незворотних процесів.

#### 1.1.6 Моделі довготривалої міцності на основі ентропійного критерію

Слід зауважити, що термодинаміка деформацій лежить в основі так званого ентропійного критерію довготривалої міцності, який в останні роки отримує все більш широке поширення. Ентропійний критерій довготривалої міцності матеріалів було сформульовано О. І. Чудновським і Д. А. Кіялбаєвим [61]. Він володіє рядом переваг у порівнянні з іншими критеріями. Зокрема, в рамках ентропійного критерію підсумовування «пошкоджень» відбувається єдиним і природним чином, навантаження може носити будь-який характер і, нарешті, в ряді випадків є особливо важливим те, що використання цього критерію відкриває принципову можливість врахування різних фізико-хімічних процесів (наприклад, дифузії) на довготривалу міцність матеріалів. При певних умовах з енергетичного критерію можуть бути отримані інтеграли Бейлі та параметрична залежність типу залежності Ларсона – Міллера, формула С. Н. Журкова і т. п.

Ентропійний критерій довготривалої міцності формулюється наступним чином. Розрив елементарного об'єму матеріалу відбувається в той момент часу, до якого в ньому накопичується деяке граничне значення щільності ентропії. В



дійсності приходиться мати справу з матеріалами, які до моменту їх силового або теплового навантаження знаходяться при деякій температурі. При цьому в одиниці маси розглянутого матеріалу вже містяться деяка початкова ентропія. Відмітимо, що ця початкова ентропія залежить не тільки від температури, але і від накопичених до моменту початку навантаження всередині матеріалу дефектів структури (дислокацій і т. п.). Тоді, у відповідності з наведеним вище формулюванням критерію, накопичена у процесі силового та теплового навантаження всередині одиниці об'єму матеріалу ентропія у момент руйнування, повинна задовольняти співвідношенню (1.18):

$$S_0 + \Delta S = S_*. \quad (1.18)$$

Приріст щільності ентропії у процесі деформації матеріалу обумовлюється дифузійними процесами, незворотніми процесами утворення мікрodefektів і ін.

У випадку чисто в'язкого руйнування, коли в матеріалі реалізовано певний напружено-деформований стан, існує деяке поле температур і процес є адіабатичним, швидкість утворення ентропії у фіксованій одиниці об'єму обумовлюється лише дисипацією енергії в процесі деформації. Тоді граничне співвідношення (див. (1.11)) прийме вигляд (1.19):

$$S_0 + \int_0^{t_*} \frac{W(t)}{T(t)} dt = S_*, \quad (1.19)$$

де  $W(t)$  - швидкість дисипації енергії або функція розсіювання;

$t_*$  - час до руйнування.

Таким чином, використання ентропійного критерію довготривалої міцності при в'язкому руйнуванні передбачає знання функції розсіювання, що залежить від прийнятої реологічної моделі матеріалу. Розглянемо задачу про визначення часу до руйнування стрижня, розтягнутого силою  $P = const$ , при скінченних деформаціях за допомогою ентропійного критерію. Будемо припускати, що

матеріал стрижня не змінюється, а деформації повзучості матеріалу описуються рівнянням теорії течії. Крім того, припустимо, що миттєвою деформацією можна запобігти і що реалізується процес усталеної повзучості. Позначимо початкові довжину і площу поперечного перерізу стрижня через  $x_0$  і  $F_0$ , а ці ж величини у довільний момент часу через  $x$  і  $F$  відповідно.

За міру скінченної деформації приймемо наступний вираз (1.20):

$$\varepsilon = \ln \frac{x}{x_0}. \quad (1.20)$$

З умови нестискання (1.21) – (1.22) маємо:

$$xF = x_0 F_0, \quad (1.21)$$

$$F = F_0 \exp(\varepsilon). \quad (1.22)$$

Істинне напруження  $\sigma$  пов'язане з номінальним напруженням  $\sigma_0$ , віднесеним до початкової площі поперечного перерізу, визначиться наступним співвідношенням (1.23):

$$\sigma = \sigma_0 \exp(\varepsilon). \quad (1.23)$$

Приймаємо закон повзучості у вигляді (1.24):

$$\dot{\varepsilon} = A \sigma^n. \quad (1.24)$$

Підставляючи (див. (1.23)) у (див. (1.24)), маємо співвідношення (1.25):

$$\dot{\varepsilon} = A \sigma_0^n \exp(\varepsilon \cdot n). \quad (1.25)$$

Припустимо, що реалізується адіабатичний процес деформування, протягом якого температура стрижня залишається постійною. Тоді відповідно до формули (див. (1.19)) граничне співвідношення ентропійного критерію запишеться у вигляді (1.26):

$$\frac{\sigma_0}{T} \int_0^{t_*} \varepsilon \exp(\varepsilon) dt = \Delta S_*. \quad (1.26)$$

Інтегруючи співвідношення (див. (1.24)), маємо вираз (1.27):

$$1 + \exp(\varepsilon_*) = \frac{T\Delta S_*}{\sigma_0}. \quad (1.27)$$

Інтегруючи вираз (див. (1.23)), маємо рівняння кривої повзучості у вигляді (1.28):

$$1 - \exp(-n\varepsilon_*) = An \sigma_0^n t_*, \quad (1.28)$$

де  $\varepsilon_*$  – деформація повзучості у момент руйнування;

$t_*$  – час до руйнування.

Визначаючи з (див. (1.28)) деформацію повзучості у момент руйнування і підставляючи в (див. (1.27)), маємо час в'язкого руйнування за ентропійним критерієм у наступному вигляді (1.29):

$$\frac{t_*}{t_1} = 1 - \left[ \frac{T\Delta S_*}{\sigma_0} - 1 \right]^{-n}, \quad (1.29)$$

де  $t_1 = 1/(An \sigma_0^n)$ .

Ентропійна умова руйнування запишеться у вигляді (1.30):

$$\frac{T\Delta S_*}{\sigma_0} \leq 1. \quad (1.30)$$

Коли має місце наступний вираз (1.31):

$$\Delta S_* = \frac{\sigma_0}{T}, \quad (1.31)$$

то маємо розв'язок Хофа.

Розглянемо застосування ентропійного критерію у випадку змішаного руйнування. У цьому випадку рівняння пошкодженості запишеться у вигляді (1.32):

$$\dot{\omega} = B \left( \frac{\sigma_0}{1 - \omega} \right)^k \exp(k\varepsilon). \quad (1.32)$$

Інтегруючи (див. (1.32)) з урахуванням (див. (1.25)), маємо вираз (1.33):

$$\varepsilon_* = -\frac{1}{n-k} \ln \left[ 1 - \frac{n-k}{n} \frac{t_2}{t_1} \right]. \quad (1.33)$$

Підставляючи (див. (1.33)) в (див. (1.27)), отримуємо ентропійний критерій змішаного руйнування у вигляді (1.34):

$$1 + \left[ 1 - \frac{n-k}{n} \frac{t_2}{t_1} \right]^{-1/(n-k)} = \frac{T\Delta S_*}{\sigma_0^n}, \quad (1.34)$$

де  $t_2 = 1[B(k+1)\sigma_0^n]$  – час крихкого руйнування.

### 1.1.7 Метод базових діаграм

Для методу базових діаграм (МБД) характерно поняття базової діаграми деформування, яка аналітично задається деяким співвідношенням, що описує залежність напруження, часу та деякого параметру. Даний параметр залежить від координат точки, з якої здійснюється прогнозування [74], [75], [86].

Співвідношення для базових діаграм вибирається на основі обробки великої кількості діаграм довготривалої міцності. Припустимо, що із експериментів на довготривалу міцність відомі величини діючих напружень  $\sigma_i$  та довговічностей  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) при деяких фіксованих температурах  $T_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Відрізки діаграми довготривалої міцності  $L_1L_2, L_2L_3, \dots, L_{n-1}L_n$  будуються на основі відомих експериментальних даних, а відрізок  $L_nL_{n+1}$  розраховується на основі алгоритму метода базових діаграм, причому з точки  $L_n = (\sigma_n, t_n)$  здійснюється прогнозування, а  $L_{n+1} = (\sigma_{n+1}, t_{n+1})$  – точка, для якої екстраполюється величина напруження при заданій довговічності  $t_{n+1}$  [86]. Для вибраних ділянок  $L_iL_j$  діаграми довготривалої міцності за експериментальними даними розраховуються характеристики  $\beta_{ij}$  за допомогою наступного співвідношення (1.35):

$$\beta_{ij} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{\sigma_i - \tilde{\sigma}_j}, \quad (1.35)$$

де  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $j = 2, 3, \dots, n$ ;  $i \neq j$ .

Далі в якості параметру  $\beta$  для деякого діапазону напружень і температур вибирають усереднене значення у вигляді (1.36):

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \beta_{ij}. \quad (1.36)$$

Слід відмітити, що чим точніше підібраний параметр  $\beta$ , тим менша похибка екстраполяції. Таким чином, однією з головних проблем методу базових діаграм є визначення діапазонів напруження і температур, в межах яких можна визначити деяке постійне значення  $\beta$ , при якому похибка прогнозування по напруженні не перевищувала б деяку наперед задану величину  $\Delta$ .

Похибка екстраполяції у відсотках для будь-якого відрізка  $L_iL_j$  визначається за допомогою наступного співвідношення (1.37):

$$\Delta_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_j - \sigma_j}{\sigma_j} \times 100\%. \quad (1.37)$$

Одним з припущень МБД є той факт, що максимальна похибка по напруженню  $\Delta$  не повинна перевищувати 10 %. Узагальнюючи все вищенаведене, можна визначити основні переваги МБД:

- задовільне описання реакції багатьох матеріалів при тривалому навантаженні;
- сталість використовуваних параметрів у співвідношенні базових діаграм;
- можливість зробити екстраполяцію діаграм довготривалої міцності на терміни служби, які на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.

Основні недоліки МБД:

- не враховує можливу похибку експериментальних досліджень;
- потребує розробки більш чітких методик для визначення характеристик довготривалої міцності матеріалів;
- іноді даний метод дає гірші результати, ніж деякі параметричні методи при апроксимації діаграм довготривалої міцності;
- екстраполяція діаграм довготривалої міцності здійснюється, виходячи із експериментальних даних, і при цьому не використовується апарат математичної статистики.

## 1.2 Стохастичні моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості

Основні підходи до побудови стохастичних моделей руйнування конструкційних матеріалів при повзучості закладено В. В. Болотіним, Ю. П. Самаріним, В. А. Ломакіним, А. А. Ільюшиним, Ю. В. Соколкіним, А. А. Ташкиновим та іншими авторами. Стохастичні моделі в більшості випадків будуються шляхом

узагальнення детермінованих моделей, кількість яких є дуже великою. Найбільш відомі детерміновані моделі представлені роботами В. І. Астаф'єва [4] – [12], А. Н. Бадаєва [14] – [16], В. В. Болотіна [21], Б. В. Горєва [32], [54], Л. М. Качанова [59], В. І. Ковпака [62] – [67], А. Ф. Нікітенка [94], О. М. Локощенко [89] – [91], Н. Н. Малініна [92] – [93], Ю. М. Работнова [106], В. П. Радченка [107] – [109], Ю. П. Самаріна [114], О. В. Сосніна [117] – [121], С. О. Шестерикова [131] – [134], І. Ю. Цвєлодуба [128], J. A. Betten [137], J. T. Voyle [138], F. Leckie [143] та інших авторів.

Оскільки для зразків, виготовлених з однієї виливки металу, при випробуваннях на повзучість має місце великий розкид за часом до руйнування навіть в ідеальних лабораторних умовах, то використання детермінованих моделей є недостатнім для вирішення питання про довговічність конкретних виробів. Через невідповідність моделей і методів розрахунку реальним процесам навантаження в оцінках показників довготривалої міцності та довговічності містяться систематичні похибки. Тому отримати достовірні оцінки цих показників та оцінити їх точність краще на основі ймовірно-статистичних методів, які призводять до єдиного ймовірного критерію [77]. Проводять статистичний аналіз впливу різних чинників на вихідні показники довготривалої міцності матеріалу, маючи експериментальні дані, і в результаті цього з'являються можливості призначити більш високі ймовірності неруйнування для відповідальних деталей сучасної техніки. На підставі статистичних даних про довговічність матеріалів, зовнішніх впливах і умовах експлуатації конструкцій на стадії проектування здійснюється розрахунок і оцінка перерахованих вище показників. Це дає можливість підібрати матеріали, розміри і конструкційні форми деталей, що забезпечують розрахункові показники довговічності.

Розглянемо стадію експлуатації виробів. Тут оцінка показників довговічності здійснюється для конкретних працюючих виробів. На етапі ж проектування використовуються дані генеральної сукупності нестворених деталей. Показ-

ники довготривалої міцності і довговічності деталей лежать в широких межах через природний розкид властивостей матеріалу деталей і різні умови їх експлуатації. Оцінка їх дозволить правильно планувати режими експлуатації елементів конструкцій, профілактичні заходи та постачання запасних частин, а також попередити можливі відмови, непередбачені досягнення граничних станів. Урахування індивідуальної оцінки довговічності деталей приладів дозволить збільшити термін служби цих приладів у зв'язку зі зменшенням частки деталей, які передчасно знімаються для ремонту. Методи, засновані на статистичному аналізі відмов [71], [72], [127], використовують для кількісної оцінки показників довготривалої міцності і довговічності. Але для забезпечення задовільного рівня довірчої ймовірності експериментальної оцінки показників довговічності в цих методах потрібен досить великий обсяг статистичного матеріалу.

Широко поширені критерії пошкоджуваності у вигляді відношення поточного значення контрольованого параметра до його граничного значення при руйнуванні в розрахунках на довготривалу міцність. Кумулятивні моделі відмов, засновані на гіпотезі лінійного або нелінійного підсумовування пошкоджень [21], [79] – [85], є математичним відображенням цих процесів. Метод лінійного підсумовування пошкоджень володіє найбільшою універсальністю. Лінійна гіпотеза при розгляді імовірнісних методів підсумовування пошкоджень прийнята за основу, тому що її зручно досліджувати з імовірнісних позицій.

Існують відомі методи: найменших квадратів, максимальної правдоподібності, кореляційно-регресійного аналізу, мінімізації функцій багатьох змінних [3], [39], [125], якими можна скористатися для оцінки параметрів імовірнісних моделей руйнування. Імовірнісні моделі відрізняються від детермінованих тим, що в рівняння сімейства кривих довготривалої міцності вводиться деякий параметр, який є випадковою величиною, розподіленою за одним з відомих законів [27] – [30], [81]. Аналізуючи експериментальні дані, можна вибрати форму закону. Механічні властивості матеріалу: границя довготривалої міцності, текучо-



сті і інші розподілені, як правило, за законом близьким до нормального [26], [69], а показники довговічності зазвичай мають логарифмічно нормальний розподіл. Також широко використовуються розподіли Вейбулла, Гумбеля і гамма розподіл [71].

Вчені Самарського державного технічного університету Ю. П. Самарін, В. П. Радченко, Н. Н. Попов і В. А. Кузнєцов зі співавторами внесли значний внесок у дослідження проблеми розробки стохастичних моделей повзучості і довготривалої міцності. Вони будують стохастичні реологічні моделі з огляду на те, що фізична і стохастична нелінійності задач в теорії повзучості є основними проблемами. Одновимірний варіант стохастичної моделі повзучості і довготривалої міцності запропонований в роботі [108]. В його основі лежить енергетична концепція накопичення пошкоджень і наведено методику ідентифікації параметрів моделі. У стохастичній постановці за допомогою методу статистичних випробувань розроблена схема прогнозування деформації повзучості і часу до руйнування. Експериментальна перевірка моделі виконана для марки сталі 12X18H10T при температурі  $T = 850$  °C і сплаву ХН73МБТЮ при температурі  $T = 750$  °C. Аналітичний метод оцінки ресурсу елементів конструкцій в умовах повзучості по деформаційному критерію відмови запропонований в роботі [130]. При обмеженнях на граничні значення деформації повзучості отримані оцінки часу безвідмовної роботи. Метод перевірений на адекватність експериментальним даним по повзучості зразків зі сталі 12X18H10T при температурі  $T = 850$  °C.

Слід зазначити наукові праці вчених Київського національного авіаційного університету М. С. Кулика, О. Г. Кучера і В. Є. Мільцова [77], [78]. Ними запропонований сучасний імовірнісний підхід до аналізу процесів накопичення пошкоджень. Лінійні та нелінійні ймовірнісні моделі підсумовування незалежних і залежних випадкових пошкоджуваностей, їх послідовностей і процесів наведено в роботі [77]. Авторами представлені методи розрахунку коефіцієнтів

запасу міцності та ймовірнісних характеристик міцнісної надійності. Після попереднього пластичного деформування в роботі [96] обчислювалися локальні пошкодження за результатами термоактиваційного аналізу залишкової довговічності. При постійних розтягуючих навантаженнях і підвищеній температурі проводилися випробування зразків на довговічність. Показано, як залежать локальні пошкодження від величини попередньої пластичної деформації при кімнатній температурі. На початковій стадії процесу руйнування проведено розрахунок залишкової довговічності зразків з урахуванням пошкоджень матеріалу і представлені результати порівняння з експериментальними даними. Через використання значних спрощень при уточненні розрахункових рівнянь, підкреслюється в роботі [75], суттєво обмежено розвиток прогнозування повзучості і довготривалої міцності металевих матеріалів при великій тривалості високотемпературного навантаження. Прогнозування може бути уточнено, якщо провести спеціальну систематизацію відомих експериментальних даних, а також підвищити ступінь деталізації особливостей деформування і зміцнення матеріалів.

Резюмуючи вищевикладене дослідницький і практичний інтерес представляє питання розробки стохастичної моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості. Така модель буде враховувати ймовірнісний характер руйнування і прогнозувати не «середній» час до руйнування, а його ймовірнісний розподіл.

### 1.3 Висновки до розділу 1

1. Для опису процесів накопичення пошкодженості в матеріалах, що експлуатуються в широких діапазонах напружень і температур, широко використовуються структурні та феноменологічні моделі.

2. Структурні моделі засновані на математичному описанні фізики процесу накопичення пошкоджень на одному або декількох рівнях структури. Руйнування тут розглядається як незворотній процес накопичення мікротріщин, що виникають в результаті термофлуктуаційних розривів міжатомних зв'язків в механічно напруженому матеріалі. Структурні моделі дозволяють знайти спосіб переносу експериментальних даних, отриманих для одного з видів навантаження та поведінки матеріалу на інші, а також об'єднувати експериментальні дані, що відносяться до різних видів напруженого стану та зовнішнього впливу.

3. Феноменологічні моделі є більш простими з математичної точки зору і на макрорівні досить повно відображають основні закономірності процесу пошкодження матеріалів, хоча і не включають опису його механізмів. При дослідженні феноменологічних моделей слід розрізняти кінетичний підхід, в рамках якого застосовуються різні критерії руйнування.

4. Проведено огляд параметричних моделей довготривалої міцності Ларсона – Міллера, Орра – Шербі – Дорна та Менсона – Хеферда, а також наведені співвідношення для їх параметрів. Основною перевагою параметричних моделей можна вважати простоту використання і можливості вивчення за більш короткий строк закономірностей деформування матеріалів при більш високих температурах випробувань і екстраполяцію їх на менші температури і більші тривалості.

5. Описані температурно-часові моделі прогнозування довготривалої міцності, які представлені залежностями температурно-силового прогнозування. Найбільш відомі з цих залежностей були запропоновані С. О. Шестериковим, А. Л. Аршакуні та В. І. Ковпаком. Основною перевагою цих моделей є можливість значно зменшити тривалість експериментальних досліджень, враховуючи дані отримані при більш високих температурах.

6. Розглянуто побудову моделей довготривалої міцності на основі термодинаміки незворотних процесів. Запропоновано різні залежності швидкості пов-

зучості від напруження і температури, однак при такому підході необхідно пам'ятати, що кожна з наведених залежностей відноситься до того чи іншого окремого механізму, який передбачається здійсненим в ідеальному об'єкті. Для технічних сплавів, як правило, спостерігаються систематичні відхилення. У той же час прямі експериментальні дані не завжди допускають однозначне тлумачення.

7. Представлено метод базових діаграм (МБД), що застосовується для екстраполяції довготривалої міцності конструкційних матеріалів. Для цього методу характерне поняття базової діаграми деформування, яка аналітично задається деяким співвідношенням, що описує залежність напруження, часу та деякого параметру, який залежить від координат точки, з якої здійснюється прогнозування. Як правило, співвідношення для базових діаграм вибирається на основі обробки великої кількості діаграм довготривалої міцності. Основними перевагами МБД є задовільне описання реакції багатьох матеріалів при тривалому навантаженні, сталість використовуваних параметрів у співвідношенні базових діаграм та можливість зробити екстраполяцію діаграм довготривалої міцності на терміни служби, які на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.

## РОЗДІЛ 2

### ОСНОВНІ ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ДОВГОТРИВАЛОЇ МІЦНОСТІ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

2.1 Ймовірнісна модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, що базується на позиціях теорії надійності

У роботі [103] розглянута ймовірнісна модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, що базується на позиціях теорії надійності. Припускається, що при руйнуванні зразка під дією постійної навантаження між величиною деформації повзучості  $\varepsilon$ , накопиченої за час  $t$ , і ймовірністю неруйнування  $P$  зразка в даний момент часу існує функціональна залежність. В теорії надійності широко використовується показник, що називається інтенсивністю відмов, який пов'язано з ймовірністю безвідмовної роботи (ймовірністю неруйнування)  $P(t)$  наступною залежністю (2.1) [98]:

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right]. \quad (2.1)$$

У більшості випадків функція інтенсивності відмов  $\lambda(t)$  змінюється з плином часу немонотонно і має  $U$  –образну форму. Типова крива залежності швидкості деформації повзучості від часу має аналогічний характер, тобто функцію  $\lambda(t)$  з точністю до постійної можна представити у вигляді (2.2):

$$\lambda(t) = C \cdot \dot{\varepsilon}(t). \quad (2.2)$$

Підставляючи вираз (див. (2.2)) в (див. (2.1)), враховуючи що  $\varepsilon(0) = 0$ , отримано  $P(t) = \exp[-C \cdot \varepsilon(t)]$ . Постійна  $C$  визначається з умови  $P = P_*$  при  $\varepsilon = \varepsilon_*$  (де  $P_*$  – ймовірність неруйнування зразка при досягненні деформацією повзучості величини  $\varepsilon_*$ , де  $\varepsilon_*$  – середнє значення величини деформації повзучо-

сті у момент руйнування). Після нескладних перетворень отримано наступне співвідношення (2.3):

$$P(t) = \exp\left[\frac{-m \cdot \varepsilon(t)}{\varepsilon_*}\right], \quad (2.3)$$

де  $m = -\ln P_* \geq 0$  – параметр, який визначається за результатами випробувань матеріалу на повзучість до руйнування.

Середній час до руйнування  $\{t_*\}$  і середньоквадратичне відхилення довговічності  $\{\sigma_t\}$  розтягнутого постійною силою стрижня в умовах повзучості визначені у роботі [103], використовуючи перший і другий моменти розподілу у вигляді (2.4), (2.5):

$$\{t_*\} = \int_0^{\infty} P(t) dt, \quad (2.4)$$

$$\{\sigma_t\} = \left\{ 2 \int_0^{\infty} t \cdot P(t) dt - \left( \int_0^{\infty} P(t) dt \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.5)$$

Рівняння повзучості і довготривалої міцності приймаються у вигляді степених залежностей (2.6), (2.7) з урахуванням поперечного звуження зразка в процесі деформування

$$\dot{\varepsilon} \cdot \varepsilon^\alpha = a \cdot \sigma_0 \cdot \exp(n\varepsilon) \cdot (1 - \omega)^{-q}, \quad (2.6)$$

$$\dot{\omega} = c \cdot \sigma_0^k \cdot \exp(k\varepsilon) \cdot (1 - \omega)^{-r}, \quad (2.7)$$

де  $a, c, k, n, r, q, \alpha$  – постійні матеріалу при фіксованій температурі;

$\sigma_0$  – номінальне напруження, віднесене до первісної площі поперечного перерізу зразка;

$\omega$  – параметр пошкоджуваності.

Слід зазначити, що параметри  $a, c, k, n, r, q, \alpha$  в загальному випадку є випадковими величинами, необхідні відомості про які може дати тільки статистична обробка великого числа результатів випробувань зразків в умовах повзучості. Надалі під  $a, c, k, n, r, q, \alpha$  приймаються середні значення відповідних величин.

