МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до самостійних робіт
з курсу
„Випадкові процеси”

для студентів напряму підготовки 6.040303 „Системний аналіз”
галузі знань 0403 „Системні науки та кібернетика”
денної форми навчання

2009

Методичні вказівки та завдання до самостійних робіт з курсу „Випадкові процеси” для студентів напряму підготовки 6.040303 „Системний аналіз” галузі знань 0403 „Системні науки та кібернетика” денної форми навчання /Укл.:А.В.Савранська, О.В.Корнєєва, А.О.Кузьменко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. – 70с.

Методичні вказівки містять теоретичні відомості, індивідуальні завдання до самостійних робіт та приклади їх виконання з курсу „Випадкові процеси” для студентів напряму підготовки 6.040303 „Системний аналіз” галузі знань 0403 „Системні науки та кібернетика” денної форми навчання.

Укладачі: А.В. Савранська, доцент,
О.В. Корнєєва, асистент,
А.О. Кузьменко, асистент.

Рецензенти: В.П. Пінчук, доцент,
О.І. Денисенко, доцент.

Відповідальний
за випуск: Г.В. Корніч, професор.

Затверджено
на засіданні кафедри
системного аналізу та
обчислювальної математики
протокол № 10 від 25.06.09 р.

ЗМІСТ

1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ І ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1.1 Мета роботи

Дана робота допоможе вивчити закони розподілу і основні характеристики випадкових величин.

1.2 Означення випадкового процесу

Поняття випадкового процесу є узагальненням поняття випадкової величини.

Випадковим процесом $X(t)$ називається процес, значення якого при будь-якому фіксованому $t = t_0$ є випадковою величиною $X(t_0)$.

Випадкова величина $X(t_0)$.називається ***розрізом*** випадкового процесу, якій відповідає даному значенню аргументу t .

Припустимо , що проведено випробування, в ході якого випадковій процес набув повністю визначений вигляд. Це вже звичайна невипадкова функція аргументу t. Воно називається *реалізацією випадкового процесу* $X(t)$ в даному випробуванні на проміжку часу $[0, \tau]$.

Нехай маємо випадковий процес $X(t)$. Розріз випадкового процесу $X(t)$ для будь-якого t є випадковою величиною з законом розподілу

$$F(t, x) = P\{X(t < x)\}. \qquad (1.1)$$

Функція (1.1) називається ***одновимірним законом розподілу*** випадкового процесу $X(t)$.

1.3 Числові характеристики випадкового процесу

Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $m_x(t)$, яка для будь-якого t

дорівнює математичному сподіванню відповідного розрізу випадкового процесу

$$m_x(t) = M\left[X(t)\right] . \tag{1.2}$$

Центрованим випадковим процесом називається процес

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) . \tag{1.3}$$

Початковим процесом k-го порядку випадкового процесу $X(t)$ називається математичне сподівання k-го ступеню відповідного розрізу випадкового процесу:

$$\alpha_k(t) = M\left[(X(t))^k\right] . \tag{1.4}$$

Центральним моментом k-го порядку називається математичне сподівання k-го ступеню центрованого процесу:

$$\mu_k(t) = M\left[(X(t) - m_x(t))^k\right] . \tag{1.5}$$

Другий центральній момент називається ***дисперсією*** випадкового процесу $D_x(t)$, яка для будь-якого t дорівнює дисперсії відповідного розрізу випадкового процесу.

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x(t)$ випадкового процесу $X(t)$ називається арифметичне значення кореня квадратного з $D_x(t)$:

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t)] = \sqrt{D_x(t)} . \tag{1.6}$$

Ступінь лінійної залежності між двома випадковими величинами X и Y визначається їх коваріацією

$$K_{xy} = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right] = M[XY] - m_x m_y . \tag{1.7}$$

Розглянемо два розрізу випадкового процесу для моментів часу t і t' – $X(t)$ і $X(t')$. Коваріація дорівнює:

$$K_x(t,t') = M[X(t)X(t')] - m_x(t) m_x(t') . \tag{1.8}$$

Функція $K_x(t,t')$ називається ***кореляційною функцією*** випадкового процесу $X(t)$.

Нормованою кореляційною функцією $r_x(t,t')$ випадкового процесу $X(t)$ називається функція, яка дорівнює

$$r_x(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')} \ . \qquad (1.9)$$

1.4 Деякі розподіли випадкових величин

Розглянемо розподіли ***дискретних випадкових величин***.

1.4.1 Біноміальний розподіл

Нехай проведено n − випробувань, в кожному з яких події A відбувається з ймовірністю p. ***Біноміальним*** називається розподіл ймовірностей, який визначається формулою *Бернуллі*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \ , \qquad (1.10)$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots , n$, p − появи події A в одному випробуванні, $q = 1 - p$.

$P_n(k)$ − ймовірність того, що подія A з'явиться k разів в n випробуваннях.

Закон розподілу можна відобразити у вигляді таблиці:

X	n	$n-1$	$\ldots$	k	$\ldots$	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	$\ldots$	$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	q^n

Математичне сподівання біноміального розподілу дорівнює:

$$M[X] = np \ . \qquad (1.11)$$

Дисперсія: $$D[X] = npq \ . \qquad (1.12)$$

1.4.2 Розподіл Пуассона

Нехай проведено n − випробувань, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p (n велике, p мале). Добуток np зберігає постійне значення $np = a$. Розподіл ймовірностей, в цьому випадку, називається ***розподілом Пуассона*** і виражається формулою

$$P_n(k) = \frac{a^k e^a}{k!} \quad . \qquad (1.13)$$

Математичне сподівання розподілу Пуассона дорівнює:

$$M[X] = a \quad . \qquad (1.14)$$

Дисперсія:

$$D[X] = a \quad . \qquad (1.15)$$

1.4.3 Геометричний розподіл

Нехай проведено n − випробувань, в кожному з яких відбувається з ймовірністю p, $q = 1 - p$. Випробування закінчуються, як тільки з'явиться подія A . Випадкова величина X − кількість випробувань, які потрібно провести до першої появи події A . Розподіл ймовірностей визначається формулою:

$$P_n\{X = k\} = q^{k-1} p \quad , \qquad (1.16)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$.

Математичне сподівання геометричного розподілу дорівнює:

$$M[X] = \frac{1}{p} \quad . \qquad (1.17)$$

Дисперсія:

$$D[X] = \frac{1 - p}{p^2} \quad . \qquad (1.18)$$

1.5 Неперервні випадкові величини

1.5.1 Нормальний розподіл

Нормальним називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, який описується щільністю розподілу:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ . \tag{1.19}$$

Нормальний розподіл визначається двома параметрами: m – математичне сподівання, σ – середньоквадратичне відхилення.

1.5.2 Показниковий розподіл

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}, \tag{1.20}$$

де λ – постійна додатна величина.

1.5.3 Рівномірний розподіл

Рівномірнім на відрізку $[a,b]$ називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, який описується щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}, \tag{1.21}$$

1.6 Варіанти самостійного завдання №1

1.6.1 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=cX+t$, де X – неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ.

1.6.2 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=cX+t$, де X − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[1,2]$.

1.6.3 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = cX + t$, де X − дискретна випадкова величина, яка має розподіл за законом Пуассона з параметром a.

1.6.4 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = cX + t$, де X − дискретна випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p.

1.6.5 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = cX + t$, де X − дискретна випадкова величина, яка має геометричний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p.

1.6.6 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xt + b$, де X − неперервна випадкова величина, яка має нормальний розподіл з параметрами m і σ.

1.6.7 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xt + b$, де X − дискретна випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p.

1.6.8 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xt + b$, де X − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ.

1.6.9 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xt + b$, де X − дискретна випадкова величина, яка має розподіл за законом Пуассона з параметром a.

1.6.10 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xt + b$, де X − дискретна випадкова величина, яка має геометричний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p.

1.6.11 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xe^{-t}$, де X − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$.

1.6.12 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xe^{-t}$, де X − дискретна випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p.

1.6.13 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xe^{-t}$, де X − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ.

1.6.14 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xe^{-t}$, де

X − дискретна випадкова величина, яка має розподіл за законом Пуассона з параметром a.

1.6.15 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = Xe^{-t}$, де X − неперервна випадкова величина, яка має нормальний розподіл з параметрами m і σ.

1.6.16 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = X\cos t$, де X − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$.

1.6.17 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = X\cos t$, де X − дискретна випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p.

1.6.18 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = X\cos t$, де X − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ.

1.6.19 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = X\cos t$, де X − дискретна випадкова величина, яка має розподіл за законом Пуассона з параметром a.

1.6.20 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = X\cos t$, де X − дискретна випадкова величина, яка має геометричний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p.

1.7 Варіанти самостійного завдання №2

1.7.1 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[1,2]$, U − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини W і U − незалежні.

1.7.2 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,2]$, U − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$, величини W і U − незалежні.

1.7.3 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, U − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,2]$, величини W і U − незалежні.

1.7.4 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,2]$, U − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини W і U − незалежні.

1.7.5 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − дискретна випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p, U − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,2]$, величини W і U − незалежні.

1.7.6 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − дискретна випадкова величина, яка має розподіл за законом Пуассона з параметром a, U − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,3]$, величини W і U − незалежні.

1.7.7 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − дискретна випадкова величина, яка має біноміальний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p, U − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини W і U − незалежні.

1.7.8 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − дискретна випадкова величина, яка має розподіл за законом Пуассона з параметром a, U − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини W і U − незалежні.

1.7.9 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t)=We^{-Ut}$, де W − дискретна випадкова величина, яка має геометричний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p, U − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,3]$, величини W і U − незалежні.

1.7.10 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = We^{-Ut}$, де W − дискретна випадкова величина, яка має геометричний розподіл з ймовірністю появи події в одному випробуванні p, U − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини W і U − незалежні.

1.7.11 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = V\sin(t - \Theta)$, де V − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[1,2]$, Θ − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,\pi]$, величини V і Θ − незалежні.

1.7.12 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = V\sin(t - \Theta)$, де V − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[1,2]$, Θ − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини V і Θ − незалежні.

1.7.13 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = V\sin(t - \Theta)$, де V − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром γ, Θ − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини V і Θ − незалежні.

1.7.14 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = V\sin(t - \Theta)$, де V − неперервна випадкова величина, яка має характеристики m і σ, Θ − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини V і Θ − незалежні.

1.7.15 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = V\sin(t - \Theta)$, де V − неперервна випадкова величина, яка має характеристики m і σ, Θ − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0, \pi]$, величини V і Θ − незалежні.

1.7.16 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = V\sin(t - \Theta)$, де V − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, Θ − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0, \pi]$, величини V і Θ − незалежні.

1.7.17 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = U\cos t + V\sin t$, де U − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$, V − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,2]$, величини V і U − некорельовані.

1.7.18 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = U\cos t + V\sin t$, де U − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[-1,1]$, V − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини V і U − некорельовані.

1.7.19 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = U\cos t + V\sin t$, де U − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, V − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[-1{,}1]$, величини V і U − некорельовані.

1.7.20 Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = U\cos t + V\sin t$, де U − неперервна випадкова величина, яка має характеристики m і σ, V − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини V і U − некорельовані.

1.8 Приклади виконання завдання

1.8.1 Приклад завдання №1

Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = e^{-tX}$, де X − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ.

Розв'язання.

