МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до самостійних робіт
з курсу
„Теорія ймовірностей”

для студентів напряму підготовки 6.040303 „Системний аналіз”
галузі знань 0403 „Системні науки та кібернетика”
денної форми навчання

Частина 2

Тема 3 Випадкові величини

Тема 4 Функції випадкових аргументів. Система двох випадкових величин

2012

Методичні вказівки та завдання до самостійних робіт з курсу „Теорія ймовірностей” для студентів напряму підготовки 6.040303 „Системний аналіз” галузі знань 0403 „Системні науки та кібернетика” денної форми навчання Частина 2. Тема 3. Випадкові величини. Тема 4. Функції випадкових аргументів. Система двох випадкових величин /Укл.: А.В.Савранська, О.В.Кривцун, О.В.Корнєєва, А.О.Кузьменко. – Запоріжжя: ЗНТУ,2012. – 62 с.

Методичні вказівки містять теоретичні відомості, індивідуальні завдання до самостійних робіт та приклади їх виконання з курсу „Теорія ймовірностей” для студентів напряму підготовки 6.040303 „Системний аналіз” галузі знань 0403 „Системні науки та кібернетика” денної форми навчання Частина 2. Тема 3. Випадкові величини. Тема 4. Функції випадкових аргументів. Система двох випадкових величин.

Укладачі: А.В. Савранська, доцент,
О.В. Кривцун, асистент,
О.В. Корнєєва, асистент,
А.О. Кузьменко, асистент.

Рецензенти: В.П. Пінчук, доцент,
О.І. Денисенко, доцент.

Відповідальний
за випуск: Г.В. Корніч, професор.

Затверджено
на засіданні кафедри
системного аналізу та
обчислювальної математики
протокол № 5 від 26.01.12 р.

ЗМІСТ

1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

1.1 Випадкові величини. Функції розподілу. Числові характеристики випадкових величин

Випадковою величиною (ВВ) $\mathbf{X}$ зветься дійсна функція $X = X(\omega)$, яка визначена на множині елементарних подій Ω і така, що при довільному дійсному x множина тих ω, для яких $X(\omega) < x$ належить алгебрі подій для даного експерименту. Функція $F(x)$ дійсної змінної x, $-\infty < x < +\infty$, яка визначається формулою

$$F(x) = P\{X < x\}, \tag{1.1}$$

зветься функцією розподілу випадкової величини $\mathbf{X}$ та має наступні властивості:

- $0 \le F(x) \le 1$;
- $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$;
- $F(x_1) \le F(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$;
- $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Якщо $\mathbf{X}$ - дискретна випадкова величина, яка приймає значення x_1, x_2, ... з ймовірностями p_1, p_2, ..., то функція розподілу має вигляд

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i, \tag{1.2}$$

де підсумовуються ймовірності тих значень x_i, які менші за x . Якщо $\mathbf{X}$ - неперервна випадкова величина із щільністю розподілу $f(x)$, то функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Щільність розподілу ймовірностей має такі властивості:

- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- $f(x) = F'(x)$;
- $P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Неперервна випадкова величина задається або функцією розподілу $F(x)$, або щільністю ймовірностей $f(x)$. Рядом (або законом) розподілу дискретної випадкової величини $\mathbf{X}$ називають таблицю вигляду

X	x_1	x_2	x_3	...
P	p_1	p_2	p_3	...

Тут x_i - можливі значення ВВ $\mathbf{X}$;

$$p_i = P(X = x_i), \qquad \sum p_i = 1.$$

Випадкові величини, крім законів розподілу, можуть також описуватися числовими характеристиками, серед яких розрізняють характеристики положення (математичне сподівання, мода, медіана та інші) та характеристики розсіювання (дисперсія, середнє квадратичне відхилення, різні моменти розподілу вищі першого та інші).

Математичним сподіванням називається дійсне число, яке визначається в залежності від типу випадкової величини $\mathbf{X}$ формулою

$$m_x = M[X] = \sum_k x_k \cdot p_k, \tag{1.4}$$

якщо $\mathbf{X}$ - дискретна випадкова величина;

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx, \tag{1.5}$$

якщо $\mathbf{X}$ - неперервна випадкова величина.

Основні властивості математичного сподівання:

- $M[C] = C$, де $C = const$;

- $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$, де $C = \mathrm{const}$;
- $M[X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n] = M[X_1]M[X_2]\ldots M[X_n]$, де $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - незалежні випадкові величини;
- $M[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n]$.

Модою неперервної випадкової величини називається число x_m, яке визначається як точка максимуму щільності розподілу ймовірностей $f(x)$.

Мода дискретної випадкової величини визначається як таке можливе значення x_m, для якого $P(X = x_m) = \max_k P(X = x_k)$.

Медіаною неперервної випадкової величини $\mathbf{X}$ називається число h_x, яке задовольняє умові: $P(X < h_x) = P(X \geq h_x)$, або $F(h_x) = \frac{1}{2}$.

Дисперсією випадкової величини $\mathbf{X}$ називається число $D[X] = D_x$, яке визначається формулами:

$$D_x = M\left[(X - m_x)^2\right] = \sum_k (x_k - m_x)^2 \times p_k, \tag{1.6}$$

якщо $\mathbf{X}$ - дискретна випадкова величина;

$$D_x = M\left[(X - m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)\,dx, \tag{1.7}$$

якщо $\mathbf{X}$ - неперервна випадкова величина.

Основні властивості дисперсії:

- $D[X] \geq 0$;
- $D[C] = 0$, де $C = \mathrm{const}$;
- $D[C \cdot X] = C^2 D[X]$, де $C = \mathrm{const}$;
- $D_x = M[X^2] - (M[X])^2$;
- $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$.

Невід’ємне число $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ називається ***середньоквадратичним відхиленням*** випадкової величини $\mathbf{X}$. Воно має розмірність випадкової величини $\mathbf{X}$ та визначає деякий стандартний інтервал розсіювання.

Початковим моментом m***-го порядку*** розподілу випадкової величини $\mathbf{X}$ називається дійсне число

$$\nu_m = M\left[X^m\right] = \sum_k x_k^m \cdot p_k\,, \tag{1.8}$$

якщо $\mathbf{X}$ - дискретна випадкова величина;

$$\nu_m = M\left[X^m\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot f(x)\,dx\,, \tag{1.9}$$

якщо $\mathbf{X}$ - неперервна випадкова величина.

Центральним моментом m***-го порядку*** розподілу випадкової величини $\mathbf{X}$ називається дійсне число μ_m, яке визначається формулою

$$\mu_m = M\left[(X - m_x)^k\right] = \sum_k (x_k - m_x)^m \times p_k\,, \tag{1.10}$$

якщо X - дискретна випадкова величина;

$$\mu_m = M\left[(X - m_x)^m\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^m \cdot f(x)\,dx\,, \tag{1.11}$$

якщо $\mathbf{X}$ - неперервна випадкова величина.

Центральні моменти виражаються через початкові моменти за формулами:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2; \tag{1.12}$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \tag{1.13}$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4. \tag{1.14}$$

Відмітимо ще дві важливі характеристики розподілу, зв’язані з моментами вищих порядків:

$$A_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \tag{1.15}$$

коефіцієнт асиметрії або скошеності розподілу;

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 \tag{1.16}$$

коефіцієнт ексцесу або “гостровершинність” розподілу.

1.2 Основні закони розподілу

Якщо проводяться n незалежних дослідів, в кожному з яких подія **A** з’являється з ймовірністю p, то ймовірність того, що в даній серії дослідів подія **A** з’явиться рівно m разів, виражається формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}, \tag{1.17}$$

або позначаючи $q = 1 - p$

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{1.18}$$

Дискретна випадкова величина **X** називається ***розподіленою за біноміальним законом***, якщо її можливі значення $0, 1, \ldots, m, \ldots, n$, а відповідні їм ймовірності

$$P_m = P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{1.19}$$

де $0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ m = 0, 1, \ldots, n$.

Для випадкової величини **X**, яка має біноміальний розподіл

$$M[X] = np,\ D[X] = npq. \tag{1.20}$$

Випадкова величина **X** називається ***розподіленою за законом Пуассона з параметром*** $a > 0$, якщо її можливі значення $0, 1, 2, \ldots$, а відповідні ймовірності визначаються формулою

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{1.21}$$

де $a > 0$.

Розподіл Пуассона залежить від одного параметра. Для випадкової величини **X**, розподіленою за законом Пуассона

$$M[X] = D[X] = a \tag{1.22}$$

Розподіл Пуассона може бути одержаний з біноміального розподілу шляхом граничного переходу при $n \to \infty,\ p \to 0$, при умові $np = a$ і в цьому випадку інтерпретується як закон “рідкісних” явищ.