Розділивши рівняння (див. (2.6)) на рівняння (див. (2.7)), отримано диференціальне рівняння для  $\varepsilon$  у функції  $\omega$ , інтегруючи яке з урахуванням початкової умови  $\varepsilon(0)=0$ , маємо вираз (2.8):

$$1 - \omega = \left\{ 1 - \frac{c(r-q+1)}{a} \cdot \sigma_0^{-(n-k)} \cdot \int_0^\varepsilon \varepsilon^\alpha \exp[-(n-k)\varepsilon] d\varepsilon \right\}^{1/(r-q+1)}. \quad (2.8)$$

Підставляючи у співвідношення (див. (2.4)) вираз (див. (2.3)), враховуючи рівняння (див. (2.6)) і (див. (2.8)), остаточно отримаємо наступні вирази (2.9) – (2.13):

$$\{t_*\} = nt_1 \cdot \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon^\alpha \exp[-(n + m\varepsilon_*^{-1})\varepsilon] f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_t\} = nt_1 & \left\{ 2 \int_0^{\varepsilon_0} \left[ \int_0^\varepsilon \varepsilon^\alpha \cdot \exp[-n\varepsilon] f(\varepsilon) d\varepsilon \right] \cdot \varepsilon^\alpha \exp[-(n + m\varepsilon_*^{-1}) \cdot \varepsilon] \times \right. \\ & \left. \times f(\varepsilon) d\varepsilon - \left( \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon^\alpha \exp[-(n + m\varepsilon_*^{-1})\varepsilon] f(\varepsilon) d\varepsilon \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

де

$$f(\varepsilon) = \left( 1 - \frac{n-k}{\nu} \int_0^\varepsilon \varepsilon^\alpha \exp[-(n-k)\varepsilon] d\varepsilon \right)^{\lambda-1}, \quad (2.11)$$

$$\lambda = \frac{r+1}{r-q+1}, \quad (2.12)$$

$$\nu = \frac{n-k}{r-q+1} \frac{a}{c} \sigma_0^{n-k} = \frac{1+r}{n} \frac{n-k}{r-q+1} \frac{t_2}{t_1}, \quad (2.13)$$

$$t_1 = \frac{1}{an\sigma_0^n} \text{ – час в'язкого руйнування;}$$

$$t_2 = \frac{1}{c(1+r)\sigma_0^k} \text{ – час крихкого руйнування.}$$

Можливі два варіанти розв'язку задачі для двох критеріїв довготривалої міцності. Розглянемо їх нижче.

Варіант 1. Величина деформації повзучості прямує до нескінченності. Тоді з рівності (див. (2.8)) випливає, що існує деяке скінченне значення пошкоджуваності  $\omega = \omega_0$ , яке відповідає моменту руйнування, причому має місце співвідношення (2.14):

$$\omega_* = 1 - \left( 1 - \frac{c(r-q+1)}{a} \sigma_0^{-(n-k)} \int_0^\infty \varepsilon^\alpha \exp[-(n-k)\varepsilon] d\varepsilon \right)^{1/(r-q+1)}. \quad (2.14)$$

При цілих значеннях параметру  $\alpha$  інтеграл можна представити у вигляді (2.15):

$$\omega_* = 1 - \left\{ 1 - \frac{\alpha!}{\nu(n-k)^\alpha} \right\}^{1/(r-q+1)}. \quad (2.15)$$

У цьому випадку співвідношення (див. (2.9)) та (див. (2.10)) приймуть вигляд (2.16), (2.17):

$$\{t_*\} = nt_1 \cdot \int_0^\infty \varepsilon^\alpha \exp[-n\varepsilon] f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.16)$$

$$\{\sigma_i\} = 0. \quad (2.17)$$



Варіант 2. Умова руйнування досягається при деякому скінченному значенні деформації повзучості, яка визначається на підставі співвідношення (2.18):

$$\frac{a\sigma_0^{n-k}}{c(r-q+1)} = \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon^\alpha \exp[-(n-k)\varepsilon] d\varepsilon. \quad (2.18)$$

З рівності (див. (2.18)) знаходиться деформація повзучості у момент руйнування  $\varepsilon_*$ , а зі співвідношень (див. (2.9)), (див. (2.10)) – середній час до руйнування і його середньоквадратичне відхилення. Зі співвідношення (див. (2.18)) при цілих значеннях параметру  $\alpha$  неважко отримати умову крихкого руйнування у вигляді (2.19):

$$\sigma_0 < \left[ \frac{c(r-q+1)\alpha!}{a(n-k)^{\alpha+1}} \right]^{1/(n-k)} = \sigma'_0. \quad (2.19)$$

У роботі [103] розглядається випадок, коли зміцнення матеріалу в процесі повзучості не відбувається ( $\alpha = 0$ ). Для першого варіанту зі співвідношень (див. (2.16)), (див. (2.17)) при  $\sigma_0 > \sigma'_0$  ( $\nu > 1$ ) впливає детермінований розв'язок вигляду (2.20):

$$\frac{\{t_*\}}{t_2} = \lambda \int_{\xi}^1 (1 - \nu + \xi\nu)^\mu \xi^{\lambda-1} d\xi, \quad (2.20)$$

$$\text{де } \mu = \frac{k}{n-k}, \quad \xi_* = \frac{\nu-1}{\nu}.$$

У другому варіанті при  $\sigma_0 < \sigma'_0$  ( $\nu > 1$ ) зі співвідношень (див. (2.9)), (див. (2.10)) з урахуванням (див. (2.18)) отримано наступні вирази (2.21), (2.22):

$$\frac{\{t_*\}}{t_2} = \lambda \int_{\xi}^1 (1 - \nu + \xi\nu)^{\mu - m \ln^{-1}(1-\nu)} \xi^{\lambda-1} d\xi, \quad (2.21)$$

$$\frac{\{\sigma_t\}}{t_2} = \lambda \left\{ 2 \int_0^1 \left[ \int_{\xi}^1 (1-\nu + \xi\nu)^\mu \xi^{\lambda-1} d\xi \right] \cdot (1-\nu + \xi\nu)^{\mu-m\ln^{-1}(1-\nu)} \xi^{\lambda-1} d\xi - \left[ \int_0^1 (1-\nu + \xi\nu)^{\mu-m\ln^{-1}(1-\nu)} \xi^{\lambda-1} d\xi \right] \right\}^{1/2} \quad (2.22)$$

Інтеграли у правих частинах рівностей (див. (2.21), (2.22)) визначаються чисельними методами. Для малих значень  $\nu$  зі співвідношень (див. (2.21), (2.22)) наближено отримано наступні вирази (2.23), (2.24):

$$\frac{\{t_*\}}{t_2} = 1 - \frac{[\mu - m\ln^{-1}(1-\nu)]\nu}{\lambda + 1}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\{\sigma_t\}}{t_2} = -\frac{\nu \cdot m\ln^{-1}(1-\nu)}{2\lambda + 1} \left\{ 1 + \frac{2\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2} [\mu - m\ln^{-1}(1-\nu)]\nu \right\}. \quad (2.24)$$

При  $m = 0$  зі співвідношень (див. (2.21) – (2.24)) впливає розв’язок, який отримано у роботі [59]. Якщо рівняння повзучості (див. (2.6)) не залежить від параметру пошкоджуваності  $\omega$  ( $q = 0$ ), то співвідношення (див. (2.21), (2.22)) інтегруються в квадратурах.

Було проведено порівняння теоретичних розрахунків з результатами випробувань на довготривалу міцність зразків з корозійностійкої сталі 12X18H10T при температурі 850 °C [46]. Константи матеріалу визначалися після обробки відповідних експериментів на повзучість і довготривалу міцність. У таблиці 2.1 наведені експериментальні (третій і четвертий стовпці) і розрахункові (п'ятий і шостий стовпці) значення часу до руйнування зразків і їх середньоквадратичні відхилення, визначені за допомогою співвідношень (див. (2.21) – (2.22)). У першому стовпці таблиці 2.1 зазначено кількість зразків  $N$ , які випробувались при фіксованому значенні напруження  $\sigma_0$ . Величини  $t_*$ ,  $\{t_*\}$ , приведені у годинах, а  $\sigma_0$ ,  $\sigma_t$ ,  $\{\sigma_t\}$  – в МПа.

Таблиця 2.1 – Експериментальні і розрахункові значення часу до руйнування для моделі (див. (2.6) – (2.7)) на прикладі експериментальних даних для зразків з корозійностійкої сталі 12Х18Н10Т при температурі  $T = 850$  °С

$N$	$\sigma_0$ , МПа	$t_*$ , год	$\sigma_t$ , МПа	$\{t_*\}$ , год	$\{\sigma_t\}$ , МПа
10	39,24	51,3	14,5	52,3	16,1
11	49,05	21,8	5,1	26,0	8,0
6	58,86	16,4	5,0	14,7	4,5
2	78,48	6,0	0	6,0	1,8

З таблиці бачимо, що теоретичні результати добре узгоджуються з результатами експериментів як за часом руйнування, так і за його середньоквадратичним відхиленням, але необхідно зазначити, що запропонована модель (див. (2.6) – (2.7)) не враховує залежності процесу повзучості від температури і розглядає усереднені значення невідомих параметрів  $a$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $n$ ,  $r$ ,  $q$ ,  $\alpha$  замість їх розподілів, що робить дану модель обмеженою у ймовірнісному сенсі.

2.2 Ймовірнісний підхід оцінки довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості за катастрофічним критерієм відмови

Розглянемо підхід оцінки довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості за катастрофічним критерієм відмови, який запропоновано у роботі [110]. Для опису випадкових властивостей матеріалу у цій роботі розглядається стохастична модель повзучості, яка описує другу та третю її стадії, а також процеси руйнування у вигляді (2.25) – (2.28):

$$\dot{\varepsilon} = c\sigma^n(t), \quad (2.25)$$

$$\sigma = \sigma_0(1 + \omega), \quad (2.26)$$

$$\dot{\omega} = \alpha \cdot \sigma \cdot \dot{\varepsilon} \quad , \quad (2.27)$$

$$\omega(0) = 0, \quad \varepsilon(0) = 0 \quad , \quad (2.28)$$

де  $\varepsilon$  – деформація повзучості;

$\sigma$ ,  $\sigma_0$  – істинне та номінальне напруження;

$c$ ,  $\alpha$  – випадкові величини;

$n$  – детермінована величина;

$\omega$  – параметр пошкоджуваності.

В якості критерію руйнування тут використовується співвідношення (2.29):

$$\int_0^{t^*} \sigma \, d\varepsilon = A_C^* \quad (2.29)$$

де  $A_C^*$  – величина роботи руйнування;

$t^*$  – час до руйнування.

Розв'язок системи рівнянь (див. (2.25) – (2.28)) з урахуванням співвідношення (див. (2.29)) при постійному номінальному напруженні  $\sigma_0$  має наступний вигляд (2.30):

$$A(t) = \frac{1}{\alpha} \left[ \left( 1 - nc\alpha\sigma_0^{n+1}t \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right], \quad (2.30)$$

де  $\alpha$ ,  $c$  – випадкові величини.

У роботі [110] проводиться стохастична лінеаризація співвідношення (див. (2.30)), при цьому апроксимована величина роботи зі знайденими коефіцієнтами має наступний вигляд (2.31):

$$A(t) = 0,348n\sigma_0^{n+1}ct - 0,239(n\sigma_0^{n+1}ct)^2\alpha + 1,068n(n\sigma_0^{n+1}ct)^3\alpha^2. \quad (2.31)$$

Відмічається, що основною кількісною характеристикою надійності є ймовірність безвідмовної роботи, яка в даному випадку визначає ймовірність того, що в усіх точках матеріалу елемента конструкції виконується наступна умова міцності вигляду (2.32):

$$A(t) \leq L_A^*, \quad (2.32)$$

де  $A(t)$  – величина роботи істинного напруження на деформації повзучості у момент часу  $t$  ;

$L_A^*$  – критична величина роботи істинного напруження на деформації повзучості у момент руйнування.

Оскільки робота є неспадною функцією часу, то функція  $A(t)$ , покинувши в певний момент часу область  $(0, L_A^*)$ , потім в цю область повернутись не може, а отже для ймовірності безвідмовної роботи  $P(t)$  на відрізку часу  $[0, t]$  має місце співвідношення (2.33):

$$P(t) = P\{A(t) \in (0, L_A^*)\}. \quad (2.33)$$

Відмічено, що для оцінки надійності необхідно знати математичне сподівання і дисперсії випадкових величин  $c$  і  $\alpha$ . Для перевірки моделі (див. (2.25) – (2.28)) у роботі [110] використовувались результати експериментів на довготривалу міцність зразків з корозійностійкої сталі 12X18Н10Т при температурі 850 °С [46], при цьому зазначено, що значення параметрів  $c$  і  $\alpha$  знаходяться за результатами експериментів для кожного зразка при  $n = 3,2$ , величина  $c$  визна-

чається зі співвідношення  $c = \frac{\dot{\omega}}{\sigma_0^n} = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n}$ , а значення параметра  $\alpha$  знаходиться

використовуючи умову проходження графіка через точку руйнування  $(\varepsilon^*, t^*)$ , де  $\varepsilon^*$  – деформація повзучості у момент руйнування,  $t^*$  – час до руйнування.

Приведено вирази (2.34), (2.35) для математичного сподівання та дисперсії  $A(t)$ , яка задається співвідношенням (див. (2.31)):

$$M[A] = T_1 M[c] + T_2 M[\alpha c^2] + T_3 M[\alpha^2 c^3], \quad (2.34)$$

$$D[A] = T_1^2 D[c] + T_2^2 D[\alpha c^2] + T_3^2 D[\alpha^2 c^3] + \\ + 2 \cdot (T_1 T_2 K_{c, c^2 \alpha} + T_1 T_3 K_{c, c^3 \alpha^2} + T_2 T_3 K_{c^2 \alpha, c^3 \alpha^2}), \quad (2.35)$$

де  $M[ ]$  – математичне сподівання;

$$T_1 = 0,348n\sigma_0^{n+1}t;$$

$$T_2 = -0,239n^2\sigma_0^{2n+2}t^2;$$

$$T_3 = 1,068n^3\sigma_0^{3n+3}t^3;$$

$D[ ]$  – дисперсія;

$K_{x,y}$  – коваріації випадкових величин  $x$  та  $y$ .

Далі розглядається модифікація умови (див. (2.33)) шляхом введення випадкової функції  $\varphi(t)$  вигляду (2.36):

$$\varphi(t) = A(t) - A_c^*, \quad (\varphi(t) \in (-\infty, 0)) \quad (2.36)$$

Тоді ймовірність  $P(t)$  безвідмовної роботи елемента конструкції при відомих математичному сподіванні  $M[\varphi]$  та дисперсії  $D[\varphi]$  визначиться наступним співвідношенням (2.37):

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[\varphi]}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-M^2[\varphi])^2}{2D[\varphi]}} dt \quad (2.37)$$

У таблиці 2.2 приведені експериментальні  $t_{\text{експ.}}$  і розрахункові  $t_{\text{розн.}}$  значення часу до руйнування для моделі (див. (2.25) – (2.28)) при різних фіксованих значеннях ймовірностей безвідмовної роботи  $p^*$ .

Таблиця 2.2 – Експериментальні і розрахункові значення часу до руйнування для моделі (2.25) – (2.28) на прикладі експериментальних даних для зразків з корозійностійкої сталі 12Х18Н10Т при температурі  $T = 850 \text{ }^\circ\text{C}$

$\sigma_0$ , МПа	$p^*$	$t_{\text{розн.}}$ , ГОД	$t_{\text{експ.}}$ , ГОД
39,24	0,99	7,7	68; 67; 67;
	0,95	37	66; 50; 47;
	0,9	43	43; 40; 35; 35,5
49,05	0,99	3	30; 28; 24;
	0,95	14,5	23; 22,5; 21,5;
	0,9	17,2	20,5; 18; 16; 12
58,86	0,99	1,4	20,5; 20;
	0,95	6,8	16; 15;
	0,9	8	14; 6,5
78,48	0,99	0,42	6; 6
	0,95	2	
	0,9	4	

Як бачимо з таблиці, спостерігається добра відповідність розрахункових і експериментальних даних. Таким чином запропонована стохастична модель у роботі [110] дозволяє аналітичними методами прогнозувати величину призначеного ресурсу за катастрофічним критерієм відмови, але не враховує стадію зміцнення матеріалу та залежності процесу повзучості від температури, що робить її застосовною лише для обмеженого класу конструкційних матеріалів.

### 2.3 Висновки до розділу 2

1. Розглянута ймовірнісна модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості запропонована В. П. Пошиваловим, що базується на позиціях теорії надійності. Припускається, що при руйнуванні зразка під дією постійної навантаження між величиною деформації повзучості  $\varepsilon$ , накопиченої за час  $t$ , і ймовірністю неруйнування  $P$  зразка в даний момент часу існує функціональна залежність. Теоретичні розрахунки, проведені за даною моделлю добре узгоджуються з результатами випробувань на довготривалу міцність зразків з корозійностійкої сталі 12X18H10T при температурі 850 °С, але необхідно зазначити, що запропонована модель не враховує залежність від температури і розглядає усереднені значення невідомих параметрів  $a$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $n$ ,  $r$ ,  $q$ ,  $\alpha$  замість їх розподілів, що робить дану модель обмеженою в ймовірнісному сенсі.

2. Розглянуто підхід оцінки довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості за катастрофічним критерієм відмови запропонований В. П. Радченко. Для опису випадкових властивостей матеріалу розглядається стохастична модель повзучості, яка описує другу та третю її стадії. Теоретичні розрахунки, проведені за даною моделлю добре узгоджуються з результатами випробувань на довготривалу міцність зразків з корозійностійкої сталі 12X18H10T при температурі 850 °С, але запропонована модель не враховує залежність від температури та зміцнення матеріалу в процесі повзучості, що робить її застосовною лише для обмеженого класу конструкційних матеріалів.

3. Враховуючи недоліки запропонованих вище моделей, поставлена мета розробити узагальнену стохастичну модель руйнування при повзучості, яка б дозволяла за заданими значеннями напруження, температури і експериментальними даними на довготривалу міцність матеріалу визначати ймовірнісний розподіл його часу до руйнування та застосовувалась для екстраполяції довготри-



валої міцності на терміни служби, що на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.

### РОЗДІЛ 3

## ОПИС ПРОЦЕСІВ ПОВЗУЧОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ КІНЕТИЧНИХ ТЕОРІЙ

### 3.1 Механічні та кінетичні теорії повзучості

В умовах одновісного напруженого стану на основі випробувань зразків при постійних навантаженнях і температурах були встановлені закономірності матеріалів при повзучості. На практиці доводиться мати справу з задачами, коли потрібно при змінних навантаженнях і температурі в умовах складного напруженого стану прогнозувати повзучість. Рішення таких задач намагаються виконати аналітично.

При конкретизації рівнянь стану виникають основні труднощі. Залежність швидкості повзучості  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  від напруження  $\sigma$ , температури  $T$ , часу  $t$ , накопиченої миттєвої пластичної деформації  $\varepsilon_p$  і деякого числа параметрів  $q_i, i = \overline{1, n}$  встановлюють рівняння стану, за допомогою яких може бути охарактеризований структурний стан матеріалу, тобто має місце залежність (3.1):

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = F(\sigma, T, \varepsilon^p, t, q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (3.1)$$

Встановити вид такої функції надзвичайно важко, тому використовують різні гіпотези для встановлення виду функції  $F$ . Найбільш відомими в інженерній практиці є теорії старіння, течії, зміцнення та спадковості [112]. Перспективним рішенням у середині минулого століття була пропозиція залежностей, що отримали назву визначальних співвідношень. Конкретизація цих функціональних залежностей відбувається на основі результатів експериментів при навантаженні зразків постійними у часі напруженнями. На інші види навантаження поширення їх не є справедливим.

Для описання деформування структурно-стабільних матеріалів часто використовують рівняння теорії зміцнення. Першим наближенням, що дозволяє розв'язувати практичні задачі, є гіпотеза теорії зміцнення про однозначну залежність швидкості повзучості від прикладеного напруження і величини накопиченої деформації незалежно від того, в якій послідовності ця деформація накопичувалась. Таким чином, для можливості прогнозування процесів тривалого деформування можна використовувати рівняння теорій старіння, течії та зміцнення, які дозволяють описувати одну або дві характерні ділянки кривої повзучості. Прискорену повзучість на третій ділянці жодна з них не описує.

В середині минулого століття посилилась зацікавленість до лінійної теорії в'язкопружності у зв'язку з використанням полімерів в якості конструкційних матеріалів. Схематичні представлення структури у вигляді моделей, якими оперували Максвелл, Фойгт та Кельвін, отримали розповсюдження. Для таких моделей рівняння стану вибираються у вигляді диференціальних залежностей, які включають в себе похідні від напружень і деформацій першого і більш високих порядків. Цілий цикл важливих задач для інженерної практики був розв'язаний на основі таких залежностей.

Механічну поведінку матеріалу в перші моменти часу після прикладення навантаження не змогли точно описати диференціальні рівняння стану. Більш загальні інтегральні співвідношення, які розробив Вольтерра [153], почали використовувати для опису повзучості. Теорія ця розвивалася в напрямку узгодження розрахункових і експериментальних даних за рахунок уточнення параметрів ядер інтегральних співвідношень.

Інтенсивне дослідження фізико-механічних властивостей нелінійних в'язко-пружних матеріалів, розробку методів визначення деформаційних та міцнісних характеристик матеріалів, виходячи із структури та механічних параметрів складових композицій, спричинило їх ефективне застосування у різних галузях сучасної техніки. При розв'язанні конкретних задач не до кінця дослідже-

ними залишаються питання вибору структури ядер спадковості та визначення їх параметрів. Задачі розрахунку деформацій повзучості нелінійно-вязко-пружних матеріалів за умов нестационарного навантаження, а також задачі розрахунку релаксації напружень залишаються на даний час нерозв'язаними.

Теорію усталеної повзучості відносять до найпростіших механічних теорій. За цією теорією не враховуються пружна деформація, миттєва пластична деформація та перший відрізок кривої повзучості. Відзначимо, що в цьому випадку криві повзучості апроксимуються прямими лініями, котрі виходять з початку координат. Тому використання такого підходу можливе тільки у двох крайніх випадках, коли:

а) розглядаються деталі з досить великим часом експлуатації, що обумовлює постійну швидкість деформування;

б) спостерігається короткочасна повзучість при дуже високій температурі і високому рівні напружень.

Рідко має лінійний характер залежність між деформацією і часом при незмінних температурно-силових умовах навантаження протягом усього часу. Частіше при довготривалих строках роботи в матеріалі проходять структурні зміни, що спонукають до утворення стадій неусталеної повзучості.

Даний підхід дає непоганий результат відповідно певних експериментальних кривих. Але ним не варто проводити індивідуальну апроксимацію кривої повзучості. Такими вченими як Содерберг, Одквіст [150], були спроби підвищення ефективності даного підходу. Співвідношення теорії усталеної повзучості, відносно подання Содерберга, описуються рівнянням (3.2):

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + v(\sigma, T). \quad (3.2)$$

Тут  $E$  – модуль пружності матеріалу. Потрібно бути досить обережним при використанні такого підходу, тому що він не завжди підтверджувався експериментальними дослідженнями.

Одквіст вдосконалив теорію усталеної повзучості. Він замінив криву повзучості ламаною лінією ОАВ. Співвідношення теорії усталеної повзучості стало мати вигляд (3.3):

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \varepsilon_0(\sigma)\dot{\sigma} + v(\sigma), \quad (3.3)$$

де  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma)$ ,  $g(\sigma)$  – початкова пластична деформація.

Досить широкий інтервал другої стадії повзучості, особливо при досить великих тривалостях навантаження, призводить до того, що багато практичних розрахунків побудовані на основі теорії усталеної повзучості.

### 3.2 Основні гіпотези та визначальні рівняння кінетичної теорії Ю. М. Работнова

Основна гіпотеза кінетичної теорії Ю. М. Работнова полягає в тому, що швидкість деформації повзучості деяким чином залежить від напруження, температури і набору структурних параметрів  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , які дають можливість точніше описувати процеси деформування [104] – [106]. Позначимо таку залежність функцією  $\Phi$ , тоді рівняння стану прийме вигляд (3.4):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \Phi(\varepsilon, \sigma, T, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \quad (3.4)$$

де  $\varepsilon$  – деформація повзучості;

$\sigma$  – напруження;

$T$  – температура;

$\omega_i, i = \overline{1, n}$  – структурні параметри пошкодження.

Для структурних параметрів  $\omega_i$ , повинні бути записані відповідні кінетичні рівняння виду (3.5):

$$d\omega_i = a_i d\varepsilon + b_i d\sigma + c_i dt + g_i dT, \quad (3.5)$$

де  $d\omega_i$  – диференціал від  $\omega_i$ ;

$a_i, b_i, c_i, g_i$  – деякі функції, що залежать від параметрів  $\varepsilon, \sigma, T, t, \omega_i, i = \overline{1, n}$ .

