

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кваліфікаційна наукова робота
на правах рукопису

МІЗЕРНА ОЛЕНА ЛЕОНІДІВНА

УДК539.3

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ВОЛОКНИСТИХ
КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ В УМОВАХ В'ЯЗКОПРУЖНОГО
ДЕФОРМУВАННЯ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ О.Л. Мізерна

Науковий керівник **Гребенюк Сергій Миколайович**, доктор технічних наук,
доцент

Запоріжжя – 2021

АНОТАЦІЯ

МІЗЕРНА О. Л. Напружено-деформований стан волокнистих композиційних матеріалів в умовах в'язкопружного деформування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла, Національний університет «Запорізька політехніка» Міністерства освіти і науки України, Запоріжжя, 2021.

Спеціалізована вчена рада Д 17.052.01 при Національному університеті «Запорізька політехніка» Міністерства освіти і науки України.

Дисертаційна робота присвячена визначенню напружено-деформованого стану волокнистих композиційних матеріалів з урахуванням в'язкопружних властивостей. Застосування волокнистих композитів у різних промислових галузях, таких як: авіаційно-космічна, суднобудівна, машинобудування, транспортне будівництво та інші, дає можливість спрямовано регулювати властивості матеріалу ще на стадії проектування конструкції. Найчастіше волокнистий композиційний матеріал містить дві компоненти: податливу матрицю і пружні високоміцні армуючі волокна. Матриця забезпечує суцільність матеріалу, фіксує форму виробу і взаємне розташування армуючих волокон. Волокна сприймають основні напруження, що виникають в процесі експлуатації, і забезпечують жорсткість і міцність композиту. Поєднання властивостей матриці і волокна дозволяє створювати спеціальні типи композитів для використання в різному устаткуванні, що спрощує його конструкцію і покращує експлуатаційні характеристики. Зокрема, стає можливим регулювати жорсткісні характеристики конструкції за рахунок зміни орієнтації, типу і концентрації волокон, а також типу матриці та інших характеристик матеріалу. При поєднанні матеріалів з такими різними механічними властивостями створений композиційний

матеріал може мати нові властивості, які неможна розглядати як просте поєднання властивостей його компонентів. Значні відмінності між фізико-механічними й хімічними параметрами та анізотропія властивостей складових композиту призводять до особливостей при деформуванні всієї конструкції. Одними з таких особливостей є в'язкопружні ефекти, які з'являються внаслідок використання як матриці еластомерів: пластмас, поліуретанів, гум тощо. Основними проявами в'язкопружності у процесі деформування є повзучість при постійному напруженні та релаксація напружень при постійній деформації. Крім того, з поширенням сфери застосування композиційних матеріалів конструкції часто мають складну геометричну форму. Все це досить серйозно відзначається на складності моделювання та розрахунку напружено-деформованого стану в'язкопружної композитної конструкції.

У роботі розглянуто в'язкопружні властивості волокнистих композитів, розрахункові та експериментальні методи визначення ефективних характеристик матеріалу. Проаналізовано сучасні методи розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій з волокнистих композитів. Виявлено, що переважна більшість методів визначення напружено-деформованого стану композиційних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування часто має деякі припущення й гіпотези, які дозволяють спростити розрахунок. Однак, використання їх для конструкцій складної геометричної форми призводить до громіздкості та складності математичних моделей і неможливості їх розв'язання більшістю існуючих методів. Крім того ці методи можуть мати незадовільну точність одержуваних результатів, оскільки не враховують просторові ефекти при деформуванні. До того ж вибір математичної моделі, що описує особливості в'язкопружного деформування у волокнистому композиті, обмежений наявним набором реологічних характеристик матеріалу, для визначення яких необхідні спеціальні експериментальні дослідження. Тому актуальним є створення ефективної методики, яка враховувала б особливості в'язкопружного

деформування волокнистих композитів і не вимагала б при цьому громіздких математичних викладок. Це дозволило би більш точно визначати напружено-деформований стан конструкцій при навантаженні та достовірно оцінювати їх працездатність.

У дисертаційній роботі запропоновано чисельний підхід до моделювання напружено-деформованого стану волокнистих композитів, які мають в'язкопружні властивості. Композиційний матеріал розглянуто у тривимірній постановці, тому при моделюванні були застосовані співвідношення просторової теорії пружності. Для опису процесів в'язкопружності при деформуванні використано пружно-спадкову теорію Больцмана–Вольтерра, згідно з якою зв'язок між напруженнями і деформаціями має часовий характер.

Для розрахунку було обрано метод скінченних елементів, як один з найбільш ефективних чисельних методів розв'язання інженерних задач. Оскільки при використанні традиційної схеми методу скінченних елементів для розв'язання вищезгаданих задач виникають значні обчислювальні похибки, то доцільним було використання моментної схеми скінченних елементів. У даній роботі запропоновано підхід, що є розвитком моментної схеми скінченних елементів у вигляді методу переміщень на основі варіаційного принципу Лагранжа. У рамках запропонованого підходу розроблено спеціальний просторово-часовий скінченний елемент. Він являє собою лінійний паралелепіпедний елемент з просторово-часовою апроксимацією переміщень. Побудовано матрицю жорсткості цього скінченного елемента, яка враховує в'язкопружні властивості матриці та пружні властивості волокон. Запропонований підхід дозволяє врахувати в'язкопружний характер деформування, є ефективним для визначення деформаційних характеристик матеріалу та призводить до результатів, адекватних реальним процесам, при визначенні напружено-деформованого стану конструкцій з волокнистих композитів, що мають еластомерну матрицю.

Також із застосуванням ітераційного процесу удосконалено чисельні підходи до розв'язання задач в'язкопружності механіки композиційних матеріалів у тривимірній постановці. На основі запропонованих підходів створено програмне забезпечення для дослідження напружено-деформованого стану в'язкопружних волокнистих композитних конструкцій. Ітераційний алгоритм розв'язання задачі та основні співвідношення матриці жорсткості реалізовано у програмному комплексі «МІРЕЛА+» у вигляді пакета прикладних програм KMVIS. Розрахунок конструкцій за допомогою програмного пакета здійснюється у три етапи: підготовка вихідних даних, чисельний розрахунок скінченно-елементної моделі, обробка результатів розв'язання. За допомогою розробленого пакету прикладних програм проведено розрахунок елементів сучасних машинобудівних конструкцій у тривимірній постановці: пластинчатих конструкцій, з'єднувальних трубок, оболонкових конструкцій з різними силовими крайовими умовами. Проведено порівняння з відомими розв'язками задач інших авторів. Отримані результати не суперечать даним, приведеним у літературі, що підтверджує достовірність та ефективність розроблених підходів. Також проведено розрахунок напружено-деформованого стану гумокордної оболонки пневмобалону. Досліджено розподіл полів переміщень і напружень у залежності від напрямку армування і концентрації волокон у матеріалі. Аналіз отриманих результатів показав значний вплив в'язкопружних властивостей матеріалу на процес деформування композитної конструкції.

Розроблені підходи до розв'язання задач в'язкопружності у волокнистих композиційних матеріалах мають важливе практичне значення, оскільки дозволяють на стадії проєктування отримати раціональні параметри конструкції, а також підбирати найбільш прийнятні характеристики компонентів композиційного матеріалу, умови навантаження та закріплення. Все це дає змогу зменшувати час і вартість проведення експериментальних досліджень, а отже оптимізувати процес проєктування конструкції.

Теорія, підходи та пакет прикладних програм, запропоновані в дисертаційній роботі, були впроваджені та використані у відділі механіки еластомерних конструкцій Інституту геотехнічної механіки НАН України (м. Дніпро) при розрахунку та створенні гумових амортизаторів із гумокордними вставками.