Математичне сподівання:

$$m_Y(t) = M\left[e^{-tX}\right] = \int_0^{\infty} e^{-tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{t+\lambda}.$$

Кореляційна функція:

$$K_y(t,t') = M\left[\left(e^{-tX} - \frac{1}{t+\lambda}\right)\left(e^{-t'X} - \frac{1}{t'+\lambda}\right)\right] =$$

,

$$= M\left[e^{-(t+t')X}\right] - \frac{1}{t+\lambda} M\left[e^{-t'X}\right] - \frac{1}{t'+\lambda} M\left[e^{-tX}\right] + \frac{1}{(t+\lambda)(t'+\lambda)}$$

де

$$M\left[e^{-(t+t')X}\right] = \int_0^\infty e^{-(t+t')x} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(t+t'+\lambda)x} dx = -\frac{\lambda}{t+t'+\lambda} e^{-(t+t'+\lambda)x}\Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{t+t'+\lambda};$$

$$M\left[e^{-tX}\right] = \lambda \int_0^\infty e^{-(t+\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{t+\lambda}, \qquad M\left[e^{-t'X}\right] = \frac{\lambda}{t'+\lambda}.$$

Отже,

$$K_y(t,t') = \frac{\lambda}{t+t'+\lambda} - \frac{2\lambda}{(t+\lambda)(t'+\lambda)} + \frac{1}{(t+\lambda)(t'+\lambda)} =$$

$$= \frac{\lambda}{t+t'+\lambda} + \frac{1-2\lambda}{(t+\lambda)(t'+\lambda)}.$$

Дисперсія:

$$D_y(t) = K_y(t,t) = \frac{\lambda}{2t+\lambda} + \frac{1-2\lambda}{(t+\lambda)^2}.$$

Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma_y(t) = \sqrt{D_y(t)} = \sqrt{\frac{\lambda}{2t+\lambda} + \frac{1-2\lambda}{(t+\lambda)^2}}.$$

Нормована кореляційна функція:

$$r_y(t) = \frac{K_y(t,t')}{\sigma_y(t)\sigma_y(t')} = \frac{\frac{\lambda}{t+t'+\lambda} + \frac{1-2\lambda}{(t+\lambda)(t'+\lambda)}.}{\sqrt{\frac{\lambda}{2t+\lambda} + \frac{1-2\lambda}{(t+\lambda)^2}}\sqrt{\frac{\lambda}{2t'+\lambda} + \frac{1-2\lambda}{(t'+\lambda)^2}}}.$$

1.8.2 Приклад завдання №2

Знайти характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційну функцію, нормовану кореляційну функцію) випадкової функції $Y(t) = We^{-Ut}$, де W − неперервна випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $(-1,1)$, U − неперервна випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром λ, величини W і U − незалежні.

Розв'язання.

Математичне сподівання:

$$m_y(t) = M\left[We^{-Ut}\right] = M[W]M\left[e^{-Ut}\right],$$

де
$$M[W] = \int_{-1}^{1} w\frac{1}{2}dw = \frac{1}{2}\frac{w^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1-1) = 0,$$

$$M\left[e^{-Ut}\right] = \int_0^\infty e^{-ut}e^{-u}du = \int_0^\infty e^{-u(t+1)}du = \frac{1}{t+1}.$$

Отже,

$$m_y(t) = 0 \cdot \frac{1}{t+1} = 0 \,.$$

Кореляційна функція:

$$K_y(t,t') = M\left[We^{-Ut}We^{-Ut'}\right] = M\left[W^2 e^{-U(t+t')}\right] = M\left[W^2\right] \cdot M\left[e^{-U(t+t')}\right],$$

де

$$M\left[W^2\right] = \int_{-1}^{1} w^2 \frac{1}{2} dw = \frac{1}{2}\frac{w^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \,,$$

$$M\left[e^{-U(t+t')}\right] = \int_0^{\infty} e^{-u(t+t')} e^{-u} du = \int_0^{\infty} e^{-u(t+t'+1)} du = -\frac{1}{t+t'+1} \,.$$

Отже,

$$K_y(t,t') = \frac{1}{3(t+t'+1)} \,.$$

Дисперсія:

$$D_y(t) = K_y(t,t) = \frac{1}{3(2t+1)}.$$

Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma_y(t) = \sqrt{D_y(t)} = \sqrt{\frac{1}{3(2t+1)}} \,.$$

Нормована кореляційна функція:

$$r_y(t) = \frac{K_y(t,t')}{\sigma_y(t)\sigma_y(t')} = \frac{\dfrac{1}{3(t+t'+1)}}{\sqrt{\dfrac{1}{3(2t+1)}}\sqrt{\dfrac{1}{3(2't+1)}}} = \frac{\sqrt{(2t+1)(2't+1)}}{t+t'+1}.$$

2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

МАРКІВСЬКІ ПРОЦЕСИ З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ І З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

2.1 Класифікація станів. Ймовірності станів

Розглянемо фізичну систему $\boldsymbol{S}$, в якій відбувається випадковий процес дискретними станами

$$\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots,} \tag{2.1}$$

число яких скінчено або злічене.

Стан s_i називається ***джерелом***, якщо система $\boldsymbol{S}$ може вийти з цього стану, але не може в нього увійти.

Стан s_i називається ***кінцевим***, якщо система $\boldsymbol{S}$ може увійти в нього, але не може вийти з цього стану.

Якщо система $\boldsymbol{S}$ може безпосередньо перейти зі стану s_i в стан s_j, то s_j називається ***сусіднім по відношенню до стану*** $\boldsymbol{s_i}$.

Якщо система $\boldsymbol{S}$ може безпосередньо перейти зі стану s_i в стан s_j та зі стану s_j в s_i, то стани s_i і s_j називається ***сусідніми***.

Стан s_i називається ***транзитивним***, якщо система $\boldsymbol{S}$ може увійти в нього і вийти з нього.

Стан s_i називається ***ізольованим*** , якщо з нього не можна потрапити в інший стан і в нього не можна потрапити з іншого стану.

Розглянемо підмножину станів. Нехай $\boldsymbol{W}$ − множина всіх станів системи $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{V}$ − його підмножина: $\boldsymbol{V \subset W}$.

Підмножина називається ***замкненою (кінцевою)***, якщо система потрапивши в один (або знаходячись в одному) зі станів $s_i \in V$, не може вийти з цієї підмножини.

Підмножина називається ***зв'язаною*** або ***ергодичною***, якщо з будь-якого її стану можна потрапити в будь-який іншій стан, що належить цій множині.

Підмножина станів називається ***транзитивною,*** якщо система може війти в цю підмножину та вийти з неї.

Ймовірністю i –го стану в момент $\boldsymbol{t}$ називається ймовірність події, яка полягає у тому, що в момент $\boldsymbol{t}$ система $\boldsymbol{S}$ буде знаходитися в стані s_i . Позначимо її, як $\boldsymbol{p_i(t)}$:

$$\boldsymbol{p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}} , \qquad (2.2)$$

де $\boldsymbol{S(t)}$ − випадковий стан системи $\boldsymbol{S}$ в момент $\boldsymbol{t}$.

Для системи з дискретними станами $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$ в будь-який момент $\boldsymbol{t}$ сума ймовірностей дорівнює одиниці:

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{p_i(t) = 1} , \qquad (2.3)$$

як сума ймовірностей повної групи несумісних подій.

Випадковий процес, який відбувається в системі $\boldsymbol{S}$ з дискретними станами $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$, називається ***марківським***, якщо для будь-якого моменту часу $\boldsymbol{t_0}$ ймовірність кожного зі станів системи в майбутньому (при $\boldsymbol{t > t_0}$) залежить тільки від її стану в теперішньому (при $\boldsymbol{t = t_0}$) і не залежить від того коли і як вона прийшла у цей стан; тобто, не залежить від її поведінки у минулому (при $\boldsymbol{t < t_0}$).

2.2 Марківські процеси з дискретними станами і з дискретним часом (ланцюги Маркова)

Розглянемо систему $\boldsymbol{S}$ з дискретними станами $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$. Припустимо, що випадкові переходи системи зі стану в стан можуть проходити тільки в певні моменти часу $\boldsymbol{t_0, t_1,} \ldots$. Ці моменти будемо називати ***кроками*** процесу; а $\boldsymbol{t_0 = 0}$ − його ***початком.*** Сам процес – ***випадковим блуканням*** системи $\boldsymbol{S}$ по станам. *Траєкторія блукання* – це реалізація випадкового процесу, яка отримана в результаті одного випробування.

Нехай випадковий процес відбувається в системі $\boldsymbol{S}$ з дискретними станами $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$, які вона може приймати в послідовності кроків з номерами *0, 1, 2,…*.

Ймовірність того, що на k –му кроці система буде знаходитися в стані s_i позначається:

$$\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{k}\right)=\boldsymbol{s_i}\right\},\quad i=1,\dots n,\quad k=0,1,2,\dots \tag{2.4}$$

Процес, якій відбувається у такій системі називається ***марківським процесом з дискретними станами та дискретним часом*** або ***марківським ланцюгом***.

Основною задачею дослідження марківського ланцюга є знаходження безумовних ймовірностей перебування системи $\boldsymbol{S}$ на будь-якому (k –му) кроці в стані s_i :

$$\boldsymbol{p_i}\left(\boldsymbol{k}\right)=\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{k}\right)=\boldsymbol{s_i}\right\},\quad i=1,\dots n,\quad k=0,1,2,\dots \tag{2.5}$$

Для знаходження ціх ймовірностей необхідно знати умовні ймовірності переходу системи $\boldsymbol{S}$ на k –му кроці в стан s_j , якщо відомо, що на попередньому кроці вона була в стані s_i . Позначимо цю ймовірність як

$$\boldsymbol{p_{ij}}\left(\boldsymbol{k}\right)=\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{k}\right)=\boldsymbol{s_j}\middle|\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{k-1}\right)=\boldsymbol{s_i}\right\},\quad \boldsymbol{i,j=1,\dots n} \tag{2.6}$$

Ймовірності $\boldsymbol{p_{ij}(k)}$ називаються ***перехідними ймовірностями*** марківського ланцюга на k –му кроці. Їх можна записати у вигляді матриці $n\times n$:

$$\left\|\boldsymbol{p_{ij}(t)}\right\|=\begin{Vmatrix} \boldsymbol{p_{11}(t)} & \boldsymbol{p_{12}(t)} & \dots & \boldsymbol{p_{1n}(t)} \\ \boldsymbol{p_{21}(t)} & \boldsymbol{p_{22}(t)} & \dots & \boldsymbol{p_{2n}(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{p_{n1}(t)} & \boldsymbol{p_{n2}(t)} & \dots & \boldsymbol{p_{nn}(t)} \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

Так як на кожному кроці система може знаходитися тільки в одному зі своїх станів, то для будь-якої i –ї строки матриці (2.7) маємо:

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{p_{ij}(k)=1} \tag{2.8}$$

Матриця з такою властивістю називається ***стохастичною***. Всі елементи стохастичної матриці задовольняють умові $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{p_{ij}(k)} \leq \mathbf{1}$. В силу умови (2.8)

$$\boldsymbol{p_{ii}(k) = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}(k)} \tag{2.9}$$

Для знаходження ймовірностей $\boldsymbol{p_i(k)}$ необхідно знати матрицю перехідних ймовірностей та початковий розподіл ймовірностей при $\boldsymbol{t_0 = 0}$:

$$\boldsymbol{p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0)} \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1} \tag{2.11}$$

Ланцюг Маркова називається ***однорідним***, якщо перехідні ймовірності не залежать від номеру кроку $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{p_{ij}(k) = p_{ij}}$.