Неперервна випадкова величина $\mathbf{X}$ називається ***розподіленою рівномірно на відрізку*** $[a,b]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей постійна на даному відрізку

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin [a,b];\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in [a,b]. \end{cases} \qquad (1.23)$$

Рівномірний розподіл реалізується в експериментах, в яких навмання ставиться точка на відрізку $[a,b]$, а також в експериментах по вимірюванню тих чи інших фізичних величин з округленням.

$$M[X]=\frac{b+a}{2};\ D[X]=\frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma[X]=\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}. \qquad (1.24)$$

Неперервна випадкова величина $\mathbf{X}$ називається ***розподіленою за показниковим законом з параметром*** $\boldsymbol{\lambda>0}$, якщо її щільність розподілу ймовірностей задається формулою

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases} \qquad (1.25)$$

Математичне сподівання, дисперсія та середньоквадратичне відхилення величини $\mathbf{X}$, яка має показниковий розподіл, дорівнює відповідно:

$$M[X]=\frac{1}{\lambda};\ D[X]=\frac{1}{\lambda^2};\ \sigma[X]=\frac{1}{\lambda}. \qquad (1.26)$$

Неперервна випадкова величина $\mathbf{X}$ називається ***розподіленою за нормальним (Гаусовим) законом з параметрами*** $m\in R$ та $\sigma>0$, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty. \qquad (1.27)$$

Параметри m та σ співпадають з основними характеристиками розподілу:

$$m=M[X];\ \sigma=\sigma_X=\sqrt{D[X]}. \qquad (1.28)$$

Якщо $\mathbf{X}$ розподілена за нормальним законом з $m=0$ та $\sigma=1$, то вона називається стандартизованою нормальною величиною. Її функція розподілу

$$\Phi(x) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{1.29}$$

де

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{1.30}$$

називається ***функцією Лапласу***.

За її допомогою можна обчислювати ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α, β):

$$P\{X \in (\alpha, \beta)\} = \Phi_0\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right) \tag{1.31}$$

Функція Лапласа має такі властивості:

$$\Phi_0(0) = 0; \quad \Phi_0(-x) = -\Phi_0(x); \quad \Phi_0(\infty) = 0{,}5 \tag{1.32}$$

Таблиця значень функції Лапласа наведена у додатку А.

Для ймовірності попадання у симетричний відносно математичного сподівання інтервал справедлива формула

$$P\{|X - m| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{1.33}$$

Нормальний розподіл виникає тоді, коли величина **X** утворюється в результаті підсумовування великого числа незалежних випадкових доданків.

1.3 Закон великих чисел та граничні теореми теорії ймовірностей

Наступні твердження і теореми складають зміст групи законів, об’єднаних спільною назвою закон великих чисел.

Нерівність Чебишова. Для будь-якої випадкової величини $\mathbf{X}$, яка має скінчену дисперсію, та для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$P\{|X - m_X| \ge \varepsilon\} \le \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \tag{1.34}$$

Цю нерівність можна записати в іншому вигляді:

$$P\{|X-m_X|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \qquad (1.35)$$

Теорема Чебишова. (закон великих чисел).

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно незалежні, а їх дисперсії обмежені $D[X_k]\le C$, то яке б не було $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M[X_k]\right|\ge\varepsilon\right\}=0. \qquad (1.36)$$

Іншими словами, при виконанні сформульованих умов послідовність середніх арифметичних n випадкових величин збігається за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Центральна гранична теорема має різні форми, з яких наведемо одну.

Теорема (центральна гранична теорема).

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно незалежні, однаково розподілені та мають скінчені дисперсії, то при $n\to\infty$ для будь-якого дійсного x

$$P\left\{\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-a}{\sigma_X/\sqrt{n}}<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du, \qquad (1.37)$$

де $a=M[X_k]$, $\sigma^2=D[X_k]$, $k=1,2,\ldots,n$.

Іншими словами, сума незалежних випадкових величин розподілена асимптотично нормально.

Якщо $Y_n=\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ - середнє арифметичне, то

$$M[Y_n]=M[X_k]=a, \quad D[Y_n]=\frac{D[X_k]}{n}=\frac{\sigma^2}{n}. \qquad (1.38)$$

$$P\left\{\left|\overline{X}_n - a\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - na}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \quad (1.39)$$

1.4 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.4.1 Маємо 7 радіоламп, серед яких 3 несправні, які на вигляд не можна відрізнити. Навмання беруться 4 радіолампи і вставляють у 4 патрона. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення числа радіоламп X, які будуть працювати.

<u>Розв'язання</u>: Випадкова величина X - число працюючих радіоламп. Вона може приймати значення 1,2,3,4 з ймовірностями

$$p_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_3^3}{C_7^4} = \frac{4}{35}; \qquad p_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_3^2}{C_7^4} = \frac{18}{35}; \qquad p_3 = \frac{C_4^3 \cdot C_3^1}{C_7^4} = \frac{12}{35};$$

$$p_4 = \frac{C_4^4}{C_7^4} = \frac{1}{35}.$$

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{4}{35}, & 1 \le x < 2; \\ \frac{22}{35}, & 2 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

Математичне сподівання

$$M[X] = 1\cdot\frac{4}{35} + 2\cdot\frac{18}{35} + 3\cdot\frac{12}{35} + 4\cdot\frac{1}{35} = \frac{80}{35} = 2{,}28.$$

Дисперсія

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 1^2\cdot\frac{4}{35} + 2^2\cdot\frac{18}{35} + 3^2\cdot\frac{12}{35} + 4^2\cdot\frac{1}{35} - (2{,}28)^2 \approx 0{,}49$$

.

Середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_X = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

Приклад 1.4.2 Дана функція $f(x) = Ax^2e^{-2x}$ $(0 \le x < \infty)$. Визначити при якому значенні A $f(x)$ є щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини, функцію розподілу $F(x)$, ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, математичне сподівання випадкової величини.

<u>**Розв'язання:**</u> Скористуємося властивістю функції щільності ймовірностей $\int_0^{\infty} Ax^2e^{-2x}dx = 1$. Для нашої задачі $A = \dfrac{1}{\int_0^{\infty} x^2e^{-2x}dx} = 4$.

$$F(x) = \int_0^{x} 4x^2e^{-2x}dx = 1 - e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1);$$

$$P\{0 < X < \frac{1}{2}\} = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = 1 - e^{-1}\left(\frac{1}{2} + 1 + 1\right) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}08.$$

$$M[X] = 4\int_0^{\infty} x^3e^{-2x}dx = \frac{3}{2}.$$

Приклад 1.4.3 Ймовірність відмови кожного приладу при випробуваннях не залежить від відмов інших приладів та дорівнює 0,2. Випробувано 5 приладів. Випадкова величина X - число приладів, які відмовили за час випробувань. Побудувати закон розподілу цієї випадкової величини. Знайти математичне сподівання, моду, дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

<u>Розв'язання:</u> Випадкова величина X - число приладів, які відмовили, підпорядковується біноміальному розподілу за формулою Бернуллі (1.18). Заповнимо таблицю

Випадкова величина	0	1	2	3	4	5
Ймовірність випадкової величини	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

$M[X] = np = 0{,}2 \cdot 5 = 1,$ $\qquad D[X] = npq = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0.8,$

$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}9.$

Мода $x_m = 1.$

Приклад 1.4.4 При випробуванні легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того, що у випадково відібраній пробі відсоток вуглецю перевищить припустимий рівень, дорівнює $p = 0{,}01$. Вважаючи придатним закон рідкісних явищ, обчислити скільки в середньому необхідно випробувати зразків, щоб з ймовірністю $P = 0{,}95$ вказаний ефект спостерігався принаймні k разів (розглянути випадок $k = 1$).

<u>Розв'язання:</u> До цієї задачі можна застосувати закон Пуассона (3.21), де $a = np$. Ймовірність того, що випадкова величина з'явиться принаймні k разів, знаходиться за формулою:

$$P(X \ge k) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{a^i}{i!} e^{-a}.$$

У випадку $k = 1$

$$P(X \ge 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i!} e^{-a}.$$

Простіше розглянути ймовірність протилежної події:

$$P(X < 1) = P(X = 0) = e^{-a} = e^{-np} = e^{-0{,}01 \cdot n}.$$

Тоді

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-e^{-0{,}01n};$$
$$1-e^{-0{,}01n}\ge 0{,}95;\quad e^{-0{,}01n}\le 0{,}05;$$
$$n\ge -100\cdot\ln 0{,}05\approx 299{,}6.$$

Отже треба випробувати кількість зразків ≥ 300, щоб вказаний ефект спостерігався не менше одного разу.

Приклад 1.4.5 При роботі комп’ютера у випадкові моменти виникають несправності. Час T роботи комп’ютера до першої несправності розподілений за показниковим законом з параметром λ (1.25). При виникненні несправності вона миттєво виявляється та комп’ютер поступає в ремонт. Ремонт продовжується час t_0, після чого комп’ютер знову включається в роботу. Знайти щільність $f(t)$ та функцію розподілу $F(t)$ проміжку часу Z між двома сусідніми несправностями. Знайти його математичне сподівання та дисперсію. Знайти ймовірність того, що Z буде більше $2t_0$.

<u>**Розв’язання:**</u>

$$Z=T+t_0;$$

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<t_0;\\ \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t\ge t_0.\end{cases}$$

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<t_0;\\ 1-e^{-\lambda(t-t_0)}, & t\ge t_0.\end{cases}$$

$$M[Z]=\frac{1}{\lambda}+t_0;\ D[Z]=\frac{1}{\lambda^2};\ P(Z>2t_0)=1-F(2t_0)=e^{-\lambda t_0}.$$

Приклад 1.4.6. Бракування кульок для підшипників проводиться наступним чином: якщо кулька не проходить через отвір діаметру d_1, але проходить через отвір діаметру $d_2>d_1$, то її розмір вважається припустимим. Якщо яка-небудь з цих умов не виконується, то кулька бракується. Відомо, що діаметр кульки D є нормально розподіленою випадковою величиною з характеристиками:

$m_D = \dfrac{(d_1 + d_2)}{2}$ та $\sigma_D = \dfrac{(d_2 - d_1)}{4}$. Визначити ймовірність того, що кулька буде забракована.