Ключові слова: волокнистий композиційний матеріал, в'язкопружність, напружено-деформований стан, моментна схема скінченних елементів, просторово-часова апроксимація.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние полого ортотропного цилиндра в условиях вязкоупругого деформирования. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2005. № 2. С. 76–80. (фахове видання)

2. Гребенюк С. Н., Лисица Н. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с круговым отверстием. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць. Дніпропетровськ, 2006. Вип. 63. С. 154–160.* (фахове видання)

3. Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитов и конструкций на их основе. *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління*. 2006. № 2. С. 50–54. (фахове видання, Web of Science)

4. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженное состояние защемленной по торцам многослойной резинокордной цилиндрической

оболочки. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць*. Дніпропетровськ, 2007. Вип. 71. С. 166–170. (фахове видання)

5. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. *Вісник Східноукраїнського національного університету*. Луганськ, 2010. № 10(152). Ч. 2. С. 41–48. (фахове видання, Google Scholar)

6. Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Клименко М. І., Мізерна О. Л. Чисельне моделювання в'язкопружного деформування віброізолятора із волокнистого композиційного матеріалу. *Вісник ХНТУ*. 2018. № 3(66). Т. 1. С. 39–44. (фахове видання)

7. Mizerna O. Calculation of the stress-strain state of a pneumocylinder with a rubber-cord shell. *Polish journal of science*. 2020. № 24. Vol. 1. P. 56–60. (Google Scholar)

8. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Влияние вязкоупругих свойств эластомера на напряженно-деформированное состояние композитных конструкций. *Механика эластомеров – 2005: Тезисы докладов VI Международного симпозиума, 22...24 ноября 2005 г., Днепропетровск, 2005*. С. 39–40.

9. Grebenyuk S. N., Kirichevsky Val. V., Mizernaya E. L. Modeling of features is stressdeformed states of designs from composite materials. *Advanced Problems in Mechanics: XXXIV Summer School-Conference, June 25...July 1 2006, St. Petersburg, 2006*. P. 40–41.

10. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния и разрушения композитных конструкций в условиях упругого и вязкоупругого деформирования. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики: Тезисы докладов Междунар. конф., 23...26 октября 2006 г., Харьков, 2006*. С. 63.

11. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние композитной пластины с круговым отверстием. *Современные проблемы машиностроения: Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов, 1...7 декабря 2006 г., Харьков, 2006. С. 13.*

12. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Вязкоупругое деформирование конструкций из композитных материалов. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: Тези доповідей міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського, 17...19 жовтня 2007 р., Дніпропетровськ, 2007. С. 180.*

13. Мизерная Е. Л., Гребенюк С. Н. Моделирование вязкоупругого деформирования композитных материалов в программном комплексе «МІРЕЛА». *Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці: Тези доповідей IV Всеукраїнської науково-практичної конференції, 15...17 квітня 2010 р., Луганськ, 2010. С. 66–67.*

14. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Решевская Е. С., Тархова В. М. Специальные конечные элементы в программном комплексе «МІРЕЛА». *Международная конференция по математическому моделированию: Тезисы докладов, 12...17 сентября 2010 г., Херсон, 2010. Вып. 3(39). С. 132–136.*

15. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Моделирование и расчет резинокордных конструкций с применением МКЭ. *Математические проблемы технической механики – 2011: Тезисы докладов Международной научной конференции, 13...15 апреля 2011 г., Днепропетровск, 2011. С. 60–61.*

16. Мизерная Е. Л. Исследование напряженно-деформированного состояния композита с вязкоупругой матрицей. *VIII Международные молодежные научно-технические чтения им. А. Ф. Можайского: Тезисы докладов, 19...20 мая 2015 г., Запорожье, 2015. С. 36–37.*

ABSTRACT

MIZERNA O. L. Stress-strain state of fibrous composites under viscoelastic deformation. – Qualifying scientific work as a manuscript copyright.

The Ph.D. thesis for a Candidate Degree in Technical Sciences in specialty 01.02.04 "Deformable and Rigid Body Mechanics." – Zaporizhzhia Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Zaporizhzhia, 2021.

Specialized Academic Board Д 17.052.01 at Zaporizhzhia Polytechnic National University of the Ministry of Education and Science of Ukraine.

The thesis is devoted to the determination of the stress-strain state of fibrous composites taking into account their viscoelastic properties. The use of fibrous composites in various industries, such as aerospace industry, shipbuilding, machine building, transport construction and others, makes it possible to regulate the properties of the material at the design stage. In most cases fibrous composite material contains two components: a pliable matrix and high-strength elastic reinforcing fibers. The matrix ensures the material uniformity, fixes the shape of the product and the relative position of the reinforcing fibers. The fibers absorb the main stresses that occur during operation, and provide composite rigidity and strength. The combination of the matrix and fiber properties allows creating special types of composites to be used in various equipment. It simplifies equipment design and improves its performance. In particular, it becomes possible to adjust the structure stiffness characteristics by changing the fibers orientation, type and concentration, as well as the matrix type and other material characteristics. When combining materials with such different mechanical properties, the created composite material may have new properties that cannot be considered as a simple combination of the properties of its components. Significant differences between physico-mechanical and chemical parameters together with anisotropy of the composite component properties lead to peculiarities in the entire structure

deformation. One of these features is the viscoelastic effects that occur due to the use of elastomers as a matrix, i.e. plastics, polyurethanes, rubber, etc. The main manifestations of viscoelasticity in the deformation process are creep at constant stress and stress relaxation at constant deformation. In addition, with the spread of the field of composite materials application, structures often have a complex geometric shape. All these factors influence seriously the complexity of modeling and calculation of the stress-strain state of a viscoelastic composite structure.

The thesis considers the viscoelastic properties of fibrous composites as well as calculation and experimental methods for determining the material effective characteristics. Modern methods for calculating the stress-strain state of structures made of fibrous composites were analyzed. It was found that the vast majority of methods for determining the stress-strain state of composite structures under viscoelastic deformation often have some assumptions and hypotheses that simplify the calculation. However, their use for structures with complex geometric shapes leads to the cumbersomeness and complexity of mathematical models making it impossible to solve them by most existing methods. Furthermore, these methods may have unsatisfactory result accuracy, as they do not take into account the spatial effects during the deformation. In addition, the choice of a mathematical model describing the features of viscoelastic deformation in a fibrous composite is limited by the available set of rheological characteristics of the material, which require special experimental studies. Therefore, it is important to create an effective technique that would take into account the peculiarities of viscoelastic deformation of fibrous composites without cumbersome mathematical calculations. This will allow determining the stress-strain state of structures under load more accurately and assess their performance reliably.

The thesis proposes a numerical approach to modeling the stress-strain state of fibrous composites that have viscoelastic properties. The composite material is considered in a three-dimensional model, so the ratio of the spatial theory of elasticity was applied during the modeling. The Boltzmann and Volterra hereditary

theory was used to describe the processes of viscoelasticity during the deformation, according to which the relationship between stresses and strains is temporal.

The finite element method was chosen for the calculation as one of the most effective numerical methods for solving engineering problems. Since the use of the traditional scheme of the finite element method to solve the above mentioned problems causes significant computational errors, it was advisable to use the instantaneous finite element scheme. The thesis proposes an approach that is the development of an instantaneous finite element scheme in the form of the displacements method based on the Lagrange principle. Within the framework of the approach proposed, a special space-time finite element has been developed. It is a linear parallelepipedic element with a spatio-temporal approximation of displacements. A stiffness matrix of this finite element was constructed, which took into account the matrix viscoelastic properties and the fiber elastic properties. The proposed approach allows taking into account the viscoelastic nature of the deformation; it is effective for determining the material deformation characteristics and leads to the results adequate to real processes in determining the stress-strain state of structures made of fibrous composites having an elastomeric matrix.