При тривалому високотемпературному навантаженні має місце зміна переважаючих механізмів деформування і руйнування, тому на основі гіпотези про наявність двох кінетичних параметрів пошкодження кінетичні рівняння записуються у вигляді (3.6) – (3.7) [106]:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = f_1(\sigma, T, \omega_1, \omega_2), \quad (3.6)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = f_2(\sigma, T, \omega_1, \omega_2). \quad (3.7)$$

Рівняння стану у свою чергу прийме вигляд (3.8):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \Phi(\varepsilon, \sigma, T, \omega_1, \omega_2). \quad (3.8)$$

Для випадку одновісного напруженого стану коли пошкодженість описується одним структурним параметром  $\omega$  найбільш повно процес повзучості конструкційних матеріалів можна описати за допомогою наступної системи кінетичних рівнянь, яка складається з кінетичного рівняння стану (3.9) і кінетичного рівняння пошкоджуваності (3.10) [106]:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(t, \sigma, T, \omega, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (3.9)$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(t, \sigma, T, \omega, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (3.10)$$

де  $\sigma$  – напруження;

$T$  – температура;

$\omega$  – структурний параметр пошкоджуваності;

$\varepsilon$  – деформація повзучості;

$t$  – час;

$c_1, c_2, \dots, c_n$  – сталі повзучості матеріалу.

Вважається, що матеріал ізотропний, а тріщини і пори рівномірно розподілені по всіх напрямках в середовищі. В такому випадку пошкодженість описується скалярною величиною  $\omega$ , що випливає з гіпотези про ізотропну зміну властивостей середовища, що пошкоджується. Напруження і температура в процесі повзучості вважаються постійними. Розглянемо три наступних критерії руйнування конструкційних матеріалів внаслідок повзучості.

### 3.3 Параметричний критерій руйнування

В якості критерію руйнування приймаємо досягнення параметром пошкоджуваності  $\omega$  значення 1. Залежність параметра пошкоджуваності від часу знаходимо шляхом інтегрування кінетичного рівняння пошкоджуваності (див. (3.10)), а час до руйнування  $t_p$  знаходимо як розв'язок рівняння  $\omega(t) = 1$ .

На підставі даного критерію функція розподілу часу до руйнування у довільній точці  $t$  чисельно дорівнює ймовірності того, що час до руйнування  $t_p$  менший за  $t$  і визначиться співвідношенням (3.11):

$$F_{t_p}(t) = P\{t_p < t\}. \quad (3.11)$$

У загальному випадку за знайденим розподілом випадкової величини  $t_p$  при фіксованих значення напруження та температури можна знайти ймовірність неруйнування зразка за час  $t$  за наступною формулою (3.12) [42]:

$$P_{t_p}(t) = 1 - F_{t_p}(t). \quad (3.12)$$

Призначений ресурс  $t^*$  можна визначити за заданим рівнем ймовірності неруйнування  $\alpha$  як розв'язок рівняння  $P_{t_p}(t) = \alpha$  відносно  $t$ .

### 3.4 Деформаційний критерій руйнування

В якості критерію руйнування приймаємо досягнення деформацією повзучості  $\varepsilon$  гранично допустимого значення  $\varepsilon^*$ . Залежність деформації повзучості від часу знаходиться шляхом інтегрування кінетичного рівняння стану (3.9).

Співвідношення для деформації повзучості у момент руйнування  $\varepsilon_{t_p}$  знаходиться з рівності, що характеризує деформацію повзучості  $\varepsilon(t)$  при  $t = t_p$ , де  $t_p$  – час до руйнування, отриманий за параметричним критерієм руйнування [42], [101]. Гранично допустиме значення деформації повзучості  $\varepsilon^*$  знаходиться як  $\alpha$ -квантиль розподілу деформації повзучості у момент руйнування  $\varepsilon_{t_p}$  за допомогою співвідношення (3.13):

$$F_{\varepsilon_{t_p}}(t) = \alpha, \quad (3.13)$$

де  $\alpha$  – деяке наперед задане значення ймовірності.

Оскільки деформація повзучості є неспадаючою функцією часу, то для ймовірності неруйнування матеріалу за час  $t$  має місце співвідношення (3.14) [115]:



$$P_{t_p}(t) = P\{t_p > t\} = P\{\varepsilon(\tau) \in (0, \varepsilon^*), \tau \in (0, t)\} = P\{\varepsilon(t) \in (0, \varepsilon^*)\}. \quad (3.14)$$

Далі будемо вважати, що випадковий процес  $\varepsilon(t)$  є гаусовим. Тоді співвідношення (3.14) прийме вигляд (3.15):

$$P_{t_p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[\varepsilon(t)]}} \int_0^{\varepsilon^*} \exp\left\{-\frac{(x - M[\varepsilon(t)])^2}{2D[\varepsilon(t)]}\right\} dx. \quad (3.15)$$

Функція розподілу часу до руйнування  $t_p$  згідно даного критерію визначиться співвідношенням (3.16):

$$F_{t_p}(t) = 1 - P_{t_p}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon^* - M[\varepsilon(t)]}{\sqrt{D[\varepsilon(t)]}}\right) - \Phi\left(\frac{M[\varepsilon(t)]}{\sqrt{D[\varepsilon(t)]}}\right), \quad (3.16)$$

де  $\Phi$  – функція Лапласа.

### 3.5 Змішаний критерій руйнування

В якості критерію руйнування приймаємо виконання першої з подій:

- досягнення параметром пошкоджуваності  $\omega(t)$  значення 1;
- досягнення деформацією повзучості  $\varepsilon(t)$  гранично допустимої величини  $\varepsilon^*$  [101].

Даний критерій враховує, як вплив параметра пошкоджуваності, так і вплив деформації повзучості на час до руйнування матеріалу. Час до руйнування визначається за допомогою співвідношення (3.17):

$$t_p = \min\{t_{p1}, t_{p2}\}, \quad (3.17)$$

де величини  $t_{p1}$ ,  $t_{p2}$  визначаються співвідношеннями (3.18) – (3.19):

$$t_{p1} = \min_{t: \omega(t) \geq 1} t, \quad (3.18)$$

$$t_{p2} = \min_{t: \varepsilon(t) \geq \varepsilon^*} t. \quad (3.19)$$

Функція розподілу часу до руйнування  $t_p$  згідно даного критерію визначиться співвідношенням (3.20):

$$F_{t_p}(x) = 1 - (1 - F_{t_{p1}}(x))(1 - F_{t_{p2}}(x)), \quad (3.20)$$

де  $F_{t_{p1}}(x)$  – функція розподілу часу до руйнування  $t_{p1}$  визначеного за параметричним критерієм руйнування;

$F_{t_{p2}}(x)$  – функція розподілу часу до руйнування  $t_{p2}$  визначеного за деформаційним критерієм руйнування.

### 3.6 Висновки до розділу 3

1. Описано механічні та кінетичні теорії повзучості. Зазначено, що при конкретизації рівнянь стану виникають основні труднощі щодо визначення функції  $\Phi$ .

2. Приведено основні теоретичні положення та визначальні рівняння кінетичної теорії Ю. М. Работнова, які використовуються для побудови стохастичної моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості.

3. Розглянуто параметричний, деформаційний та змішаний критерії руйнування матеріалу внаслідок повзучості та приведено їх ймовірнісну інтерпретацію.

## РОЗДІЛ 4

### ПРОГНОЗУВАННЯ ДОВГОВІЧНОСТІ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ІЗОТЕРМІЧНІЙ ПОВЗУЧОСТІ

4.1 Стохастична модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості без урахування температурної залежності та стадії зміцнення

Для описання процесу повзучості матеріалу з плином часу розглянемо кінетичне рівняння стану у вигляді степеневі залежності від напруження  $\sigma$  (4.1):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{a\sigma^n}{(1-\omega)^n}, \quad (4.1)$$

а кінетичне рівняння пошкоджуваності розглянемо у двох різних варіантах – степеневі залежності від напруження (4.2):

$$\dot{\omega} = \frac{b\sigma^k}{(1-\omega)^k}, \quad (4.2)$$

та експоненційної залежності від напруження (4.3) [111]:

$$\dot{\omega} = \frac{b \exp(\sigma/c)}{(1-\omega)^n}, \quad (4.3)$$

де  $a, b, n, k, c$  – сталі повзучості матеріалу.

Вважаємо параметри  $n, k, c$  детермінованими величинами, а параметри  $a$  та  $b$  – незалежними нормально розподіленими випадковими величинами [109]. Далі позначимо через  $N(\mu_a, s_a^2)$ ,  $N(\mu_b, s_b^2)$  розподіли випадкових величин  $a$  та  $b$  відповідно, де  $\mu_a, \mu_b$  – математичні сподівання,  $s_a^2, s_b^2$  – дисперсії.

## 4.2 Реалізація стохастичної моделі на прикладі параметричного критерію руйнування

Інтегруючи рівняння (4.2), (4.3) та враховуючи що  $\omega(0)=0$ , отримаємо співвідношення для параметру пошкоджуваності кожної з моделей (4.1) – (4.2), (4.1) – (4.3) у вигляді (4.4) та (4.5) відповідно:

$$\omega_I(t) = 1 - [1 - (k + 1) \cdot b \cdot \sigma^k \cdot t]^{1/(k+1)}, \quad (4.4)$$

$$\omega_{II}(t) = 1 - \left[ 1 - (n + 1) \cdot b \cdot \exp\left(\frac{\sigma}{c}\right) \cdot t \right]^{1/(n+1)}. \quad (4.5)$$

З рівностей (4.4) та (4.5) враховуючи умову  $\omega(t_p)=1$ , визначимо час до руйнування для кожної з моделей відповідно

$$t_{pI} = \frac{1}{b(k+1)\sigma^k}, \quad (4.6)$$

$$t_{pII} = \frac{1}{b(n+1)\exp(\sigma/c)}. \quad (4.7)$$

Функція розподілу  $F_{t_p}$  часу до руйнування  $t_p$  для кожної з моделей визначиться за допомогою співвідношень (4.8), (4.9):

$$F_{t_{pI}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x^{(k+1)\sigma^k}} \\ 1 - \int_0^x f_b(t) dt, & x > 0 \end{cases}, \quad (4.8)$$

$$F_{t_{pII}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x^{(n+1)\exp(\sigma/c)}} \\ 1 - \int_0^x f_b(t) dt, & x > 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

де  $f_b$  – щільність розподілу випадкової величини  $b$ .

Щільність розподілу  $f_{t_p}$  часу до руйнування  $t_p$  для кожної з моделей визначиться за допомогою співвідношень (4.10), (4.11):

$$f_{t_{pl}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+k) \cdot \sigma^k} \frac{1}{x^2} f_b\left(\frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right), & x > 0 \end{cases}, \quad (4.10)$$

$$f_{t_{plI}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{(n+1) \exp(\sigma/c)} \frac{1}{x^2} f_b\left(\frac{1}{x(n+1) \exp(\sigma/c)}\right), & x > 0 \end{cases}. \quad (4.11)$$

4.3 Реалізація стохастичної моделі на прикладі деформаційного критерію руйнування

Інтегруючи рівняння (див. (4.1)) та враховуючи співвідношення (див. (4.4) – (4.5)), отримаємо наступні вирази (4.12), (4.13) для визначення деформації повзучості  $\varepsilon(t)$  для кожної з моделей відповідно:

$$\varepsilon_I(t) = \frac{a\sigma^{n-k}}{b(k+1-n)} \left[ 1 - (1-x)^\gamma \right], \quad (4.12)$$

де  $x = b(k+1)\sigma^k t$ ;

$$\gamma = \frac{k+1-n}{k+1}.$$

$$\varepsilon_{II}(t) = \frac{a\sigma^n}{b \exp(\sigma/c)} \left[ 1 - (1-x)^\gamma \right], \quad (4.13)$$

де  $x = b(n+1)\exp(\sigma/c) t$ ;

$$\gamma = \frac{1}{n+1}.$$

З рівностей (див. (4.12) – (4.13)) отримаємо співвідношення для деформації повзучості у момент руйнування  $\varepsilon_{t_p}$  для кожної з моделей у вигляді (4.14),

(4.15):

$$\varepsilon_{t_{pI}} = \varepsilon(t_{pI}) = \frac{a\sigma^{n-k}}{b(k+1-n)}, \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{t_{pII}} = \varepsilon(t_{pII}) = \frac{a\sigma^n}{b\exp(\sigma/c)}. \quad (4.15)$$

Зі співвідношень (див. (4.12) – (4.13)) випливає, що деформація повзучості  $\varepsilon(t)$  є стохастично нелінійною функцією відносно випадкових величин  $a$ ,  $b$ . Для аналітичного визначення основних характеристик розподілу деформації повзучості у довільний, але фіксований момент часу  $t$  проведемо стохастичну лінеаризацію  $\varepsilon(t)$ , використовуючи середньоквадратичну апроксимацію функції  $(1-x)^\gamma$  на інтервалі  $(0,1)$  степеневими поліномами [109], яка у загальному випадку запишеться у наступному вигляді (4.16):

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n p_i x^i, \quad (4.16)$$

де  $p_i, i = \overline{0, n}$  невідомі коефіцієнти.

При цьому ступінь полінома (див. (4.16)) визначається заданою похибкою (4.17):

$$\delta = \sqrt{\int_0^1 \left( (1-x)^\gamma - P_n(x) \right)^2 dx}. \quad (4.17)$$

Для забезпечення похибки  $\delta = 10^{-2}$  як правило досить обмежитися у співвідношенні (див. (4.16)) поліномом четвертого ступеня. Невідомі коефіцієнти  $p_i, i = \overline{0,4}$  поліному  $P_4(x)$  знаходимо мінімізуючи функцію вигляду (4.18):

$$f(p_0, p_1, p_2, p_4) = \int_0^1 \left( (1-x)^n - P_4(x) \right)^2 dx. \quad (4.18)$$

Враховуючи співвідношення (див. (4.16)) отримаємо вирази для деформації повзучості для кожної з моделей у двох виглядах (4.19) та (4.20) відповідно:

$$\varepsilon_I(t) = \frac{a\sigma^{n-k}}{k+1-n} \left[ (1-p_0) \cdot b^{-1} - \sum_{j=1}^4 p_j \cdot b^{j-1} \cdot (k+1)^j \cdot \sigma^{kj} \cdot t^j \right], \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_{II}(t) = \frac{a\sigma^n}{\exp(\sigma/c)} \left[ (1-p_0) \cdot b^{-1} - \sum_{j=1}^4 p_j \cdot b^{j-1} \cdot (n+1)^j \cdot \exp(\sigma \cdot j/c) \cdot t^j \right]. \quad (4.20)$$

Співвідношення (4.19) і (4.20) є лінійними відносно випадкових величин  $ab^{-1}, a, ab, ab^2, ab^3$ . Математичне сподівання та дисперсія  $\varepsilon(t)$  у довільний момент часу  $t$  визначаються за допомогою наступних виразів (4.21) та (4.22):

$$M[\varepsilon(t)] = \sum_{i=1}^5 M[x_i] L_i, \quad (4.21)$$

$$D[\varepsilon(t)] = \sum_{i=1}^5 D[x_i] \cdot L_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} L_i \cdot L_j \cdot K_{x_i, x_j}, \quad (4.22)$$

де  $x_i, x_j \in \{ ab^{-1}, a, ab, ab^2, ab^3 \}$ ,  $i, j = \overline{1,5}$ ;

$L_i$  – детерміновані величини при фіксованому часі  $t$ , які визначаються зі співвідношень (4.19), (4.20);

$M[x_i], D[x_i]$  – математичне сподівання та дисперсія випадкової величини  $x_i$ ;

$K_{x_i, x_j}$  – коваріації відповідних випадкових величин  $x_i, x_j$ .

Функція розподілу випадкової величини  $\varepsilon_{t_p}$  в загальному випадку визначається співвідношенням (4.23):

$$F_{\varepsilon_{t_p}}(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ P\{\varepsilon_{t_p} < z\}, & z > 0 \end{cases}. \quad (4.23)$$

При  $z > 0$  маємо рівність (4.24):

$$F_{\varepsilon_{t_p}}(z) = P\left\{\frac{a}{b}K(\sigma) < z\right\} = \iint_S f_{a,b}(x, y) dx dy, \quad (4.24)$$

де  $f_{a,b}(x, y)$  – сумісна щільність розподілу випадкових величин  $a, b$ ;

$$K_I(\sigma) = \frac{\sigma^{n-k}}{(k+1-n)};$$

$$K_{II}(\sigma) = \frac{\sigma^n}{\exp(\sigma/c)};$$

$S$  – область інтегрування, що визначається нерівністю:  $\frac{x}{y}K(\sigma) < z$ .

Перетворивши співвідношення (див. (4.24)) отримаємо (4.25):

$$F_{\varepsilon_{t_p}}(z) = \int_{-\infty}^0 dy \int_{\frac{zy}{K(\sigma)}}^{+\infty} f_{a,b}(x, y) dx + \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\frac{zy}{K(\sigma)}} f_{a,b}(x, y) dx. \quad (4.25)$$

Щільність розподілу випадкової величини  $\varepsilon_{t_p}$  визначиться за допомогою наступного співвідношення (4.26):

$$f_{\varepsilon_{t_p}}(z) = \frac{1}{K(\sigma)} \left[ \int_0^{+\infty} y \cdot f_{a,b}\left(\frac{zy}{K(\sigma)}, y\right) \cdot dy - \int_{-\infty}^0 y \cdot f_{a,b}\left(\frac{zy}{K(\sigma)}, y\right) \cdot dy \right]. \quad (4.26)$$

Оскільки випадкові величини  $a, b$  є незалежними, то має місце рівність (4.27):



$$f_{a,b}(x, y) = f_a(x) \cdot f_b(y) = \frac{1}{2\pi \cdot s_a \cdot s_b} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{(x - \mu_a)^2}{2s_a^2} + \frac{(y - \mu_b)^2}{2s_b^2} \right) \right\}. \quad (4.27)$$

Функція розподілу  $F_{t_p}$  часу до руйнування  $t_p$  визначиться рівністю (4.28):

$$F_{t_p}(t) = 1 - \Phi \left( \frac{\varepsilon^* - M[\varepsilon(t)]}{\sqrt{D[\varepsilon(t)]}} \right) - \Phi \left( \frac{M[\varepsilon(t)]}{\sqrt{D[\varepsilon(t)]}} \right), \quad (4.28)$$

де  $M[\varepsilon(t)]$ ,  $D[\varepsilon(t)]$  – функції задані співвідношеннями (див. (4.21), (4.22)) відповідно.

#### 4.4 Реалізація моделі на прикладі змішаного критерію руйнування

Функція розподілу часу до руйнування згідно даного критерію визначиться співвідношенням (4.29):

$$F_{t_p}(x) = 1 - (1 - F_{t_{p1}}(x)) \cdot (1 - F_{t_{p2}}(x)), \quad (4.29)$$

де  $F_{t_{p1}}(x)$  – функція розподілу часу до руйнування визначеного за параметричним критерієм, яка задається співвідношенням (див. (4.8) або (4.9)) в залежності від типу моделі;

$F_{t_{p2}}(x)$  – функція розподілу часу до руйнування визначеного за деформаційним критерієм, яка задається співвідношенням (див. (4.28)).

#### 4.5 Методика ідентифікації сталих повзучості матеріалу

Для швидкості усталеної повзучості має місце співвідношення (4.30):

$$\dot{\varepsilon}_0 = a\sigma^n. \quad (4.30)$$

Логарифмуючи рівність (див. (4.30)) отримаємо вираз (4.31):

$$\ln \dot{\varepsilon}_0 = \ln a + n \ln \sigma, \quad (4.31)$$

за допомогою якого користуючись методом найменших квадратів (МНК) за відомими експериментальними значеннями  $\dot{\varepsilon}_{0e}$ ,  $\sigma_e$ , знайдемо оцінки  $\hat{a}$ ,  $\hat{n}$  параметрів  $a$ ,  $n$  відповідно за формулами (4.32), (4.33) [18] – [20]:

$$\hat{n} = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{ei} \ln \varepsilon_{0ei} - \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{ei} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{0ei}}{N \sum_{i=1}^N \ln^2 \sigma_{ei} - \left( \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{ei} \right)^2}, \quad (4.32)$$

$$\hat{a} = \exp \left( \frac{\sum_{i=1}^N \ln \varepsilon_{0ei} - n \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{ei}}{N} \right). \quad (4.33)$$

Далі будемо вважати, що  $n = \hat{n}$  і отримаємо наступне співвідношення (4.34) для знаходження вибіркового вектору  $\tilde{a}$ :

$$\tilde{a} = \left\{ \frac{\dot{\varepsilon}_{0ei}}{n}, i = \overline{1, N} \right\}. \quad (4.34)$$

З рівнянь (див. (4.6), (4.7)) користуючись МНК за експериментальними даними для величин  $t_{pe}$  та  $\sigma_e$  отримаємо оцінки параметрів  $b$ ,  $k$  для моделі (див. (4.1) – (4.2)) та оцінки параметрів  $b$ ,  $c$  для моделі (див. (4.1) – (4.3)) за допомогою співвідношень (4.35) – (4.38):

$$\hat{b}_l = \frac{1}{(k+1)} \exp \left( - \frac{\sum_{i=1}^N \ln t_{pei} + k \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{ei}}{N} \right), \quad (4.35)$$

$$\hat{k} = \frac{-N \cdot \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{ei} \ln t_{pei} + \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{ei} \sum_{i=1}^N \ln t_{pei}}{N \sum_{i=1}^N \ln^2 \sigma_{ei} - \left( \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{ei} \right)^2}, \quad (4.36)$$

$$\hat{b}_{II} = \frac{1}{(n+1)} \exp \left( - \frac{\sum_{i=1}^N \ln t_{pei} + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N \sigma_{ei}}{N} \right), \quad (4.37)$$

$$\hat{c} = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N \sigma_{ei} - \left( \sum_{i=1}^N \sigma_{ei} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ei} \cdot \sum_{i=1}^N \ln t_{pei} - N \sum_{i=1}^N \sigma_{ei} \ln t_{pei}}. \quad (4.38)$$

Далі будемо вважати, що  $k = \hat{k}$ ,  $c = \hat{c}$  і отримаємо вирази (4.39) – (4.40) для знаходження вибіркового вектору  $\tilde{b}$  для кожної з моделей:

$$\tilde{b}_I = \left\{ \frac{1}{t_{pei} (k+1) \sigma_{ei}^k}, i = \overline{1, N} \right\}, \quad (4.39)$$

$$\tilde{b}_{II} = \left\{ \frac{1}{t_{pei} (n+1) \exp(\sigma_{ei} / c)}, i = \overline{1, N} \right\}. \quad (4.40)$$

Незміщені та спроможні оцінки математичного сподівання і дисперсії випадкових величин  $a$ ,  $b$  для фіксованого значення напруження  $\sigma$  знаходять за допомогою співвідношень (4.41) – (4.44):

$$\hat{\mu}_{a,\sigma} = \frac{1}{N_\sigma} \sum_{i=1}^{N_\sigma} a_i, \quad (4.41)$$

$$\hat{s}_{a,\sigma}^2 = \frac{1}{N_\sigma - 1} \sum_{i=1}^{N_\sigma} (a_i - \hat{\mu}_{a,\sigma})^2, \quad (4.42)$$

$$\hat{\mu}_{b,\sigma} = \frac{1}{N_\sigma} \sum_{i=1}^{N_\sigma} b_i, \quad (4.43)$$

$$\hat{s}_{b,\sigma}^2 = \frac{1}{N_\sigma - 1} \sum_{i=1}^{N_\sigma} (b_i - \hat{\mu}_{b,\sigma})^2, \quad (4.44)$$

де  $N_\sigma$  – кількість експериментів, що відповідають даному значенню напруження  $\sigma$ .

Оцінки параметрів розподілу випадкових величин  $a$ ,  $b$  визначаються наступним чином (4.45) – (4.48):

$$\hat{\mu}_a = \frac{1}{N_{(\sigma)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma)}} \hat{\mu}_{a,\sigma}, \quad (4.45)$$

$$\hat{s}_a^2 = \frac{1}{N_{(\sigma)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma)}} \hat{s}_{a,\sigma}^2, \quad (4.46)$$

$$\hat{\mu}_b = \frac{1}{N_{(\sigma)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma)}} \hat{\mu}_{b,\sigma}, \quad (4.47)$$

$$\hat{s}_b^2 = \frac{1}{N_{(\sigma)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma)}} \hat{s}_{b,\sigma}^2, \quad (4.48)$$

де  $N_{(\sigma)}$  – кількість різних експериментальних значень напруження  $\sigma$ .

#### 4.6 Аналіз результатів

Для оцінки застосовності запропонованої стохастичної моделі руйнування проведемо порівняння теоретичних розрахунків з результатами випробувань на повзучість зразків з корозійностійкої сталі 12X18H10T при температурі  $T = 850$  °C для чотирьох різних рівнів напруження  $\sigma = \{ 39,24 ; 49,05 ; 58,86 ; 78,48 \}$

МПа [45]. У таблицях 4.1, 4.2 представлені відповідно оцінки детермінованих параметрів моделі та розподіли випадкових величин  $a$ ,  $b$ .