Розв’язання: Інтервал (d_1, d_2) симетричний відносно m_D. За формулою (1.33), покладаючи $\varepsilon = \dfrac{d_1 - d_2}{2}$, знаходимо ймовірність того, що кулька буде забракована:

$$P\left\{\left|D - m_D\right| < \frac{d_2 - d_1}{2}\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_D}\right).$$

Звідси

$$P = 1 - 2\Phi_0\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_D}\right) = 1 - 2\Phi_0\left(\frac{2(d_2 - d_1)}{d_2 - d_1}\right)$$

$$= 1 - 2\Phi_0(2) = 0{,}0455.$$

Приклад 1.4.7 Автомат виготовляє підшипники, які вважаються придатними, коли відхилення деякого параметру X від істинного розміру за модулем не перевищує 0,8 мм. Яке найймовірніше число придатних підшипників із сотні, якщо X розподілений нормально з $\sigma = 0{,}4$ мм? Провести оцінку за допомогою нерівності Чебишова та порівняти з точним результатом.

Розв’язання: За нерівністю Чебишова (1.35)

$$P\{\left|X - m_X\right| < 0{,}8\} \geq 1 - \frac{0{,}4^2}{0{,}8^2} = 0{,}75.$$

Тоді найбільш ймовірне число придатних підшипників із сотні буде більше ніж 100*0,75=75 підшипників.

Оскільки X розподілений нормально, то

$$P\{\left|X - m_X\right| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

або

$$P\{\left|X - m_X\right| < 0{,}8\} = 2\Phi_0\left(\frac{0{,}8}{0{,}4}\right) = 2\Phi_0(2) = 0{,}954.$$

Найбільш ймовірне число придатних підшипників із ста буде 100*0,954=95,4, тобто 96 підшипників. Цей результат не суперечить тій оцінці, яка одержана за нерівністю Чебишова.

Приклад 1.4.8. Проводиться вибіркове обстеження партії електроламп для визначення середньої тривалості їх горіння. Який повинен бути об'єм вибірки, щоб з ймовірністю не менше 0,9876 стверджувати, що середня тривалість горіння лампи в цій партії відхиляється від середнього, отриманої у вибірці, не більш ніж на 10 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампи дорівнює 80 годин? Задачу розв'язати за допомогою теореми Чебишова та центральної граничної теореми.

<u>Розв'язання:</u> За теоремою Чебишова (1.36), при $\varepsilon = 10$; $\sigma_{Xx} = 80$; $P = 0{,}9876$, отримаємо

$$1 - \frac{D[X]}{n\varepsilon^2} \geq 0{,}9876; \quad \frac{D[X]}{n\varepsilon^2} \leq 0{,}0124;$$

$$n \geq \frac{D[X]}{0{,}0124 \cdot \varepsilon^2} = \frac{80^2}{10^2 \cdot 0{,}0124} = 5161{,}4$$

Отже за теоремою Чебишова об'єм вибірки ≥ 5162.

За центральною граничною теоремою

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum X_k - a\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Для нашої задачі

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum X_k - a\right| < 10\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{10\sqrt{n}}{80}\right) = 0{,}9876,$$

$$\Phi_0\left(\frac{10\sqrt{n}}{80}\right) = 0{,}4938.$$

У таблиці значень функції Лапласа знаходимо, що $\Phi_0(t) = 0{,}4938$, при $t = 2{,}5$, тобто $\frac{10\sqrt{n}}{80} = 2{,}5$; $n = \left(\frac{2{,}5 \cdot 80}{10}\right)^2 = 400$. Отже, об'єм вибірки $n \geq 400$ виробів.

1.5 Варіанти самостійного завдання № 1

1.5.1 Ймовірність того, що деталь, виготовлена на верстаті, буде без дефектів, дорівнює P. Робітник перевіряє кількість всіх деталей, що виготовляються по мірі їх виготовлення до виявлення деталі з дефектом. Вважаючи, що цей процес може продовжуватися нескінченно, скласти закон розподілу кількості перевірок до виявлення деталі з дефектом (включно).

1.5.2 Серед 10 годинників, що потрапили до ремонту 6 штук потребують загальної чистки механізму. Годинники не відсортовані по типу ремонту. Майстер розглядає годинники по черзі, і зупиняє перегляд, знайшовши годинник, який потребує загальної чистки. Скласти закон розподілу випадкової величини – кількість годинників, які переглядались. Знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.

1.5.3 Знайти математичне сподівання випадкової величини X, яка задана законом розподілу:

X	-4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

1.5.4 Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, а також математичне сподівання цієї величини і її квадрата: $M[X] = 0{,}1$; $M[X^2] = 0{,}9$. Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.

1.5.5 Знайти дисперсію і середньоквадратичне відхилення дискретної випадкової величини X, яка задана законом розподілу:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

1.5.6 Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X - числа появ події **A** в п’яти незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події **A** в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

1.5.7 Знайти середньоквадратичне відхилення випадкової величини, яка задана законом розподілу:

X	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

1.5.8 Автомобіль повинен проїхати по вулиці, на якій встановлено 3 світлофора, які дають незалежно один від одного зелений сигнал на протязі 1,5 хв., жовтий – 0,3 хв., червоний – 1,2 хв. Написати закон розподілу числа зупинок автомобіля на цій вулиці.

1.5.9 Відомо, що в партії з 20 телефонних апаратів є 5 недіючих. Випадковим чином з цієї партії взято 4 апарата. Написати закон розподілу випадкової величини (числа недіючих апаратів) з відібраних. Знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.

1.5.10 Проведені послідовні незалежні випробування п’яти приладів на надійність. Наступний прилад випробовується тільки в тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Побудувати ряд розподілу числа приладів, що випробовуються, якщо ймовірність витримати випробування для кожного з них дорівнює 0,9.

1.5.11 Випадкова величина X має розподіл:

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Знайти її математичне сподівання та дисперсію.

1.5.12 Автоматична лінія при нормальному налагодженні може випускати бракований виріб з ймовірністю p. Переналагодження лінії відбувається після першого же бракованого виробу. Знайти середнє число всіх виробів, виготовлених між двома переналагодженнями ліній.

1.5.13 Визначити математичне сподівання числа приладів, які відмовила за час випробувань на надійність, якщо випробовується один прилад, і ймовірність його відмови p. Знайти дисперсію цієї випадкової величини.

1.5.14 Один раз підкинуті 2 однакові гральні кістки. Випадкова величина S - сума очок на верхніх гранях гральних кісток. Обчислити середнє значення суми очок, що випали.

1.5.15 В технічному пристрої працюють незалежно два блоки. Ймовірність безвідмовної роботи першого блоку $p_1 = 0{,}4$, другого $p_2 = 0{,}7$. Випадкова величина X - число працюючих блоків Знайти її математичне сподівання і дисперсію.

1.5.16 З партії, яка містить 100 виробів, серед яких 10 бракованих, відібрані навмання 5 виробів для перевірки якості. Побудувати ряд розподілу випадкового числа X бракованих виробів, які містяться в вибірці.

1.5.17 Випадкова величина X має розподіл:

X	20	20,5	21	21,2
P	0,05	0,15	0,5	0,3

Знайти її математичне сподівання і дисперсію.

1.5.18 Стрілок веде стрілянину по цілі. Ймовірність влучення в ціль дорівнює 0,2, при цьому стрілок отримує 5 очок. Визначити закон розподілу числа очок, отриманих стрілком за 3 постріли. Знайти математичне сподівання числа очок.

1.5.19 Знайти математичне сподівання числа вибитих стрілком очок при 4 пострілах, якщо ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,3, за кожне влучення стрілок отримує 5 очок, а за кожен промах у нього віднімається 2 очка.

1.5.20 Нехай при грі “5” із “36” ви наперед знаєте, що при 5, 4, 3 виграшних номерах ви одержуєте відповідно 10000, 175, 8 гривень. Яке математичне сподівання виграшу?

1.6 Варіанти самостійного завдання № 2

1.6.1 Закон розподілу випадкової величини заданий таблицею:

X	-1	0	1	2	3
P	0,4	0,24	0,25	0,07	0,04

Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї величини.

1.6.2 Закон розподілу випадкової величини заданий таблицею:

X	10	15	20	25	30
P	0,4	0,1	0,2	0,2	0,1

Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї величини .

1.6.3 Знайти математичне сподівання і дисперсію числа очок, які випадають при підкиданні однієї гральної кістки.

1.6.4 Знайти дисперсію числа очок, які випадають при підкиданні двох гральних кісток.

1.6.5 Закон розподілу випадкової величини заданий таблицею:

X	1	2	3	4	5
P	0,38	0,26	0,2	0,14	0,02

Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї величини .

1.6.6 В лотереї на кожні 100 квитків припадає 15 виграшів. Кількість і розмір виграшів:

розмір виграша	20	5	1
кількість виграшів	1	4	10

Скласти закон розподілу випадкової величини - розміру виграшу у лотереї, який припадає на один квиток.