Numerical approaches to solving viscoelastic problems of composite materials mechanics in a three-dimensional model have also been improved using the iterative process. Based on the proposed approaches, software has been developed to study the stress-strain state of viscoelastic fibrous composite structures. The iterative algorithm for solving the problem and the basic relations of the stiffness matrix are implemented in the "MIRELA+" software package in the KMVIS form. The calculation of structures using the software package is carried out in three stages: preparation of initial data, numerical calculation of the finite element model, and processing the solution results. With the help of the developed package of applications the calculation of modern machine-building structure elements in three-dimensional model was carried out: plate structures, connecting tubes, and shell structures with different force boundary conditions. A comparison with the known problem solutions offered by other authors was carried out. The

obtained results do not contradict the data given in the literature, which confirms the reliability and effectiveness of the developed approaches. The stress-strain state of the rubber-cord casing of the air cylinder was also calculated. The distribution of displacement and stress fields depending on the direction of reinforcement and the concentration of fibers in the material was investigated. The analysis of the obtained results showed a significant influence of the material viscoelastic properties on the composite structure deformation process.

The developed approaches to solving problems on viscoelasticity in fibrous composites are of great practical importance, as they allow obtaining rational structure parameters at the design stage, as well as selecting loading and fixing conditions and the most acceptable characteristics of composite components. All this makes it possible to reduce the time and cost of conducting experimental studies, and as the result optimize the design process.

The theory, approaches and application package proposed in the thesis were introduced and used in the Department of Mechanics of Elastomeric Structures of the Institute of Geotechnical Mechanics of NAS of Ukraine (Dnipro) in the calculation and creation of rubber shock-absorbers with rubber-cord inserts.

LIST OF PUBLICATIONS

1. Kirichevsky V. V., Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L. Stress-strain state of a hollow orthotropic cylinder under viscoelastic deformation. *New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering*. 2005. № 2. P. 76–80. (professional edition)
2. Grebenyuk S. N., Lisitsa N. N., Mizernaya E. L., Kirichevsky Val. V. Modeling and calculation of the stress-strain state of a composite plate with a circular hole. *Collected Scientific Papers “Geo-Technical Mechanics”*. Dnipropetrovsk, 2006. Issue 63. P. 154–160. (professional edition)

3. Grebenyuk S. N., Gomenyuk S. I., Mizernaya E. L., Kirichevsky Val. V. Modeling the stress-strain state of composites and structures based on them. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2006. № 2. P. 50–54. (professional edition, Web of Science)
4. Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L. Stress state of a multilayer rubber-cord cylindrical shell pinched at the ends. *Collected Scientific Papers “Geo-Technical Mechanics”*. Dnipropetrovsk, 2007. Issue 71. P. 166–170. (professional edition)
5. Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L. Stress-strain state of fibrous composites under viscoelastic deformation. *East European National University Scientific Bulletin*. Luhansk, 2010. № 10(152). Vol. 2. P. 41–48. (professional edition, Google Scholar)
6. Homeniuk S. I., Hrebenuk S. M., Klymenko M. I., Mizerna O. L. Numerical modeling of viscoelastic deformation of the vibration isolator from fibrous composite. *Bulletin of the Kherson National Technical University*. 2018. № 3(66). Vol. 1. P. 39–44. (professional edition)
7. Mizerna O. Calculation of the stress-strain state of a pneumocylinder with a rubber-cord shell. *Polish journal of science*. 2020. № 24. Vol. 1. P. 56–60. (Google Scholar)
8. Kirichevsky V. V., Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L. Influence of elastomer viscoelastic properties on the stress-strain state of composite structures. *Mechanics of Elastomers – 2005: Book of abstracts of the VI International Symposium, November 22...24, 2005, Dnepropetrovsk, 2005*. P. 39–40.
9. Grebenyuk S. N., Kirichevsky Val. V., Mizernaya E. L. Modeling of features is stressdeformed states of designs from composite materials. *Advanced Problems in Mechanics: XXXIV Summer School-Conference, June 25...July 1, 2006, St. Petersburg, 2006*. P. 40–41.
10. Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L., Kirichevsky Val. V. Modeling the stress-strain state and fracture of composite structures under elastic and viscoelastic deformation. *Actual problems of applied mathematics and mechanics:*

Abstracts of the International conference, October 23...26, 2006, Kharkov, 2006. P. 63.

11. Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L. Stress-strain state of a composite plate with a circular hole. *Modern problems of machine building: Abstracts of the conference of young scientists and specialists*, December 1...7, 2006, Kharkov, 2006. P. 13.

12. Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L. Viscoelastic deformation of structures from composite materials. *Actual problems of continuum mechanics and structural strength: Abstracts of the international scientific and technical conference in memory of V. I. Mossakovskiy, the academician of the NAS of Ukraine*, October 17...19, 2007, Dnipropetrovsk, 2007. P. 180.

13. Mizernaya E. L., Grebenyuk S. N. Modeling of viscoelastic deformation of composites in "MIRELA" software package. *Current trends in the development of information technology in science, education and economics: Abstracts of the IV All-Ukrainian scientific-practical conference*, April 15...17, 2010, Luhansk, 2010. P. 66–67.

14. Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L., Reshevskaya Y. S., Tarkhova V. M. Special finite elements in "MIRELA" software package. *International Conference on Mathematical Modeling: Abstracts*, September 12...17, 2010, Kherson, 2010. Issue. 3(39). P. 132–136.

15. Grebenyuk S. N., Mizernaya E. L. Modeling and calculation of rubber-cord structures using FEM. *Mathematical problems of technical mechanics – 2011: Abstracts of the International Scientific Conference*, April 13...15, 2011, Dnipropetrovsk, 2011. P. 60–61.

16. Mizernaya E. L. Study of the stress-strain state of a composite with a viscoelastic matrix. *VIII International Youth Scientific and Technical Readings named after A. F. Mozhaisky: Abstracts*, May 19...20, 2015, Zaporizhzhia, 2015. P. 36–37.

ЗМІСТ

Вступ	17
Розділ 1 Огляд сучасного стану проблеми розрахунку композитних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування	23
1.1 Експериментальні дослідження в'язкопружних характеристик композиційних матеріалів	24
1.2 Методи визначення ефективних механічних характеристик волокнистих композиційних матеріалів	29
1.3 Диференціальні моделі в'язкопружності композиційних матеріалів	39
1.4 Інтегральні моделі в'язкопружності композиційних матеріалів	45
1.5 Метод скінченних елементів у задачах механіки в'язкопружних композитів	48
1.6 Висновки до розділу 1	52
Розділ 2 Основні співвідношення метода скінченних елементів для розрахунку композиційних в'язкопружних тіл у тривимірній постановці	53
2.1 Вихідні співвідношення	53
2.2 Дискретизація за часом у методі скінченних елементів	59
2.3 Побудова матриці жорсткості скінченного елемента для в'язкопружного волокнистого композиту	63
2.4 Виведення системи розв'язувальних рівнянь	71
2.5 Висновки до розділу 2	74
Розділ 3 Опис пакету прикладних програм чисельного дослідження напружено-деформованого стану волокнистого композиту в умовах в'язкопружного деформування	76
3.1 Алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану композиту	76
3.2 Структура пакету прикладних програм KMVIS програмного комплексу «MIRELA+»	78

	16
3.3 Опис роботи пакету прикладних програм KМVIS	80
3.4 Висновки до розділу 3	83
Розділ 4 Чисельне дослідження напружено-деформованого стану композитних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування	84
4.1 В'язкопружні деформації у затисненій двошаровій гумокордній пластині	84
4.2 Дослідження напружено-деформованого стану круглої пластини	86
4.3 Гумокордна труба під дією внутрішнього тиску	89
4.4 Дослідження напружено-деформованого стану композитної циліндричної оболонки, що навантажена радіальною зосередженою силою	92
4.5 Напружений стан затисненої на торцях багатошарової гумокордної труби	94
4.6 Розтягування консольної циліндричної оболонки, що має парну кількість перехресно армованих шарів	97
4.7 Напружено-деформований стан пневмоелемента з гумокордною оболонкою	100
4.9 Висновки до розділу 4	103
Висновки	104
Список використаних джерел	106
Додаток А	125
Додаток Б	127
Додаток В	130
Додаток Г	132
Додаток Д	133

ВСТУП

Актуальність теми. Використання композиційних матеріалів дозволяє направлено регулювати властивості матеріалів при створенні конструкцій і оптимізації їх міцнісних властивостей; а також регулювати вагу матеріалів, геометричні параметри й покращувати інші експлуатаційні характеристики. Це підтверджує досвід застосування композиційних матеріалів у відповідальних несучих конструкціях у різних галузях сучасної техніки: авіаційно-космічній, суднобудівній, транспортному будівництві, ядерній техніці, хімічній промисловості та інших.