Таблиця 4.1 – Оцінки детермінованих параметрів моделі

Параметр моделі	Оцінка параметру моделі
$n$	3,02
$k$	3,1
$c$	17,8

Таблиця 4.2 – Розподіли випадкових величин  $a$ ,  $b$

Вид моделі	Розподіл випадкової величини $a$	Розподіл випадкової величини $b$
Степенева	$N(1,38 \cdot 10^{-8}; 2,78 \cdot 10^{-9})$	$N(5,72 \cdot 10^{-8}; 1,3 \cdot 10^{-8})$
Експоненційна		$N(6 \cdot 10^{-4}; 1,4 \cdot 10^{-4})$

Апроксимуючі поліноми і середньоквадратичні похибки для кожної з моделей відповідно приймуть вигляд (4.49) – (4.50):

$$P_I(x) = 1,03 - 0,74x + 1,46x^2 - 1,57x^3 + 0,18x^4, \quad \delta = 1,7 \cdot 10^{-4}, \quad (4.49)$$

$$P_{II}(x) = 0,97 - 0,02x - 0,39x^2 - 0,02x^3 - 0,1x^4, \quad \delta = 3,4 \cdot 10^{-4}. \quad (4.50)$$

У таблиці 4.3 представлені основні ймовірнісні характеристики розподілу часу до руйнування  $t_p$ , виражені у годинах. Верхній рядок теоретичних розрахунків відповідає моделі, яка виражає степеневу залежність від напруження, нижній рядок – моделі, яка виражає експоненційну залежність від напруження. Як бачимо, теоретичні результати добре узгоджуються з експериментальними даними як за часом до руйнування, так і за середньоквадратичним відхиленням

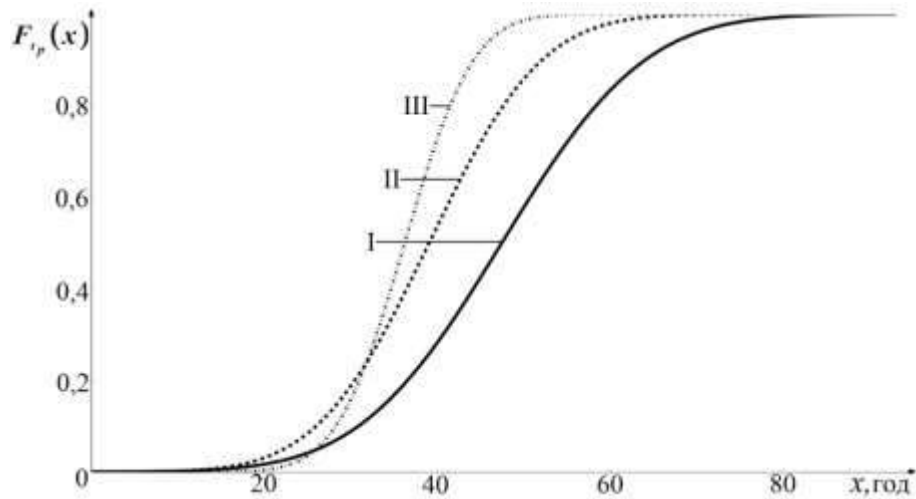
для кожної із моделей. Модель, що виражає експоненційну залежність від напруження, більш точно прогнозує час до руйнування.

Таблиця 4.3 – Основні ймовірнісні характеристики розподілу часу до руйнування  $t_p$

Напруження $\sigma$ , МПа	Температура $T$ , °С	Розрахункові значення МС часу до руйнування $t_p$ за критеріями, год			Розрахункові значення СВ часу до руйнування $t_p$ за критеріями, год			Значення характеристик $t_p$ за експериментами, год	
		ПКР	ДКР	ЗКР	ПКР	ДКР	ЗКР	BC	BCB
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
39,24	850	47,51	39,1	36,28	12,96	10,21	6,23	53,83	14,93
		53,89	44,23	41,14	14,64	11,18	7,06		
49,05	850	24,49	17,39	16,56	5,05	4,7	2,99	23,5	4,22
		31,19	22,11	21,25	7,8	4,79	3,35		
58,86	850	11,04	6,95	6,83	5,9	2,2	1,72	15,37	5,01
		16,22	7,77	7,69	8,07	2,56	2,19		
78,48	850	3,4	4,53	4,24	4,15	1,06	0,84	6	0
		5,19	5,56	5,02	4,12	1,06	0,93		

Примітка. ПКР – параметричний критерій руйнування; ДКР – деформаційний критерій руйнування; ЗКР – змішаний критерій руйнування; МС – математичне сподівання; СВ – середньоквадратичне відхилення; BC – вибіркове середнє; BCB – вибіркове середньоквадратичне відхилення.

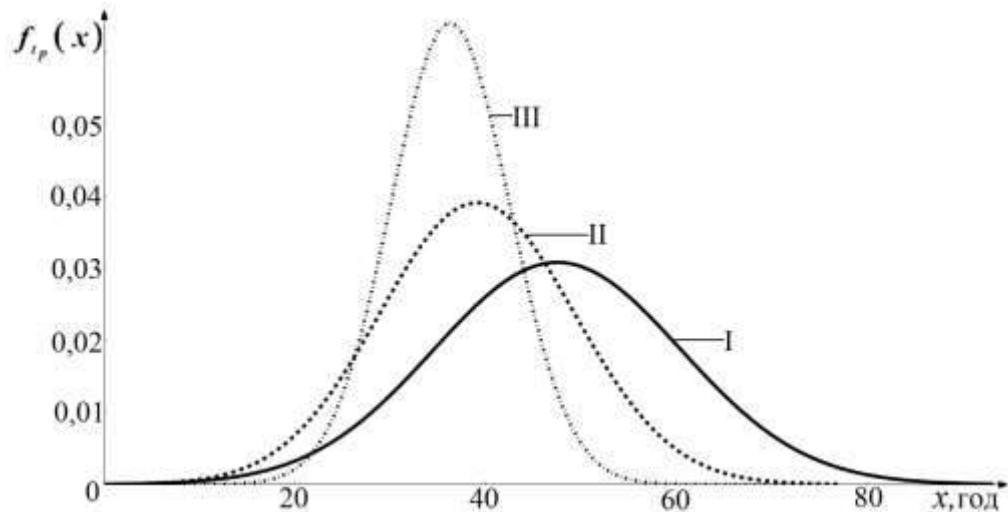
На рисунку 4.1 представлено графік функції розподілу часу до руйнування  $t_p$  для ступеневі моделі при напруженні  $\sigma = 39,24$  МПа та температурі  $T = 850$  °С для корозійностійкої сталі 12Х18Н10Т.



I – ПКР; II – ДКР; III – ЗКР;  $x$  – незалежна змінна, яка описує множину значень випадкової величини  $t_p$

Рисунок 4.1

На рисунку 4.2 представлено графік щільності розподілу часу до руйнування  $t_p$  для ступеневої моделі при напруженні  $\sigma = 39,24$  МПа та температурі  $T = 850$  °С для корозійностійкої сталі 12Х18Н10Т.



I – ПКР; II – ДКР; III – ЗКР;  $x$  – незалежна змінна, яка описує множину значень випадкової величини  $t_p$

Рисунок 4.2

На кожному з даних рисунків проілюстровано графіки для трьох різних критеріїв руйнування, які показують відмінність значень ймовірності руйнування, розрахованої за різними критеріями за один і той же проміжок часу. Зокрема, з графіків випливає, що за заданий проміжок часу в більшості випадків ПКР прогнозує найменшу ймовірність руйнування, а ЗКР – найбільшу ймовірність руйнування.

#### 4.7 Висновки до розділу 4

1. Розроблено стохастичну модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості без урахування температурної залежності та стадії зміцнення на основі трьох різних критеріїв руйнування.

2. Проведено стохастичну лінеаризацію деформації повзучості, що дозволило аналітично визначити основні ймовірнісні характеристики розподілу деформації повзучості у довільний момент часу  $t$ .

3. Розроблено методику ідентифікації сталих повзучості матеріалу, яка заснована на статистичній обробці сімейства експериментальних кривих повзучості та використанні методів теорії ймовірностей, математичної статистики та методів оптимізації.

4. Проведене порівняння теоретичних розрахунків з результатами випробувань на повзучість зразків з корозійностійкої сталі 12X18H10T при температурі  $T = 850$  °C для чотирьох рівнів напруження.

5. Показано, що теоретичні розрахунки, проведені по двох моделях задовільно узгоджуються з результатами експериментів, як за часом до руйнування, так і за його середньоквадратичним відхиленням.

6. Розроблена стохастична модель може бути використана для прогнозування часу до руйнування інших конструкційних матеріалів.



**РОЗДІЛ 5**  
**ПРОГНОЗУВАННЯ ДОВГОВІЧНОСТІ КОНСТРУКЦІЙНИХ**  
**МАТЕРІАЛІВ ПРИ ІЗОТЕРМІЧНІЙ ПОВЗУЧОСТІ З УРАХУВАННЯМ**  
**ТЕМПЕРАТУРНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ТА СТАДІЇ ЗМІЦНЕННЯ**

5.1 Стохастична модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості з урахуванням температурної залежності та стадії зміцнення

Для описання процесу повзучості матеріалу з плином часу розглянемо кінетичне рівняння стану у вигляді (5.1):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{a \cdot \exp\left(-\frac{h}{T}\right) \cdot \sigma^n \cdot \left[1 + c \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon}{g}\right)\right]}{(1 - \omega)^n}, \quad (5.1)$$

а кінетичне рівняння пошкоджуваності у вигляді (5.2):

$$\dot{\omega} = \frac{b \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m}{(1 - \omega)^l}, \quad (5.2)$$

де  $a, b, n, m, l, p, h, c, g$  – сталі повзучості матеріалу [99], [106].

Параметри  $c, g$  описують деформаційне зміцнення, яке характерне для першої стадії повзучості. Параметри  $h$  та  $p$  залежать від універсальної газової постійної, крім того параметр  $h$  залежить також від енергії активації повзучості, а параметр  $p$  – від енергії активації пошкоджуваності [31].

Будемо вважати параметри  $n, m, l, p, h, c, g$  – детермінованими величинами, а параметри  $a, b$  – незалежними нормально розподіленими випадковими величинами [102], [140]. Далі позначимо через  $N(\mu_a, s_a^2)$ ,  $N(\mu_b, s_b^2)$  розподіли випа-

дкових величин  $a$  та  $b$  відповідно, де  $\mu_a$ ,  $\mu_b$  – математичні сподівання,  $s_a^2$ ,  $s_b^2$  – дисперсії.

5.2 Реалізація стохастичної моделі на прикладі параметричного критерію руйнування

Інтегруючи рівняння (5.2) та враховуючи що  $\omega(0)=0$ , отримаємо співвідношення для визначення параметру пошкоджуваності у вигляді (5.3):

$$\omega(t) = 1 - \left[ 1 - (l+1) \cdot b \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m \cdot t \right]^{\frac{1}{l+1}}. \quad (5.3)$$

З рівняння (5.3) враховуючи умову  $\omega(t_p)=1$ , визначимо час до руйнування у вигляді (5.4):

$$t_p = \frac{1}{\left[ (l+1) \cdot b \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m \right]}. \quad (5.4)$$

Функція розподілу  $F_{t_p}$  часу до руйнування  $t_p$  визначиться наступним співвідношенням (5.5):

$$F_{t_p}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x \cdot (l+1) \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right)}, & \\ 1 - \int_0^x f_b(t) dt, & x > 0 \end{cases}, \quad (5.5)$$

де  $f_b$  – щільність розподілу випадкової величини  $b$ .

Щільність розподілу  $f_{t_p}$  часу до руйнування  $t_p$  прийме вигляд (5.6):

$$f_{t_p}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+l) \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right)} \frac{1}{x^2} f_b\left(\frac{1}{x \cdot (l+1) \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right)}\right), & x > 0 \end{cases} \cdot (5.6)$$

5.3 Реалізація стохастичної моделі на прикладі деформаційного критерію руйнування

Інтегруючи рівняння (див. (5.1)), отримуємо наступний вираз (5.7) для деформації повзучості  $\varepsilon(t)$ :

$$\varepsilon(t) = g \ln \left[ (c+1) \cdot \exp\left(\frac{G(t)}{g}\right) - c \right], \quad (5.7)$$

де

$$G(t) = \frac{a \cdot \exp\left(\frac{p-h}{T}\right) \cdot \sigma^{n-m}}{b \cdot (l+1-n)} \cdot \left\{ 1 - [1-x]^\gamma \right\}, \quad (5.8)$$

$$x = (l+1) \cdot b \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m \cdot t, \quad \gamma = \frac{l-n+1}{l+1}. \quad (5.9)$$

Для визначення основних ймовірнісних характеристик розподілу  $\varepsilon(t)$  у довільний, але фіксований момент часу  $t$  проведемо стохастичну лінеаризацію функції  $G(t)$ , використовуючи середньоквадратичну апроксимацію функції  $(1-x)^\gamma$  на інтервалі  $(0,1)$  степеневими поліномами [106]. Для спрощення подальших розрахунків обмежимося поліномом третього ступеня  $P_3(x)$  з вільним членом, який дорівнює одиниці ( $p_0=1$ ). Невідомі коефіцієнти  $p_i, i = \overline{1,3}$  поліному  $P_3(x)$  знаходимо мінімізуючи вираз (5.10):

$$f(p_1, p_2, p_3) = \int_0^1 \left( (1-x)^p - P_3(x) \right)^2 dx. \quad (5.10)$$

Співвідношення (див. (5.8)) тоді прийме вигляд (5.11):

$$G(t) = \frac{a \exp\left(\frac{p-h}{T}\right) \sigma^{n-m}}{n-l-1} \left[ \sum_{j=1}^3 p_j \cdot b^{j-1} \cdot (l+1)^j \cdot \exp\left(\frac{-pj}{T}\right) \cdot \sigma^{mj} \cdot t^j \right]. \quad (5.11)$$

Введемо наступні позначення (5.12) – (5.14):

$$G = G(t), \quad (5.12)$$

$$A = \frac{a \exp\left(\frac{p-h}{T}\right) \sigma^{n-m}}{l+1-n}, \quad (5.13)$$

$$B = B(t) = \sum_{j=1}^3 p_j \cdot b^{j-1} \cdot (l+1)^j \cdot \exp\left(\frac{-pj}{T}\right) \cdot \sigma^{mj} \cdot t^j. \quad (5.14)$$

Рівняння (див. (5.14)) у довільний, але фіксований момент часу  $t$  прийме вигляд (5.15):

$$B_t = B_{1t} + B_{2t}b + B_{3t}b^2, \quad (5.15)$$

де  $B_t$  – випадкова величина (значення випадкового процесу  $B$  в точці  $t$ ),

$$B_{jt} = p_j \cdot (l+1)^j \cdot \exp\left(\frac{-pj}{T}\right) \cdot \sigma^{mj} \cdot t^j, \quad j = \overline{1,3} \text{ – коефіцієнти рівняння.}$$

Функція розподілу випадкової величини  $B_t$  визначиться співвідношенням (5.16):

$$F_{B_t}(y) = P\{B_t < y\} = P\{B_{3t}b^2 + B_{2t}b + (B_{1t} - y) < 0\}. \quad (5.16)$$

Якщо  $B_{2t}^2 - 4B_{3t} \cdot (B_{1t} - y) \leq 0$ , то має місце (5.17):

$$F_{B_t}(y) = \begin{cases} 0, & B_{3t} \geq 0 \\ 1, & B_{3t} < 0 \end{cases}. \quad (5.17)$$

Якщо  $B_{2t}^2 - 4B_{3t} \cdot (B_{1t} - y) > 0$ , то має місце (5.18):

$$F_{B_t}(y) = P\{B_{3t}(b-b_1) \cdot (b-b_2) < 0\} = \begin{cases} P\{b_1 < b < b_2\}, & B_{3t} > 0 \\ 1 - P\{b_1 < b < b_2\}, & B_{3t} < 0 \end{cases}, \quad (5.18)$$

де  $b_1, b_2$  – корені квадратного рівняння  $B_{3t}b^2 + B_{2t}b + (B_{1t} - y) = 0$ .

Щільності розподілів випадкових величини  $A$ ,  $B_t$  визначаються відповідно співвідношеннями (5.19) – (5.20):

$$f_{B_t}(y) = F'_{B_t}(y), \quad (5.19)$$

$$f_A(y) = \frac{|l+1-n|}{\exp\left(\frac{p-h}{T}\right)\sigma^{n-m}} f_a \left( y \cdot \frac{l+1-n}{\exp\left(\frac{p-h}{T}\right)\sigma^{n-m}} \right). \quad (5.20)$$

Враховуючи співвідношення (див. (5.19) та (5.20)) та незалежність випадкових величин  $A$ ,  $B_t$  отримаємо вираз (5.21) для знаходження у довільний, але фіксований момент часу  $t$  щільності розподілу випадкової величини  $G$ :

$$f_{G_t}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{A,B_t} \left( y, \frac{v}{y} \right) \cdot \frac{1}{|y|} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(y) \cdot f_{B_t} \left( \frac{v}{y} \right) \cdot \frac{1}{|y|} dy. \quad (5.21)$$

Співвідношення для знаходження математичного сподівання та дисперсії  $\varepsilon(t)$  у довільний, але фіксований момент часу  $t$  мають вигляд (5.22) – (5.23):

$$M[\varepsilon(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{gln} \left[ (c+1) \cdot \exp\left(\frac{y}{g}\right) - c \right] f_{G_t}(y) dy, \quad (5.22)$$

$$D[\varepsilon(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ g \ln \left[ (c+1) \cdot \exp\left(\frac{y}{g}\right) - c \right] \right]^2 f_{G_t}(y) dy - M^2[\varepsilon(t)]. \quad (5.23)$$

Деформація повзучості у момент руйнування  $\varepsilon_{t_p}$  визначиться співвідношенням (5.24):

$$\varepsilon_{t_p} = g \ln \left[ (c+1) \cdot \exp \left( \frac{a \cdot \exp\left(\frac{p-h}{T}\right) \cdot \sigma^{n-m}}{g \cdot b \cdot (l+1-n)} \right) - c \right]. \quad (5.24)$$

Будемо вважати, що  $\varepsilon_{t_p}$  є гаусовою випадковою величиною. Введемо позначення вигляду (5.25):

$$M = \frac{a \cdot \exp\left(\frac{p-h}{T}\right) \cdot \sigma^{n-m}}{b \cdot g \cdot (l+1-n)}. \quad (5.25)$$

Скориставшись співвідношенням (див. (4.26)) маємо вираз (5.26) для щільності розподілу випадкової величини  $M$  :

$$f_M(z) = \frac{1}{K(\sigma, T)} \left[ \int_0^{+\infty} y \cdot f_{a,b} \left( \frac{zy}{K(\sigma, T)}, y \right) \cdot dy - \int_{-\infty}^0 y \cdot f_{a,b} \left( \frac{zy}{K(\sigma, T)}, y \right) \cdot dy \right], \quad (5.26)$$

$$\text{де } K(\sigma, T) = \frac{\exp\left(\frac{p-h}{T}\right) \cdot \sigma^{n-m}}{g \cdot (l+1-n)}.$$

Отримаємо співвідношення (5.27) – (5.28) для знаходження математичного сподівання та дисперсії деформації повзучості у момент руйнування  $\varepsilon_{t_p}$  :

$$M \left[ \varepsilon_{t_p} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g \ln \left[ (c+1) \cdot \exp(y) - c \right] f_M(y) dy, \quad (5.27)$$

$$D[\varepsilon_{t_p}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (g \ln[(c+1) \cdot \exp(y) - c])^2 f_M(y) dy - M^2[\varepsilon_{t_p}]. \quad (5.28)$$

Функція розподілу  $F_{t_p}$  часу до руйнування  $t_p$  прийме вигляд (5.29):

$$F_{t_p}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon^* - M[\varepsilon(t)]}{\sqrt{D[\varepsilon(t)]}}\right) - \Phi\left(\frac{M[\varepsilon(t)]}{\sqrt{D[\varepsilon(t)]}}\right). \quad (5.29)$$

#### 5.4 Реалізація стохастичної моделі на прикладі змішаного критерію руйнування

Функція розподілу часу до руйнування згідно даного критерію визначиться співвідношенням (5.30):

$$F_{t_p}(t) = 1 - (1 - F_{t_{p1}}(t)) \cdot (1 - F_{t_{p2}}(t)), \quad (5.30)$$

де  $F_{t_{p1}}(t)$  – функція розподілу часу до руйнування визначеного за параметричним критерієм, яка задається співвідношенням (5.5);

$F_{t_{p2}}(t)$  – функція розподілу часу до руйнування визначеного за деформаційним критерієм, яка задається співвідношенням (5.29).

#### 5.5 Визначення сталих повзучості матеріалу

Нехай за результатами  $N$  експериментів на довготривалу міцність при різних значеннях напружень  $\sigma_e$  та температур  $T_e$  чисельно визначені наступні характеристики:

–  $\dot{\varepsilon}_{0e}$  – швидкість усталеної повзучості у початковий момент часу;

- $t_{1e}$  – тривалість першої стадії повзучості;
- $t_{pe}$  – час до руйнування;
- $\varepsilon_{t_{pe}}$  – деформація повзучості у момент руйнування.

Розглянемо підхід, що дозволяє визначати сталі повзучості матеріалу з урахуванням імовірнісного характеру руйнування. Для знаходження відповідних оцінок параметрів будемо користуватися відомими співвідношеннями (5.32) – (5.34) для оцінок двохфакторної регресійної моделі виду  $y = d_0 + d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2$  [124], [125]:

$$\hat{d}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 - \sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_2) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \cdot (x_{i2} - \bar{x}_2)}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 - \left( \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \cdot (x_{i2} - \bar{x}_2) \right)^2}, \quad (5.32)$$

$$\hat{d}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_2) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 - \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \cdot (x_{i2} - \bar{x}_2)}{\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 - \left( \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1) \cdot (x_{i2} - \bar{x}_2) \right)^2}, \quad (5.33)$$

$$\hat{d}_0 = \bar{y} - \hat{d}_1 \cdot \bar{x}_1 - \hat{d}_2 \cdot \bar{x}_2, \quad (5.34)$$

де величини  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}_1$  та  $\bar{x}_2$  задані рівностями (5.35) – (5.37):

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad (5.35)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{i1}, \quad (5.36)$$



$$\bar{x}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{i2}. \quad (5.37)$$

### 5.5.1 Стадія усталеної повзучості

На цій стадії повзучості мають місце наступні співвідношення (5.38) – (5.39):

$$c = 0, \quad g = 1, \quad (5.38)$$

$$\dot{\varepsilon}_0 = a \cdot \exp\left(-\frac{h}{T}\right) \cdot \sigma^n. \quad (5.39)$$

Логарифмуючи (5.39) отримуємо рівність (5.40):

$$\ln \dot{\varepsilon}_0 = \ln a + n \cdot \ln \sigma - \frac{h}{T}. \quad (5.40)$$

За відомими експериментальними значеннями  $\dot{\varepsilon}_{0e}$ ,  $\sigma_e$ ,  $T_e$  знайдемо оцінки  $\hat{a}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{h}$  параметрів  $a$ ,  $n$  та  $h$  відповідно за допомогою співвідношень (див. (5.32) – (5.34)) [135]. Далі вважаємо, що  $n = \hat{n}$ ,  $h = \hat{h}$ .

Вибірковий вектор  $\tilde{a}$  визначиться співвідношенням (5.41):

$$\tilde{a} = \left\{ \frac{\dot{\varepsilon}_{0ei}}{\sigma_{ei} \cdot \exp\left(-\frac{h}{T_{ei}}\right)}, i = \overline{1, N} \right\}. \quad (5.41)$$

### 5.5.2 Стадія прискореної повзучості

На цій стадії повзучості мають місце наступні рівності (5.42):

$$c = 0, \quad g = 1. \quad (5.42)$$

Час до руйнування  $t_p$  визначиться співвідношенням (5.43):

$$t_p = \frac{1}{(l+1) \cdot b \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m}. \quad (5.43)$$

Логарифмуючи співвідношення (див. (5.43)) отримуємо рівність (5.44):

$$\ln t_p = -m \cdot \ln \sigma + \frac{p}{T} - \ln(l+1) \cdot b. \quad (5.44)$$

За відомими експериментальними значеннями  $t_{pe}$ ,  $\sigma_e$ ,  $T_e$  знайдемо оцінки  $\hat{b}$ ,  $\hat{m}$ ,  $\hat{p}$  параметрів  $b$ ,  $m$  та  $p$  відповідно за допомогою співвідношень (див. (5.32) – (5.34)) [135]. Далі вважаємо, що  $m = \hat{m}$ ,  $p = \hat{p}$ .