Безумовні ймовірності перебування системи $\boldsymbol{S}$ на k –му кроці в стані s_i обчислюються за рекурентною формулою:

$$\boldsymbol{p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) p_{ij}}\ , \quad \boldsymbol{j = 1, \ldots n, \quad k = 0,1,2, \ldots} \tag{2.12}$$

Запишемо формулу (2.12) в матричному вигляді

$$\boldsymbol{P(k) = P(k-1)P}\ , \tag{2.13}$$

де $\boldsymbol{P}$ – матриця перехідних ймовірностей,

$$\boldsymbol{P(k) = (p_1(k), p_2(k), \ldots, p_n(k))}.$$

2.3 Марківські процеси з дискретними станами і з дискретним часом (стаціонарний режим)

В деяких ланцюгах Маркова з часом встановлюється стаціонарний режим, під час якого стани системи хоча й змінюються випадковим чином, але їх ймовірності $\boldsymbol{p_i(t)}$ залишаються постійними

$$p_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t) \qquad (2.14)$$

Ці ймовірності називаються ***фінальними*** ймовірностями станів. Фінальні ймовірності не залежать від початкових умов.

Умови існування стаціонарного режиму для системи $\boldsymbol{S}$ зі скінченим числом станів $\boldsymbol{n}$:

а) множина всіх станів $\boldsymbol{W}$ системи $\boldsymbol{S}$ повинна бути ергодичною;

б) ланцюг повинен бути однорідним;

в) ланцюг не повинен бути циклічним.

Ланцюги Маркова, які задовольняють цім умовам називаються ***ергодичними ланцюгами Маркова*** .

Для знаходження фінальної ймовірності для стану s_j використовують ***балансову умову***

$$\sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij} = p_j \sum_{i=1}^{n} p p_{ji}, \quad j = 1, \ldots n \qquad (2.15)$$

та умову

$$\sum_{j=1}^{n} p_i = 1. \qquad (2.16)$$

Відкидаючи одне з рівнянь (2.15), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь, яка має єдиний розв’язок. Розв’язуючи систему (2.15), (2.16) знаходимо фінальні ймовірності.

2.4 Варіанти самостійного завдання №1

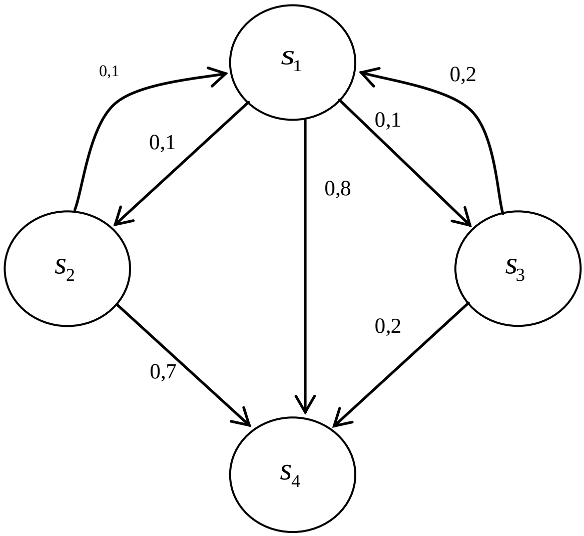
Завдання: дан граф станів системи $\boldsymbol{S}$. В початковий момент часу $t_0 = 0$ система $\boldsymbol{S}$ знаходиться у стані s_i. Необхідно:

а) визначити матрицю перехідних ймовірностей системи;

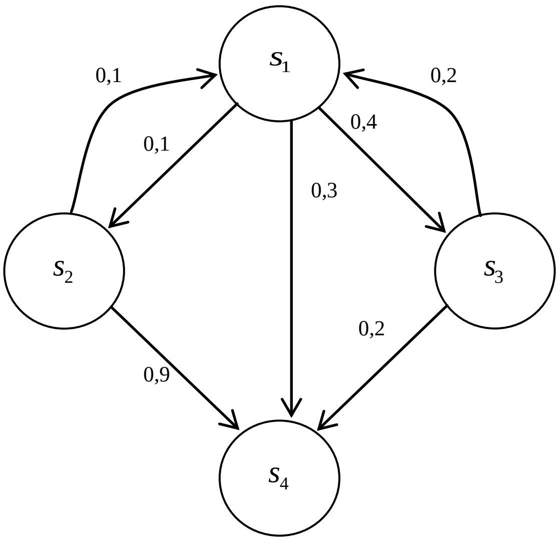
б) дати класифікацію станів системи;

в) знайти розподіл ймовірностей для перших чотирьох кроків.