У сучасних силових конструкціях найчастіше застосовують волокнисті композиційні матеріали, що являють собою поєднання двох складових з різними фізичними властивостями.

Однією з компонент є порівняно податливий матеріал – матриця, іншою – високоміцні та високомодульні волокна. Матриця забезпечує суцільність композиту, фіксує форму виробу і взаємне розташування армуючих волокон. Волокна сприймають основні напруження, що виникають у процесі експлуатації, і забезпечують жорсткість і міцність композиту. Саме з таких композиційних матеріалів методами неперервного намотування або укладання створюються типові елементи силових конструкцій – багатошарові балки, оболонки, панелі та інші конструкції. Поєднання властивостей матриці і волокна дозволяє створювати спеціальні типи композитів, які застосовуються при виробництві конструкційних елементів різного устаткування, що спрощує його конструкцію і покращує експлуатаційні характеристики. Зокрема, стає можливим регулювати жорсткісні характеристики конструкції за рахунок зміни орієнтації, типу і концентрації волокон, а також типу матриці та інших характеристик матеріалу.

Значні відмінності між фізико-механічними й хімічними властивостями та анізотропія властивостей складових композиту призводять до особливостей при деформуванні всієї конструкції. Зокрема використання як матриці еластомерів надає конструкції в'язкопружних властивостей. В'язкопружність у процесі деформування може проявлятися по-різному: повзучість при сталому напруженні, релаксація напружень при сталій деформації, згасання динамічних ефектів, залежність діаграми напруження-деформація від швидкості навантаження та інше. Крім того, з поширенням застосування композиційних матеріалів конструкції часто мають складну геометричну форму. Все це досить суттєво відзначається на складності моделювання та розрахунку напружено-деформованого стану композитної конструкції і використовувати аналітичні методи розрахунку неможливо. У зв'язку з цим останнім часом дуже широко застосовуються чисельні методи розрахунку з використанням комп'ютерної техніки.

Сучасні методи визначення напружено-деформованого стану композиційних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування часто мають деякі припущення й гіпотези, які дозволяють спростити розрахунок. Однак, використання їх для конструкцій складної геометричної форми в умовах в'язкопружного деформування призводить до громіздкості та складності математичних моделей і неможливості їх розв'язку більшістю існуючих методів або незадовільною точністю одержуваних результатів. Створення ефективної методики, яка враховує особливості в'язкопружного деформування композитів і не вимагає громіздких математичних викладок, дозволить більш точно визначати напружено-деформований стан конструкцій в умовах реального навантаження та достовірно оцінювати їх працездатність.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.
Дисертаційну роботу виконано відповідно до плану наукових досліджень, що проводяться на кафедрі прикладної математики Національного університету «Запорізька політехніка» за держбюджетними темами: «Розробка

математичних моделей об'єктів і процесів. Створення методики наближеного розв'язку прикладних задач» (№ держреєстрації 0105U006064, 2003–2006 рр.), «Розробка математичних моделей і методів розв'язку задач механіки деформівного твердого тіла з геометричними і фізичними особливостями» (№ держреєстрації 0106U008619, 2006–2009 рр.), «Математичні моделі та методи дослідження динамічних процесів в елементах складових конструкцій» (№ держреєстрації 0109U007671, 2009–2012 рр.), «Математичне моделювання та методи розв'язання динамічних задач деформування елементів складених конструкцій», (№ держреєстрації 0115U004674, 2015–2018 рр.), «Прикладне моделювання та розробка методик дослідження складних систем в інженерних та економічних розрахунках» (шифр 04618, 2018–2021 рр.).

Мета й завдання дослідження. Метою роботи є визначення напружено-деформованого стану композиційного матеріалу з урахуванням в'язкопружних властивостей компонентів. Для досягнення поставленої мети були вирішені наступні завдання:

- побудова матриці жорсткості лінійного паралелепіпедного скінченного елемента для розрахунку композитних конструкцій, яка враховує в'язкопружні властивості матриці та пружні властивості волокон;
- розробка підходів до чисельного розв'язування задачі в'язкопружності механіки композиційних матеріалів у тривимірній постановці;
- розвиток і застосування моментної схеми скінчених елементів для визначення напружено-деформованого стану конструкцій з волокнистих композитів з еластомерною матрицею;
- створення пакету прикладних програм для розрахунку в'язкопружних композитних конструкцій;
- розрахунок елементів сучасних машинобудівних конструкцій.

Об'єкт дослідження – процеси деформування в'язкопружних волокнистих композитів.

Предмет дослідження – напружено-деформований стан в'язкопружних волокнистих композитів.

Методи дослідження – для визначення напружено-деформованого стану композитних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування було використано модифікацію методу скінченних елементів – моментну схему скінченного елемента.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому:

- вперше розроблено просторово-часовий скінченний елемент для визначення напружено-деформованого стану волокнистих композиційних матеріалів, що мають в'язкопружні властивості;
- отримала подальший розвиток моментна схема скінченних елементів у тривимірній постановці для визначення напружено-деформованого стану композиційних матеріалів, які містять пружні волокна та в'язкопружну матрицю;
- удосконалені чисельні підходи для розв'язання задач механіки композиційних матеріалів в умовах в'язкопружного деформування у тривимірній постановці;
- вперше на основі розробленого пакету прикладних програм отримано нові чисельні результати, що відображають вплив в'язкопружних властивостей компонент композиційного матеріалу і характеризують процес в'язкопружного деформування всієї конструкції.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблено підходи до розв'язування задачі в'язкопружності механіки композитних матеріалів у тривимірній постановці. На їх базі створено пакет прикладних програм, що дозволяє розв'язувати задачі в'язкопружності композитів і досліджувати напружено-деформований стан композитних конструкцій складної геометричної форми в умовах в'язкопружного деформування. Методика дозволяє на стадії проєктування отримати раціональні параметри

конструкції, а також вибрати найбільш ефективні параметри компонентів композиційного матеріалу, умови навантаження та закріплення. Крім того, запропонована методика дозволяє отримувати адекватні реальним процесам результати при розрахунку й зменшувати час і трудомісткість проєктування. За допомогою розробленого пакету прикладних програм проведено розрахунок конструкцій транспортного та промислового призначення.

Особистий внесок здобувача. За результатами дослідження опубліковані наукові праці [143–158]. Основні положення й результати дисертаційної роботи, які виносяться на захист, отримані здобувачем самостійно. 2 наукових роботи опубліковано одноосібно: [143, 144]. У спільних публікаціях здобувачеві належить:

- аналіз актуальності проблеми [145];
- застосування моментної схеми до побудови матриці жорсткості скінченних елементів з просторово-часовою апроксимацією [146–149];
- чисельні результати в'язкопружного розрахунку конструкцій за допомогою методу скінченних елементів [146, 150–158];
- пакет прикладних програм для визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів в умовах в'язкопружності [151–156, 158].