1.6.7 Знайти дисперсію випадкової величини X - числа відмов елемента деякого приладу в десяти незалежних дослідах, якщо ймовірність відмови елемента в кожному досліді дорівнює 0,9.

1.6.8 Знайти математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини, яка задана законом розподілу:

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

1.6.9 Знайти математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини, яка задана законом розподілу:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

1.6.10 Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному досліді.

1.6.11 В партії з шести деталей є чотири стандартних. Навмання відібрані три деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа стандартних деталей серед відібраних.

1.6.12 В партії з 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрані дві деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа стандартних деталей серед відібраних.

1.6.13 Ймовірність того, що стрілок влучить в мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Стрілку видають патрони до тих пір, доки він не промахнеться. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа патронів, виданих стрілку.

1.6.14 Два бомбардувальники по черзі скидають бомби на ціль до першого влучення. Ймовірність влучення в ціль першим бомбардувальником дорівнює 0,7, другим – 0,8. Спочатку скидає бомби перший бомбардувальник. Написати перші чотири члени закону розподілу дискретної випадкової величини X - числа скинутих бомб обома бомбардувальниками.

1.6.15 По мішені зроблено три постріли. Ймовірність влучення в мішень при першому пострілі дорівнює 0,1, при другому – 0,2, при третьому – 0,3. Знайти закон розподілу кількості влучень при трьох пострілах.

1.6.16 Серед 10 виробів є один бракований. Щоб його знайти, беруть навмання один за другим вироби і кожен з них перевіряють. Побудувати ряд розподілу кількості перевірених виробів.

1.6.17 Здійснюється 4 незалежних постріли в мішень. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,25. Знайти закон розподілу кількості влучень X.

1.6.18 На шляху руху автомобіля 6 світлофорів, кожний з яких дозволяє або забороняє рух автомобілю з ймовірністю 0,5. Скласти ряд розподілу и побудувати функцію розподілу кількості світлофорів, які автомобіль проїхав без зупинки.

1.6.19 Знайти математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини, яка задана законом розподілу:

X	0	1	2	3	4
P	81/256	108/256	54/256	12/256	1/256

1.6.20 Знайти математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини, яка задана законом розподілу:

X	0	1	2	3
P	0,504	0,398	0,092	0,006

1.7 Варіанти самостійного завдання № 3

В задачах **1.7.1 – 1.7.11** випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу. Знайти невідомі параметри, а також :

а) щільність розподілу;

б) $M[X]$; $D[X]$; $P\{\alpha < X < \beta\}$;

в) побудувати графіки розподілу $F(x)$ і $f(x)$.

1.7.1 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{16}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $\alpha=1,\quad \beta=3.$

1.7.2 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$ $\alpha=2,\quad \beta=4.$

1.7.3 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ a\cdot x^2, & 0<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$ $\alpha=1,\quad \beta=2{,}5.$

1.7.4 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \ln x, & 1<x\le a;\\ 1, & x>a.\end{cases}$ $\alpha=0,\quad \beta=\mathrm{a}.$

1.7.5 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ ax+b, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $\alpha=3,\quad \beta=5.$

1.7.6 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ ax+b, & -1<x\le 1/3;\\ 1, & x>1/3.\end{cases}$ $\alpha=-0{,}5,\quad \beta=0.$

1.7.7 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ a\cdot\arcsin x, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \beta=1.$

1.7.8 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ a\cdot\operatorname{arctg}x, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta=1$.

1.7.9 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$ $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$.

1.7.10 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ a\cdot x^2, & 0<x\le 10;\\ 1, & x>10.\end{cases}$ $\alpha=5$, $\beta=10$.

1.7.11 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ ax+b, & -3<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $\alpha=0$, $\beta=3$.

1.7.12 Проекція радіус-вектора випадкової точки кола радіуса a на діаметр має щільність ймовірності

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a;\\ 0, & |x|\ge a.\end{cases}$$

Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

1.7.13 Задана щільність ймовірності величини X

$$f(x)=\begin{cases}3\sin 3x, & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 0, & x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що X прийме значення із $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$.

1.7.14 Задана щільність ймовірності величини X

$$f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2; \\ 0, & x\notin (1,2]. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

1.7.15 Задана щільність ймовірності величини X

$$f(x)=\frac{2C}{1+x^2}.$$

Знайти постійний параметр C та математичне сподівання випадкової величини X.

1.7.16 Задана щільність ймовірності величини X

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x<0,\ x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

1.7.17 Задана функція

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi; \\ 0, & x<0,\ x>\pi. \end{cases}$$

Показати, що вона буде диференціальної функцією розподілу деякої випадкової величини X. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

1.7.18 Випадкова величина доходу підприємства X має диференціальну функцію розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}2, & -2\le x\le 3; \\ 0, & x<-2,\ x>3. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію та ймовірність одержання доходу $X \in ($[illegible]$,5]$.

1.7.19 Випадкова величина доходу підприємства X має диференціальну функцію розподілу

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{25}x, & x \in (0,5]; \\ 0, & x \notin (0,5]. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію та ймовірність одержання доходу $X \in [3,4]$.

1.7.20 Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases} c\,(x^2+2x), & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,5]. \end{cases}$$

Знайти параметр c та математичне сподівання.

1.8 Варіанти самостійного завдання № 4

1.8.1 В партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрані чотири деталі. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа нестандартних деталей серед чотирьох відібраних і побудувати багатокутник отриманого розподілу.

1.8.2 Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа появ “герба” при підкиданні монети.

1.8.3 Дві гральні кістки одночасно підкидають два рази. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа випадінь парного числа очок на двох гральних кістках.

1.8.4 В партії з 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрані дві деталі. Скласти закон розподілу числа стандартних деталей серед відібраних.

1.8.5 В партії з 6 деталей є 4 стандартних. Навмання відібрані три деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа стандартних деталей серед відібраних.

1.8.6 Після відповіді студента на питання екзаменаційного білета екзаменатор задає студенту додаткові питання. Викладач припиняє задавати додаткові питання, як тільки студент виявить незнання заданого питання. Ймовірність того, що студент відповість на задане додаткове питання, дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа додаткових питань, які задасть викладач студенту та знайти найймовірніше число k_0 заданих студенту додаткових питань.

1.8.7 Ймовірність того, що стрілок влучить в мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Стрілку видаються патрони до тих пір, доки він не промахнеться. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа патронів, виданих стрілку та знайти найймовірніше число виданих стрілку патронів.

1.8.8 Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленою за біноміальним законом, якщо $n = 10$, $p = 0{,}4$.

1.8.9 Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленою за біноміальним законом, якщо $n = 50$, $p = 0{,}8$.

1.8.10 Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу числа попадань м'ячем у корзину при двох кидках, якщо ймовірність попадання дорівнює 0,4.

1.8.11 Підручник видано тиражем 100 000 екземплярів. Ймовірність того, що підручник зброшурований неправильно дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить рівно 5 підручників, зброшурованих неправильно.

1.8.12 Пристрій складається з 1000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елементу на протязі часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T відмовлять рівно три елемента.

1.8.13 Станок-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь буде бракованою дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей буде рівно чотири бракованих.

1.8.14. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу при транспортуванні дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено рівно три вироби.

1.8.15 Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка буде розбита дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає рівно дві розбиті пляшки.

1.8.16 Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу при транспортуванні дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено менше трьох виробів.

1.8.17 Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу при транспортуванні дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено більше трьох виробів.

1.8.18 Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка буде розбита дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає менше двох розбитих пляшок.

1.8.19 Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу при транспортуванні дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено хоча б один виріб.

1.8.20 Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка буде розбита дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає хоча б одну розбиту пляшку.

1.9 Варіанти самостійного завдання № 5

1.9.1 Випадкова величина розподілена рівномірно на $[-3,7]$. Знайти її функції щільності та розподілу ймовірностей, побудувати їх графіки, знайти математичне сподівання та дисперсію.

1.9.2 Знайти параметр λ показникового розподілу, заданого щільністю $f(x)=0$ при $x<0$, $f(x)=2e^{-2x}$ при $x\ge 0$.

1.9.3 Знайти параметр λ показникового розподілу, заданого функцією розподілу $F(x)=0$ при $x<0$, $F(x)=1-e^{-0,4x}$ при $x\ge 0$.

1.9.4 Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, який заданий щільністю ймовірностей $f(x)=0$ при $x<0$, $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\ge 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить до інтервалу $(0,13;0,7)$.

1.9.5 Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, який заданий щільністю ймовірностей $f(x)=0$ при $x<0$, $f(x)=0,04e^{-0,04x}$ при $x\ge 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить до інтервалу $(1;2)$.

1.9.6 Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, який заданий функцією розподілу $F(x)=0$

при $x<0$, $F(x)=1-e^{-0,6x}$ при $x\ge 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить в інтервал $(2;5)$.

1.9.7 Знайти центральний момент третього порядку $\mu_3=M\left[(X-M[X])^3\right]$ показникового розподілу.

1.9.8 Знайти асиметрію $A_s=\dfrac{\mu_3}{\sigma_X^3}$ показникового розподілу, де $\mu_3=M\left[(X-M[X])^3\right]$ - центральний момент третього порядку.