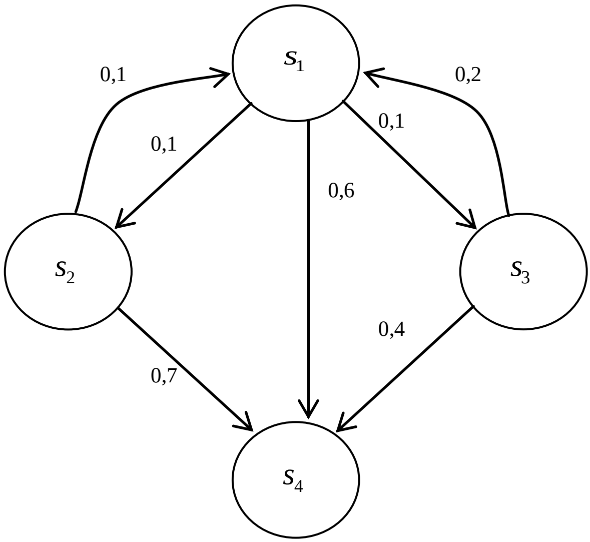
2.4.1
$\boldsymbol{i = 1}$



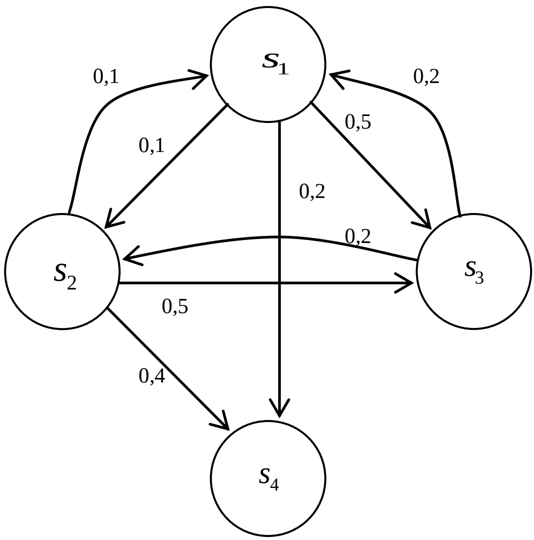
2.4.2
$\boldsymbol{i = 1}$



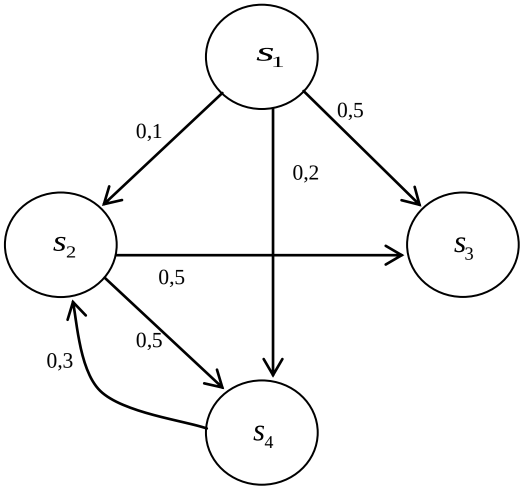
2.4.3
$\boldsymbol{i = 2}$



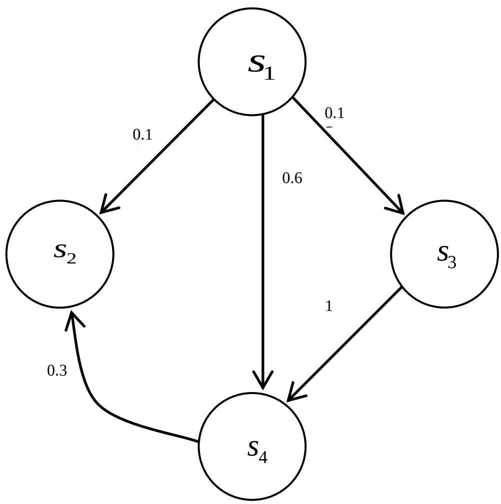
2.4.4
$\boldsymbol{i = 3}$



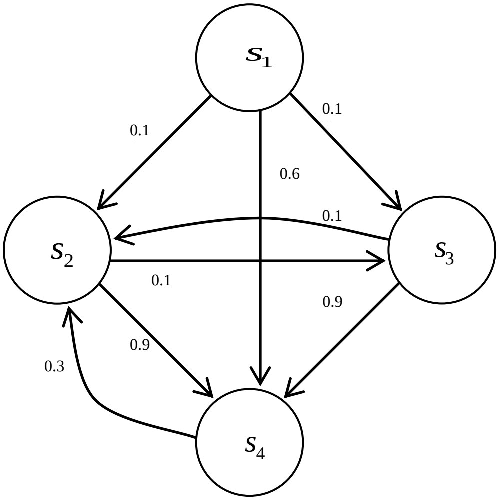
2.4.5
$i = 1$



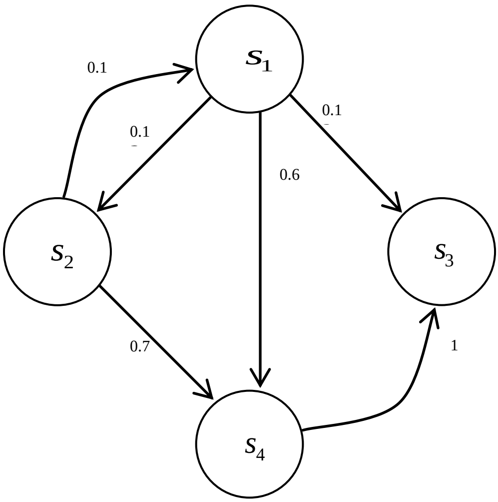
2.4.6
$i = 3$



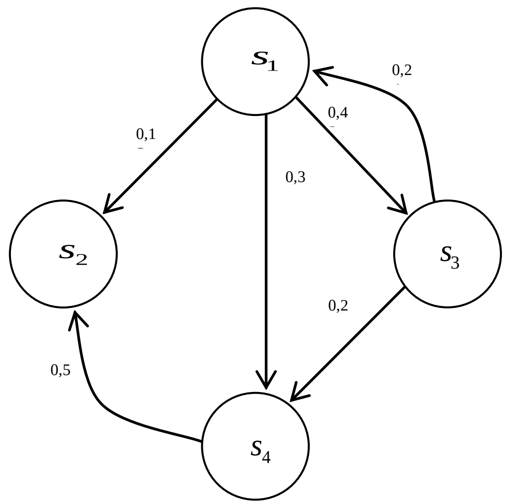
2.4.7
$\boldsymbol{i = 2}$



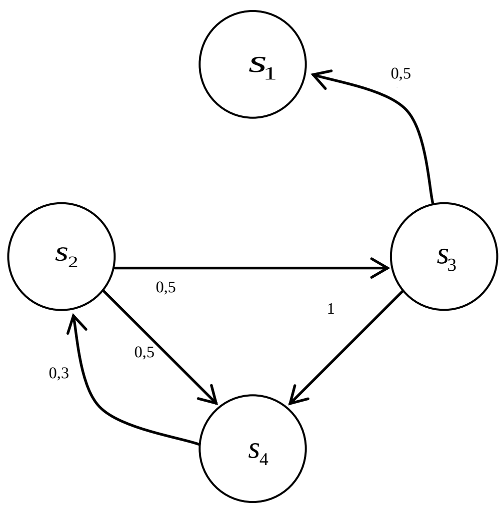
2.4.8
$\boldsymbol{i = 4}$



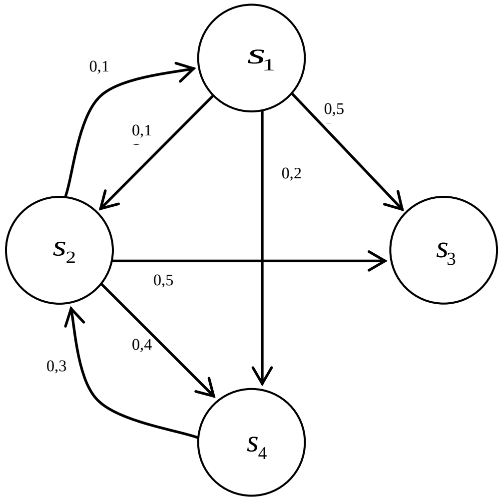
2.4.9
$\boldsymbol{i=1}$



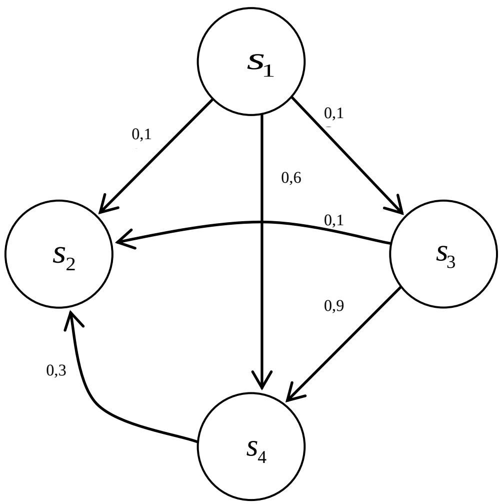
2.4.10 $\boldsymbol{i=3}$



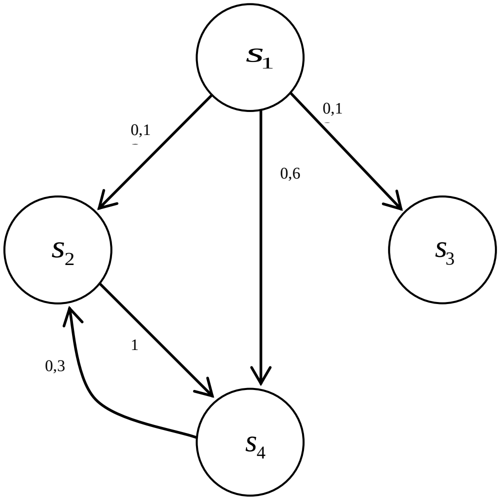
2.4.11
$i = 2$



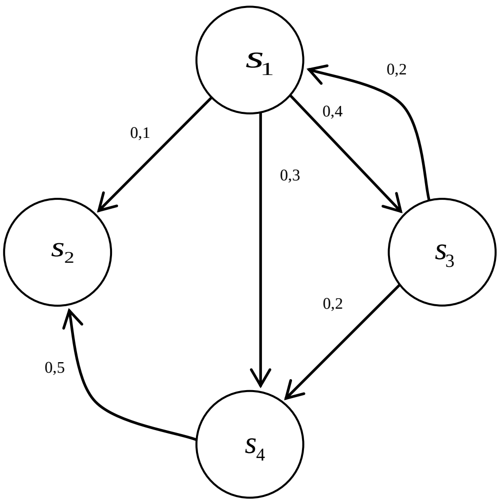
2.4.12
$i = 4$



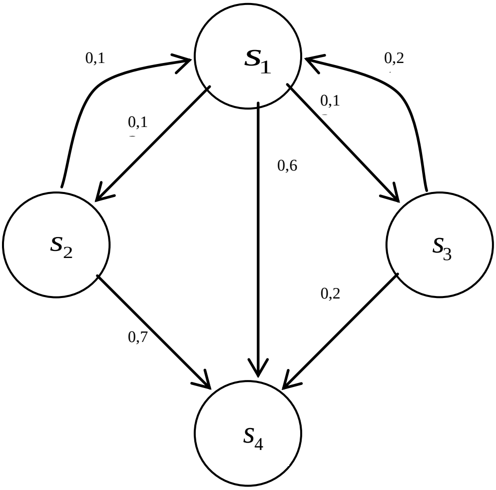
2.4.13
$\boldsymbol{i=1}$



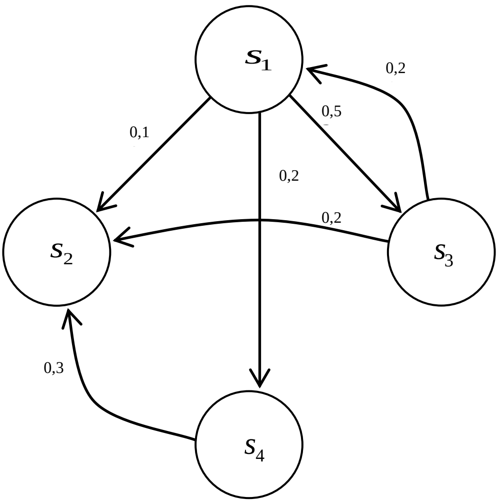
2.4.14
$\boldsymbol{i=3}$



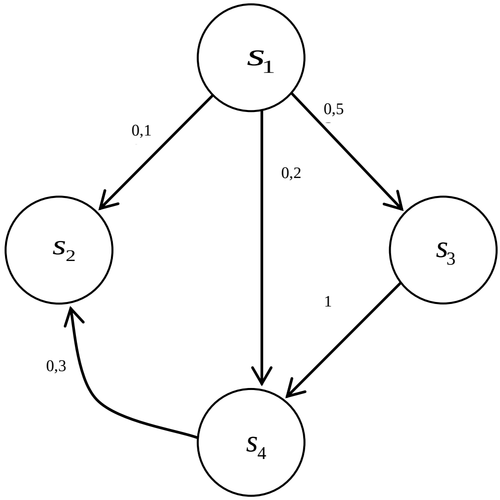
2.4.15
$i = 2$



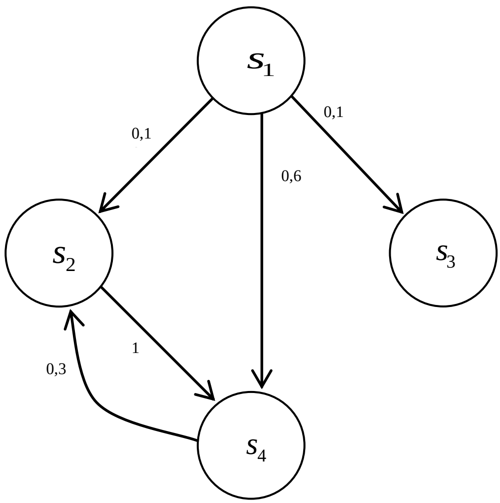
2.4.16
$i = 4$



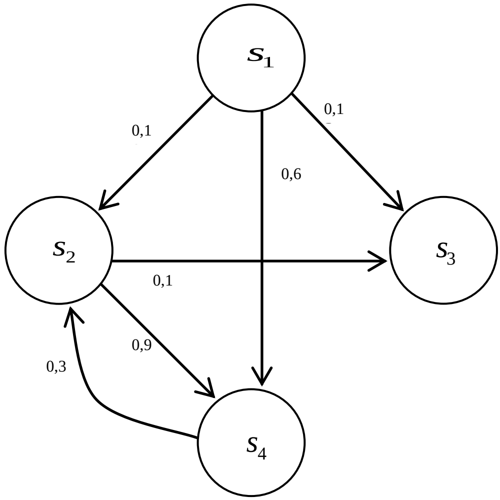
2.4.17
$i = 1$



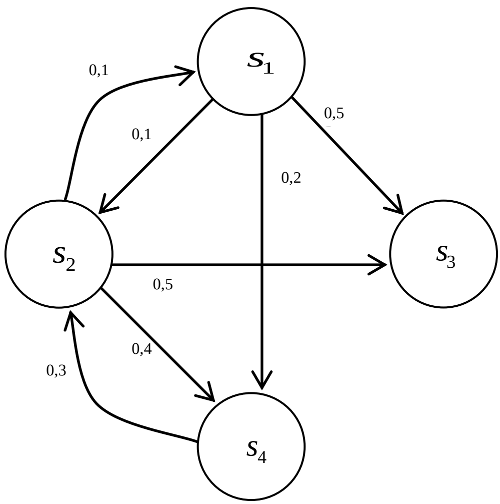
2.4.18
$i = 1$



2.4.1
$i = 2$



2.4.20
$i = 4$



2.5 Варіанти самостійного завдання №2

Завдання: дана матриця перехідних ймовірностей $\left\| \boldsymbol{p_{ij}} \right\|$ системи $\boldsymbol{S}$. Необхідно:

а) побудувати граф станів системі $\boldsymbol{S}$;

б) знайти граничні ймовірності станів.

2.5.1

$$\begin{Vmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{Vmatrix}$$

2.5.2

$$\begin{Vmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{Vmatrix}$$

2.5.3

$$\begin{Vmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{Vmatrix}$$

2.5.4

$$\begin{Vmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{Vmatrix}$$

2.5.5

$$\begin{Vmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{Vmatrix}$$

2.5.6

$$\begin{Vmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0,7 \end{Vmatrix}$$

2.5.7

$$\begin{Vmatrix} 0,7 & 0 & 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,4 & 0,3 \end{Vmatrix}$$

2.5.8

$$\begin{Vmatrix} 0,3 & 0 & 0,5 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,2 & 0,6 \end{Vmatrix}$$

2.5.9

$$\begin{Vmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0,4 & 0,2 \end{Vmatrix}$$

2.5.10

$$\begin{Vmatrix} 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,7 & 0 & 0,2 \end{Vmatrix}$$

2.5.11

$$\begin{Vmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,8 \end{Vmatrix}$$

2.5.12

$$\begin{Vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,1 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,1 & 0 & 0,4 \end{Vmatrix}$$

2.5.13

$$\begin{Vmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{Vmatrix}$$

2.5.14

$$\begin{Vmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{Vmatrix}$$

2.5.15

$$\begin{Vmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \end{Vmatrix}$$

2.5.16

$$\begin{Vmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,9 \end{Vmatrix}$$

2.5.17

$$\begin{Vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{Vmatrix}$$

2.5.18

$$\begin{Vmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,8 \end{Vmatrix}$$

2.5.19

$$\begin{Vmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,9 \end{Vmatrix}$$

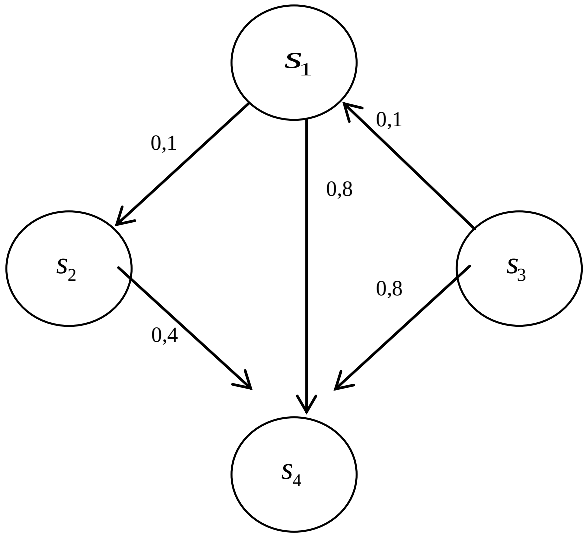
2.5.20

$$\begin{Vmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0,1 \end{Vmatrix}$$

2.6 Приклади виконання завдання

2.6.1 Приклад завдання №1

Дана система $\boldsymbol{S}$ з дискретними станами та дискретним часом. Граф станів має вигляд:



В початковий момент часу $t_0 = 0$ система S знаходиться у стані s_1. Необхідно:

а) визначити матрицю перехідних ймовірностей системи;

б) дати класифікацію станів системи;

в) знайти розподіл ймовірностей для перших чотирьох кроків.