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наукових конференціях, зокрема: III–V Регіональних конференціях молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (м. Запоріжжя, 2005–2007 рр.); VI Міжнародному симпозіумі «Механіка еластомерів – 2005» (м. Дніпро, 2005 р.); XI Міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (м. Київ, 2006 р.); Міжнародній конференції «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки» (м. Харків, 2006 р.); конференції молодих вчених і фахівців «Сучасні проблеми машинобудування» (м. Харків, 2006 р.); Міжнародній науково-технічній конференції пам'яті академіка НАН України

В. І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (м. Дніпро, 2007 р.); щорічних науково-технічних конференціях серед студентів, викладачів, науковців, молодих учених і аспірантів Національного університету «Запорізька політехніка» «Тиждень науки» (м. Запоріжжя, 2007–2017 рр.); IV Всеукраїнській науково-практичній конференції «Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій у науці, освіті та економіці» (м. Луганськ, 2010 р.); XII Міжнародній конференції з математичного моделювання (м. Херсон, 2010 р.); Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2011» (м. Дніпро, 2011 р.); VIII Міжнародних молодіжних науково-технічних читаннях ім. А. Ф. Можайського (м. Запоріжжя, 2015 р.).

Публікації. За результатами виконаних досліджень опубліковано 16 робіт, в яких відображено основний зміст дисертаційної роботи та етапи її підготовки. З них 6 статей опубліковано у фахових наукових виданнях згідно з Постановами МОН України й 1 стаття – у міжнародному науковому періодичному виданні, з яких 3 статті входять до наукометричних баз даних; а також 9 робіт – у матеріалах і тезах конференцій.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ РОЗРАХУНКУ КОМПОЗИТНИХ КОНСТРУКЦІЙ В УМОВАХ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Композиційними називають матеріали, що мають таку сукупність ознак [1]: не існують у природі, оскільки створені людиною; складаються з двох або більше компонентів (окремих волокон або інших армуючих складових і матриці, що їх поєднує), які різняться за своїм хімічним складом і розділені вираженою границею (рис. 1.1). Ці матеріали мають нові властивості, що відрізняються від властивостей складових компонентів; вони неоднорідні в мікромасштабі і однорідні в макромасштабі. Склад, форма й розподіл компонентів у композиті «запроектвані» заздалегідь; властивості визначаються кожним з компонентів, які у зв'язку з цим повинні бути у матеріалі у досить великих кількостях (більше деякого критичного вмісту). Метою створення композиційного матеріалу є об'єднання схожих або різних компонентів для отримання матеріалу з новими заданими властивостями й характеристиками, відмінними від властивостей і характеристик вихідних компонентів.

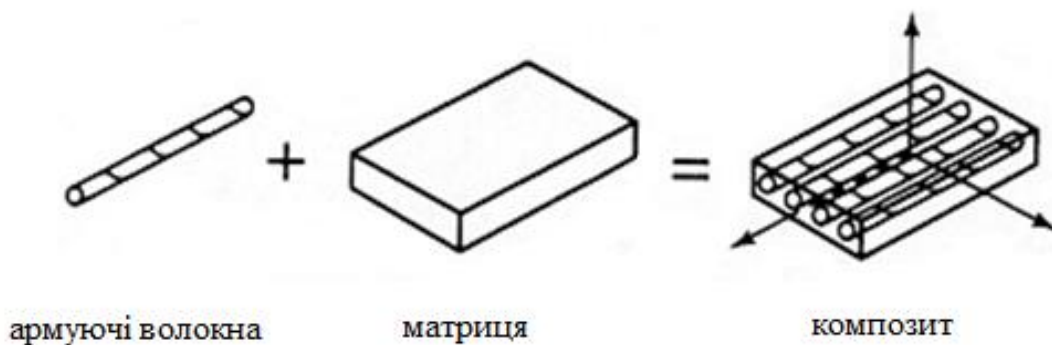


Рисунок 1.1 – Складові композиційного матеріалу

Механічна поведінка волокнистих композиційних матеріалів в значній мірі залежить від властивостей їх компонентів. Враховуючи, що у компонентах композиційного матеріалу привалюють ті чи інші властивості, необхідно виокремити їх та при побудові математичних моделей механічної поведінки композиційного матеріалу тим чи іншим способом їх врахувати. Ця задача є досить неоднозначна і потребує глибокого аналізу того чи іншого виду композиту (складу, структури, умов контакту складових тощо). Так, еластомерні матриці надають композиту властивостей в'язкопружності, які стають анізотропними через наявність у матеріалі пружних волокон, тобто деформаційні процеси у композиті залежать від способу армування. Анізотропія властивостей та в'язкопружні ефекти в значній мірі впливають на процес деформування та характеристики міцності конструкцій із композиційних матеріалів, тому вимагають глибокого дослідження при їх проєктуванні.

1.1 Експериментальні дослідження в'язкопружних характеристик композиційних матеріалів

Для розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій з в'язкопружних композиційних матеріалів постає питання у визначенні характеристик повзучості та релаксації. Проведення спеціальних експериментів дає змогу визначити ці параметри емпіричним шляхом. Крім того, експерименти використовують для верифікації нових методів розрахунку конструкцій з в'язкопружних композиційних матеріалів.

У роботі [2] В. П. Павлова на основі проведеного експерименту з повзучості полімерних композитів при підвищених нестационарних температурах запропоновано метод визначення характеристик повзучості

полімерних композитів. Розглянуто традиційні методики знаходження визначальних параметрів математичних моделей повзучості.

У статті [3] В. М. Ахундова, В. П. Луньова наведено розрахункові та експериментальні значення параметрів макроскопічної деформації гумокорду і параметрів його структури у деформованій конфігурації. Дослідження гумокордного композиту з перехресним армуванням нитками поліамідного корду проведено при великих деформаціях розтягування на основі розрахунків деформативних властивостей гумокомпозитного матеріалу і експериментів з розтягування зразків даного матеріалу з каркаса вантажної шини діагональної конструкції.

С. В. Шешеніним, П. В. Чистяковим, І. М. Закалюкіною проведено експериментальне визначення параметрів узагальненої моделі Максвелла для брекерної гуми, типової для пневматичних шин легкових автомобілів. У роботі [4] за допомогою методики усереднення знайдені основні параметри функції релаксації гумокордного брекера. Показано, що статичний експеримент на релаксацію не дозволяє визначити параметри моделі Максвелла з необхідною точністю, але може бути використаний для вимірювання тривалого модуля.

Роботи [5, 6] авторів М. А. Абросімова, Н. О. Кулікової присвячені розробці розрахунково-експериментального методу ідентифікації матеріальних констант і функцій визначальних співвідношень в'язкопружного деформування однорідних композитних матеріалів. Метод заснований на мінімізації нев'язки чисельного та експериментального моделювання нестационарних процесів деформування оболонок обертання, виготовлених з досліджуваних матеріалів.

О. Г. Осяєвим, А. В. Остапенком у [7] на основі даних експериментального дослідження старіння і тривалої міцності полімерних композитів отримані емпіричні залежності для основних констант в'язкопружності, ядер повзучості і релаксації, які мають вигляд експонент класичної теорії спадкової повзучості.

В. Г. Мартиненком проведено експериментальне дослідження в'язкопружних властивостей ортотропного матеріалу, зокрема, склотекстоліту. У роботах [8, 9] представлені діаграми розтягування й криві повзучості матеріалу, на їхній основі знайдено табличні та апроксимовані залежності кривих релаксації компонентів тензора релаксації та технічних в'язкопружних параметрів, а також оцінено рівень анізотропії в'язкопружності композиту.

У статті [10] О. О. Ларіна, Ю. А. Петрової описано проведення експериментальних випробувань з дослідження пружних та в'язкопружних властивостей еластомерних композиційних матеріалів. Композити мали односпрямоване армування текстильним кордом. Експерименти проведено у різних напрямках циклічними навантаженнями з різними амплітудами деформацій. Оцінено початкові модулі пружності та модулі втрат матеріалу в стабілізованому стані.