1.9.9 Знайти центральний момент четвертого порядку $\mu_4=M\left[(X-M[X])^4\right]$ показникового розподілу.

1.9.10 Знайти ексцес $E_k=\dfrac{\mu_4}{\sigma_X^4}-3$ показникового розподілу.

1.9.11 Математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить до інтервалу $(15;25)$.

1.9.12 Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, яка розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), яке дорівнює 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша 32 і не більша 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі більша ніж 55 мм.

1.9.13 Випадкові помилки вимірювання підкорюються нормальному закону з середньоквадратичним відхиленням $\sigma=20$ мм і математичним сподіванням $a=0$. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірювань помилка хоча б одного не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.

1.9.14 Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається годною, якщо відхилення X діаметру кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менше ніж 0,7 мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально з середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 0{,}4$ мм, знайти, скільки в середньому буде придатних кульок серед 100 виготовлених.

1.9.15 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 25$. Ймовірність попадання X в інтервал $(10;15)$ дорівнює 0,2. Чому дорівнює ймовірність попадання X в інтервал $(35;40)$?

1.9.16 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 10$. Ймовірність попадання X в інтервал $(10;20)$ дорівнює 0,3. Чому дорівнює ймовірність попадання X в інтервал $(0;10)$?

1.9.17 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 10$ і середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,9973 попадає величина X в результаті випробування.

1.9.18 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 10$ і середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Знайти ймовірність того, що абсолютна величина X буде менша двох.

1.9.19 Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, яка розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), яке дорівнює 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша 32 і не більша 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі менша ніж 40 мм.

1.9.20 Станок-автомат виготовляє кульки, причому контролюється їх діаметр X. Вважаючи, що X - нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $a = 10$ мм і середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 0{,}1$ мм, знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,9973 попадуть діаметри виготовлених кульок.

1.10 Варіанти самостійного завдання № 6

1.10.1 Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання менш ніж на три середньо квадратичних відхилень.

1.10.2 Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M[X]| < 2$, якщо $D[X] = 0{,}004$.

1.10.3 Дано: $P\{|X - M[X]| < \varepsilon\} \geq 0{,}9$ і $D[X] = 0{,}009$. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ε знизу.

1.10.4 Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елементу за час T дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили і середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час T буде менша двох.

1.10.5 Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елементу за час T дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили і середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час T буде не менша двох.

1.10.6 В освітлювальну мережу паралельно включені 20 ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде включена, дорівнює 0,8. За допомогою нерівності Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом включених ламп і середнім числом (математичним сподіванням) включених ламп за час T буде менша двох.

1.10.7 В освітлювальну мережу паралельно включені 20 ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде включена, дорівнює 0,8. За допомогою нерівності Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом включених ламп і середнім числом (математичним сподіванням) включених ламп за час T буде не менша двох.

1.10.8 Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює $\frac{1}{2}$. За допомогою нерівності Чебишова, оцінити ймовірність того, що число X появ події A знаходиться в межах від 40 до 60, якщо буде зроблено 100 незалежних випробувань.

1.10.9 Ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює $\frac{1}{4}$. За допомогою нерівності Чебишова, оцінити ймовірність того, що число X появ події знаходиться в межах від 150 до 250, якщо буде зроблено 800 незалежних випробувань.

1.10.10 Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M[X]| < 0{,}2$.

1.10.11 Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M[X]| < \sqrt{0,4}$.

1.10.12 Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	2
P	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M[X]| < 1$.

1.10.13 Випадкова величина X має математичне сподівання $M[X] = 1$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma_X = 0,2$. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити знизу $P(0,75 \le X < 1,35)$.

1.10.14 Середнє число X викликів на АТС за одну хвилину складає $\lambda = 20$. Знайти ймовірність того, що $X > 20$.

1.10.15 Середнє число X викликів на АТС за одну хвилину складає $\lambda = 20$. Знайти ймовірність того, що $0 \le X < 30$.

1.10.16 Відомо, що у середньому 5% студентів носять окуляри. Знайти ймовірність того, що із 200 студентів, що знаходяться в аудиторії, виявиться не менше 10%, які носять окуляри.

1.10.17 Скільки необхідно провести незалежних випробувань за схемою Бернуллі, щоб з ймовірністю, не меншою 0,975, гарантувати виконання нерівності $\left|\frac{x_n}{n} - p\right| \le 0,1$, x_n $(n \ge 1)$ – число успіхів у n - випробуваннях, $p = \frac{1}{2}$ - ймовірність успіху в одному випробуванні. Використовуючи нерівність Чебишова, одержати оцінку для найменшого числа випробувань.

1.10.18 Скільки необхідно провести незалежних випробувань за схемою Бернуллі, щоб з ймовірністю, не меншою 0,975, гарантувати виконання нерівності $\left|\frac{x_n}{n}-p\right|\leq 0{,}1$, x_n $(n\geq 1)$ – число успіхів у n -випробуваннях, $p=\frac{1}{2}$ - ймовірність успіху в одному випробуванні. Використовуючи центральну граничну теорему, одержати оцінку для найменшого числа випробувань.

1.10.19 Визначити число незалежних випробувань, які забезпечують з ймовірністю, не меншою 0,99, одержання шуканої ймовірності з похибкою, яка не перебільшує 0,01. Оцінку здійснити за теоремою Чебишова.

1.10.20. Ймовірність появи деякої події дорівнює $\frac{1}{3}$. Проводиться 45000 незалежних дослідів. Яке середнє відхилення X числа появ події A?

2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

ФУНЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНІВ. СИСТЕМА ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

2.1 Функція одного випадкового аргументу

Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y, то Y називають ***функцією випадкового аргументу*** X і записують $Y=\varphi(X)$.

Якщо X - дискретна випадкова величина і функція $Y=\varphi(X)$ монотонна, то різним значенням X відповідають різні значення Y, причому ймовірності відповідних значень X і Y однакові. Іншими словами, можливі значення Y знаходять з рівності

$$y_i=\varphi(x_i), \tag{2.1}$$

де x_i - можливі значення X; ймовірності можливих значень Y знаходять з рівності

$$P\{Y=y_i\}=P\{X=x_i\} \tag{2.2}$$

Якщо $Y=\varphi(X)$ - немонотонна функція, то, взагалі кажучи, різним значенням X можуть відповідати однакові значення Y (так буде, якщо можливі значення X попадуть в інтервал, в якому функція $\varphi(x)$ не є монотонною). В цьому випадку для відшукання ймовірностей можливих значень Y слід скласти ймовірності тих можливих значень X, при яких Y приймає однакові значення. Іншими словами, ймовірність значення Y, яке повторюється, дорівнює сумі ймовірностей тих можливих значень X, при яких Y приймає одне й теж значення.

Якщо X - неперервна випадкова величина, задана щільністю розподілу $f(x)$, і якщо $y=\varphi(x)$ - диференційована строго зростаюча або строго спадаюча функція, обернена функція до якої $x=\psi(y)$, то щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y знаходять з рівності

$$g(y) = f[\psi(y)]|\psi'(y)| \qquad (2.3)$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ в інтервалі можливих значень X не монотонна, то слід розбити цей інтервал на такі інтервали, в яких функція $y = \varphi(x)$ монотонна, і знайти щільності розподілів $g_i(y)$ для кожного з інтервалів монотонності, а потім знайти $g(y)$ у вигляді суми:

$$g(y) = \sum g_i(y) \qquad (2.4)$$

Наприклад, якщо функція $\varphi(x)$ монотонна в двох інтервалах, в яких відповідні обернені функції дорівнюють $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$, то

$$g(y) = f[\psi_1(y)]|\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)]|\psi_2'(y)| \qquad (2.5)$$

2.2 Функція двох випадкових аргументів

Якщо кожній парі можливих значень випадкової величини X і Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z, то Z називають ***функцією двох випадкових аргументів*** X і Y і пишуть

$$Z = \varphi(X, Y) \qquad (2.6)$$

Якщо X і Y - дискретні незалежні випадкові величини, то, для того щоб знайти розподіл функції $Z = X + Y$, потрібно знайти всі можливі значення Z, для цього достатньо скласти кожне можливе значення X зі всіма можливими значеннями Y; ймовірності знайдених можливих значень Z дорівнюють добуткам ймовірностей значень X і Y, які додаються.

Якщо X і Y - неперервні незалежні випадкові величини, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z = X + Y$ (при умові, що щільність розподілу хоча б одного з аргументів задана в інтервалі $(-\infty; \infty)$ однією формулою) може бути знайдена по формулі

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x)\,dx, \qquad (2.7)$$

або

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy, \qquad (2.8)$$

де f_1 і f_2 - щільності розподілу аргументів; якщо можливі значення аргументів невід'ємні, то щільність розподілу $g(z)$ величини $Z=X+Y$ знаходять за формулою

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(x)f_2(z-x)dx, \qquad (2.9)$$

або

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(z-y)f_2(y)dy. \qquad (2.10)$$

В тому випадку, коли обидві щільності $f_1(x)$ і $f_2(x)$ задані на скінчених інтервалах, для відшукання щільності $g(z)$ величини $Z=X+Y$ доцільно спочатку знайти функцію розподілу $G(z)$, а потім диференціювати її по z:

$$g(z)=G'(z) \qquad (2.11)$$

Якщо X і Y - незалежні випадкові величини, задані відповідними щільностями розподілів $f_1(x)$ і $f_2(x)$, то ймовірності попадання випадкової точки (X,Y) в область D дорівнює подвійному інтегралу по цієї області від добутку щільностей розподілу:

$$P\{(X,Y)\subset D\}=\iint_{(D)} f_1(x)f_2(y)dxdy \qquad (2.12)$$

2.3 Система двох випадкових величин

Двовимірною називають випадкову величину (X,Y), можливі значення якої є пари чисел (x,y). Складові X і Y, які розглядаються одночасно, утворюють систему двох випадкових величин.