Розв'язання:

а) матриця перехідних ймовірностей:

$$\left\| p_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

б) стан s_4 є кінцевим, стан s_3 є джерелом, стани s_1 і s_2 – транзитивні;

в) так як при $t_0 = 0$ система S знаходиться у стані s_1, то

$$p_1(0) = 1, \; p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0,$$

або

$$\boldsymbol{P}(0)=(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \ .$$

За формулою (2.12) при $\boldsymbol{k=1}$ отримаємо розподіл ймовірностей станів на першому кроці.

$$\boldsymbol{p_1(1) = \sum_{i=1}^{4} p_i(0)p_{i1} =}$$

$$\boldsymbol{= p_1(0)p_{11} + p_2(0)p_{21} + p_3(0)p_{31} + p_4(0)p_{41} + p_5(0)p_{51} = 0 \ ,}$$

$$\boldsymbol{p_2(1) = \sum_{i=1}^{4} p_i(0)p_{i2} = 0{,}1} \quad ,$$

$$\boldsymbol{p_3(1) = \sum_{i=1}^{4} p_i(0)p_{i3} = 0} \quad ,$$

$$\boldsymbol{p_4(1) = \sum_{i=1}^{4} p_i(0)p_{i4} = 0{,}8} \quad .$$

Або, $$\boldsymbol{P(1) = (0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0 \quad 0{,}8)} \quad .$$

На другому кроці:

$$\boldsymbol{p_1(2) = \sum_{i=1}^{4} p_i(1)p_{i1} = 0{,}01} \quad ,$$

$$\boldsymbol{p_2(2) = \sum_{i=1}^{4} p_i(1)p_{i2} = 0{,}07} \quad ,$$

$$\boldsymbol{p_3(2) = \sum_{i=1}^{4} p_i(1)p_{i3} = 0} \quad ,$$

$$\boldsymbol{p_4(2) = \sum_{i=1}^{4} p_i(1)p_{i4} = 0{,}92} \quad .$$

Або, $$\boldsymbol{P(2) = (0{,}01 \quad 0{,}07 \quad 0 \quad 0{,}92)} \quad .$$

Аналогічно знаходимо

$$P(3) = \begin{pmatrix} 0{,}001 & 0{,}43 & 0 & 0{,}956 \end{pmatrix},$$

$$P(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}026 & 0 & 0{,}974 \end{pmatrix}.$$

2.6.2 Приклад завдання №2

Дана матриця перехідних ймовірностей

$$\left\| p_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{Vmatrix}$$

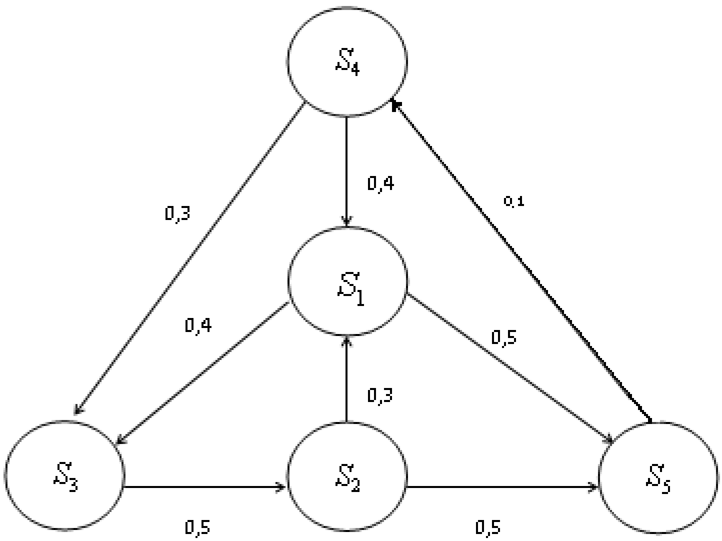
системи S. Необхідно:

а) побудувати граф станів системі S;

б) знайти граничні ймовірності станів.

Розв’язання:

а) побудуємо граф станів



б) складемо рівняння балансової умови (2.15) :

$j=1$:
$$p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + p_3 p_{31} + p_4 p_{41} + p_5 p_{51} = \\ = p_1(p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15})$$

$$0{,}3p_2 + 0{,}4p_4 = 0{,}9p_1 \qquad (2.17)$$

$j=2$:
$$p_1 p_{12} + p_2 p_{22} + p_3 p_{32} + p_4 p_{42} + p_5 p_{52} = \\ = p_2(p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} + p_{25})$$

$$0{,}5p_3 = 0{,}8p_2 \qquad (2.18)$$

$j=3$:
$$p_1 p_{13} + p_2 p_{23} + p_3 p_{33} + p_4 p_{43} + p_5 p_{53} = \\ = p_3(p_{31} + p_{32} + p_{33} + p_{34} + p_{35})$$

$$0{,}4p_1 + 0{,}3p_4 = 0{,}5p_3 \qquad (2.19)$$

$j=4$:
$$p_1 p_{14} + p_2 p_{24} + p_3 p_{34} + p_4 p_{44} + p_5 p_{54} = \\ = p_4(p_{41} + p_{42} + p_{43} + p_{44} + p_{45})$$

$$0{,}1p_5 = 0{,}7p_4 \qquad (2.20)$$

Додамо до системи рівнянь (2.17)–(2.20) умову:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1. \qquad (2.21)$$

Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -0{,}9p_1 + 0{,}3p_2 + 0{,}4p_4 = 0 \\ -0{,}8p_2 + 0{,}5p_3 = 0 \\ 0{,}4p_1 - 0{,}5p_3 + 0{,}3p_4 = 0 \\ -0{,}7p_4 + 0{,}1p_5 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases} \qquad (2.22)$$

Розв’язавши систему (2.22) , знайдемо граничні ймовірності:

$$\boldsymbol{p_1 = 0{,}076}$$
$$\boldsymbol{p_2 = 0{,}104}$$
$$\boldsymbol{p_3 = 0{,}061}$$
$$\boldsymbol{p_4 = 0{,}095}$$
$$\boldsymbol{p_5 = 0{,}664}\ .$$

3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

МАРКІВСЬКІ ПРОЦЕСИ З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ ТА НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

3.1 Потоки подій

Потоком подій називається послідовність однорідних подій, які з'являються один за одним у випадкові моменти часу.

Властивості потоку подій.

Ординарність.

Ординарність потоку означає, що ймовірність попадання на ділянку Δt двох або більше подій досить мала у зрівнянні з ймовірністю попадання на неї рівно однієї події.

Для ординарних потоків важливим є поняття ***інтенсивності*** потоку. Нехай $X(t,\Delta t)$ − випадкове число подій, які потрапили на елементарну ділянку $(t, t+\Delta t)$, $M[X(t,\Delta t)]$ − математичне сподівання випадкової функції $X(t,\Delta t)$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{M[X(t,\Delta t)]}{\Delta t}$, то її називають ***інтенсивністю (щільністю)*** потоку подій в момент t .

Інтенсивність

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[t,\Delta t]}{\Delta t} \tag{3.1}$$

− це середнє число подій, що відповідає одиниці часу для елементарної ділянки Δt . Вона має розмірність $\dfrac{1}{час}$.

Очевидь, що

$$M[X(t,\tau)] = \int_t^{t+\tau}\lambda(t)dt\ . \tag{3.2}$$

<u>Відсутність післядії.</u>

Потік подій називається ***потоком без післядії***, якщо ймовірність попадання будь-якого числа подій на одну з ділянок τ, що примикає до моменту t, розподілено за законом Пуассону:

$$P\{X(t,\tau)=k\}=\frac{a(t,\tau)^k e^{-a(t,\tau)}}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{3.3}$$

де

$$a=a(t,\tau)=\int_t^{t+\tau}\lambda(t)dt. \tag{3.4}$$

Ординарний потік подій, в якому відсутня післядія, називається ***пуассонівським процесом подій.***

<u>Стаціонарність.</u>

Потік подій називається стаціонарним, якщо всі його імовірнісні характеристики не змінюються з часом.

Потік подій, який володіє властивостями ординарності, стаціонарності та відсутністю післядії називається ***простішим потоком подій***.

3.2 Рівняння Колмогорова

Розглянемо фізичну систему S, яка має n можливих станів

$$s_1, s_2, \ldots, s_n \tag{3.5}$$

Будемо вважати, що переходи зі стану в стан відбуваються в випадкові моменти часу під впливом пуассонівського потоку подій з інтенсивністю $\lambda_{ij}(t)$. Перехід зі стану s_i в стан s_j відбувається в той момент, коли настає перша подія потоку. Позначимо через $p_i(t)$ ймовірність того, що система знаходиться у стані s_i в момент часу t. Ці ймовірності можна знайти за допомогою ***рівнянь Колмогорова:***

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}p_j(t)\lambda_{ji}(t)-p_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t), \quad i=1,2,\ldots n\ . \tag{3.6}$$

Похідна ймовірності будь-якого стану дорівнює сумі потоків ймовірностей, які переводять систему в цей стан за вийнятком суми потоків ймовірностей, які виводять систему з цього стану.

Систему (3.6) розв’язують при початкових умовах, які задають ймовірності станів в початковий момент при $t=0$:

$$p_1(0),\ p_2(0),\ \ldots,\ p_n(0)\ , \tag{3.7}$$

при цьому для будь-якого моменту часу t виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1, \quad t \ge 0\ . \tag{3.8}$$

Умову (3.8) можна використовувати замість одного з диференціальних рівнянь (3.7) .

3.3 Однорідні марківські процеси з дискретними станами та неперервним часом. Стаціонарний режим

Нехай $\lambda_{ij}(t) = const, \quad (i, j = 1,2,\ldots,n)$. Такі процеси називають *однорідними*. Ймовірності станів визначаються з рівнянь Колмогорова з постійними коефіцієнтами для знаходження розв’язків таких рівнянь на практиці застосовується перетворення Лапласу.