Вибірковий вектор  $\tilde{b}$  визначиться співвідношенням (5.45):

$$\tilde{b} = \left\{ \frac{1}{(l+1) \cdot t_{pei} \cdot \exp\left(-\frac{p}{T_{ei}}\right) \cdot \sigma_{ei}^m}, \quad i = \overline{1, N} \right\}. \quad (5.45)$$

Незміщені та спроможні оцінки математичного сподівання і дисперсії випадкових величин  $a, b$  для фіксованих значень напруження  $\sigma$  та температури  $T$  запишуться у вигляді (5.46) – (5.49):

$$\hat{\mu}_{a, \sigma, T} = \frac{1}{N_{\sigma, T}} \sum_{i=1}^{N_{\sigma, T}} a_i, \quad (5.46)$$

$$\hat{s}_{a, \sigma, T}^2 = \frac{1}{N_{\sigma, T} - 1} \sum_{i=1}^{N_{\sigma, T}} (a_i - \hat{\mu}_{a, \sigma, T})^2, \quad (5.47)$$

$$\hat{\mu}_{b,\sigma,T} = \frac{1}{N_{\sigma,T}} \sum_{i=1}^{N_{\sigma,T}} b_i, \quad (5.48)$$

$$\hat{s}_{b,\sigma,T}^2 = \frac{1}{N_{\sigma,T} - 1} \sum_{i=1}^{N_{\sigma,T}} (b_i - \hat{\mu}_{b,\sigma,T})^2. \quad (5.49)$$

де  $N_{\sigma,T}$  – кількість експериментів, що відповідають заданим значенням параметрів  $\sigma, T$ .

Оцінки параметрів розподілу випадкових величин  $a, b$  визначаються співвідношеннями (5.50) – (5.53):

$$\hat{\mu}_a = \frac{1}{N_{(\sigma,T)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma,T)}} \hat{\mu}_{a,\sigma,T}, \quad (5.50)$$

$$\hat{s}_a^2 = \frac{1}{N_{(\sigma,T)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma,T)}} \hat{s}_{a,\sigma,T}^2, \quad (5.51)$$

$$\hat{\mu}_b = \frac{1}{N_{(\sigma,T)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma,T)}} \hat{\mu}_{b,\sigma,T}, \quad (5.52)$$

$$\hat{s}_b^2 = \frac{1}{N_{(\sigma,T)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma,T)}} \hat{s}_{b,\sigma,T}^2, \quad (5.53)$$

де  $N_{(\sigma,T)}$  – кількість різних експериментальних пар  $(\sigma, T)$ .

Оцінка параметру  $l$  для фіксованих значень напруження  $\sigma$  та температури  $T$  запишеться у вигляді (5.54):

$$\hat{l}_{\sigma,T} = \frac{1}{N_{\sigma,T}} \sum_{i=1}^{N_{\sigma,T}} l_{\sigma,T,i}, \quad (5.54)$$

де  $\tilde{l}_{\sigma,T,i}$  – значення параметру  $l$  у експерименті з номером  $i$ , яке задане в (5.55):

$$\tilde{l}_{\sigma,T,i} = n - 1 + \frac{n}{\frac{\varepsilon_{t_{pei}}}{a_i \cdot \exp\left(-\frac{h}{T_i}\right) \cdot \sigma_i^n \cdot t_{pei}} - 1}. \quad (5.55)$$

Для оцінки параметру  $l$ , який характеризує кривизну третьої стадії повзучості має місце рівність (5.56):

$$\hat{l} = \frac{1}{N_{(\sigma,T)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma,T)}} \hat{l}_{\sigma,T}, \quad (5.56)$$

Далі вважаємо, що  $l = \hat{l}$ .

### 5.5.3 Стадія неусталеної повзучості

У момент часу  $t = t_1$ , що відповідає завершенню стадії неусталеної повзучості з одного боку деформація повзучості визначиться співвідношенням (див. (5.7)), а з іншого боку можна вважати, що вона приблизно дорівнює добутку швидкості усталеною повзучості на тривалість стадії неусталеної повзучості [31], а отже має місце наступне співвідношення (5.57):

$$g \ln \left[ (c + 1) \cdot \exp\left(\frac{G(t_1)}{g}\right) - c \right] \approx \dot{\varepsilon}_0 \cdot t_1. \quad (5.57)$$

Введемо наступні позначення (5.58) – (5.60):

$$Y = \dot{\varepsilon}_{0e} \cdot t_{1e}, \quad (5.58)$$

$$X = G(t_{1e}), \quad (5.59)$$

$$S(c, g) = \sum_{i=1}^{N_{\sigma,T}} \left( Y_i - g \ln \left[ (c + 1) \cdot \exp\left(\frac{X_i}{g}\right) - c \right] \right)^2. \quad (5.60)$$

Знайдемо оцінки  $\hat{c}_{\sigma,T}$ ,  $\hat{g}_{\sigma,T}$  параметрів  $c$ ,  $g$  для кожної експериментальної пари  $(\sigma, T)$  мінімізуючи функцію  $S(c, g)$  за допомогою алгоритму Левенберга – Марквардта [146]. На рисунку 5.1 проілюстровано блок-схему роботи даного алгоритму.

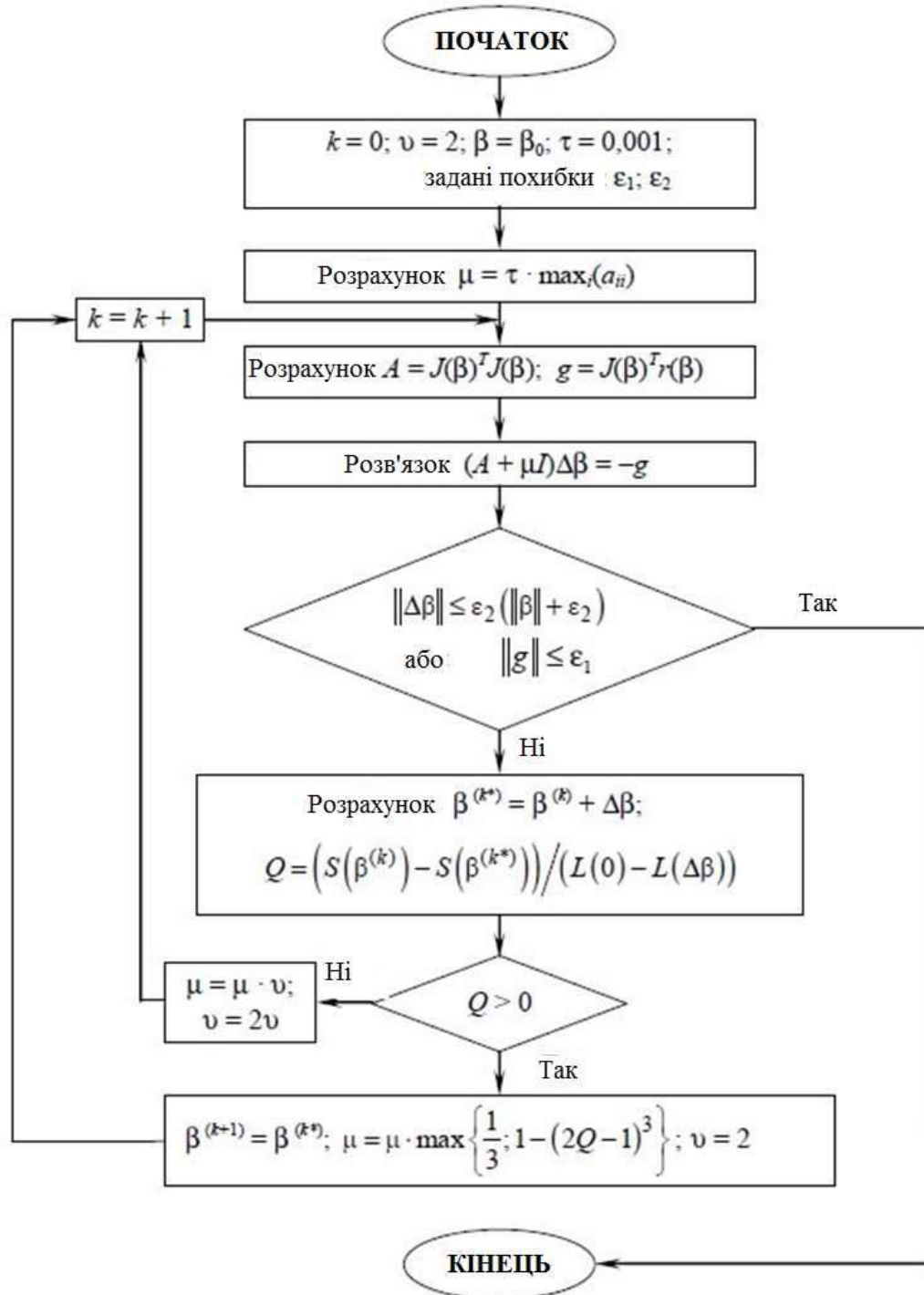


Рисунок 5.1 – Блок схема роботи алгоритму Левенберга – Марквардта

Оцінки параметрів  $c$ ,  $g$  визначаються за допомогою наступних співвідношень (5.61) – (5.62):

$$\hat{c} = \frac{1}{N_{(\sigma,T)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma,T)}} \hat{c}_{\sigma,T}, \quad (5.61)$$

$$\hat{g} = \frac{1}{N_{(\sigma,T)}} \sum_{i=1}^{N_{(\sigma,T)}} \hat{g}_{\sigma,T}. \quad (5.62)$$

### 5.6 Аналіз результатів

Для оцінки застосовності запропонованих методик проведемо порівняння теоретичних розрахунків з результатами випробувань на повзучість зразків з алюмінієвого сплаву РА6 (аналог АМг6) [141]. У таблицях 5.1, 5.2 представлені відповідно оцінки детермінованих параметрів моделі та параметрів розподілу випадкових величин  $a, b$ .

Таблиця 5.1 – Оцінки детермінованих параметрів моделі

Параметр моделі	$n$	$l$	$m$	$p$	$h$	$c$	$g$
Оцінка параметру моделі	4,93	4,23	0,8	$11,3 \cdot 10^3$	$13,6 \cdot 10^3$	$-7 \cdot 10^{-2}$	$-2,6 \cdot 10^{-2}$

Таблиця 5.2 – Оцінки параметрів розподілу випадкових величин  $a, b$

Параметр моделі	$\mu_a$	$s_a^2$	$\mu_b$	$s_b^2$
Оцінка параметру моделі	$3 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$2,25 \cdot 10^6$	$6,94 \cdot 10^5$

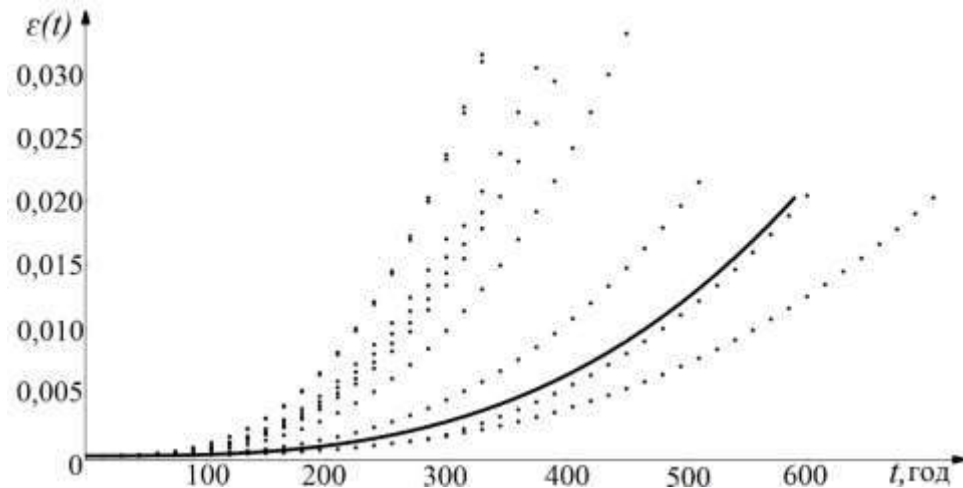
У таблиці 5.3 представлено експериментальні та розрахункові значення основних імовірнісних характеристик часу до руйнування  $t_p$  виражені у годинах. При визначенні гранично допустимого значення деформації повзучості  $\varepsilon^*$  для деформаційного критерію руйнування прийнято значення ймовірності  $\alpha = 0,1$ . Як бачимо, теоретичні результати добре узгоджуються з експериментальними даними як за часом до руйнування, так і за його середньоквадратичним відхиленням.

Таблиця 5.3 – Розрахункові значення основних імовірнісних характеристик часу до руйнування  $t_p$  за експериментами та критеріями

Напруження $\sigma$ , МПа	Температура $T$ , °С	Розрахункові значення характеристики МС часу до руйнування $t_p$ за критеріями, год			Розрахункові значення характеристики СВ часу до руйнування $t_p$ за критеріями, год			Значення характеристик $t_p$ за експериментами, год	
		ПКР	ДКР	ЗКР	ПКР	ДКР	ЗКР	ВС	ВСВ
300	423	465,18	596,54	448,25	102,85	126,43	93,245	436,1	126,8
200	473	32,81	40,57	30,75	7,55	8,59	6,74	31,72	9,98
Примітка. ПКР – параметричний критерій руйнування; ДКР – деформаційний критерій руйнування; ЗКР – змішаний критерій руйнування; МС – математичне сподівання; СВ – середньоквадратичне відхилення; ВС – вибіркове середнє; ВСВ – вибіркове середньоквадратичне відхилення.									

На рисунках 5.2 та 5.3 наведено експериментальні криві повзучості та усереднені прогнозовані криві повзучості для різних експериментальних значень напруження та температури. Як бачимо з рисунків 5.2, 5.3 усереднена прогнозована крива повзучості набуває одного і того ж значення деформації у порівнянні з більшістю експериментальних кривих повзучості за більший час, але треба відмітити, що ця крива будується, враховуючи оцінки невідомих параметрів моделі, які описують усі три стадії повзучості та експериментальні дані для

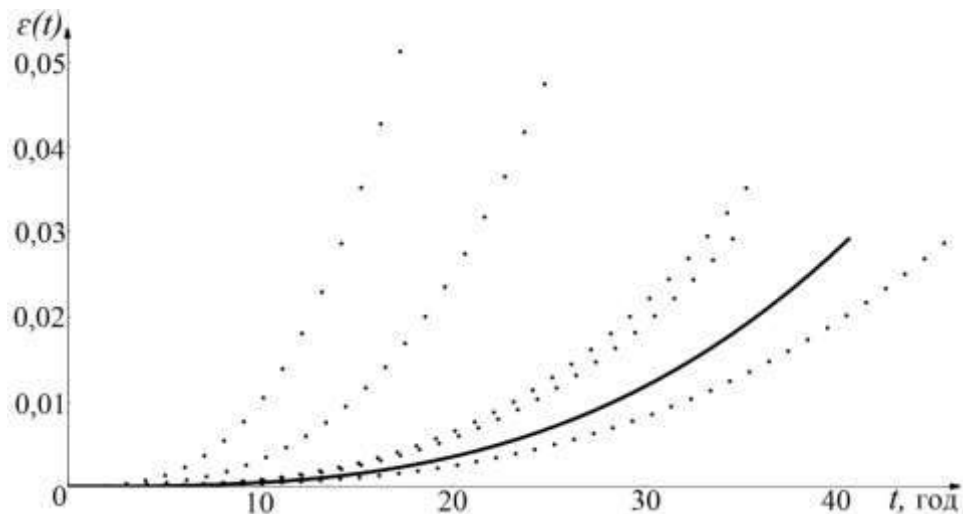
різних значень напруження та температури. Усереднена прогнозована крива повзучості безпосередньо застосовується для отримання результатів прогнозування часу до руйнування за деформаційним критерієм руйнування.



суцільна лінія – усереднена прогнозована крива повзучості;

точкові лінії – експериментальні криві повзучості

Рисунок 5.2 – Криві повзучості при напруженні  $\sigma = 300$  МПа та температурі  $T = 423$  °С для алюмінієвого сплаву РА6



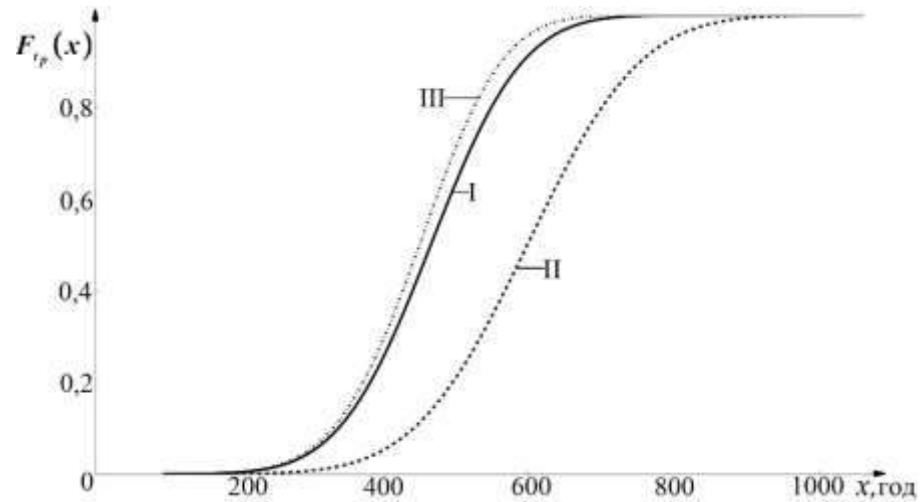
суцільна лінія – усереднена прогнозована крива повзучості;

точкові лінії – експериментальні криві повзучості

Рисунок 5.3 – Криві повзучості при напруженні  $\sigma = 200$  МПа та температурі  $T = 473$  °С для алюмінієвого сплаву РА6

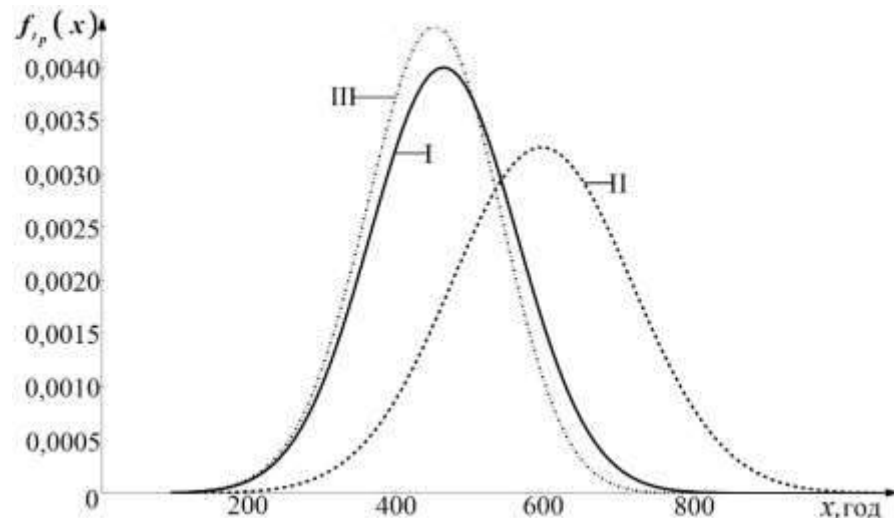


На рисунках 5.4 і 5.5 відповідно представлені графіки функції і щільності розподілу часу до руйнування  $t_p$  при напруженні  $\sigma = 300$  МПа та температурі  $T = 423$  °С для алюмінієвого сплаву РА6.



I – ПКР; II – ДКР; III – ЗКР;  $x$  – незалежна змінна, яка описує множини значень випадкової величини  $t_p$

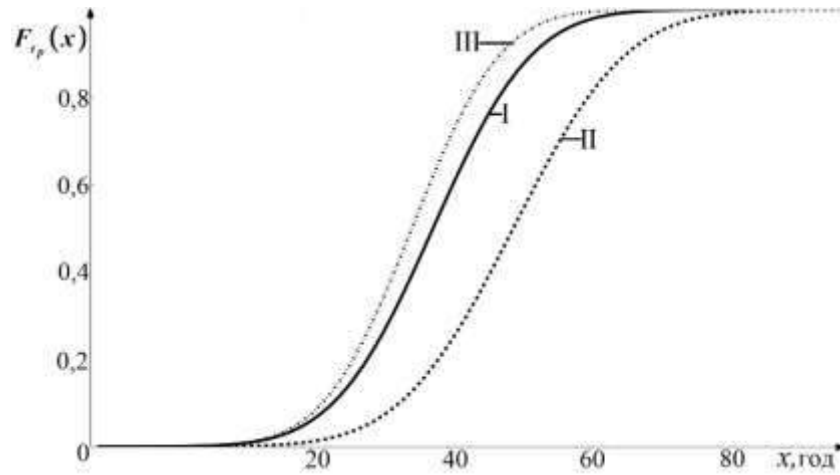
Рисунок 5.4



I – ПКР; II – ДКР; III – ЗКР;  $x$  – незалежна змінна, яка описує множини значень випадкової величини  $t_p$

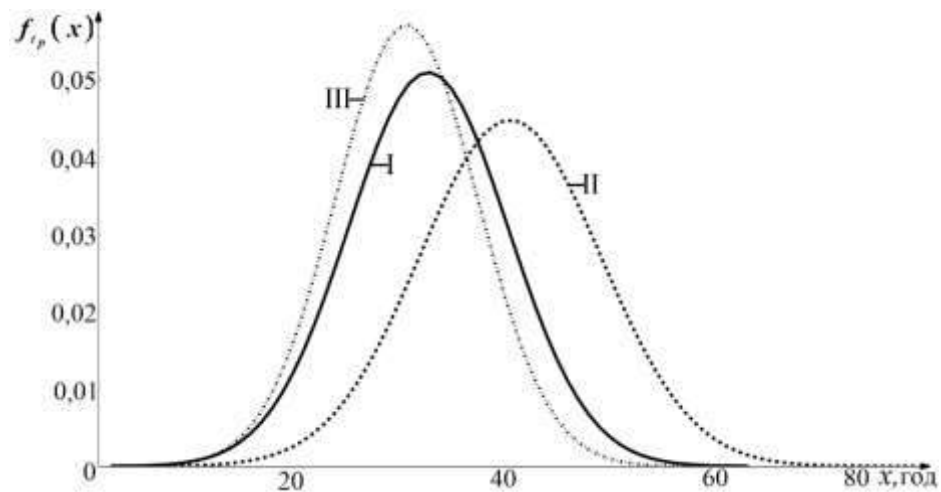
Рисунок 5.5

На рисунках 5.6 і 5.7 відповідно представлені графіки функції і щільності розподілу часу до руйнування  $t_p$  при напруженні  $\sigma = 200$  МПа та температурі  $T = 473$  °С для алюмінієвого сплаву РА6.



I – ПКР; II – ДКР; III – ЗКР;  $x$  – незалежна змінна, яка описує множину значень випадкової величини  $t_p$

Рисунок 5.6



I – ПКР; II – ДКР; III – ЗКР;  $x$  – незалежна змінна, яка описує множину значень випадкової величини  $t_p$

Рисунок 5.7

На кожному з даних рисунків проілюстровано графіки для трьох різних критеріїв руйнування. Вони показують відмінність значень ймовірності руйнування, розрахованої за різними критеріями за один і той же проміжок часу. Зокрема, з графіків випливає, що за заданий проміжок часу ДКР прогнозує найменшу ймовірність руйнування, а ЗКР – найбільшу ймовірність руйнування.

### 5.7 Аналіз ефективності стохастичної моделі руйнування

Результати прогнозування часу до руйнування алюмінієвого сплаву РА6 за допомогою відомих параметричних методів представлені у таблиці 5.4.

Таблиця 5.4 – Прогнозовані значення часу до руйнування сплаву РА6 при використанні різних методів

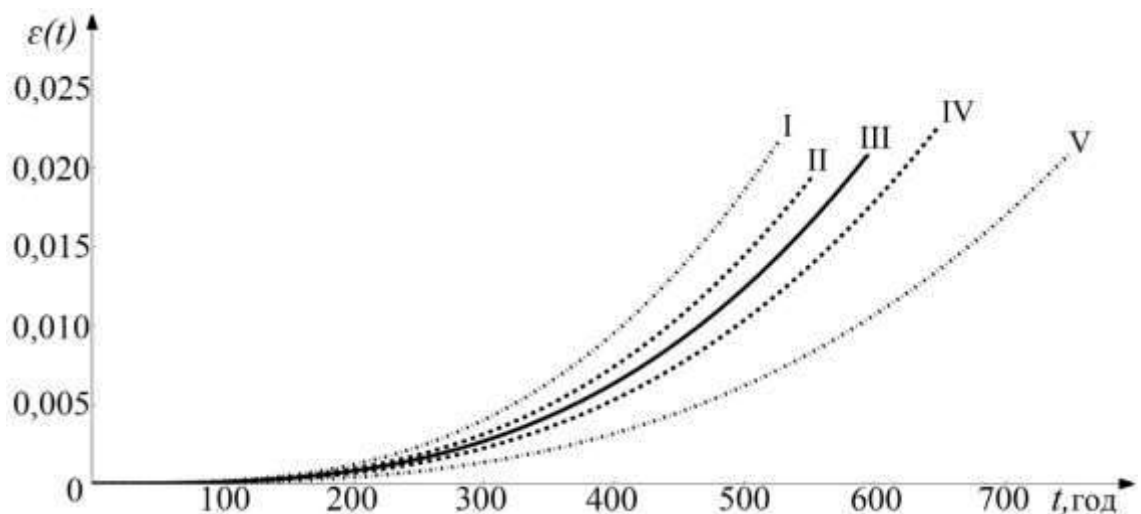
Температура, °С	Напруження, МПа	Прогнозовані значення часу до руйнування сплаву РА6 при використанні методів, год			Експериментальний час до руйнування, год
		Менсона – Саккопа	Ларсона – Міллера	Орра – Шербі – Дорна	
423	300	419,7	419,8	419,09	436,1
473	200	30,03	30,16	29,93	31,72

Як бачимо з таблиць 5.3 та 5.4, стохастична модель руйнування при використанні параметричного та деформаційного критеріїв поступається, а при використанні змішаного критерію переважає по точності прогнозування відомі параметричні методи. З ймовірнісної точки зору стохастична модель руйнування є більш коректною у порівнянні з відомими параметричними методами, оскі-

льки вона враховує випадкову природу довготривалої міцності і дозволяє прогнозувати не «усереднений» час до руйнування, а його ймовірнісний розподіл.