Двовимірну величину геометрично можна тлумачити як випадкову точку $M(X,Y)$ на площині xOy, або як випадковий вектор OM.

Дискретною називають двовимірну величину, складові якої дискретні. ***Неперервною*** називають двовимірну величину, складові якої неперервні.

Законом розподілу ймовірностей двовимірною випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями та їх ймовірностями.

Функцією розподілу ймовірностей двовимірною випадкової величини називають функцію $F(x,y)$, яка визначає для кожної пари чисел (x,y) ймовірність того, що X прийме значення, менше ніж x, і при цьому Y прийме значення, менше ніж y:

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} \tag{2.13}$$

Геометрично цю рівність можна тлумачити так: $F(x,y)$ є ймовірність того, що випадкова точка потрапить в нескінчений квадрант з вершиною (x,y), який розташований лівіше та нижче цієї вершини.

Функція розподілу має наступні властивості:

- $0 \le F(x,y) \le 1$;
- $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$, якщо $x_2 > x_1$,
  $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$, якщо $y_2 > y_1$;
- $F(-\infty,y) = 0$; $F(x,-\infty) = 0$,
  $F(-\infty,-\infty) = 0$; $F(\infty,\infty) = 1$;
- $F(x,\infty) = F_1(x)$,
  $F(\infty,y) = F_2(y)$.

Використовуючи функцію розподілу, можна знайти ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник $x_1 \le X < x_2$, $y_1 \le Y < y_2$:

$$P\{x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2\} = [F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2)] - [F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)].$$

Щільністю сумісного розподілу ймовірностей (двовимірною щільністю ймовірностей) неперервної двовимірної випадкової величини називають другу змішану похідну від функції розподілу:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \qquad (2.14)$$

Знаючи щільність розподілу, можна знайти функцію розподілу за формулою

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy. \qquad (2.15)$$

Ймовірності попадання випадкової точки (X,Y) в область D визначається рівністю:

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad (2.16)$$

Двовимірна щільність розподілу має наступні властивості:

- $f(x,y)\geq 0;$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$

Нехай складові X і Y дискретні і мають відповідно наступні можливі значення: $x_1,x_2,\ldots,x_n$; $y_1,y_2,\ldots,y_m$. ***Умовним розподілом складової*** X при $Y=y_j$ (j зберігає одне й те саме значення при всіх можливих значеннях X) називають сукупність умовних ймовірностей $p(x_1\,|\,y_j)$, $p(x_2\,|\,y_j)$, ..., $p(x_n\,|\,y_j)$.

Аналогічно визначається умовний розподіл Y.

Умовні ймовірності складових X і Y обчислюють відповідно за формулами

$$p(x_i\,|\,y_j)=\frac{p(x_i,y_j)}{p(y_j)};\quad p(y_j\,|\,x_i)=\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)}. \qquad (2.17)$$

Для контролю обчислень доцільно переконатися, що сума ймовірностей умовного розподілу дорівнює одиниці.

Якщо складові X і Y неперервні, щільність розподілу однієї зі складових дорівнює невласному інтегралу з нескінченими границями від щільності сумісного розподілу системи, причому змінна інтегрування відповідає другій складовій:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \qquad (2.18)$$

Умовною щільністю розподілу складової X при заданому значенні $Y = y$ називають відношення щільності сумісного розподілу системи до щільності розподілу складової Y:

$$\varphi(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}. \qquad (2.19)$$

Аналогічно визначається умовна щільність розподілу складової Y:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}. \qquad (2.20)$$

Якщо умовні щільності розподілу випадкових величин X і Y дорівнюють їх безумовним щільностям, то такі величини незалежні.

Рівномірним називають розподіл двовимірної неперервної випадкової величини (X,Y), якщо в області, якої належать можливі значення (x,y), щільність сумісного розподілу ймовірностей зберігає постійне значення.

Знаючи щільності розподілів складових X і Y неперервної двовимірної випадкової величини (X,Y), можна знайти їх математичне сподівання і дисперсії:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx; \qquad M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_1(y)dy; \qquad (2.21)$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx - (M[X])^2; \qquad (2.22)$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M[Y])^2 f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy - (M[Y])^2; \qquad (2.23)$$

Іноді зручніше використовувати формули, які містять двовимірні щільності ймовірностей (подвійні інтеграли беруться по області можливих значень системи):

$$M[X]=\iint x f(x,y)\,dxdy; \qquad M[Y]=\iint y f(x,y)\,dxdy; \tag{2.24}$$

$$D[X]=\iint (x-M[X])^2 f(x,y)\,dxdy=\iint x^2 f(x,y)\,dxdy-(M[X])^2; \tag{2.25}$$

$$D[Y]=\iint (y-M[Y])^2 f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy-(M[Y])^2; \tag{2.26}$$

Початковим моментом $\nu_{k,s}$ порядку $k+s$ системи (X,Y) називають математичне сподівання добутку X^kY^s:

$$\nu_{k,s}=M\left[X^kY^s\right]. \tag{2.27}$$

Центральним моментом $\mu_{k,s}$ порядку $k+s$ системи (X,Y) називають математичне сподівання добутку відхилень відповідно k -го та s -го степенів:

$$\mu_{k,s}=M\left[(X-M[X])^k\cdot(Y-M[Y])^s\right]. \tag{2.28}$$

Кореляційним моментом μ_{xy} системи (X,Y) називають центральний момент $\mu_{1,1}$ порядку 1+1:

$$\mu_{XY}=M\left[(X-M[X])\cdot(Y-M[Y])\right]. \tag{2.29}$$

Коефіцієнтом кореляції величин X і Y називають відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{XY}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}. \tag{2.30}$$

Коефіцієнт кореляції - безрозмірна величина, причому $|r_{XY}|\le 1$. Коефіцієнт кореляції служить для оцінки тісноти лінійного зв’язку між X і Y: чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до одиниці, тим зв’язок сильніше; чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до нуля, тим зв’язок слабше.

Корельованими називають дві випадкові величини, якщо їх кореляційний момент не рівний нулю.

Некорельованими називають дві випадкові величини, якщо їх кореляційний момент дорівнює нулю.

Дві величини, які є корельованими також є залежними; якщо дві величини залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими.

Для неперервних величин X і Y кореляційний момент може бути знайдений за формулами:

$$\mu_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M[X])\cdot(y - M[Y])f(x, y)dxdy; \qquad (2.31)$$

$$\mu_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x, y)dxdy - M[X]M[Y]. \qquad (2.32)$$

2.4 Приклади розв’язання задач

Приклад 2.4.1 Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	-2	-1	1	2
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

<u>**Розв’язання**</u>: Знайдемо можливі значення Y:

$$y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1;\ y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4;$$

$$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1;\ y_2 = x_4^2 = 2^2 = 4.$$

Отже, різним значенням X відповідають однакові значення Y. Це пояснюється тим, що можливі значення X належать інтервалу, на якому функція $Y = X^2$ не монотонна.

Знайдемо ймовірності можливих значень Y. Для того щоб величина Y прийняла значення $Y = 1$, достатньо, щоб величина X прийняла значення $X = -1$ або $X = 1$. Останні дві події несумісні, їх ймовірності відповідно дорівнюють 0,3 і 0,2. Тому ймовірність події $Y = 1$ за теоремою додавання

$$P\{Y = 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5.$$

Аналогічно, знайдемо ймовірність можливого значення $Y = 4$:

$$P\{Y = 4\} = P\{X = -2\} + P\{X = 2\} = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$$

Запишемо шуканий закон розподілу величини Y:

Y	1	4
P	0,5	0,5

Приклад 2.4.2 Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $(0;2\pi)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y=\cos X$.

Розв'язання: Щільність розподілу випадкової величини X на інтервалі $(0;2\pi)$:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi-0}=\frac{1}{2\pi};$$

поза цим інтервалом $f(x)=0$.

З рівняння $y=\cos x$ знайдемо обернену функцію $x=\psi(y)$. Оскільки в інтервалі $(0;2\pi)$ функція $y=\cos x$ не є монотонною, то розіб'ємо цей інтервал на інтервали $(0;\pi)$; $(\pi;2\pi)$, в яких ця функція монотонна. В інтервалі $(0;\pi)$ обернена функція $\psi_1(y)=\arccos y$; в інтервалі $(\pi;2\pi)$ обернена функція $\psi_2(y)=-\arccos y$. Шукана щільність розподілу може бути знайдена з рівності (2.5).