Розглянемо процес, весь простір часу якого є ергодичним, тобто для будь-якої пари станів s_i і s_j знайдеться таке $\tau > 0$, при якому виконується нерівність:

$$p_{ij}(t_0,\tau) = P\left\{S(t_0+\tau) = s_j \,\middle|\, S(t_0) = s_i\right\} > 0\ . \tag{3.9}$$

Випадковий процес є ергодичним, якщо існує границя

$$\lim_{\tau\to\infty} p_{ij}(t_0,\tau) = p_i = P\left\{S = s_j\right\} > 0, \quad (i, j = 1,2,\ldots,n)\ . \tag{3.10}$$

Транзитивність процесу (існування “маршруту” між будь-якими двома станами) є необхідною умовою існування границі (3.10). Крім того для ергодичності процесу необхідна його однорідність, тобто ймовірність переходу зі стану s_i в стан s_j за час τ не повинна залежати від того, в якій момент часу t_0 система знаходилась в стані s_i, а залежала лише від величини τ:

$$p_{ij}(t_0,\tau) = p_{ij}(\tau) . \tag{3.11}$$

Теорема Маркова стверджує, що будь-який транзитивний однорідний марківський процес зі скінченим числом станів n є ергодичним.

Режим функціонування системи S, коли ймовірності станів p_j не залежать від часу, будемо називати ***стаціонарним режимом*** , а самі ймовірності ***фінальними (граничними) ймовірностями***.

Стаціонарний режим встановлюється в будь-якій ергодичній системі. Час функціонування такої системи можна розбити на два інтервали: $(0, t_n)$ та (t_n, ∞) , де $(0, t_n)$ − перехідний режим, (t_n, ∞) − стаціонарний режим.

Для будь-якого $t \in (t_n , \infty)$ справедлива нерівність

$$\left|p_j(t) - p_j\right| < \varepsilon , \tag{3.12}$$

де ε − достатньо мала величина. Чім менше ε , тим більше t_n .

Так як в стаціонарному режимі функціонування системи граничні ймовірності постійні, то

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \frac{dp_i}{dt} = 0 . \tag{3.13}$$

Рівняння Колмогорова набудуть вигляду

$$0 = \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_{ji} - p_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_{ji} = p_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} . \tag{3.14}$$

Додамо умову

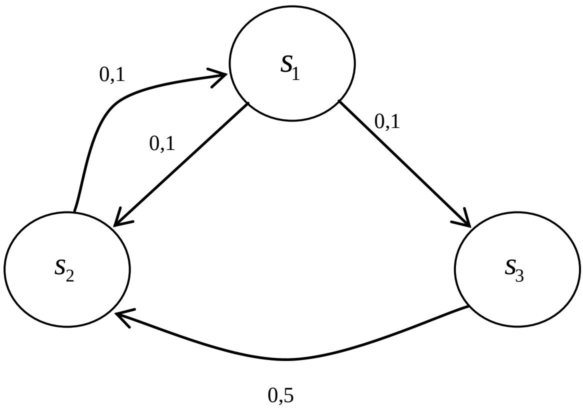
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{3.15}$$

та відкинемо одне з рівнянь (3.14).

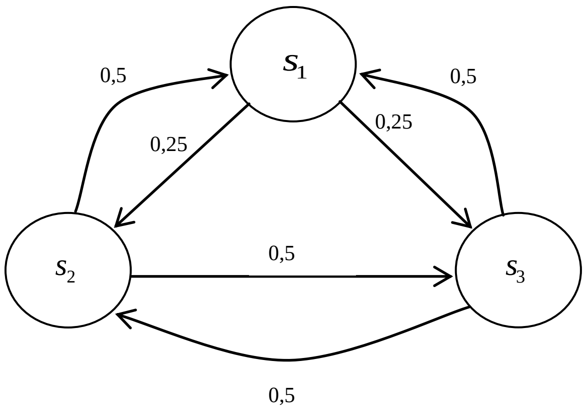
3.4 Варіанти самостійного завдання №1

Завдання: дан граф станів системи $\boldsymbol{S}$. В початковий момент часу $\boldsymbol{t_0 = 0}$ система $\boldsymbol{S}$ знаходиться у стані s_i. Записати та розв'язати рівняння Колмогорова.