Л. В. Войтовичем застосовано поляризаційно-оптичний метод дослідження напружень у в'язкопружних конструктивно-ортотропних середовищах, використано взаємозв'язок між механічними й оптичними характеристиками матеріалу. У роботі [11] за результатами поляризаційно-оптичних вимірів автором розроблено методику визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень поблизу вершини тріщини у в'язкопружних структурно-ортотропних пластинах, що знаходяться в умовах повзучості.

Авторами В. П. Голубом, П. В. Фернаті, Я. Г. Ляшенко здійснено експериментальну апробацію методів визначення параметрів дробово-експоненційних ядер повзучості та релаксації лінійно в'язкопружних матеріалів. У статті [12] показано порівняння проведеного експерименту з розрахунком у випадку використання значень параметрів ядер, одержаних за допомогою методу прямої апроксимації функції повзучості.

Т. А. Venkatesh, D. C. Dunand провели експериментальне дослідження зразків композиту з матрицею NiAl, армованою волокнами вольфраму. У [13] на основі порівняння з отриманими результатами продемонстровані

можливості розрахункової моделі першої стадії повзучості в поздовжньому напрямку композиту з довгими волокнами.

У роботі [14] авторів N. Hiroshi, S. Nobuyuki наведені результати експериментальних досліджень повзучості і тривалої міцності партії плоских зразків з органопластику при одноосьовому розтягуванні. Випробування на статичний розтяг дозволили визначити руйнівне напруження й оцінити середньо-квадратичне відхилення коефіцієнта варіації.

У статті [15] Ю. П. Зезіна, Є. В. Ломакіна представлені результати експериментальних досліджень гіперпружних і релаксаційних властивостей полімерних композитів з еластомерною матрицею на основі гідрованого нітрилбутадиєнового каучуку, наповненого частками технічного вуглецю, у діапазоні значень температури 20–125°C. Розглянуто можливий варіант визначальних співвідношень для опису деяких особливостей механічної поведінки досліджуваних матеріалів при скінченних деформаціях. Проведено експериментальну перевірку запропонованих визначальних співвідношень. Показано, що застосування принципу температурно-часової аналогії дозволяє використовувати сформульовані визначальні співвідношення для аналізу немонотонної зміни релаксаційних властивостей досліджуваних матеріалів при підвищенні температури в розглянутому діапазоні.

N. Obaid, M. T. Kortschot, M. Sain експериментально дослідили поведінку армованих скловолокном поліпропіленових композитів при релаксації напружень. Вивчений ефект додаткового ковалентного зв'язку на межі поділу волокно-матриця шляхом моделювання міжфазової взаємодії. У роботі [16] представлено аналітичну модель, узгоджену з експериментальними даними. На основі проведених досліджень зроблено висновок, що більшу частину поведінки композиту з релаксацією напружень можна передбачити, використовуючи модель, яка враховує тільки залежний від часу модуль матриці і залежне від часу перенесення напруження ефективного зсуву.

Робота [17] Р. Д. Максимова, Е. Плуме надає результати дослідження тривалої повзучості органічних волокон, епоксидної смоли, органо-, скло- і органосклопластику з різним об'ємним співвідношенням органічних і скляних волокон. Показано можливості розрахункового визначення повзучості гібридного композиту за властивостями компонентів та їх вмісту у матеріалі. Наведено результати аналізу перерозподілу напружень у компонентах досліджених гібридних композитів у процесі їх тривалої повзучості.

У статтях К. П. Алексєєва та інших [18, 19] представлені результати дослідження повзучості намотного органопластику. Описано методику вимірювання окружних і осьових деформацій за допомогою індикаторів годинникового типу. Встановлено, що на кривих деформування є лінійна ділянка, нахил якої не залежить від швидкості навантаження і визначає його модуль пружності. Розроблено спадкову модель деформування досліджуваного органопластику. Виявлено значну зміну коефіцієнта Пуассона і зміну відношень окружних і осьових деформацій у часі.

О. М. Виноградовим, С. Шумахером у роботі [20] надано огляд досліджень характеристик тривалих властивостей полімерів і композитних матеріалів з полімерною матрицею в умовах циклічного навантаження. Представлено результати вивчення циклічної повзучості тонких плівок полівініліденфториду з тонкими металевими шарами, що накладені на обох поверхнях полімерної плівки. Відзначено, що проблема циклічної повзучості у полімерних системах далека від остаточного розв'язку і вимагає подальшого вивчення.

У статтях [21, 22] В. М. Паймушина, С. А. Холмогорова, Р. А. Каюмова, В. М. Шишкіна описано експерименти на циклічне розтягування та короткочасне й тривале навантаження косокутних армованих волокнистих композитів. Показано, що на початкових циклах повну деформацію, накопичену у зразку до моменту закінчення процесу розвантаження, можна представити у вигляді суми, що складається із

залишкової деформації, сформованої через структурні зміни в композиті, і деформації повзучості, яка зникає у зразку після його розвантаження і витримки протягом тривалого часу.

1.2 Методи визначення ефективних механічних характеристик волокнистих композиційних матеріалів

При розв'язанні задач деформівного твердого тіла конструкцій із в'язкопружних композитних матеріалів однією із задач є побудова моделі волокнистого композиту, яка відображає властивості матеріалу. Різні методи та підходи до визначення ефективних параметрів композиту формують різні моделі у залежності від характеристик компонентів композиційного матеріалу.

У роботі Д. М. Карпіноса та інших [1] приведено методи розрахунку фізико-механічних характеристик композитів і методи визначення складу, структури та властивостей армованих композиційних матеріалів. Зокрема, представлені співвідношення для визначення повздовжнього модуля пружності E_1 , поперечних модулів пружності E_2 і E_3 , модулів зсуву G_{12} , G_{13} і G_{23} за правилом сумішей:

$$E_1 = E_C \psi_C + E_R (1 - \psi_C), \quad (1.1)$$

$$E_2 = E_3 = \frac{E_C E_R}{E_R \psi_C + E_C (1 - \psi_C)}, \quad (1.2)$$

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_C G_R}{G_R \psi_C + G_C (1 - \psi_C)}, \quad (1.3)$$

$$G_{23} = \frac{G_R (1 - \psi_C) + G_C (K_R + \psi_C)}{G_R (1 + K_R \psi_C) + G_C K_R \psi_C} G_R, \quad (1.4)$$

де E_C – модуль пружності матеріалу волокна, E_R – модуль пружності матеріалу матриці, ψ_C – коефіцієнт армування, що характеризує відносний об'ємний вміст волокон:

$$\psi_C = \frac{\pi d_C^2}{4h_0} i_C,$$

де d_C – діаметр волокон, h_0 – товщина армованого шару, i_C – частота армування; G_C і G_R – модулі зсуву матеріалів волокон і матриці відповідно; $K_R = 3 - 4\nu_R$, де ν_R – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці.

Композиційний матеріал у цьому випадку представлений системою жорстко зв'язаних почергових ізотропних стрижнів, які мають характеристики волокна та матриці.

У роботі Д. С. Аболіньша [23] для визначення ефективних пружних сталих композиційних матеріалів запропоновано такі співвідношення:

$$E_1 = E_C \psi_C + E_R (1 - \psi_C), \quad (1.5)$$

$$E_2 = \frac{E_R E_C E_1}{(E_R \psi_C + E_C (1 - \psi_C))(E_R (1 - \psi_C) + E_C \psi_C) - \psi_C (1 - \psi_C)(E_C \nu_R - E_R \nu_C)^2}, \quad (1.6)$$

$$G_{12} = \frac{G_R (1 - \psi_C) + G_C (\psi_C + 1)}{G_R (\psi_C + 1) + G_C (1 - \psi_C)} G_R, \quad (1.7)$$

$$G_{23} = \frac{G_R G_C}{G_R \psi_C + G_C (1 - \psi_C)}; \quad (1.8)$$

$$\nu_{12} = \nu_C \psi_C + \nu_R (1 - \psi_C), \quad (1.9)$$

де ν_C – коефіцієнт Пуассона матеріалу волокон.