Знайдені похідні обернених функцій:

$$\psi_1'(y)=(\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}};$$

$$\psi_2'(y)=(-\arccos y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Модулі похідних:

$$|\psi_1'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}};\ |\psi_2'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Враховуючи, що $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}$, отримуємо

$$f[\psi_1(y)]=\frac{1}{2\pi};\ f[\psi_2(y)]=\frac{1}{2\pi}.$$

Підставляючи знайдене в (2.5), одержимо:

$$g(y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Так як $Y=\cos X$, то при $0<X<2\pi$, $-1<Y<1$. Таким чином, в інтервалі $(-1;1)$ шукана щільність розподілу $g(y)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$; за межами цього інтервалу $g(y)=0$.

Контроль:

$$\int_{-1}^{1}g(y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\arccos 1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

Приклад 2.4.3 Дискретні незалежні випадкові величини X і Y задані розподілами:

X	1	3
P	0,3	0,7

Y	2	4
P	0,6	0,4

Знайти розподіл випадкової величини $Z=X+Y$.

<u>Розв’язання</u>: Для того, щоб скласти розподіл величини $Z=X+Y$, треба знайти всі можливі значення Z та їх ймовірності.

Можливі значення Z є суми кожного можливого значення X зі всіма можливими значеннями Y:

$$z_1=1+2=3;\ \ z_2=1+4=5\ ;\ \ z_3=3+2=5;\ \ z_4=3+4=7.$$

Знайдемо ймовірності цих можливих значень. Для того, щоб $Z=3$, достатньо, щоб величина X прийняла значення $x_1=1$ і величина Y - значення $y_1=2$. Ймовірності цих можливих значень відповідно дорівнюють 0,3 і 0,6. Так як аргументи X і Y незалежні, то події $X=1$ і $Y=2$ незалежні і ймовірності їх сумісної появи (тобто ймовірність події $Z=3$) за теоремою множення дорівнює $0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18$.

Аналогічно знайдемо:

$$P\{Z=1+4=5\}=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12;$$

$$P\{Z=3+2=5\}=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42;$$

$$P\{Z=3+4=7\}=0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}28;$$

Запишемо шуканий розподіл, додаючи ймовірних несумісних подій $Z=z_2=5$; $Z=z_3=5$ $(0{,}12+0{,}42=0{,}54)$:

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

Контроль: 0,18+0,54+0,28=1.

Приклад 2.4.4 Незалежні випадкові величини X і Y задані щільностями розподілів:

$$f_1(x)=e^{-x} \quad (0\le x<\infty);\ f_2(y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \quad (0\le y<\infty).$$

Знайти композицію цих законів, тобто щільність розподілу випадкової величини $Z=X+Y$.

<u>Розв'язання</u>: Так як можливі значення аргументів невід'ємні, то може бути застосована формула (2.7), тобто

$$g(z)=\int_0^z e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{z-x}{2}}\right]dx.$$

Виконаємо елементарні перетворення, отримаємо

$$g(z)=e^{-\frac{z}{2}}\left[1-e^{-\frac{z}{2}}\right].$$

Тут $z\ge 0$, так як $Z=X+Y$ і можливі значення X і Y невід'ємні. Отже, $g(z)=e^{-\frac{z}{2}}\left[1-e^{-\frac{z}{2}}\right]$ в інтервалі $(0,\infty)$, поза межами інтервалу $g(z)=0$.

Приклад 2.4.5 Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини:

Y	**X**		
	3	**10**	**12**
4	0,17	0,13	0,25
5	0,1	0,3	0,05

Знайти закони розподілу складових X і Y.

<u>**Розв’язання**</u>: Додаючи ймовірності “по стовпцям”, отримаємо ймовірності можливих значень X: $p(3)=0{,}27$, $p(10)=0{,}43$, $p(12)=0{,}3$. Запишемо закон розподілу складової X:

X	3	10	12
P	0,27	0,43	0,3

Контроль: 0,27+0,43+0,3=1.

Додаючи ймовірності “по рядках”, знайдемо закон розподілу складової Y:

Y	4	5
P	0,55	0,45

Контроль: 0,55+0,45=1.

Приклад 2.4.6 Задана функція розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & x<0 \text{ або } y<0.\end{cases}$$

Знайти двовимірну щільність ймовірностей системи.

<u>**Розв’язання**</u>: Скористаємося формулою (2.14). Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\ln 3\cdot\left(3^{-x}-3^{-x-y}\right);\quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}.$$

Отже, двовимірна щільність ймовірностей, яку потрібно було знайти,

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & x<0 \text{ або } y<0.\end{cases}$$

Приклад 2.4.7 Задана дискретна двовимірна випадкова величина (X,Y):

Y	**X**		
	2	**5**	**8**
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Знайти: а) безумовні закони розподілу складових; б) умовний закон розподілу складової X при умові, що складова Y прийняла значення $y_1 = 0{,}4$; в) умовний закон розподілу складової Y при умові, що складова X прийняла значення $x_2 = 5$.

Розв'язання: а) додаючи ймовірності "по стовпцям", запишемо закон розподілу складової X:

X	2	5	8
P	0,2	0,42	0,38

Додаючи ймовірності "по рядках", знайдемо закон розподілу складової Y:

Y	0,4	0,8
P	0,8	0,2

б) знайдемо умовні ймовірності можливих значень X при умові, що складова Y прийняла значення $y_1 = 0{,}4$:

$$p(x_1 | y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}8} = \frac{3}{16}; \quad p(x_2 | y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}3}{0{,}8} = \frac{3}{8};$$

$$p(x_3 | y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}35}{0{,}8} = \frac{7}{16}.$$

Запишемо умовний закон розподілу X:

X	2	5	8
$\mathbf{P(X \mid y_1)}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$

в) аналогічно знайдемо умовний закон розподілу Y:

Y	0,4	0,8
$\mathbf{P(Y \mid x_2)}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

Приклад 2.4.8 Задана щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\cdot(x^2 + 2xy + 5y^2)}.$$

Знайти: а) щільність розподілу складових; б) умовні щільності розподілу складових.

Розв'язання: а) знайдемо щільність розподілу складової X:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+2xy+5y^2\right)}dy.$$

Винесемо з під знаку інтегралу множник $e^{-\frac{x^2}{2}}$, який не залежить від змінної інтегрування y, і доповнимо показник ступеню до повного квадрату; тоді

$$f_1(x)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{10}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{1}{10}}x\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{1}{10}}x\right)$$

Враховуючи, що інтеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$, отримаємо щільність розподілу складової X:

$$f_1(x)=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-0,4x^2}.$$

Аналогічно, знайдемо щільність розподілу складової Y:

$$f_2(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}.$$

б) знайдемо умовні щільності розподілу складових. Отримаємо

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5(x+y)^2},$$

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,1(x+5y)^2},$$

Приклад 2.4.9 Задана щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-x^2-y^2}, & x>0, y>0,\\ 0, & x<0 \text{ або } y<0.\end{cases}.$$

Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсії складових X і Y.

<u>**Розв’язання**</u>: а) знайдемо спочатку щільність розподілу складової X:

$$f_1(x)=\int_0^{\infty} f(x,y)\,dy=4xe^{-x^2}\int_0^{\infty} ye^{-y^2}\,dy=2xe^{-x^2}, \quad (x>0).$$

Аналогічно отримаємо

$$f_2(y)=2ye^{-y^2}, \quad (y>0).$$

Знайдемо математичне сподівання складової X:

$$M[X]=\int_0^{\infty} xf_1(x)\,dx=\int_0^{\infty} x\left(2xe^{-x^2}\right)dx.$$

Інтегруючи по частинах і враховуючи, що інтеграл Пуассона $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, одержимо $M[X]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Аналогічно, $M[Y]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

б) знайдемо дисперсію X:

$$D[X]=\int_0^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx-(M[X])^2=\int_0^{\infty} x^2\left(2xe^{-x^2}\right)dx-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=1-\frac{\pi}{4}.$$

Аналогічно, $D[Y]=1-\frac{\pi}{4}$.

2.5 Варіанти самостійного завдання № 1

2.5.1 Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини X дорівнюють відповідно 2 і10. Знайти математичне сподівання і дисперсію величини $2X+5$.

2.5.2 Дискретна випадкова величина X має ряд розподілу

X	1	3	5
P	0,4	0,1	0,5

Побудувати ряд розподілу випадкової величини $Y=3X$.

2.5.3 Дискретна випадкова величина X має ряд розподілу

X	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
P	0,4	0,1	0,5

Побудувати ряд розподілу випадкової величини $Y = \sin X$.

2.5.4 Дискретна випадкова величина X має ряд розподілу

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Побудувати ряд розподілу випадкової величини $Y = X^2 + 1$.

2.5.5 В умовах попередньої задачі побудувати ряд розподілу випадкової величини $Y = |X|$.

2.5.6 Випадкова величина X розподілена за нормальним законом зі щільністю ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \dfrac{1}{X}$.

2.5.7 Випадкова величина X має показниковий розподіл зі щільністю ймовірностей $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$. Знайти функцію розподілу і щільність ймовірностей випадкової величини $Y = e^{-X}$.

2.5.8 Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \sin X$.

2.5.9 Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $(-1, 2)$. Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

2.5.10 Задана щільність розподілу випадкової величини X: $f(x) = \dfrac{1}{\pi}$ в інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$; за межами цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \operatorname{tg} X$.

2.5.11 Випадкова величина X розподілена за нормальним законом зі щільністю ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

2.5.12 Випадкова величина X розподілена за нормальним законом зі щільністю ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \frac{1}{4}X^2$.