5.8 Аналіз результатів прогнозування кривих повзучості за допомогою стохастичної моделі для невеликих варіювань експериментальних значень напруження та температури

На рис. 5.8 – 5.9 проілюстровано усереднені прогнозовані криві повзучості алюмінієвого сплаву РА6 для експериментальних значень напруження та температури, а також їх невеликих варіювань (зміна напруження складає  $(\pm 10 \text{ МПа})$ , а температури –  $(\pm 10 \text{ }^\circ\text{C})$  у порівнянні з експериментальними даними).

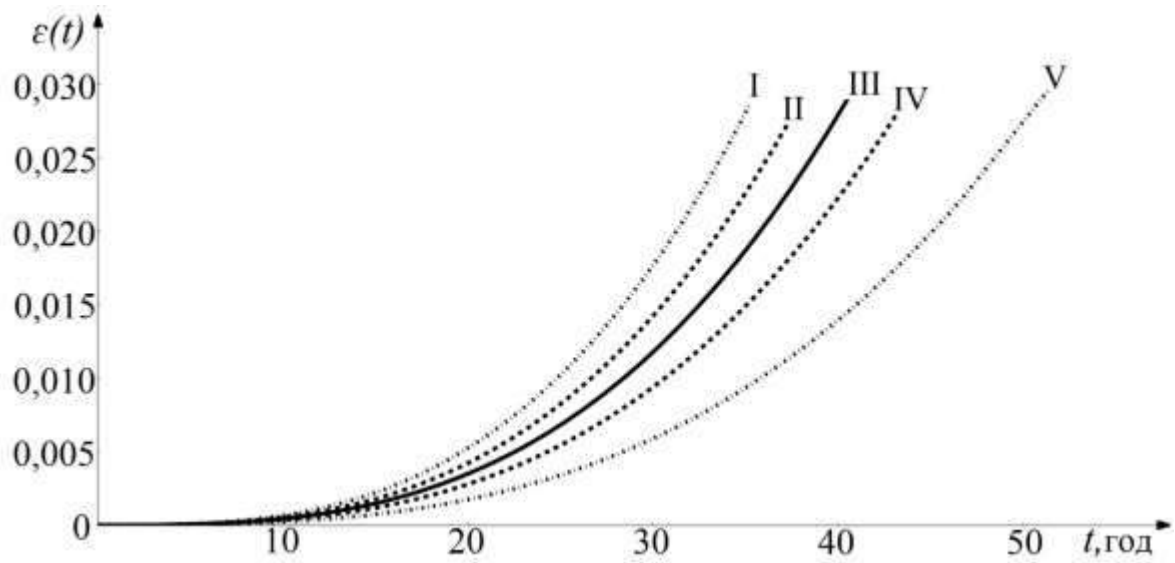


I –  $\sigma = 300 \text{ МПа}$ ,  $T = 433 \text{ }^\circ\text{C}$ ; II –  $\sigma = 310 \text{ МПа}$ ,  $T = 423 \text{ }^\circ\text{C}$ ;

III –  $\sigma = 300 \text{ МПа}$ ,  $T = 423 \text{ }^\circ\text{C}$ ; IV –  $\sigma = 290 \text{ МПа}$ ,  $T = 423 \text{ }^\circ\text{C}$ ;

V –  $\sigma = 300 \text{ МПа}$ ,  $T = 413 \text{ }^\circ\text{C}$

Рисунок 5.8 – Усереднені прогнозовані криві повзучості РА6 для експериментальних значень напруження  $\sigma = 300 \text{ МПа}$ , температури  $T = 423 \text{ }^\circ\text{C}$  та їх невеликих варіювань



I –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 483$  °C; II –  $\sigma = 210$  МПа,  $T = 473$  °C;

III –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 473$  °C; IV –  $\sigma = 190$  МПа,  $T = 473$  °C;

V –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 463$  °C

Рисунок 5.9 – Усереднені прогнозовані криві повзучості РА6 для експериментальних значень напруження  $\sigma = 200$  МПа, температури  $T = 473$  °C та їх невеликих варіювань

Усі графіки відповідають значенню ймовірності  $\alpha = 0,1$ . З рисунків 5.8 – 5.9 випливає, що запропонована стохастична модель адекватно описує поведінку кривих повзучості у діапазонах зміни напруження на  $\pm 10$  МПа та температури на  $\pm 10$  °C у порівнянні з експериментальними даними. Результати прогнозування середнього часу до руйнування алюмінієвого сплаву РА6 за допомогою деформаційного критерію руйнування для експериментальних значень напруження  $\sigma = 200$  МПа, температури  $T = 473$  °C та їх невеликих варіювань представлені у таблиці 5.5. Ця таблиця ілюструє результати прогнозування часу до руйнування для різних значень напруження та температури, а також фіксованого набору значень  $\{0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$  ймовірності  $\alpha$ .

Таблиця 5.5 – Прогнозування середнього часу до руйнування алюмінієво-го сплаву РА6

Напруження, МПа	Температура, °С	Значення ймовірності	Деформація повзучості у момент руйнування	Середній час до руйнування, год
1	2	3	4	5
190	473	0,01	0,017	36,61
190	473	0,1	0,029	43,75
190	473	0,2	0,034	46,13
190	473	0,3	0,037	47,45
190	473	0,4	0,04	48,69
190	473	0,5	0,043	49,88
200	463	0,01	0,017	42,78
200	463	0,1	0,029	51,11
200	463	0,2	0,034	53,9
200	463	0,3	0,037	55,44
200	463	0,4	0,04	56,9
200	463	0,5	0,043	58,29
200	473	0,01	0,017	33,95
200	473	0,1	0,029	40,57
200	473	0,2	0,034	42,77
200	473	0,3	0,037	44

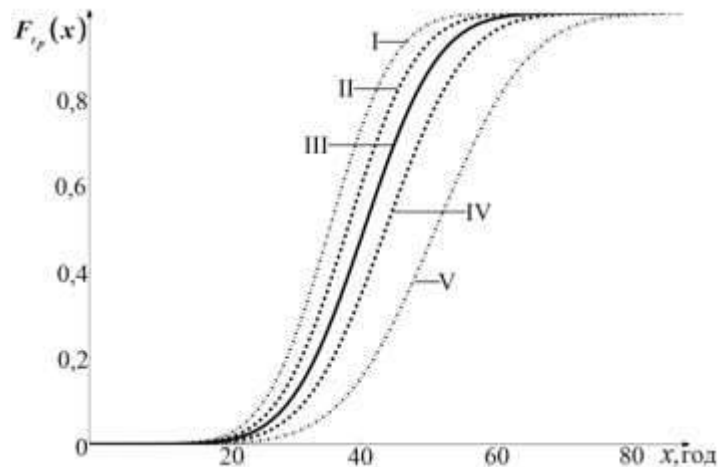
Продовження таблиці 5.5

1	2	3	4	5
200	473	0,4	0,04	45,16
200	473	0,5	0,043	46,26
200	483	0,01	0,017	29,66
200	483	0,1	0,029	35,43
200	483	0,2	0,034	37,36
200	483	0,3	0,037	38,43
200	483	0,4	0,04	39,44
200	483	0,5	0,043	40,41
210	473	0,01	0,017	31,87
210	473	0,1	0,029	38,09
210	473	0,2	0,034	40,16
210	473	0,3	0,037	41,31
210	473	0,4	0,04	42,39
210	473	0,5	0,043	43,43

Бачимо, що при збільшенні напруження або температури одна і та ж сама деформація повзучості досягається за менший час і навпаки, при зменшенні одного з цих параметрів одна і та ж сама деформація повзучості досягається за більший час, що показує адекватність запропонованого деформаційного критерію руйнування. Також порівнюючи результати прогнозування часу до руйнування за цим критерієм для експериментальних значень напруження та температури з результатами, представленими у таблиці 5.3 бачимо, що деформаційний критерій руйнування задовільно прогнозує час до руйнування для множини значень

{0,01; 0,1; 0,2} ймовірності  $\alpha$ . В цілому ж результати прогнозування часу до руйнування згідно цього критерію поступаються по точності результатам, отриманим за параметричним критерієм, але треба відмітити, що деформаційний критерій руйнування з фізичної точки зору є більш коректним на відміну від параметричного, оскільки будується на підставі усередненої прогнозованої кривої повзучості та залежить від параметру, що характеризує гранично допустиме значення деформації повзучості.

На рисунку 5.10 представлено графік функції розподілу часу до руйнування  $t_p$  за деформаційним критерієм руйнування. Усі графіки відповідають значенню ймовірності  $\alpha = 0,1$ .



$x$  – незалежна змінна, яка описує множину значень

випадкової величини  $t_p$ ; I –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 483$  °С;

II –  $\sigma = 210$  МПа,  $T = 473$  °С; III –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 473$  °С;

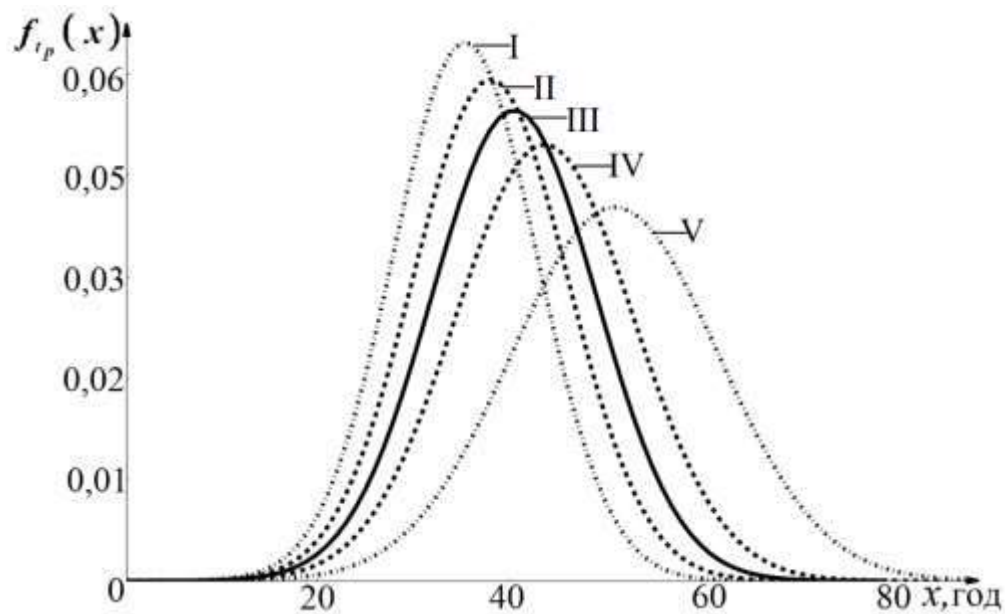
IV –  $\sigma = 190$  МПа,  $T = 473$  °С; V –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 463$  °С

Рисунок 5.10 – Функції розподілу часу до руйнування  $t_p$  для експериментальних значень напруження  $\sigma = 200$  МПа, температури  $T = 473$  °С та їх невеликих варіювань



З рисунку 5.10 випливає, що при збільшенні напруження або температури функція розподілу часу до руйнування досягає більшого значення ймовірності руйнування, а при зменшенні одного з цих параметрів – меншого значення ймовірності руйнування за фіксований проміжок часу  $t$  на відміну від функції розподілу часу до руйнування побудованої для експериментальних значень напруження  $\sigma = 200$  МПа та температури  $T = 473$  °С.

На рисунку 5.11 представлено графік щільності розподілу часу до руйнування  $t_p$  за деформаційним критерієм руйнування для експериментальних значень напруження  $\sigma = 200$  МПа, температури  $T = 473$  °С та їх невеликих варіювань.



$x$  – незалежна змінна, яка описує множину значень

випадкової величини  $t_p$ ; I –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 483$  °С;

II –  $\sigma = 210$  МПа,  $T = 473$  °С; III –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 473$  °С;

IV –  $\sigma = 190$  МПа,  $T = 473$  °С; V –  $\sigma = 200$  МПа,  $T = 463$  °С

Рисунок 5.11 – Щільність розподілу часу до руйнування  $t_p$  для експериментальних значень напруження  $\sigma = 200$  МПа, температури  $T = 473$  °С та їх невеликих варіювань

## 5.9 Висновки до розділу 5

1. Розроблено стохастичну модель руйнування конструкційних матеріалів в умовах ізотермічної повзучості, що враховує температурну залежність та стадію зміцнення на основі параметричного, деформаційного та змішаного критеріїв руйнування.

2. Розроблено методику ідентифікації сталих повзучості матеріалу, яка заснована на статистичній обробці сімейства експериментальних кривих повзучості та використані методів лінійного та нелінійного регресійного аналізів.

3. Для знаходження оцінок параметрів моделі, які характеризують деформаційне зміцнення використано відомий оптимізаційний метод Левенберга – Марквардта.

4. Для визначення основних ймовірнісних характеристик розподілу деформації повзучості у довільний, але фіксований момент часу  $t$  проведено стохастичну лінеаризацію функції  $G(t)$ .

5. Проведено порівняння теоретичних розрахунків з результатами випробувань на повзучість зразків з алюмінієвого сплаву РА6.

6. Показано, що теоретичні розрахунки, проведені за розробленою моделлю, задовільно узгоджуються з результатами експериментів як за часом до руйнування, так і за його середньоквадратичним відхиленням.

7. Показано перевагу даної моделі у порівнянні з відомими параметричними методами, що описують довготривалу міцність.

8. Розроблена стохастична модель руйнування може бути використана для прогнозування часу до руйнування конструкційних матеріалів, що працюють при підвищених температурах і навантаженнях.

## РОЗДІЛ 6

### СТОХАСТИЧНИЙ МЕТОД БАЗОВИХ ДІАГРАМ

#### 6.1 Екстраполяція довготривалої міцності методом базових діаграм

В основі методу базових діаграм, запропонованого В. В. Кривенюком [75], лежить поняття базових діаграм деформування, що описуються співвідношенням (6.1):

$$\lg(\tilde{\sigma}) = 3,6 - p \cdot [12 + \lg(t) + 0,1 \cdot \lg^2(t)], \quad (6.1)$$

де  $p$  – параметр, який визначає проходження діаграми через точку  $(\sigma, t)$  з якої здійснюється екстраполяція;

$\tilde{\sigma}$  – екстрапольоване значення напруження.

Треба враховувати, що константи, які використовуються у співвідношенні (див. (6.1)), отримані шляхом обробки декількох сотень діаграм довготривалої міцності, де напруження вимірювалось у МПа, а час – у годинах. Припустимо, що із експериментів на довготривалу міцність нам відомі величини напружень  $\sigma_i$  та довговічностей  $t_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) при деяких фіксованих температурах  $T_k$  ( $k=1,2,\dots,m$ ).

Відрізки діаграми довготривалої міцності  $L_1L_2, L_2L_3, \dots, L_{n-1}L_n$  будуються на основі відомих експериментальних даних, а відрізок  $L_nL_{n+1}$  розраховується на основі алгоритму метода базових діаграм, причому з точки  $L_n = (\sigma_n, t_n)$  здійснюється прогнозування, а  $L_{n+1} = (\sigma_{n+1}, t_{n+1})$  – точка, для якої екстрапольується величина напруження при заданій довговічності  $t_{n+1}$  [86]. Для вибраних ділянок  $L_iL_j$  діаграми довготривалої міцності за експериментальними даними розраховуються характеристики  $\beta_{ij}$  за допомогою наступного співвідношення (6.2):

$$\beta_{ij} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{\sigma_i - \tilde{\sigma}_j}, \quad (6.2)$$

де  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $j = 2, 3, \dots, n$ ;  $i \neq j$ .

Далі в якості параметру  $\beta$  для деякого діапазону напружень і температур вибирають усереднене значення вигляду (6.3):

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \beta_{ij}. \quad (6.3)$$

Похибка екстраполяції у відсотках для будь-якого відрізка  $L_i L_j$  визначається за допомогою співвідношення (6.4):

$$\Delta_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_j - \sigma_j}{\sigma_j} \times 100\%. \quad (6.4)$$

Одним з припущень даного методу є той факт, що максимальна похибка по напруженню  $\Delta$  не повинна перевищувати від 10 % до 12 %. Для цього треба коректно визначити відповідні діапазони напружень та температур, в межах яких виконується ця умова при усередненому значенні параметру  $\beta$ .

## 6.2 Стохастичний метод базових діаграм

У роботі [76] було запропоновано лінійну залежність між наступними характеристиками  $\beta_{i,n}$ ,  $\Delta_{i,n}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , які задаються рівностями (6.5) – (6.6):

$$\beta_{i,n} = \frac{\lg(\sigma_i) - \lg(\tilde{\sigma}_n)}{\lg(t_n) - \lg(t_i)}, \quad (6.5)$$

$$\Delta_{i,n} = \lg(\sigma_n) - \lg(\tilde{\sigma}_n). \quad (6.6)$$

Перепишемо цю залежність у наступному вигляді (6.7):

$$\lg(\sigma_n) = k \cdot \beta_{i,n} + d + \lg(\tilde{\sigma}_n), \quad (6.7)$$

де  $k, d$  – невідомі коефіцієнти.

Далі вважаємо, що  $k$  – нормально розподілена випадкова величина, а  $d$  – детермінована величина [40]. Далі позначимо через  $N(\mu_k, s_k^2)$  – розподіл випадкової величини  $k$ , де  $\mu_k$  – математичне сподівання,  $s_k^2$  – дисперсія. В загальному випадку параметри розподілу випадкової величини  $k$  та детермінована величина  $d$  залежать від температури.

### 6.2.1 Методика ідентифікації невідомих параметрів моделі

З рівняння (див. (6.7)), користуючись методом найменших квадратів та експериментальними даними, знаходимо параметри  $k, d$  у наступному вигляді (6.8), (6.9):

$$\hat{k} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n \beta_{i,n} \lg(\sigma_n) - \sum_{i=1}^n \lg(\sigma_n) \cdot \sum_{i=1}^n \beta_{i,n}}{n \sum_{i=1}^n \beta_{i,n}^2 - \left( \sum_{i=1}^n \beta_{i,n} \right)^2}, \quad (6.8)$$

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^n \lg(\sigma_n) - n \sum_{i=1}^n \beta_{i,n}}{n} - \lg(\tilde{\sigma}_n). \quad (6.9)$$

Далі вважаємо, що  $d = \hat{d}$  і знаходимо вираз (6.10) для вибіркового вектору  $\tilde{k}$

$$\tilde{k} = \left\{ \frac{\lg(\sigma_n) - \lg(\tilde{\sigma}_n) - \hat{d}}{\beta_{i,n}}, i = \overline{1, n-1} \right\}. \quad (6.10)$$

Незміщені та спроможні оцінки математичного сподівання і дисперсії випадкової величини  $k$  для фіксованого значення температури  $T$  знаходимо за допомогою наступних співвідношень (6.11) – (6.12):

$$\hat{\mu}_{k,T} = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} k_i, \quad (6.11)$$

$$\hat{s}_{k,T}^2 = \frac{1}{N_T - 1} \sum_{i=1}^{N_T} (k_i - \hat{\mu}_{k,T})^2, \quad (6.12)$$

де  $N_T$  – кількість експериментів, що відповідають даному значенню температури  $T$ .

При слабких кореляціях параметру  $d$  та параметрів розподілу випадкової величини  $k$  від температури оцінки відповідних параметрів визначаються співвідношеннями (6.13) – (6.15):

$$\hat{d} = \frac{1}{N_{(T)}} \sum_{i=1}^{N_{(T)}} \hat{d}_T, \quad (6.13)$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{N_{(T)}} \sum_{i=1}^{N_{(T)}} \hat{\mu}_{k,T}, \quad (6.14)$$

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{N_{(T)}} \sum_{i=1}^{N_{(T)}} \tilde{s}_{k,T}, \quad (6.15)$$

де  $N_{(T)}$  – кількість різних експериментальних значень температури  $T$ .

За умови сильної кореляції одного з вищезгаданих параметрів з температурою, в якості його оцінки переважніше розглянути лінійну залежність або залежність більш високих порядків від температури.

### 6.2.2 Методика прогнозування напруження при заданій довговічності

Розглянемо довільну пару  $(\sigma_{n+1}, t_{n+1})$ , де  $t_{n+1}$  – фіксований час, на який треба здійснити екстраполяцію довготривалої міцності,  $\sigma_{n+1}$  – невідоме напруження, а  $(\sigma_n, t_n)$  – точка на діаграмі довготривалої міцності, з якої проводиться екстраполяція. Тоді співвідношення (див. (6.7)) прийме вигляд (6.16):

$$\lg(\sigma_{n+1}) = k \cdot \beta_{n,n+1} + d + \lg(\tilde{\sigma}_{n+1}). \quad (6.16)$$

Для спрощення подальших розрахунків введемо наступні позначення  $a = \beta_{n,n+1}$ ,  $l = d + \lg(\tilde{\sigma}_{n+1})$ , де  $\sigma_{n+1}$  – шукана випадкова величина. Функція розподілу випадкової величини  $\sigma_{n+1}$  прийме вигляд (6.17):

$$F_{\sigma_{n+1}}(x) = P\{\sigma_{n+1} < x\} = P\{\lg(\sigma_{n+1}) < \lg x\} = F_k\left(\frac{\lg x - d - \lg(\tilde{\sigma}_{n+1})}{\beta_{n,n+1}}\right), \quad (6.17)$$

де  $F_k(x)$  – функція розподілу випадкової величини  $k$ .

Для щільності розподілу випадкової величини  $\sigma_{n+1}$  має місце співвідношення (6.18):

$$f_{\sigma_{n+1}}(x) = \frac{1}{\beta_{n,n+1} \cdot x \cdot \ln 10} \cdot f_k\left(\frac{\lg x - d - \lg(\tilde{\sigma}_{n+1})}{\beta_{n,n+1}}\right), \quad (6.18)$$

де  $f_k(x)$  – щільність розподілу випадкової величини  $k$ .

### 6.3 Аналіз результатів

Для оцінки застосовності запропонованого методу проведемо порівняння теоретичних розрахунків з результатами випробувань на довготривалу міцність

зразків зі сталі 08X18H10 для чотирьох різних значень температури 600 °С, 650 °С, 700 °С, 750 °С, представлених у таблиці 6.1 [139].

Таблиця 6.1 – Результати експериментального дослідження на довготривалу міцність сталі 08X18H10

Номер рядка	$T$ , °С	$\sigma_i$ , МПа	$t_i$ , год
1	2	3	4
1	600	216,0	219,0
2	600	196,0	502,8
3	600	177,0	1568,7
4	600	157,0	5151,0
5	600	137,0	15467,9
6	600	118,0	37441,0
7	600	108,0	74753,6
8	650	177,0	59,7
9	650	137,0	523,7
10	650	118,0	1748,3
11	650	98,0	5686,5
12	650	88,0	20155,1
13	650	78,0	36873,9
14	650	69,0	63534,9
15	700	98,0	622,5
16	700	78,0	1127,5
17	700	69,0	8922,4
18	700	61,0	16983,9



Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4
19	700	53,0	19562,8
20	700	47,0	33021,8
21	700	41,0	46947,1
22	750	78,0	241,9
23	750	53,0	5082,8
24	750	47,0	11507,5

Зазначимо, що для кожного значення температури в якості навчальної вибірки беремо множину точок  $(\sigma_i, t_i)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , окрім експериментальної точки  $(\sigma_n, t_n)$  з найбільшим значенням часу  $t_n$ , яка буде виступати в якості перевірконої для запропонованого СМБД. Оцінки детермінованого параметру  $d$  та параметрів розподілу випадкової величини  $k$  при різних значеннях температури  $T$  представлені у таблиці 6.2.