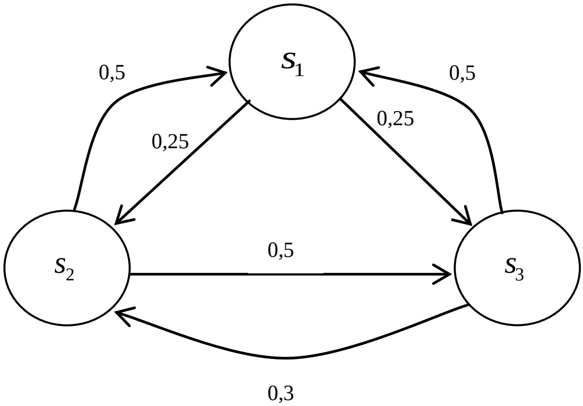
3.4.1
$\boldsymbol{i = 1}$



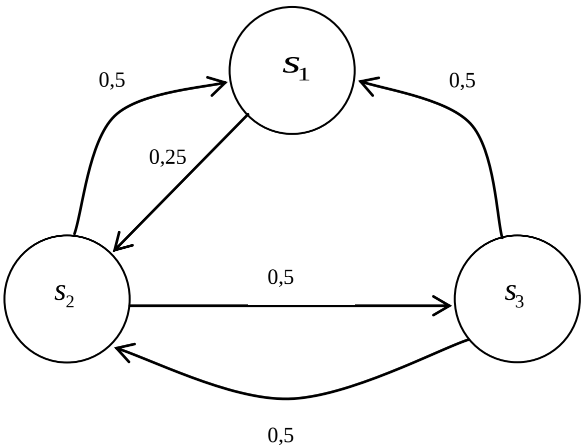
3.4.2
$\boldsymbol{i = 1}$



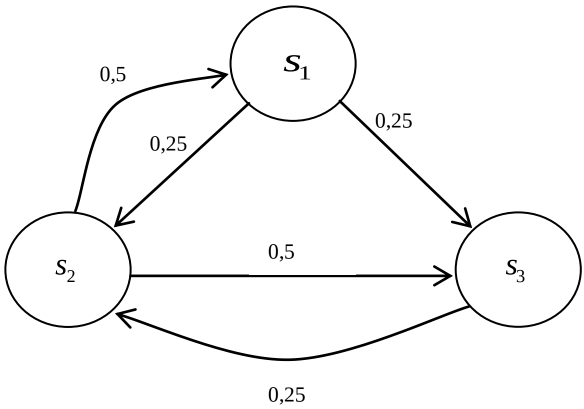
3.4.3
$\boldsymbol{i = 2}$



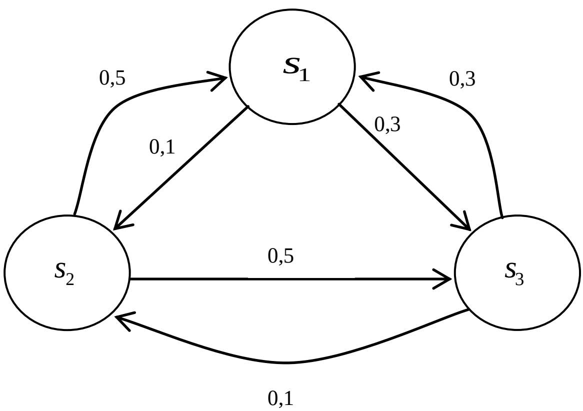
3.4.4
$\boldsymbol{i = 3}$



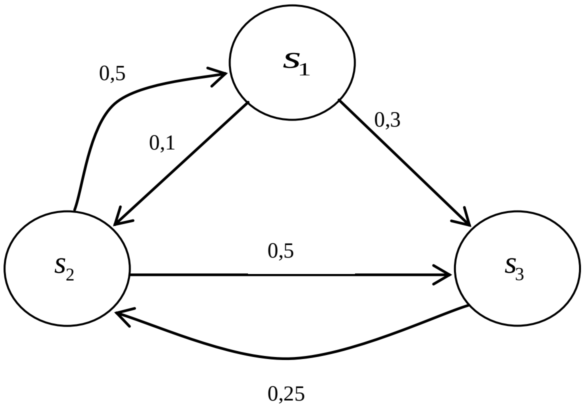
3.4.5
$\boldsymbol{i=1}$



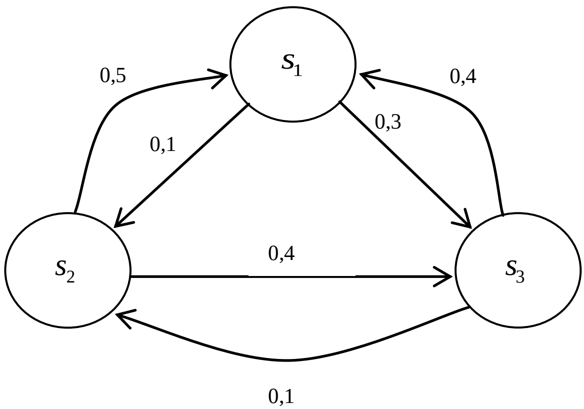
3.4.6
$\boldsymbol{i=3}$



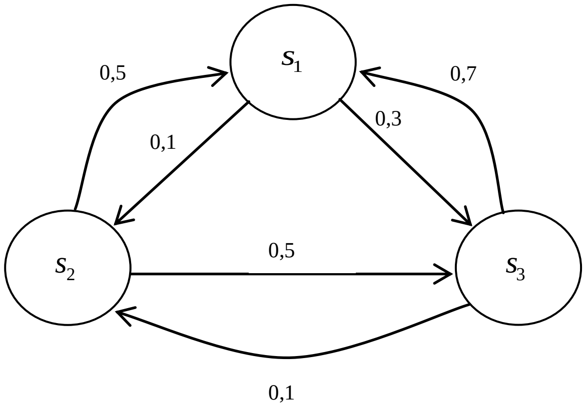
3.4.7
$\boldsymbol{i=2}$



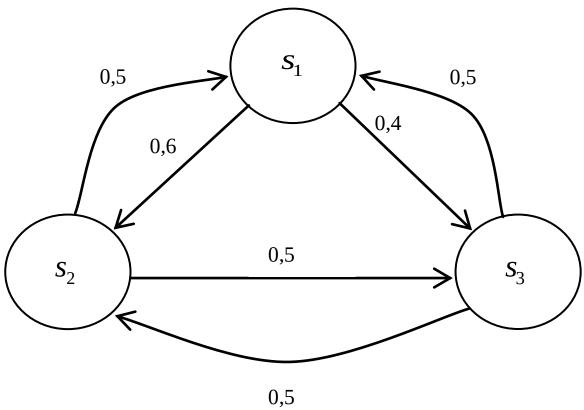
3.4.8
$\boldsymbol{i=2}$



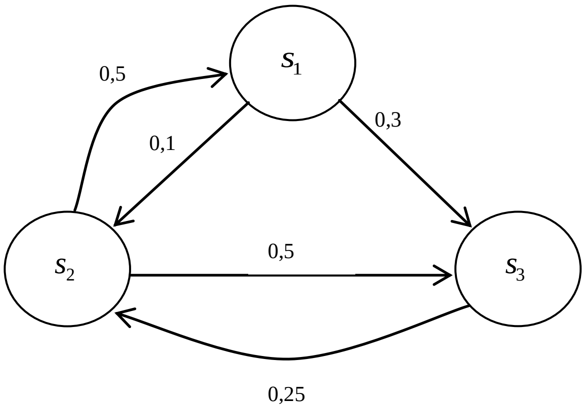
3.4.9
$i = 1$



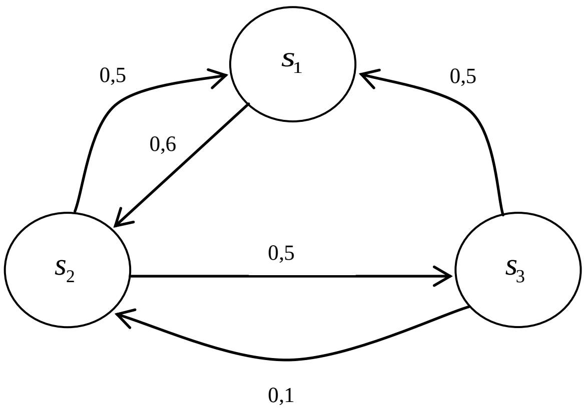
3.4.10
$i = 3$



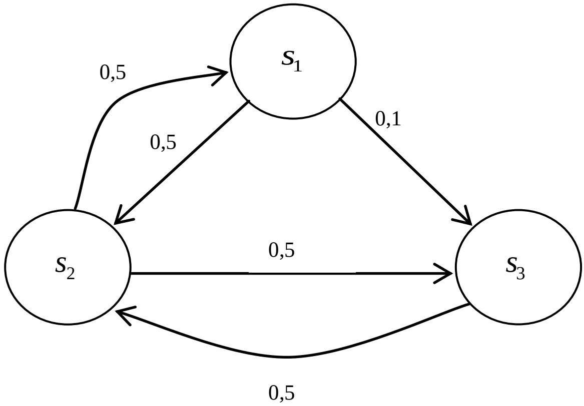
3.4.11
$i = 2$



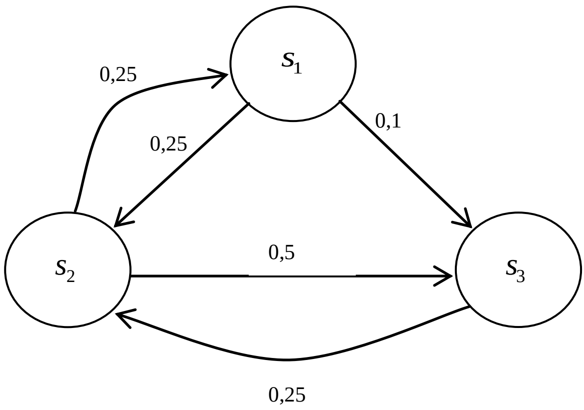
3.4.12
$i = 1$



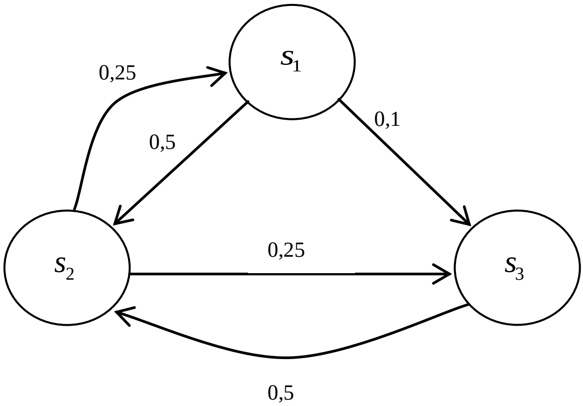
3.4.13
$\boldsymbol{i=1}$



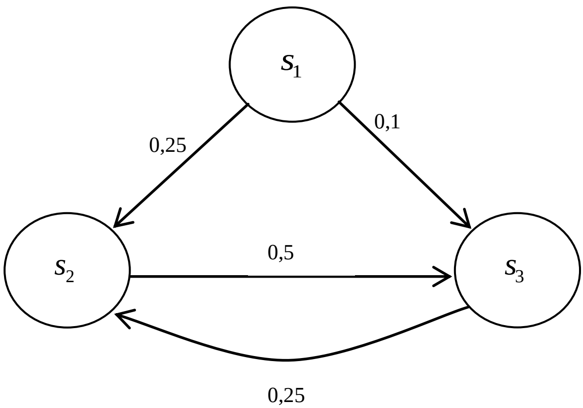
3.4.14
$\boldsymbol{i=3}$



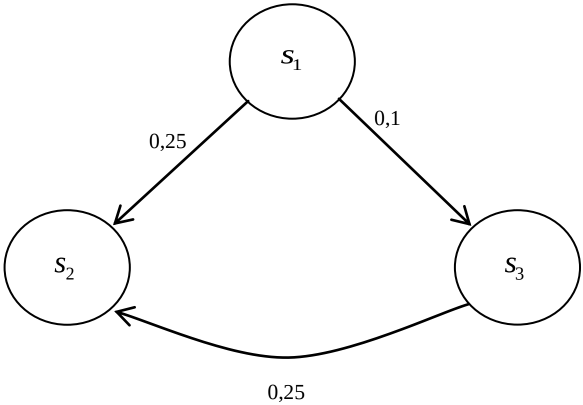
3.4.15
$i = 2$



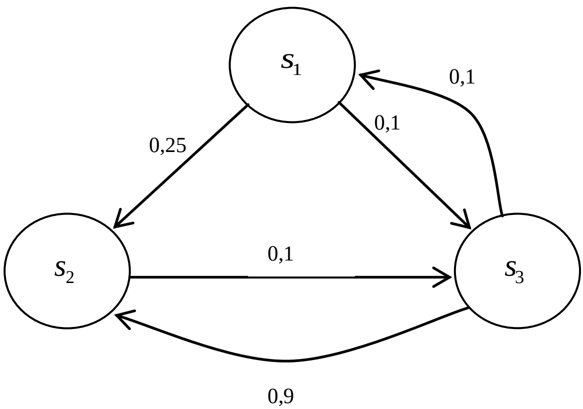
3.4.16
$i = 2$



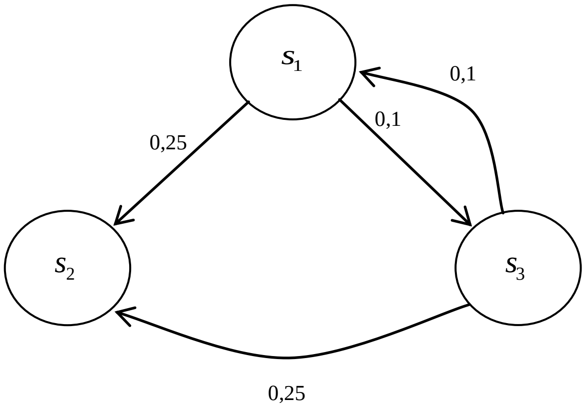
3.4.17
$i = 1$



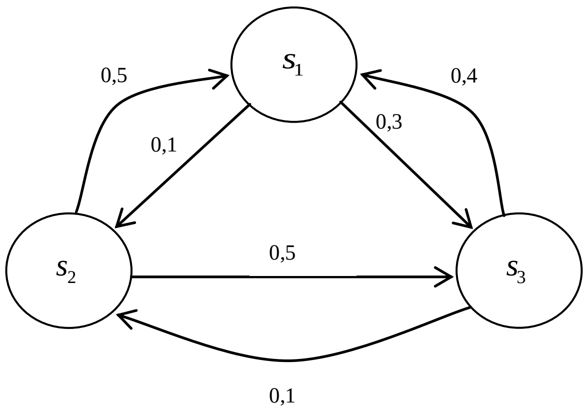
3.4.18
$i = 1$



3.4.19
$\boldsymbol{i=2}$



3.4.20
$\boldsymbol{i=2}$



3.5 Варіанти самостійного завдання №2

Завдання: **с**истема S має 5 станів. Перехід зі стану в стан відбувається в випадкові моменти часу.

Побудувати граф станів системи та знайти граничні ймовірності.

Інтенсивності пуасонівського потоку подій надані.

3.5.1

$$\lambda_{12}(t)=1,\quad \lambda_{13}(t)=0,\quad \lambda_{14}(t)=0,\quad \lambda_{15}(t)=2,$$
$$\lambda_{21}(t)=1,\quad \lambda_{23}(t)=2,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=0,$$
$$\lambda_{31}(t)=1,\quad \lambda_{32}(t)=0,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=2,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=0,\quad \lambda_{45}(t)=1,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=1,\quad \lambda_{54}(t)=2.$$

3.5.2

$$\lambda_{12}(t)=2,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=2,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=2,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=2,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=2,\quad \lambda_{54}(t)=1.$$

3.5.3

$$\lambda_{12}(t)=2,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=2,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=2,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=2,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.4

$$\lambda_{12}(t)=2,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=2,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=2,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=0,\quad \lambda_{52}(t)=0,\quad \lambda_{53}(t)=1,\quad \lambda_{54}(t)=1.$$

3.5.5

$$\lambda_{12}(t)=2,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=2,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=2,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=0,\quad \lambda_{52}(t)=1,\quad \lambda_{53}(t)=2,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.6

$$\lambda_{12}(t)=2,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=2,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=2,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=0,\quad \lambda_{53}(t)=0,\quad \lambda_{54}(t)=1.$$

3.5.7

$$\lambda_{12}(t)=2,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=2,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=2,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=0,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=1,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=2,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.8

$$\begin{array}{llll}
\lambda_{12}(t)=2, & \lambda_{13}(t)=1, & \lambda_{14}(t)=2, & \lambda_{15}(t)=1, \\
\lambda_{21}(t)=0, & \lambda_{23}(t)=2, & \lambda_{24}(t)=1, & \lambda_{25}(t)=2, \\
\lambda_{31}(t)=2, & \lambda_{32}(t)=1, & \lambda_{34}(t)=1, & \lambda_{35}(t)=1, \\
\lambda_{41}(t)=2, & \lambda_{42}(t)=2, & \lambda_{43}(t)=0, & \lambda_{45}(t)=2, \\
\lambda_{51}(t)=1, & \lambda_{52}(t)=2, & \lambda_{53}(t)=2, & \lambda_{54}(t)=0.
\end{array}$$

3.5.9

$$\begin{array}{llll}
\lambda_{12}(t)=2, & \lambda_{13}(t)=1, & \lambda_{14}(t)=2, & \lambda_{15}(t)=1, \\
\lambda_{21}(t)=0, & \lambda_{23}(t)=2, & \lambda_{24}(t)=1, & \lambda_{25}(t)=2, \\
\lambda_{31}(t)=2, & \lambda_{32}(t)=1, & \lambda_{34}(t)=1, & \lambda_{35}(t)=1, \\
\lambda_{41}(t)=0, & \lambda_{42}(t)=1, & \lambda_{43}(t)=0, & \lambda_{45}(t)=2, \\
\lambda_{51}(t)=1, & \lambda_{52}(t)=2, & \lambda_{53}(t)=2, & \lambda_{54}(t)=0.
\end{array}$$

3.5.10

$$\begin{array}{llll}
\lambda_{12}(t)=1, & \lambda_{13}(t)=2, & \lambda_{14}(t)=2, & \lambda_{15}(t)=2, \\
\lambda_{21}(t)=2, & \lambda_{23}(t)=2, & \lambda_{24}(t)=1, & \lambda_{25}(t)=1, \\
\lambda_{31}(t)=2, & \lambda_{32}(t)=1, & \lambda_{34}(t)=1, & \lambda_{35}(t)=0, \\
\lambda_{41}(t)=1, & \lambda_{42}(t)=1, & \lambda_{43}(t)=1, & \lambda_{45}(t)=0, \\
\lambda_{51}(t)=1, & \lambda_{52}(t)=2, & \lambda_{53}(t)=0, & \lambda_{54}(t)=0.
\end{array}$$