2.5.13 Випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ в інтервалі $(0, \pi)$; за межами цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $Y = X^2$.

2.5.14 Випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $f(x) = \cos x$ в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; за межами цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $Y = X^2$.

2.5.15 Випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ в інтервалі $(0, \pi)$; за межами цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти дисперсію випадкової величини $Y = X^2$.

2.5.16 Випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $f(x) = \cos x$ в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; за межами цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти дисперсію випадкової величини $Y = X^2$.

2.5.17 Задана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X, можливі значення якої знаходяться в інтервалі $(0, \infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = e^{-X}$.

2.5.18 Задана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X, можливі значення якої знаходяться в інтервалі $(0, \infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \ln X$.

2.5.19 Задана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X, можливі значення якої знаходяться в інтервалі $(0, \infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^3$.

2.5.20 Задана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X, можливі значення якої знаходяться в інтервалі $(0, \infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \sqrt{X}$.

2.6 Варіанти самостійного завдання № 2

2.6.1 Дискретні випадкові величини задані розподілами:

X	0	2	4
P	0,2	0,3	0,5

Y	1	3	5
P	0,5	0,2	0,3

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = 2X - 2Y$.

2.6.2 В умовах попередньої задачі знайти математичне сподівання випадкової величини $Z = X \cdot Y$.

2.6.3 Випадкові величини X і Y - незалежні. Знайти дисперсію випадкової величини $Z = 2X + 3Y$, якщо відомо, що $D[X] = 4$, $D[Y] = 5$.

2.6.4 Незалежні випадкові величини X і Y розподілені нормально, $M[X] = 2$, $M[Y] = -3$ $D[X] = 4$, $D[Y] = 9$. Записати щільність ймовірності і функцію розподілу їх суми.

2.6.5 Випадкові величини X і Y незалежні і розподілені за законом Пуассона:

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}; \quad P\{Y = l\} = \frac{\lambda_2^l}{l!} e^{-\lambda_2}.$$

Знайти закон розподілу їх суми.

2.6.6 Випадкові величини X і Y незалежні і мають однаковий показниковий розподіл із щільністю $f_X(t) = f_Y(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $t \geq 0$. Знайти щільність ймовірності їх суми.

2.6.7 Випадкові величини X і Y незалежні і мають рівномірний розподіл на відрізку $[0;1]$: $f(x) = 1$, при $0 \leq x \leq 1$; $f(y) = 1$, $0 \leq y \leq 1$. Знайти функцію розподілу і щільність ймовірностей випадкової величини $Z = X + Y$.

2.6.8 Дискретні випадкові величини задані розподілами:

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

2.6.9 Дискретні випадкові величини задані розподілами:

X	4	10
P	0,7	0,3

Y	1	7
P	0,8	0,2

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

2.6.10 Незалежні випадкові величини X і Y задані щільностями розподілів:

$$f_1(x)=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}},\ 0\le x<\infty;\quad f_2(y)=\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}},\ 0\le y<\infty.$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z=X+Y$.

2.6.11 Незалежні нормально розподілені випадкові величини X і Y задані щільностями розподілів:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z=X+Y$.

2.6.12 Задані щільності розподілів незалежних рівномірно розподілених випадкових величин X і Y: $f(x)=\frac{1}{2}$, при $0\le x\le 2$; $f(y)=\frac{1}{2}$, $0\le y\le 2$. Знайти функцію розподілу і щільність ймовірностей випадкової величини $Z=X+Y$.

2.6.13 Задані щільності розподілів незалежних рівномірно розподілених випадкових величин X і Y: $f(x)=\frac{1}{2}$, при $1\le x\le 3$; $f(y)=\frac{1}{4}$, $2\le y\le 6$. Знайти функцію розподілу і щільність ймовірностей випадкової величини $Z=X+Y$.

2.6.14 У прямокутник з вершинами $(0,0)$; $(2,0)$; $(2,1)$ та $(0,1)$ навмання ставиться точка. Нехай (x,y) - випадкові координати цієї точки. Обчислити $M[X+Y]$, $D[X+Y]$.

2.6.15 У прямокутник з вершинами $(0,0)$; $(2,0)$; $(2,1)$ та $(0,1)$ навмання ставиться точка. Нехай (x,y) - випадкові координати цієї точки. Обчислити $M[2X+Y]$, $D[2X+Y]$.

2.6.16 У прямокутник з вершинами $(0,0)$; $([illegible],0)$; $([illegible],2)$ та $(0,2)$ навмання ставиться точка. Нехай (x,y) - випадкові координати цієї точки. Обчислити $M[X+Y]$, $D[X+Y]$.

2.6.17 Дискретні випадкові величини задані розподілами:

X	-1	0	1
P	0,1	0,2	0,7

Y	10	22
P	0,5	0,5

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z=X+Y$.

2.6.18 Дискретні випадкові величини задані розподілами:

X	-10	0	10
P	0,6	0,1	0,3

Y	1	2
P	0,5	0,5

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z=X+Y$.

2.6.19 Випадкова величина X має біноміальний закон розподілу

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

Обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y=e^X$.

2.6.20 Дискретні випадкові величини задані розподілами:

X	1	2	3
P	0,3	0,1	0,6

Y	10	22
P	0,5	0,5

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z=X+Y$.

2.7 Варіанти самостійного завдання № 3

2.7.1 В першому квадранті задана функція розподілу системи випадкових величин (X,Y)

$$F(x,y)=1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}$$

Знайти двовимірну щільність розподілу системи, ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в трикутник з вершинами $A([illegible];3)$, $B(3;3)$, $C([illegible];8)$.

2.7.2 Двовимірна випадкова величина (X, Y) має щільність розподілу ймовірностей

$$f(x, y) = \frac{A}{\pi^2 (1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Знайти величину А та функцію розподілу $F(x, y)$ величини (X, Y).

2.7.3 В умовах попередньої задачі знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у квадрат, обмежений прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

2.7.4 Випадкові величини X і Y незалежні і нормально розподілені з $M[X] = M[Y] = 0$, $D[X] = D[Y] = 1$. Знайти ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) потрапить в кільце $2 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3$.

2.7.5 Знайти щільність ймовірності модуля радіус вектора $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, якщо випадкові величини X і Y незалежні і нормально розподілені з $M[X] = M[Y] = 0$, $D[X] = D[Y] = \sigma^2$.

2.7.6 Визначити щільність ймовірності системи двох випадкових величин X і Y за заданою функцією розподілу

$$F(x, y) = (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by}),\ x > 0 \text{ и } y > 0.$$

2.7.7 Випадкова точка (X, Y) на площині розподілена за наступним законом:

X\Y	**-1**	**0**	**1**
0	0,1	0,15	0,2
1	0,15	0,25	0,15

Знайти числові характеристики (X, Y): математичне сподівання, дисперсію, коваріацію, коефіцієнт кореляції.

2.7.8 Двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена зі щільністю $f(x, y) = Axy$, в області D і $f(x, y) = 0$ по за межами області. Область D - трикутник, обмежений прямими $x + y - 1 = 0$; $x = 0$; $y = 0$. Знайти: величину A, математичне сподівання, дисперсію, коваріацію, коефіцієнт кореляції.

2.7.9 Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини:

Y\X	**26**	**30**	**41**	**50**
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,3	0,11	0,21

Знайти закони розподілу складових.

2.7.10 Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник, обмежений прямими $x = 1$; $x = 2$; $y = 3$; $y = 5$, якщо відома функція розподілу

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

2.7.11 Задана функція розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Знайти двовимірну щільність ймовірності системи (X, Y).

2.7.12 Задана двовимірна щільність розподілу системи випадкових величин (X, Y)

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Знайти функцію розподілу системи (X, Y).

2.7.13 Задана двовимірна щільність розподілу системи випадкових величин (X, Y)

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$$

в квадраті $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; $f(x, y) = 0$ по за межами квадрату. Знайти функцію розподілу системи (X, Y).

2.7.14 Задана двовимірна щільність розподілу системи випадкових величин (X, Y)

$$f(x, y) = \frac{C}{(9+x^2)(16+y^2)}.$$

Знайти постійну C.

2.7.15 Закони розподілу числа очок, які вибиває кожен з двох стрілків:

X	1	2	3
P	0,1	0,3	0,6

Y	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Знайти закон розподілу суми очок, які вибивають два стрілка.

2.7.16 Щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$f(x, y) = Ce^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

Знайти постійну C.

2.7.17 Щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 36xye^{-3(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію складових X і Y

2.7.18 Щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) $f(x, y) = 2\cos x \cos y$ в квадраті

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$; $f(x, y) = 0$ по за межами квадрату. Знайти математичне сподівання складових X і Y.

2.7.19 Щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) $f(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x + y)$ в квадраті $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; $f(x, y) = 0$ по за межами квадрату. Знайти математичне сподівання та дисперсію складових X і Y.

2.7.20 Щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) $f(x, y) = \frac{1}{4}\sin x \sin y$ в квадраті $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$; $f(x, y) = 0$ по за межами квадрату. Знайти математичне сподівання та дисперсію складових X і Y.

3 ЛІТЕРАТУРА

3.1 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш.шк., 2004. – 409 с.

3.2 Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч. І. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. - 304.

3.3 Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

3.4 Кибзун А.И., Горяинова Е.Р. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 224 с.