Таблиця 6.2 – Оцінки невідомих параметрів методу при різних значеннях температури  $T$ 

Температура $T$ , °C	$\hat{d}$	$\hat{\mu}_{k,T}$	$\hat{s}_{k,T}^2$
600	0,08	-0,36	0,02
650	0,03	0,05	0,03
700	-0,02	0,17	0,1
750	0,04	0,2	0,01

Дослідимо наявність гіпотетичної лінійної залежності між значеннями оцінок відповідних параметрів та значеннями температури. На рисунках 6.1 –

6.3 представлені відповідно графіки цих гіпотетичних залежностей разом зі значеннями лінійних коефіцієнтів кореляції Пірсона та відповідними рівняннями ліній регресії. Точками позначені оцінки параметрів  $\hat{d}$ ,  $\hat{\mu}_{k,T}$  та  $\hat{s}_{k,T}^2$ , які отримано за набором експериментальних даних для кожного значення температури  $T$ .

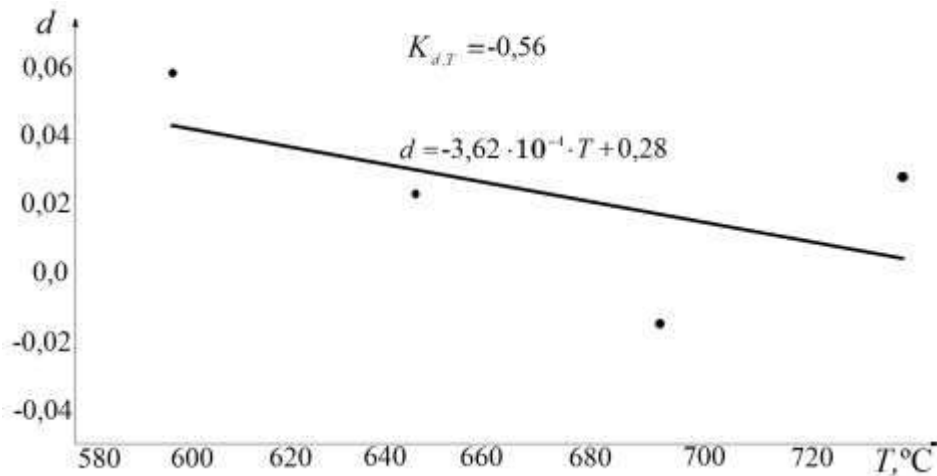


Рисунок 6.1 – Залежність невідомого коефіцієнту  $d$  від температури  $T$  для сталі 08X18H10

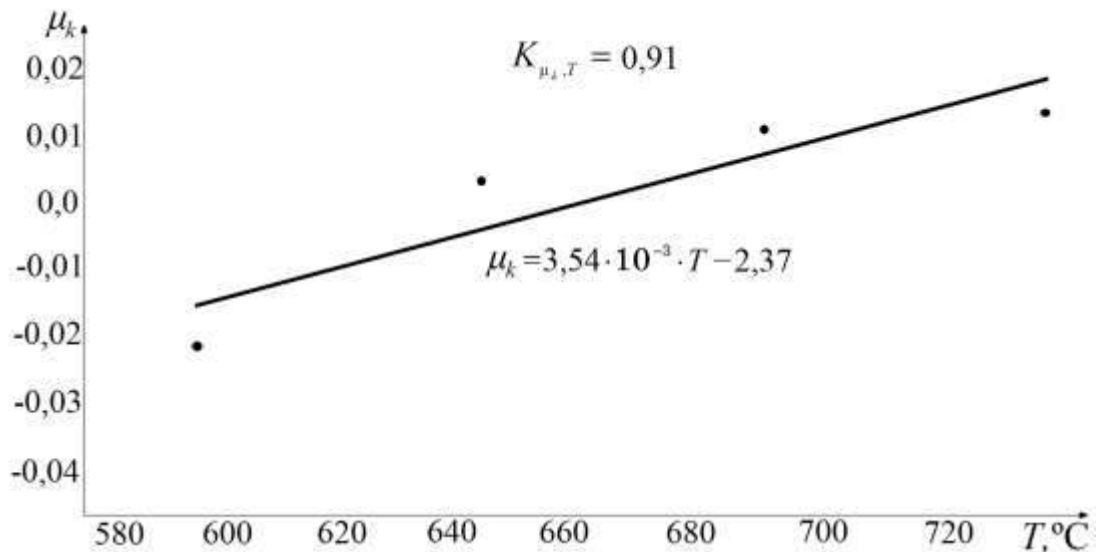


Рисунок 6.2 – Залежність невідомого коефіцієнту  $\mu_k$  від температури  $T$  для сталі 08X18H10

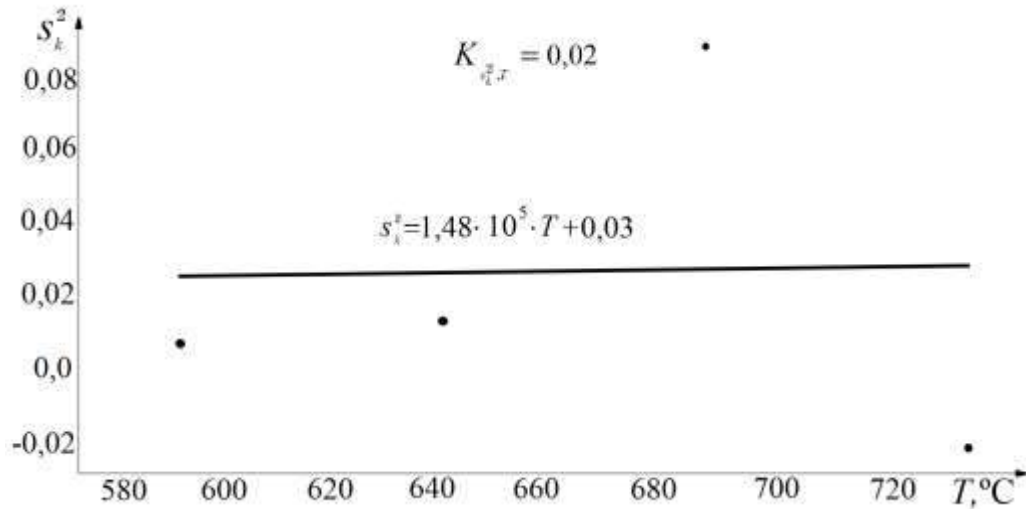


Рисунок 6.3 – Залежність невідомого коефіцієнту  $s_k^2$  від температури  $T$  для сталі 08X18N10

Як бачимо з рисунків 6.1 – 6.3, має місце середня кореляція між величинами  $d$  та  $T$ , дуже висока кореляція між величинами  $\mu_k$  та  $T$  і відповідно слабка кореляція між величинами  $s_k^2$  та  $T$ . Далі в якості оцінок параметрів  $d$ ,  $\mu_k$  будемо використовувати знайдені лінійні залежності, а в якості оцінки параметру  $s_k^2$  – усереднене значення з таблиці 6.2, які задаються рівностями (6.19) – (6.21):

$$d = -3 \cdot 62 \cdot 10^{-4} \cdot T + 0,28, \quad (6.19)$$

$$\mu_k = 3,54 \cdot 10^{-3} \cdot T - 2,37, \quad (6.20)$$

$$s_k^2 = 1,48 \cdot 10^{-5}. \quad (6.21)$$

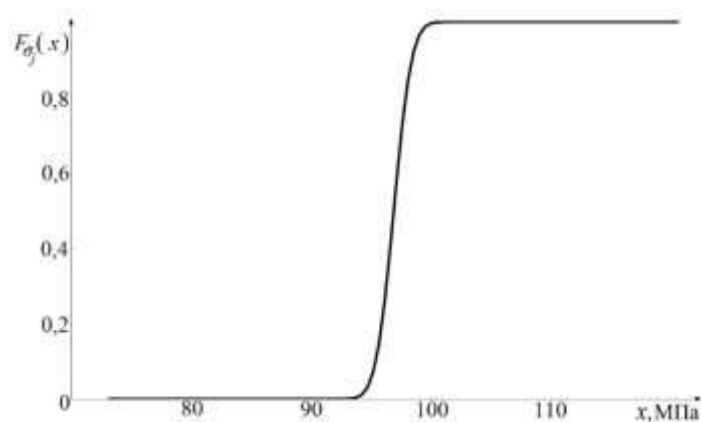
У таблиці 6.3 представлені експериментальні та розрахункові значення основних імовірнісних характеристик розподілу напруження  $\sigma_j$ , які виражені у МПа при фіксованій довговічності. Як бачимо з таблиці 6.3, значення математичного сповідання  $\mu$  напруження  $\sigma_j$  добре узгоджуються з експериментальними даними, причому для кожного експериментального значення температури

були вибрані такі дві експериментальні пари  $(\sigma_i, t_i)$ ,  $(\sigma_j, t_j)$ , для яких порядок екстраполяції досягає свого найбільшого значення.

Таблиця 6.3 – Основні імовірнісні характеристики розподілу напруження  $\sigma_j$

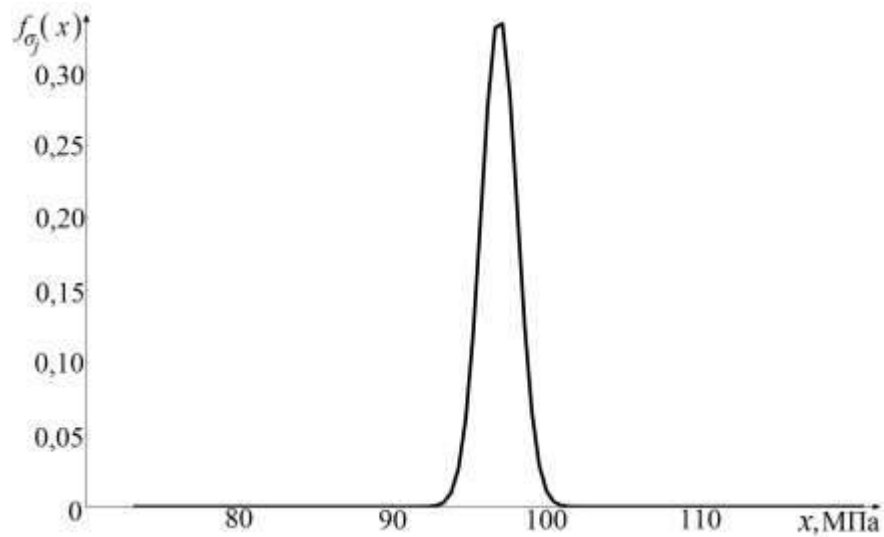
Температура $T$ , °С	Експериментальне напруження $\sigma_i$ , МПа	Експериментальний час до руйнування $t_i$ , год	Параметри розподілу $\mu, s$ напруження $\sigma_j$	Експериментальний час до руйнування $t_j$ , год	Порядок екстраполяції $\lg(t_j/t_i)$	Експериментальне напруження $\sigma_j$ , МПа
600	216	219	96,97; 1,19	74753,6	2,53	108
650	177	59,7	62,54; 0,85	63534,9	3,03	69
700	98	622,5	49,50; 0,78	46947,1	1,88	41
750	78	241,9	43,16; 0,72	11507,5	1,68	47

На рисунках 6.4 і 6.5 відповідно представлені графіки функції і щільності розподілу напруження  $\sigma_j$  при довговічності  $t_p = 74753,6$  годин та температурі  $T = 600$  °С для сталі 08X18Н10.



$x$  – незалежна змінна, яка описує множину значень випадкової величини  $\sigma_j$

Рисунок 6.4



$x$  – незалежна змінна, яка описує множину значень випадкової величини  $\sigma_j$

Рисунок 6.5

#### 6.4 Аналіз ефективності стохастичного методу базових діаграм

Результати прогнозування довготривалої міцності сталі 08X18N10 за допомогою стохастичного методу базових діаграм (СМБД) та інших відомих детермінованих методів представлені у таблиці 6.4. Як бачимо з таблиці 6.4, в деяких випадках стохастичний метод базових діаграм має переваги по точності прогнозування перед відомими параметричними методами, а також детермінованим методом базових діаграм. З ймовірнісної точки зору стохастичний метод базових діаграм є більш коректним у порівнянні з описаними вище детермінованими методами, оскільки дозволяє прогнозувати при вибраній довговічності не «усереднене» напруження, а його ймовірнісний розподіл.

Таблиця 6.4 – Прогнозовані значення напруження при фіксованій довговічності для сталі 08X18H10 при використанні різних методів

Температура, °С	Порядок прогнозування	Прогнозовані значення напруження при фіксованій довговічності при використанні різних методів для сталі 08X18H10, МПа					
		Експер.	СМБД	МБД	Менсона – Саккопа	Ларсона – Міллера	Орра – Шербі – Дорна
600	2,533	108	96,97	95	95,6	99,66	99,99
650	3,027	69	62,54	59,4	59,33	59,75	60,48
700	1,877	41	49,5	44,93	48,44	48,39	47,53
750	1,677	47	43,16	37,76	37,99	38,82	39,7

Як бачимо з таблиці, в деяких випадках стохастичний метод базових діаграм має переваги по точності прогнозування перед відомими параметричними методами, а також детермінованим методом базових діаграм. З ймовірнісної точки зору стохастичний метод базових діаграм є більш коректним у порівнянні з описаними вище детермінованими методами, оскільки дозволяє прогнозувати при вибраній довговічності не «усереднене» напруження, а його ймовірнісний розподіл.

## 6.5 Висновки до розділу 6

1. Розроблено стохастичний метод базових діаграм, що застосовується для екстраполяції довготривалої міцності конструкційних матеріалів на терміни служби, які на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.

2. Даний метод враховує випадкову природу довготривалої міцності і розглядає гіпотетичне значення напруження при вибраній довговічності як абсолю-

тно неперервну випадкову величину, яка, як відомо, набуває будь-якого наперед заданого значення з нульовою ймовірністю, що робить даний метод більш коректним з ймовірнісної точки зору на відміну від усіх детермінованих методів.

3. Розроблено методику ідентифікації невідомих параметрів методу СМБД, яку засновано на статистичній обробці експериментальних даних про довготривалу міцність та використані методів теорії ймовірностей, математичної статистики та методів оптимізації.

4. Показано, що теоретичні розрахунки, проведені за даним методом, задовільно узгоджуються за напруженням з результатами експериментів на довготривалу міцність зразків зі сталі 08X18H10.

5. Розроблений стохастичний метод базових діаграм може бути використано для екстраполяції довготривалої міцності інших конструкційних матеріалів.

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі досліджено методи прогнозування довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості. Особливу актуальність ця задача представляє для матеріалів, з яких виготовлені відповідальні конструкції для аерокосмічної, енергетичної та інших галузей промисловості.

1. На підставі системи кінетичних рівнянь Ю. М. Работнова запропоновано підхід до прогнозування довговічності конструкційних матеріалів при повзучості в умовах одновісного стаціонарного навантаження. Даний підхід оригінальний імовірнісним трактуванням кінетичних рівнянь, що описують повзучість та критеріїв руйнування.

2. На підставі даного підходу розроблено стохастичну модель руйнування конструкційних матеріалів, яка дозволяє за заданими значеннями напруження, температури та результатами експериментальних досліджень на повзучість матеріалу визначати імовірнісний розподіл його часу до руйнування.

3. Розроблено методику ідентифікації сталих повзучості матеріалу, яку засновано на статистичній обробці сімейства експериментальних кривих повзучості та використанні методів теорії ймовірностей, математичної статистики та методів оптимізації.

4. За заданими експериментальними даними на повзучість зразків з корозійностійкої сталі 12X18H10T та зразків з алюмінієвого сплаву РА6 проведено розрахунки основних ймовірнісних характеристик розподілу часу до руйнування та перевірено адекватність розроблених стохастичних моделей процесам руйнування при повзучості.

5. Розроблено стохастичний метод базових діаграм, який застосовується для екстраполяції довготривалої міцності конструкційних матеріалів на терміни служби, які на декілька порядків перевищують тривалість експериментів.



6. За заданими експериментальними даними на довготривалу міцність зразків зі сталі 08X18H10 проведено розрахунки основних ймовірнісних характеристик розподілу напруження при фіксованій довговічності та перевірено адекватність розробленого методу.

7. Стохастична модель руйнування та стохастичний метод базових діаграм разом об'єднуються в узагальнену стохастичну модель руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, яка в залежності від наявності відомих експериментальних характеристик та необхідного порядку екстраполяції використовує той чи інший ймовірнісний підхід.

8. Запропонована модель може бути використана для прогнозування часу до руйнування різних конструкційних матеріалів, які широко використовуються у машинобудуванні, аерокосмічній галузі, а також при розробці стандартів, методичних рекомендацій та інших документів в області оцінки довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Аршакуни А. Л., Чередеева Л. В. К выбору определяющих соотношений длительной прочности металлов. *Проблемы прочности*. 1990. № 5. С. 26–30.
2. Аршакуни А. Л. Прогнозирование длительной прочности металлов. *Изв. РАН. МТТ*. 1997. №6. С. 126 – 135.
3. Астафьев А. Ю. Особенности применения метода наименьших квадратов при построении моделей неупругого деформирования. *Вестник СамГТУ*. Серия: Физико-математические науки. Самара : СамГТУ, 1998. Вып. 6. С. 126 – 129.
4. Астафьев В. И. Закономерности подрастания трещин в условиях ползучести. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1986. № 1. С. 127–134.
5. Астафьев В. И. К вопросу о поврежденности и критериях разрушения при ползучести. *Проблемы прочности*. 1983. №3. С. 11-13.
6. Астафьев В. И. О росте трещины при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины. *Прикладная механика и техническая физика*. 1979. № 6. С. 154 –158.
7. Астафьев В. И. Описание процесса разрушения в условиях ползучести. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1986. №4. С. 164 –169.
8. Астафьев В. И. Структурные параметры и длительная прочность металлов в условиях ползучести. *ПМТФ*. 1987. №6. С. 156 – 162.
9. Астафьев В. И., Григорова Т. В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины. *Известия Российской академии наук. Сер. : Механика твердого тела*. 1995. № 3. С. 160 – 166.

10. Астафьев В. И., Григорова Т. В., Пастухов В. А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести. *Физико-химическая механика материалов*. 1992. Т. 28, № 1. С. 5 – 11.
11. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Нелинейная механика разрушения. Самара : Изд-во "Самарский университет", 2001. 632 с.
12. Астафьев В. И., Ширяева Л. К. Накопление поврежденности и коррозионное растрескивание металлов под напряжением. Самара : Изд-во "Самарский университет", 1998. 123 с.
13. Афанасьев Н. Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов. Киев : АН УССР, 1953. 128 с.
14. Бадаев А. Н. К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести. *Проблемы прочности*. 1984. №12. С. 22 – 26.
15. Бадаев А. Н. и др. О статистическом моделировании характеристик ползучести конструкционных материалов. *Проблемы прочности*. 1982. №5. С. 16 – 20.
16. Бадаев А. Н. Стохастическое прогнозирование ползучести жаропрочных сплавов с использованием метода Монте-Карло. *Проблемы прочности*. 1985. №2. С. 7 – 10.
17. Батдорф С. Б., Будянский Б. В. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения. *Механика*. 1962. №1. С. 135 – 155.
18. Биргер И. А. Вероятности разрушения при многомерных критериях прочности. *Проблемы прочности*. 1984. № 11. С. 21–24.
19. Биргер И. А. Детерминированные и статистические модели долговечности. *Проблемы надежности летательных аппаратов* : сб. статей / под ред. И. Ф. Образцова, А. С. Вольмира. М. : Машиностроение, 1985. 280 с.

20. Биргер И. А. Прогнозирование ресурса при малоцикловой усталости. *Проблемы прочности*. 1985. №10. С. 39 – 44.
21. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М. : Машиностроение, 1984. 312 с.
22. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М. : Стройиздат, 1965. 279 с.
23. Бреславский Д. В., Метелев В. А., Морачковский О. К. Анизотропия ползучести и повреждаемости элементов конструкций при циклическом нагружении. *Проблемы прочности = Strength of Materials*. 2015. № 2. С. 21 – 29.
24. Бреславский Д. В., Морачковский О. К., Татарина О. А. Высокотемпературная ползучесть и длительная прочность элементов конструкций при циклическом нагружении. *Проблемы прочности*. 2008. № 5. С. 45 – 53.
25. Вейбул В. Усталостные испытания и анализ их результатов. М. : Машгиз, 1964. 310 с.
26. Вероятностные характеристики прочности авиационных материалов и размеров сортамента: справочник / А. А. Кузнецов, О. М. Алифанов, В. И. Ветров и др.; под ред. д-ра техн. наук, проф. С. О. Охупкина. М. : Машиностроение, 1970. 567 с.
27. Ветров А. Н., Кучер А. Г. Оценка остаточного ресурса рабочих лопаток авиационных газовых турбин по накопленной деформации ползучести. *Проблемы прочности*. 1993. №1. С. 50–57.
28. Ветров А. Н., Кучер А. Г. Вероятностные методы оценки остаточного ресурса конструктивных элементов авиационных ГТД в эксплуатации. *Проблемы прочности*. 1989. №8. С. 70–76.
29. Ветров А. Н., Кучер А. Г., Ковешников Н. А. Вероятностно-параметрические модели длительной прочности конструкционных материалов АГТД. *Проблемы прочности*. 1989. № 4. С. 14–17.

30. Ветров А. Н., Игнатович С. Р., Кучер А. Г. Теоретические основы прогнозирования поврежденности и остаточного ресурса конструктивных элементов авиационных газотурбинных двигателей в эксплуатации *Обеспечение надежности авиационных двигателей в эксплуатации*: сб. науч. тр. Киев : КИИГА, 1993. С. 20 – 26.
31. Гораш Е. Н., Лысенко С. В., Львов Г. И. Неизотермическая ползучесть и повреждаемость элементов паровых турбин. *Вестник НТУ "ХПИ". Динамика и прочность машин : сборник научных трудов*. 2006. № 21. С. 75 – 88. ISSN 2078-9130.
32. Горев Б. В., Клопотов И. Д. К описанию процесса ползучести и разрушения при неоднородном напряженном состоянии по уравнениям со скалярным параметром повреждаемости. *ПМТФ*. 1999. Т. 40. №6. С. 157 – 162.
33. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторном нагружении. М. : Машиностроение, 1984. 256 с.
34. Гудрамович В. С. Исследование прочности конструкций ракетно-космической техники в некоторых экстремальных условиях эксплуатации. *Техническая механика*. 2001. № 2. С. 74 – 87.
35. Гудрамович В. С. Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций ракетной техники и энергетики. *Техническая механика*. 2013. № 4. С. 97 – 104.
36. Гудрамович В. С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций. Киев : Наукова думка, 2005. 221 с.
37. Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Рубинчик О. М. Линейные и билинейные аппроксимации в проекционно-итерационном варианте метода конечных элементов для плоской задачи теории упругости. *Техническая механика*. 2009. № 2. С. 95–104.
38. Гудрамович В. С., Герасимов В. П., Деменков А. Ф. Предельный анализ элементов конструкций. Киев : Наукова думка, 1990. 135 с.

39. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. М. : Мир, 1981. 516 с.
40. Дояр И. А. Стохастический метод экстраполяции диаграмм длительной прочности конструкционных материалов. *Техническая механика*. 2017. № 2. С. 99 – 108.
41. Дояр И. А., Пошивалов В. П. Вариант вероятностной оценки времени до разрушения при ползучести. *Техническая механика*. 2013. № 2. С. 99 – 108.
42. Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности стали 12Х18Н10Т при изотермической ползучести в условиях одноосного растяжения. *Техническая механика*. 2014. № 1. С. 84 – 94.
43. Журков С. Н., Куксенко В. С., Петров В. А. Физические основы прогнозирования механического разрушения. *Докл. АН СССР*. 1981. Т. 259. № 6. С. 1350 – 1353.
44. Журков С. Н., Куксенко В. С., Слуцкер А. И. Образование субмикроскопических трещин в полимерах под нагрузкой. *Физика твёрдого тела*. 1969. Т. 11, вып. 1. С. 290 – 302.
45. Закономерности ползучести и длительной прочности: справочник / ред. С. А. Шестериков. М. : Машиностроение, 1983. 101 с.
46. Зарубин В. С. Модели неизотермической пластичности и ползучести. *Всес. симпоз. по малоцикл. усталости при повышенных температурах* : материалы. Челябинск : Челяб. политех. ин-т, 1974. Вып. 1. С. 58 – 78.
47. Зарубин В. С. Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций. М. : Машиностроение, 1985. 294 с.
48. Зарубин В. С., Кадашевич Ю. И., Кузьмин М. А. Описание ползучести металлов при помощи структурной модели. *Прикладная механика*. 1977. Т. 13, №9. С. 10 – 13.