Г. А. Ваніним у [24] визначення пружних сталих композиту представлено у такому вигляді:

$$E_1 = E_C \psi_C + E_R (1 - \psi_C), \quad (1.10)$$

$$E_2 = \left\{ \frac{\nu_{12}^2}{E_1} + \frac{K_R + 1}{8G_R} \left[\frac{G_R(K_C - 1) + 2G_C}{G_R(1 - \psi_C)(K_C - 1) + G_C(2 - \psi_C + K_R\psi_C)} - \frac{2(G_C - G_R)\psi_C}{G_R(1 - \psi_C) + G_C(\psi_C + K_R)} \right] \right\}^{-1}, \quad (1.11)$$

$$G_{12} = \frac{G_R(1 - \psi_C) + G_C(\psi_C + 1)}{G_R(\psi_C + 1) + G_C(1 - \psi_C)} G_R, \quad (1.12)$$

$$G_{23} = \frac{G_R(1 - \psi_C) + G_C(K_R + \psi_C)}{G_R(1 + K_R\psi_C) + G_C K_R(1 - \psi_C)} G_R, \quad (1.13)$$

$$\nu_{12} = \nu_R - \frac{G_C \psi_C (K_R + 1)(\nu_R - \nu_C)}{G_R(1 - \psi_C)(K_C - 1) + G_C(2 - \psi_C + K_R\psi_C)}, \quad (1.14)$$

де $K_C = 3 - 4\nu_C$.

При визначенні механічних характеристик композитів намагаються врахувати якнайбільше особливостей матеріалів матриці й волокна, тому більш доцільним стає використання наближених методів. У роботі [25] авторів М. Klasztorny, А. Р. Wilszynski розроблено ітераційну процедуру визначення ефективних параметрів односпрямованого полімерного композиту за відомими механічними характеристиками волокна і матриці. Спеціальну функцію для опису в'язкопружних властивостей полімерних пластиків і смол запропоновано О. П. Вільчинским [26].

У статті [27] авторів К. Patrik, Т. Staffan встановлено зв'язок ефективних властивостей односпрямованого композиту зі статичними характеристиками мікроструктури і напруженим станом матриці. Напружений стан композиту представлено у вигляді спектра напружень. Спектри представлені для квадратичного, гексагонального і гібридного розташування волокон у матриці.

Авторами L. V. Gibiansky, G. W. Milton, J. G. Berryman для знаходження верхніх і нижніх меж значень ефективного комплексного модуля зсуву двофазного двовимірного в'язкопружного композиційного

матеріалу використано метод перенесення й метод Хашина-Штрикмана [28]. У роботі [29] Liang Jun, Du Shan-уї механічні властивості в'язкопружних матричних композитів вивчено за допомогою мікромеханіки. Для дослідження в'язкопружної поведінки полімерних композиційних матеріалів використано метод еквівалентних включень Ешелбі. Для оцінки параметрів визначальних співвідношень повзучості для частково посилених композитів використано метод перетворення Лапласа. Представлені криві модуля зсуву, модуля Юнга і коефіцієнта Пуассона в залежності від часу й об'ємної частки включень.

К. Kondo, R. Takiguchi проаналізовано в'язкопружні властивості безперервних посилених волокнами односпрямованих композиційних матеріалів на основі теорії гомогенізації. Волокно прийнято трансверсально-ізотропним тілом, а матриця – лінійно-пружним і нелінійно-в'язкопружним [30].

У статті [31] Y. Yeong-Moo, P. Sand-Hoon, Y. Sund-Kie описано метод визначення ефективних модулів гомогенізованої релаксації у частотній і часовій областях для лінійного в'язкопружного композиційного матеріалу з періодичною структурою. Запропоновано процедуру асимптотичної гомогенізації, що складається з двох етапів. Спочатку розраховано ефективні модулі релаксації в області перетворення Лапласа з подальшим числовим зворотним перетворенням. Потім ефективні комплексні модулі визначено з використанням простих формул перетворення Фур'є.

Автори L. Wen-hui, Z. Chun-yuan знайшли ефективні модулі релаксації і коефіцієнти Пуассона за моделлю Бюргерса [32]. Припущено, що у багат шаровому середовищі підкріплення є ізотропно пружним і лінійним. Матрицю прийнято ізотропно в'язкопружною і лінійною.

У роботах [33–35] С. М. Гребенюка, С. І. Гоменюка, М. І. Клименка ефективні пружні характеристики композиційного матеріалу визначені з урахуванням трансверсально-ізотропних властивостей матриці та волокна на основі кінематичної та енергетичної умови узгодження. Розроблено підхід до

розрахунку пружних сталих односпрямованого композиту, періодично армованого двома сортами волокон, з урахуванням транстропних властивостей матриці та волокна. У статті М. І. Клименка, С. М. Гребенюка, А. М. Богуславської [36] запропоновано методика визначення ефективних в'язкопружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу на основі моделювання композиту суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. Пружні характеристики композиту отримані у вигляді функцій пружних характеристик його складових і відносної частоти армування композиту. Підхід, що полягає у поданні композиту як однорідного анізотропного матеріалу з пружними сталими, що визначені через пружні сталі структурних компонентів складових у залежності від об'ємної частки кожного компонента, викладено у статті С. М. Гребенюка, В. В. Киричевського, В. О. Толока [37].

Х. Альтенбахом, В. О. Федоровим у [38, 39] розглянуто деформаційні властивості односпрямованого композиту з пружними волокнами квадратного поперечного перерізу, розташованими за квадратною схемою, при поперечному і повздовжньому зсуві. Припущено однорідність і однокомпонентність напружено-деформованого стану елементів. Отримано формули модулів поперечного й повздовжнього зсуву.

У роботі В. П. Голуба, П. В. Фернаті, Я. Г. Ляшенко [12] розглянуто задачу визначення параметрів дробово-експоненційних ядер повзучості та релаксації лінійно в'язкопружних матеріалів. Проаналізовано методи, що ґрунтуються на використанні апроксимації ядра, виходячи з функції Міттаг-Леффлера, перетворення Лапласа-Карсона та прямої апроксимації функції повзучості вихідним рівнянням. Визначено параметри дробово-експоненційних ядер арамідних волокон, параполіамідних ниток, склопластику та полімербетону.

У статті [40] А. О. Камінського, М. Ф. Селіванова, Ю. О. Черноівана розглянуто задачу про оптимальний опис в'язкопружних властивостей композитів, що складаються з компонентів із в'язкопружними

властивостями. На базі методу перетворення Лапласа-Карсона та раціональної апроксимації побудовано алгоритм зведення функцій, що описують в'язкопружні властивості матриці та наповнювача, до функцій одного класу. Також роботи Г. В. Гаврилова, А. О. Камінського, М. Ф. Селіванова присвячені визначенню в'язкопружних характеристик композитів за допомогою методу операторних ланцюгових дробів. Так, у [41] розраховані характеристики волокнистого композита з тетрагональною симетрією з використанням чебишевського раціонального наближення функцій. У [42] розглянуто метод визначення функції деформування в'язкопружного матеріалу з використанням експериментальних даних. Функцію представлено у вигляді інтегрального оператора з дробово-експоненціальним ядром Работнова або їх сумою. У [43] визначення функції деформування композита проведено з використанням дробово-експоненціального представлення функцій деформування матеріалів компонент. Для одержання в'язкопружного розв'язку використано принцип Вольтерра. У результаті функції деформування композита подано у вигляді суми операторів базового класу.