3.5.11

$$\begin{array}{llll}
\lambda_{12}(t)=0, & \lambda_{13}(t)=1, & \lambda_{14}(t)=1, & \lambda_{15}(t)=1, \\
\lambda_{21}(t)=2, & \lambda_{23}(t)=2, & \lambda_{24}(t)=1, & \lambda_{25}(t)=1, \\
\lambda_{31}(t)=2, & \lambda_{32}(t)=1, & \lambda_{34}(t)=1, & \lambda_{35}(t)=0, \\
\lambda_{41}(t)=1, & \lambda_{42}(t)=1, & \lambda_{43}(t)=1, & \lambda_{45}(t)=0, \\
\lambda_{51}(t)=1, & \lambda_{52}(t)=2, & \lambda_{53}(t)=0, & \lambda_{54}(t)=0.
\end{array}$$

3.5.12

$$\lambda_{12}(t)=1,\quad \lambda_{13}(t)=0,\quad \lambda_{14}(t)=1,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=2,\quad \lambda_{23}(t)=2,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=1,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=0,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=0,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.13

$$\lambda_{12}(t)=0,\quad \lambda_{13}(t)=2,\quad \lambda_{14}(t)=0,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=1,\quad \lambda_{23}(t)=1,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=0,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=0,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.14

$$\lambda_{12}(t)=0,\quad \lambda_{13}(t)=2,\quad \lambda_{14}(t)=0,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=1,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=1,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=0,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=0,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.15

$$\lambda_{12}(t)=0,\quad \lambda_{13}(t)=2,\quad \lambda_{14}(t)=0,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=0,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=2,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=0,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=0,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.16

$$\lambda_{12}(t)=0,\quad \lambda_{13}(t)=2,\quad \lambda_{14}(t)=0,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=0,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=1,\quad \lambda_{32}(t)=0,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=0,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.17

$$\lambda_{12}(t)=0,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=0,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=1,\quad \lambda_{23}(t)=0,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=0,\quad \lambda_{32}(t)=2,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=2,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=1,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.18

$$\lambda_{12}(t)=0,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=0,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=1,\quad \lambda_{23}(t)=0,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=1,\quad \lambda_{32}(t)=2,\quad \lambda_{34}(t)=2,\quad \lambda_{35}(t)=2,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=0,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=1,\quad \lambda_{53}(t)=2,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.5.19

$$\lambda_{12}(t)=1,\quad \lambda_{13}(t)=1,\quad \lambda_{14}(t)=0,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=1,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=1,\quad \lambda_{32}(t)=1,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=2,$$
$$\lambda_{41}(t)=1,\quad \lambda_{42}(t)=1,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=2,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=2,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

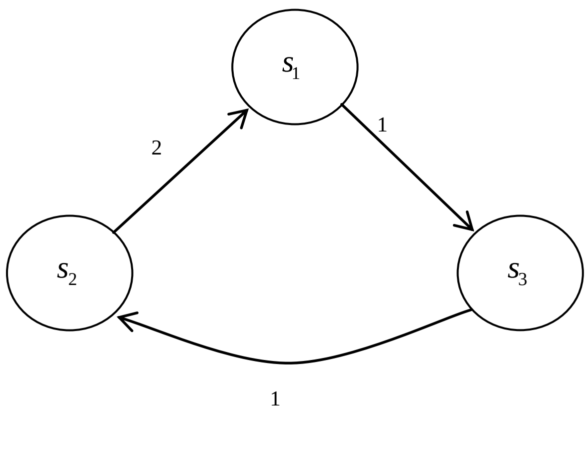
3.5.20

$$\lambda_{12}(t)=2,\quad \lambda_{13}(t)=2,\quad \lambda_{14}(t)=2,\quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=0,\quad \lambda_{23}(t)=1,\quad \lambda_{24}(t)=1,\quad \lambda_{25}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=1,\quad \lambda_{32}(t)=2,\quad \lambda_{34}(t)=1,\quad \lambda_{35}(t)=2,$$
$$\lambda_{41}(t)=0,\quad \lambda_{42}(t)=2,\quad \lambda_{43}(t)=1,\quad \lambda_{45}(t)=2,$$
$$\lambda_{51}(t)=1,\quad \lambda_{52}(t)=2,\quad \lambda_{53}(t)=1,\quad \lambda_{54}(t)=0.$$

3.6 Приклади виконання завдання

3.6.1 Приклад завдання №1

Дан граф станів системи $\boldsymbol{S}$. В початковий момент часу $\boldsymbol{t_0=0}$ система $\boldsymbol{S}$ знаходиться у стані s_1. Записати та розв’язати рівняння Колмогорова.



Розв’язання

Складемо рівняння Колмогорова для ймовірностей $\boldsymbol{p_1(t)}$ та $\boldsymbol{p_2(t)}$:

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=p_2(t)\lambda_{21}(t)+p_3(t)\lambda_{31}(t)-p_1(t)(\lambda_{12}(t)+\lambda_{13}(t)) \ ,$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt}=p_1(t)\lambda_{12}(t)+p_3(t)\lambda_{32}(t)-p_2(t)(\lambda_{21}(t)+\lambda_{23}(t))$$

та додамо умову

$$p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=1 \ .$$

В нашому прикладі інтенсивності пуассонівських потоків дорівнюють:

$$\begin{aligned} &\lambda_{12}(t)=0, \qquad &&\lambda_{13}(t)=1,\\ &\lambda_{21}(t)=2, &&\lambda_{23}(t)=0,\\ &\lambda_{31}(t)=0, &&\lambda_{32}(t)=1 \ . \end{aligned}$$

Система рівнянь набуває вигляду:

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=2p_2(t)-p_1(t) \tag{3.16}$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt}=p_3(t)-2p_2(t) \tag{3.17}$$

$$p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=1 \tag{3.18}$$

З рівняння (3.18) виразимо $p_3(t)$ та підставимо в (3.17) :

$$p_3(t)=1-p_1(t)-p_2(t) \ ,$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt}=1-p_1(t)-3p_2(t) \ .$$

Одержали систему з двох диференційних рівнянь, з якої знайдемо $p_1(t)$ і $p_2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2p_2(t) - p_1(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = 1 - p_1(t) - 3p_2(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

Розв'яжемо систему за допомогою перетворення Лапласу. Позначимо зображення функцій $p_1(t)$ і $p_2(t)$ через $\pi_1(s)$ і $\pi_2(s)$. Оскільки в момент часу $t_0 = 0$ система знаходиться у стані S_1, то

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = p_3(0) = 0 \;.$$

Застосувавши перетворення Лапласу до системи (3.19), одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} s\pi_1(s) - 1 = 2\pi_2(s) - \pi_1(s) \\ s\pi_2(s) = -\pi_1(s) - 3\pi_2(s) + \dfrac{1}{s} \end{cases} .$$

Розв'яжемо її відносно $\pi_1(s)$ і $\pi_2(s)$:

$$\pi_1(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 4s + 5)},$$

$$\pi_2(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}.$$

Знайдемо полюси для функцій $\pi_1(s)$ і $\pi_2(s)$:

$$s(s^2 + 4s + 5) = 0 \;,$$

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -2 + i, \quad s_3 = -2 - i \;.$$

Тоді

$$p_1(t) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5}e^{st}\right) + \lim_{s\to -2+i}\left(\frac{s^2+3s+2}{s(s+2+i)}e^{st}\right) + \lim_{s\to -2-i}\left(\frac{s^2+3s+2}{s(s+2-i)}e^{st}\right) =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-2t}\cos t + \frac{1}{5}e^{-2t}\sin t \ ,$$

$$p_2(t) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}e^{st}\right) + \lim_{s\to -2+i}\left(\frac{1}{s(s+2+i)}e^{st}\right) + \lim_{s\to -2-i}\left(\frac{1}{s(s+2-i)}e^{st}\right) =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-2t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-2t}\sin t \ .$$

З рівняння (3.18) знайдемо $p_3(t)$:

$$p_3(t) = 1 - p_1(t) - p_2(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-2t}\cos t + \frac{1}{5}e^{-2t}\sin t \ .$$

3.6.2 Приклад завдання №2

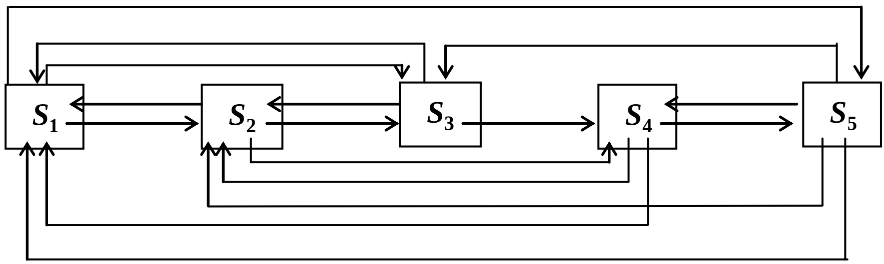
Система S має 5 станів. Перехід зі стану в стан відбувається в випадкові моменти часу. Інтенсивності пуассонівських потоків подій дорівнюють:

$$\lambda_{12}(t)=1, \quad \lambda_{13}(t)=2, \quad \lambda_{15}(t)=1,$$
$$\lambda_{21}(t)=1, \quad \lambda_{23}(t)=1, \quad \lambda_{24}(t)=2,$$
$$\lambda_{31}(t)=1, \quad \lambda_{32}(t)=1, \quad \lambda_{34}(t)=1,$$
$$\lambda_{41}(t)=2, \quad \lambda_{42}(t)=1, \quad \lambda_{45}(t)=1,$$
$$\lambda_{51}(t)=1, \quad \lambda_{52}(t)=2, \quad \lambda_{53}(t)=1, \quad \lambda_{54}(t)=1.$$

Побудувати граф станів системи та знайти граничні ймовірності.

Розв'язання

Граф станів системи має вигляд:



Складемо рівняння для граничних ймовірностей:

$$\begin{aligned}
&4p_1 = p_2 + p_3 + p_4 + p_5\\
&4p_2 = p_1 + p_3 + p_4 + 2p_5\\
&3p_3 = 2p_1 + p_2 + p_5\\
&4p_4 = 2p_2 + p_3 + p_5\\
&5p_5 = p_1 + p_4\,.
\end{aligned}$$

Добавимо умову нормування $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ та відкинемо перше рівняння:

$$\begin{aligned}
&p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1\\
&p_1 - 4p_2 + p_3 + p_4 + 2p_5 = 0\\
&2p_1 + p_2 - 3p_3 + p_5 = 0\\
&2p_2 + p_3 - 4p_4 + p_5 = 0\\
&p_1 + p_4 - 5p_5 = 0\,.
\end{aligned}$$

Розв’яжемо цю систему за допомогою правила Крамера:

$$\Delta = 846, \quad \Delta_1 = 198, \quad \Delta_2 = 184, \quad \Delta_3 = 218, \quad \Delta_4 = 172, \quad \Delta_5 = 74\,.$$

$$p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0{,}23 \ ,$$

$$p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0{,}22 \ ,$$

$$p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0{,}26 ,$$

$$p_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 0{,}2 \ ,$$

$$p_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = 0{,}09 \ .$$

4 РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

4.1 А.Г. Александров. Оптимальні і адаптивні системи. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.

4.2 Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

4.3 Ф.П. Васильев. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1998. – 552 с.

4.4 Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.