49. Зарубин В. С., Поляков А. А. Исследование взаимного влияния мгновенной пластической деформации и ползучести при помощи модели неизотермического деформирования поликристаллического материала. *Тепловые напряжения в элементах конструкций* : респ. межв. сб. Киев : Наук. думка, 1975. Вып. 15. С. 65 – 70.
50. Иванова В. С., Баланкин А. С., Банных О. А. Синергизм механических свойств и экстремальных технологий управления структурой материала. *Металлы*. 1992. № 2. С. 11-27.
51. Иванова В. С. Критерии пластичности металлов при ползучести. *Завод. лаб.* 1955. № 2. С. 212–216.
52. Ивахненко А. Г., Мюллер И. А. Самоорганизация прогнозирующих моделей. Киев : Техніка, 1985. 223 с.
53. Исследование механических свойств сплава 01570 при нормальных и повышенных температурах, определение пределов выносливости при различных режимах нагружения после 3-4 лет хранения: отчет о НИР (заключит.) / Металлургический институт (ДМетИ). Рук. Усачев В. П. Днепропетровск, 1990. №ГР01900037235; Инв. № 95 /208-90.
54. К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести / Б. В. Горев, И. Д. Клопотов, Г. А. Раевская, О. В. Соснин. *Прикладная механика и техническая физика*. 1980. №5. С. 185 – 191.
55. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Об учете микронапряжений в теории пластичности. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1968. № 3. С. 82 – 91.
56. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1981. № 5. С. 99 – 110.
57. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Обобщенная теория упрочнения. *Докл. АН СССР*. 1980. Т. 254, № 5. С. 1096 – 1098.

58. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоактуаторов при активном демпфировании колебаний прямоугольной пластины. *Доповіді Національної академії наук України*. 2015. № 2. С. 50 – 54.
59. Качанов Л. М. Теория ползучести. М. : Физматгиз, 1960. 455 с.
60. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести. *Изв. АН СССР*. Отделение техн. наук. 1958. № 8. С. 26 – 31.
61. Киялбаев Д. А., Чудновский А. И. О разрушении деформируемых тел. Новосибирск : ПМГФ, 1970. № 3.
62. Ковпак В. И. Длительная прочность и эквивалентное разрушение металлических материалов. *Проблемы прочности*. 1980. № 10. С. 88 – 93.
63. Ковпак В. И. К вопросу об оценке и прогнозировании характеристик длительной прочности жаропрочных металлических материалов. *Проблемы прочности*. 1977. №7. С. 49 – 57.
64. Ковпак В. И. Методы прогнозирования длительной прочности и ползучести металлических материалов на большие сроки службы : автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Киев : ИПП АН УССР, 1979. 54 с.
65. Ковпак В. И. О сопоставимости характеристик длительной прочности, определяемых при экстраполяции методом обобщенных диаграмм. *Проблемы прочности*. 1975. № 2. С. 24 – 30.
66. Ковпак В. И., Баумштейн М. В. Интерполяционный расчет характеристик длительной прочности металлов по методу обобщенных диаграмм с использованием ЭВМ. *Проблемы прочности*. 1976. № 9. С. 21 – 24.
67. Ковпак В. И., Баумштейн М. В., Олисов А. Н. Прогнозирование характеристик длительной прочности металлов методом обобщенных диаграмм с использованием ЭВМ. *Проблемы прочности*. 1976. № 7. С. 30.
68. Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М. : Машиностроение, 1977. 232 с.



69. Козлов Л. А., Балашов Б. Ф. Вероятностная оценка характеристик сопротивления усталости и действующих напряжений в деталях машин в связи с расчетом на прочность при многоцикловом нагружении. *Проблемы прочности*. 1983. №5. С. 59–64.
70. Колачев Б. А., Елагин В. И., Ливанов В. А. *Металловедение и термическая обработка цветных металлов и сплавов*. М.: МИСИС, 2001. 413 с.
71. Кордонский Х. Б. *Приложения теории вероятностей в инженерном деле*. М. : Изд-во физ.-мат. лит., 1963. 435 с.
72. Косточкин В. В. *Надежность авиационных двигателей и силовых установок*. М. : Машиностроение, 1976. 248 с.
73. Коттрелл А.Н. *Дислокации и пластическое течение в кристаллах*. М.: Металлургиздат, 1958. 267 с.
74. Кривенюк В. В. *Прогнозирование длительной прочности тугоплавких металлов и сплавов*. Киев: Наукова думка, 1990. 248 с.
75. Кривенюк В. В. *Прогнозирование ползучести и длительной прочности металлических материалов на сроки службы до 300000 ч и более*. *Пробл. прочности*. 2003. № 4. С. 104 – 120.
76. Кривенюк В. В., Авраменко Д. С., Приходько Р. П. Корреляция и экстраполяция результатов испытаний на длительную прочность хромоникелевых и хромомолибденовых сталей. Ресурс, надежность и безопасность теплосилового оборудования электростанций: сб. докл. /под. ред. Е. А. Гриня. М, 2011. С. 127–134.
77. Кулик Н. С., Кучер А. Г., Мильцов В. Е. Вероятностный анализ процессов накопления повреждений при действии статических и циклических нагрузок. *Вестник Национального авиационного университета*. 2010. № 1. С. 5 – 39.
78. Кулик Н. С., Кучер А. Г., Мильцов В. Е. Математические модели накопления повреждений и трещиностойкости при действии статических и цик-

лических нагрузок. *Вісник Національного авіаційного. університету.* 2009. № 3. С. 3 – 23.

79. Кучер А. Г. Аналитический метод расчета вероятностных характеристик накопленной поврежденности и числа циклов до разрушения в деталях ГТД. *Оценка технического состояния авиационных ГТД в процессе эксплуатации.* К. : КИИГА, 1986. С. 62 – 71.

80. Кучер А. Г. Вероятностная оценка накопленной поврежденности и ресурса деталей ГТД при различных законах распределения параметров нагруженности и прочности материала. *Эксплуатационная надежность авиационных газотурбинных двигателей:* межвуз. сб. науч. тр. К. : КИИГА, 1989. С. 99 – 111.

81. Кучер А. Г. Вероятностное описание характеристик прочности жаропрочных сплавов. *Диагностика и прогнозирование технического состояния авиационных ГТД :* меж-вуз. сб. науч. тр. К. : КИИГА, 1985. С. 17–27.

82. Кучер А. Г. Вероятностные модели поврежденности деталей ГТД за полетный цикл. *Техническое диагностирование авиационных двигателей :* меж-вуз. сб. науч. тр. К. : КИИГА, 1987. С. 51 – 61.

83. Кучер А. Г. Модель вероятностного суммирования повреждений при различных законах распределения повреждаемостей за полетный цикл. *Надежность и долговечность деталей и узлов авиационной техники :* сб. науч. тр. К. : КИИГА, 1986. С. 41 – 44.

84. Кучер А. Г. Оценка и прогнозирование ресурса на основе нелинейных вероятностных моделей суммирования повреждений. *Вопросы совершенствования технологии ремонта воздушных судов :* сб. науч. тр. К. : КИИГА, 1988. С. 81 – 85.

85. Кучер А. Г. Прогнозирование ресурса машин на основе нелинейных вероятностных моделей суммирования повреждений. *Методы и средства контроля технического состояния авиадвигателей.* К. : КИИГА, 1989. С. 86 – 100.

86. Кучер М. К., Приходько Р. П. Метод экстраполяції діаграм тривалої міцності жароміцних матеріалів. *Вісник ТНТУ*. 2013. № 2. С. 84 – 93.
87. Лебедев А. А. Методы механических испытаний материалов при сложном напряженном состоянии. Киев : Наукова думка, 1976. 147с.
88. Лебедев А. А. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии (теория прочности). Киев : Мин-во высш. и сред. спец. образования УССР, 1968. 67с.
89. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Стандартизация критериев длительной прочности. *Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности*. М. : Изд-во стандартов, 1986. С. 3 – 15.
90. Локощенко А. М., Мартыненко А. И., Платонов Д. О. Анализ критериев длительной прочности при сложном напряженном состоянии с учетом корректировки результатов испытаний. *Проблемы динамики и прочности в газотурбостроении* : тез. докл. II Междунар. науч.-техн. конф. (25–27.05.2004, Киев). Киев : ИПП НАНУ, 2004. С. 119 – 121.
91. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении. *Журнал прикл. механики и технич. физики*. 1980. № 3. С. 155 – 159.
92. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М. : Машиностроение, 1975. 399 с.
93. Малинин Н. Н. Прочность турбомашин. М. : Машгиз, 1962. 291 с.
94. Никитенко А. Ф. Предельное состояние тела в процессе ползучести его материала. *Проблемы оптимального проектирования сооружений* : сб. докладов II Всерос. сем. Новосибирск : НГАСУ, 1998. С. 94 – 103.
95. Новожилов В. В. О пластическом разрыхлении. *Прикладная математика и механика*. 1965. Т. 29, №4. С. 681 – 689.

96. Петров М. Г., Равикович А. И. Накопление повреждений при пластическом деформировании ползучести алюминиевых сплавов. *Прикладная механика и техническая физика*. 2006. Т. 47, № 1. С. 172 – 182.
97. Повышение долговечности сплава АМгбМ за счет введения промежуточной пластической деформации / Д. Г. Борщевская, В. Д. Рябчий, В. Ф. Бутенко, И. И. Телегина. *Техническая механика*. 2011. № 1. С. 78 – 80.
98. Половко А. М. Основы теории надежности. М.: Наука, 1964. 446 с.
99. Пошивалов В. П. Об одном подходе к определению времени до разрушения в условиях ползучести. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1993. №3. С. 56 – 60.
100. Пошивалов В. П. Обеспечение надежности и долговечности сложных технических систем. *Техническая механика*. 2013. № 4. С. 105 – 111.
101. Пошивалов В. П., Дояр И. А. Оценка времени до разрушения конструкционных материалов при ползучести. *Вісник Дніпропетровського університету*. Сер. механіка. 2014. Вип. 18, т. 2. С. 172 – 181.
102. Пошивалов В. П., Дояр И. А. Стохастическая модель разрушения конструкционных материалов при неизотермической ползучести. *Вестник Запорожского национального университета*. Математическое моделирование и прикладная механика : сборник научных трудов. 2015. № 1. С. 154 – 162.
103. Пошивалов В. П. Определение времени до разрушения в условия; ползучести. *Изв. вузов. Машиностроение*. 1989. К 11. С. 19-23.
104. Работнов Ю. Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1991. 196 с.
105. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения. *Вопросы прочности материалов конструкций* : сборник. М. : Издат. АН СССР, 1959. С. 5 – 7.
106. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.

107. Радченко В. П. Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке. *Проблемы прочности*. 1992. № 2. С. 34 – 40.
108. Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С. А. Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. 2001. Вып. 12. С. 73 – 84.
109. Радченко В. П., Шершнева М. В., Кубышкина С. Н. Оценка надёжности элементов конструкций в условиях ползучести на основании стохастических обобщённых моделей. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки*. 2012. 3(28). С. 53 – 71.
110. Радченко В. П., Шершнева М. В., Попов Н. Н. Аналитический метод оценки надёжности элементов конструкций в условиях ползучести по катастрофическому критерию отказа. *Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием (1–4 июня 2009 г.)*. Часть 1. Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Матем. моделирование и краев. задачи. Самара : СамГТУ, 2009. С. 221–231.
111. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. *Успехи физических наук*. Том 106, вып. 2. 1972. 36 с.
112. Ржаницин А.Р. Теория ползучести. М.: Госстройиздат, 1968. 416 с.
113. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. Львов : Вища школа, 1981. 148 с.
114. Самарин Ю. П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1974. № 1. С. 88 – 94.
115. Самарин Ю. П., Павлова Г. А., Попов Н. Н. Оценка надёжности стержневых конструкций по критерию деформационного типа. Проблемы машиностроения и надёжности машин. *Проблемы машиностроения и надёжности*. 1990. № 4. С. 63 – 67.

116. Синергетика и фракталы в материаловедении / В. С. Иванова, А. С. Баланкин, И. М. Буши, А. А. Оксогаев. М.: Наука, 1994. 383 с.
117. Соснин О. В., Горев Б. В., Любашевская И. В. Ползучесть в обработке металлов давлением. *Математ. моделир. систем и процессов*: межвуз. сб. науч. тр. Пермь : Перм. гос. техн. ун-т., 2001. № 9. С. 169 – 176.
118. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести. Основные гипотезы и их экспериментальная проверка. Сообщение 1. *Проблемы прочности*. 1976. № 7. С. 3 – 8.
119. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск : Ин-т Гидродинамики СО АН СССР, 1986. 95 с.
120. Соснин О. В., Любашевская И. В. Приближенные оценки высокотемпературной ползучести элементов конструкций. *ПМТФ*. 2001. Т. 42, № 6. С. 124 – 135.
121. Соснин О. В., Никитенко А. Ф., Горев Б. В. Определение параметров кривых ползучести при наличии всех стадий процесса ползучести. *Расчёты и испытания на прочность. Расчетные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Метод определения параметров кривых ползучести и накопления повреждений при одноосном нагружении* : метод. рекомендации. М. : ВНИИНМАШ, 1982. С. 63 – 67.
122. Стеблянко П. А. Пространственные нестационарные задачи теории термоупругопластичности. К.: ИМ НАН Украины, 1997. 273 с.
123. Стеблянко П. А., Демичев К. Э. Определение нестационарного термонапряженного состояния в растущей по известному закону цилиндрической трубе. *Вісник Черкаського державного технологічного університету*. Серія: технічні науки. 2015. № 2. С. 106-109.
124. Турчин В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студ. вузов. Днепропетровск : Издательство ДНУ, 2008. 656 с.

125. Ферстер Э., Реец Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа: руководство для экономистов : пер. с нем. М. : Финансы и статистика, 1983. 302 с.
126. Фридляндер И. Н. Алюминиевые деформируемые конструкционные сплавы. М.: Металлургия, 1979. 208 с.
127. Хазов Б. Ф., Дидусев Б. А. Справочник по расчету надежности машин на стадии проектирования. М. : Машиностроение, 1986. 224 с.
128. Цвелодуб И. Ю., Шваб А. А. О решении некоторых задач теории ползучести методом малого параметра. *ПМТФ*. 1982. № 2. С. 122 – 127.
129. Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г. Физические уравнения термовязкопластичности. Киев : Наук. думка, 1982. 238 с.
130. Шершнева М. В. Метод расчёта ресурса стержневых конструкций на основе энергетического варианта ползучести и длительной прочности *Вестник Самарского государственного технического университета*. Сер. физико-математические науки. 2012. 1(26). С. 141 – 149.
131. Шестериков С. А. Некоторые проблемы длительной прочности и ползучести. *Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела*. М. : Наука, 1984. С. 180 – 189.
132. Шестериков С. А., Аршакуни А. Л., Череева Л. В. Метод температурно-силового прогнозирования длительной прочности металлов *Проблемы прочности*. 1989. № 9. С. 6 – 9.
133. Шестериков С. А., Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. *Итоги науки и техники*. Серия механика деформированного твердого тела. Том 13. М. : Всес. инст. научн. и техн. информ., 1980. С. 3 -104.
134. Шестериков С. А., Мельников Г. П., Аршакуни А. Л. К выбору уравнений состояния при ползучести. *Проблемы прочности*. 1980. № 6. С. 77 – 81.
135. Ширяев А. Н. Вероятность. М. , 1980. 574 с.

136. Besseling J. F. Plasticity and creep theory in engineering mechanics. *Top. Appl. Continuum Mech.* Wien. New - York, 1974. P. 115 – 135.
137. Betten J. A. Net - stress analysis in creep mechanics. *Ing. Arch.* 1982. V. 5, No. 6. P. 405 – 419.
138. Boyle J. T., Spence J. Stress analysis for creep. London : Butterworths, 1983. 284 p.
139. Data sheets on the elevated-temperature properties of 18Cr-8Ni steel. *NRIM Creep Data Sheet.* 1986. № 4B. 32 p.
140. Doyar I., Poshyvalov V. Development of a stochastic model of failure of structural materials in creep at hardening stage. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2016. Vol. 3, no. 5 (81). P. 25–31.
141. Kowalewski Z. L. Creep analysis of M1E copper and PA6 aluminum alloy subjected to prior plastic deformation. *Journal of theoretical and applied mechanics.* 2005. Vol. 43, No. 2. P. 241-256. ISSN: 1429-2955.
142. Larson F. R., Miller J. Time-temperature relationship for rupture and creep stresses. *Trans. ASME.* 1952. V.74. P. 765 – 775.
143. Leckie F. A. Some structural theorems of creep and their implications. *Advances in Creep Design: Applied Science Publishere.* 1971. P. 49 – 63.
144. Leckie F. A., Hayhurst D. R. Constitutive equations for creep rupture. *Acta Met.* 1977. Vol. 25. P. 1059 – 1070.
145. Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics: second ed. Berlin : Springer, 1996. 228 p.
146. Madsen K., Nielsen H. B., Tingleff O. Methods for nonlinear least squares problems. Technical Report. Denmark : Informatics and Mathematical Modeling, Technical University of Denmark, 2004. 58 p.
147. Manson S. S., Brown W. F. Time-temperature stress relations for the correlation and extrapolation of stress-rupture data. *Trans. ASTM.* 1953. V. 53. P. 693 – 719.



148. Manson S. S., Haferd A. M. A linear time-temperature relation for extrapolation of creep and stress rupture data. *NASA TN*. 2890. 1953.
149. Nabarro F. R. Deformation of Crystals by the Motion of Single Ions. *Report of a Conference on Strength of Solids*. London: The Physical Society, 1948. P. 75–90.
150. Odqvist F. K. G. Mathematical theory of creep and creep rupture. Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 p.
151. Orr R. L., Sherby O. D., Dorn J. E. Correlation of rupture data for metals at elevated temperatures. *Trans. ASM*. 1954. V.46. P. 113–128.
152. Shen Huairong. On nonlinear constitutive equation for visco-elastic damage media and dewetting damage model for highly filled polymers. *Acta mechanica solida sinica*. 1987. No. 1. P. 41 – 47.
153. Volterra V. Theory of functionals and integrals and integro-differential equations. Blackie a. Son Ltd. London: Glasgow, 1930. 328 p.

## ДОДАТОК А

Довідка про практичне використання результатів дисертаційної роботи  
в ДП «КБ «Південне ім. М. Я. Янгеля»



Державне підприємство  
**«Конструкторське бюро «Південне»**  
 вул. Криворізька, 3, м. Дніпропетровськ, Україна, 49008  
 тел. (0562) 420022, факс (056) 7700125  
 E-mail: info@yuzhnoye.com www.yuzhnoye.com

Вих. № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_



Довідка  
 про практичне використання результатів дисертаційної роботи  
 Дояра І. О.

Розроблені в дисертаційній роботі Дояра І. О. математичні моделі і методичне забезпечення прогнозування часу до руйнування конструкційних матеріалів використовувалося ДП «КБ «Південне ім. М. Я. Янгеля» для оцінки можливості продовження строку експлуатації виробів по результату дефектації і випробувань окремих вузлів та систем. Зазначені роботи виконувалися в рамках госпдоговору по темі Ш-81-13 між ІТМ НАНУ і ГКАУ та ДП «КБ «Південне ім. М. Я. Янгеля» (науковий керівник д.т.н., професор Пошивалов В. П.).

Ефект використання наукових розробок полягає в рекомендаціях про можливу подальшу експлуатацію виробів, для яких закінчився гарантійний строк експлуатації.

Заступник Головного конструктора КБ-2

 О. Б. Козловський

Начальник відділу



О. П. Назаренко

## ДОДАТОК Б

Довідка про впровадження результатів дисертаційної роботи в учбовий процес  
на механіко-математичному факультеті ДНУ ім. О. Гончара



ЗАТВЕРДЖУЮ

 проректор з науково-педагогічної  
 роботи ДНУ ім. О.Гончара

проф. С.О.Чернецький

**ДОВІДКА**
 про впровадження результатів дисертаційної  
 роботи Дояра Івана Олександровича

**«Узагальнена стохастична модель руйнування конструкційних  
 матеріалів при повзучості з урахуванням пошкоджуваності та  
 зміцнення»,**

 виконаної у відділі міцності і надійності механічних систем Інституту  
 технічної механіки НАН України і ДКА України

Розроблені в дисертаційній роботі положення пов'язані з розробкою автором нових уточнених моделей руйнування конструкційних матеріалів при повзучості та прогнозування на їх основі довговічності конструкційних матеріалів в умовах повзучості з метою оцінки їх часу до руйнування, мають прикладне та навчально-методичне значення.

Результати досліджень, пов'язані зі розробкою узагальненої стохастичної моделі руйнування конструкційних матеріалів при повзучості, яка враховує як зміцнення, так і пошкоджуваність матеріалу, впроваджені в учбовий процес на механіко-математичному факультеті ДНУ ім. О.Гончара при викладанні дисциплін:

- Математичні моделі механіки;
- Теорія повзучості та в'язко пружності

для студентів спеціальностей «Комп'ютерна механіка» та «Математична статистика» і

- Математичне моделювання

для аспірантів зі спеціальності «Механіка деформівного твердого тіла»

Погоджено:

 Декан ММФ ДНУ ім. О.Гончара,  
 професор

О.В.Хамініч

 Завідувач кафедри теоретичної  
 і комп'ютерної механіки,  
 професор

В.В.Лобода

## ДОДАТОК В

## Список публікацій здобувача за темою дисертації

В.1 Дояр И. А., Пошивалов В. П. Вариант вероятностной оценки времени до разрушения при ползучести. *Техническая механика*. 2013. № 2. С. 99 – 108.

В.2 Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности стали 12Х18Н10Т при изотермической ползучести в условиях одноосного растяжения. *Техническая механика*. 2014. № 1. С. 84 – 94.

В.3 Пошивалов В. П., Дояр И. А. Оценка времени до разрушения конструкционных материалов при ползучести. *Вісник Дніпропетровського університету*. Сер. механіка. 2014. Вип. 18, т. 2. С. 172 – 181.

В.4 Пошивалов В. П., Дояр И. А. Стохастическая модель разрушения конструкционных материалов при неизотермической ползучести. *Вестник Запорожского национального университета*. Математическое моделирование и прикладная механика : сборник научных трудов. 2015. № 1. С. 154 – 162.

В.5 Doyar I., Poshyvalov V. Development of a stochastic model of failure of structural materials in creep at hardening stage. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 3, no. 5 (81). P. 25–31.

В.6 Дояр И. А. Стохастический метод экстраполяции диаграмм длительной прочности конструкционных материалов. *Техническая механика*. 2017. № 2. С. 99 – 108.

В.7 Дояр И. А., Пошивалов В. П. Вероятностная оценка времени до разрушения конструкционных материалов при ползучести. XV Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»: збірник тез (10 – 12 квітня 2013, м. Дніпропетровськ). Дніпропетровськ, 2013. С. 246.

В.8 Дояр И. А. Вероятностное оценивание долговечности конструкционных материалов в условиях изотермической ползучести [Электрон. ресурс].

Информационные технологии в управлении сложными системами – 2013. Сборник докладов научной конференции (19 – 20 июня 2013, г. Днепропетровск). Секция 1. Моделирование процессов и средств управления. Доклад 1.08. Днепропетровск, 2013. С. 1–3. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

В.9 Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности конструкционных материалов при испытаниях на длительную прочность. XVI Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»: збірник тез (9 – 11 квітня 2014, м. Дніпропетровськ). Дніпропетровськ, 2014. С. 228.

В.10 Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности конструкционных материалов при неизотермической ползучести. Всеукраїнська науково – методична конференція «Проблеми математичного моделювання»: збірник тез (27 – 29 травня 2015, м. Дніпродзержинськ). Дніпродзержинськ, 2015. С. 31 – 32.

В.11 Дояр И. А., Пошивалов В. П. Прогнозирование долговечности конструкционных материалов при изотермической ползучести с учетом стадии упрочнения. XVIII Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос»: збірник тез (6 – 8 квітня 2016, м. Дніпропетровськ). Дніпропетровськ, 2016. С. 172.

## ДОДАТОК Г

## Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідались здобувачем та обговорювались на наступних конференціях:

– XV Международная молодежная научно – практическая конференция «Человек и Космос» под эгидой Международной федерации астронавтики, Днепропетровск, 10-12 апреля 2013 года, тези та її доповідь подано дистанційно;

– III Научная конференция «Информационные технологии в управлении сложными системами», Днепропетровск, 19-20 июня 2013 года, участь з доповіддю;

– XVI Международная научно – практическая конференция «Человек и Космос» под эгидой Международной федерации астронавтики, Днепропетровск, 9-11 апреля 2014 года, тези та її доповідь подано дистанційно;

– Всеукраїнська науково – методична конференція «Проблеми математичного моделювання», Дніпродзержинськ, 27-29 травня 2015 року, тези та її доповідь подано дистанційно;

– XVIII Международная научно – практическая конференция «Человек и Космос» под эгидой Международной федерации астронавтики, Днепропетровск, 6-8 апреля 2016года, тези та її доповідь подано дистанційно.