О. М. Аношкіним у [44] представлено розв'язок лінійної задачі в'язкопружності для односпрямованих волокнистих композитів методом локального наближення. Задачу мікромеханіки зведено до крайових задач для вибірки різних фрагментів структури композиту з періодичним розташуванням волокон. За відомими властивостями компонент композиційного матеріалу розраховані ефективні функції повзучості односпрямованого епоксидного склопластику.

У роботі [45] авторами О. Nobutada, А. Takaaki, М. Takushi, В. Shiro розроблено варіаційний метод для визначення характеристик повзучості матриці, індукованої зміною характеру розподілу напружень в односпрямованих волокнах композиційного матеріалу. Викладення зроблено у припущенні про білінійний розподіл напружень за довжиною волокон і про

степеневий закон повзучості матеріалу матриці і односпрямованих вуглецевих волокон.

У статті В. М. Ахундова, В. П. Луньова [3] представлено розрахунки деформативних властивостей гумокомпозитного матеріалу з перехресним армуванням нитками поліамідного корду при великих деформаціях розтягування на базі каркасної теорії композитних матеріалів. Наведено розрахункові значення параметрів макроскопічної деформації гумокорда і параметрів його структури у деформованій конфігурації.

В. П. Селяєвим, Т. А. Нізіною у роботі [46] проаналізовано різні способи отримання коефіцієнтів рівнянь повзучості. Авторами запропоновано підхід, заснований на використанні модифікованого методу збурень і методу найменших квадратів.

У статті О. О. Ватульяна, О. В. Явруян представлено методіку параметричної ідентифікації визначальних співвідношень полімерного матеріалу на основі обробки найпростіших дослідів (релаксація, повзучість) [47]. Нелінійну некоректну задачу зведено до вирішення алгебраїчного рівняння з використанням апарату симетричних многочленів. Обчислення параметрів композиційного матеріалу проведено у межах лінійної диференціальної моделі.

Задача обчислення поздовжніх і трансверсальних ефективних пружних параметрів композиту сформульована і чисельно реалізована О. В. Кондаковою, О. Ю. Сметанніковим [48]. Проведено порівняльний аналіз ефективних пружних характеристик боро-, скло-, вугле- і органопластиків з тетрагональним і гексагональним укладанням і з різним об'ємним вмістом волокна у композиті. Розглянуто задачу визначення поздовжніх і трансверсальних пружних параметрів волокон, що входять до складу композиційного матеріалу, за відомими властивостями композиту і матриці. Запропоновано розв'язання задачі прогнозування в'язкопружних характеристик пластиків. За наявними у літературі функціями повзучості епоксидної матриці й волокон різних типів визначені функції релаксації

пластиків у поздовжньому і трансверсальному напрямках із використанням методу змінних параметрів пружності.

У статті [49] О. С. Кравчука, Є. В. Томило обчислено осереднені за Фойгтом і Рейссом значення параметрів деформування в'язкопружного шаруватого композиційного бруса при чистому вигині. Визначено ефективне значення миттєвих модулів пружності і миттєвого радіуса кривизни нейтрального шару бруса при вигині. У роботі С. В. Шешеніна, П. В. Чистякова, І. М. Закалюкіної [4] визначені матеріальні параметри моделі Максвелла для гумокордного шару брекера з використанням осереднення знайдених експериментально параметрів гуми.

М. А. Абросімовим у [50] розглянуто чисельний метод ідентифікації параметрів визначальних співвідношень в'язкопружної поведінки полімерних композиційних матеріалів, заснований на найкращому узгодженні експериментальних даних і теоретичних розрахунків нестационарного деформування оболонок обертання. Також М. А. Абросімовим, Н. О. Куліковою у [5, 6] матеріальні константи і функції визначальних співвідношень композитних матеріалів визначені методом, заснованим на мінімізації нев'язки експериментального і комп'ютерного моделювання нестационарних процесів деформації циліндричних оболонок, виготовлених з досліджуваних матеріалів. Визначено характеристики жорсткості та реологічні характеристики композитних матеріалів нестационарного деформування циліндричних оболонок при поздовжньому ударі абсолютно жорстким тілом, а також при вибуховому навантаженні.

У статті [51] Т. А. Анікіної, І. В. Богачова, А. О. Ватульяна, В. В. Дударева представлені методи ідентифікації механічних властивостей істотно неоднорідної в'язкопружної кругової у плані пластини, затисненої за контуром. Ефект згасання у в'язкопружному матеріалі враховано за допомогою моделі стандартного в'язкопружного тіла на основі теорії комплексних модулів. За допомогою представлених методів відновлені невідомі функції миттєвого і тривалого модулів пластини.

У роботах В. С. Глущенкова, Н. А. Архіпової, Ю. В. Хохрякової, І. С. Марарової [52–54] представлено моделювання ефективних параметрів 2-компонентних композиційних матеріалів, реологічні властивості компонентів яких описані механічними моделями типу релаксуючого тіла Максвелла й двоелементними механічними моделями тіла Фойгта. В. Є. Згаєвським, Ю. Г. Яновським [55] релаксаційні властивості полімерного композиту з високо-еластичною матрицею описані на основі фізичної моделі гетерогенного матеріалу у рамках скейлінгового підходу у залежності від молекулярних і структурних характеристик міжфазового шару й характеру взаємодії мікрмолекул полімерної матриці з поверхнею частинок наповнювача.

У роботі [56] для визначення ефективних властивостей композиційних матеріалів, армованих віскерізованими волокнами, С. А. Лур'є, М. Мінаті пропонують метод трьох фаз. Модель враховує наявність віскерізованого міжфазового шару між волокном і матрицею. Показано, що метод трьох фаз дозволяє уточнити оцінки ефективних властивостей композитів і є основою досить загальної методики розрахунку ефективних характеристик композитів з віскерізованими і багатошаровими волокнами.

Авторами О. А. Светашковим, Ф. А. Сіманкіним, М. С. Павловим, А. В. Лушніковим у [57] наведено методику будовання моделі композиту, засновану на загальності задач визначення ефективних модулів неоднорідних пружних композитів і в'язкопружних тіл, що виявляють залежність механічних властивостей від тривалості дії навантаження. На основі суперпозиції виразів відомих ефективних модулів Фойгта й Рейса, Хашина й Штрикмана побудовано математичну модель гібридних ефективних модулів.

У статті В. М. Паймушина, Р. А. Каюмова, С. А. Холмогорова, В. М. Шишкіна [22] розглянуто питання експериментального визначення механічних характеристик косокутних армованих волокнистих композитів. Запропоновано визначальні співвідношення при короткочасному і тривалому навантаженнях.

Чисельні оцінки ефективних механічних і немеханічних характеристик гумокордних композитів знайдено І. І. Вдовиченком, О. В. Вершиніним, М. Я. Яковлевим [58]. В. Г. Мартиненко, Г. І. Львов у [8, 9, 59] представили методику отримання в'язкопружних властивостей ортогонально армованого композиційного матеріалу за відомими пружними властивостями скляних волокон та в'язкопружними властивостями епоксидного наповнювача. Метод складається з серії чисельних експериментів.

У роботі [60] авторами В. Tressou, R. Vaziri, C. Nadot-Martin розглянуто оцінку лінійних в'язкопружних ефективних властивостей композитів з періодичною структурою й волокнами прямокутного поперечного перерізу з використанням методу двонапрявленої асимптотичної гомогенізації. Отримано ефективні властивості шаруватого середовища з поперечно-ізотропними властивостями. Виведено аналітичні вирази в'язкопружних ефективних властивостей для композитного матеріалу з прямокутними поперечними перерізами волокон, періодично розподілених уздовж однієї осі.

У статті [61] The-Duong Nguyen, Sy-Tuan Nguyen, Thu-Hien Tran представлено асимптотичну узагальнену самоузгоджену схему для дослідження властивостей в'язкопружних композитів. Ефективні реологічні властивості отримані без використання зворотного перетворення Лапласа–Карсона. Показано, що в'язкопружний композит, виконаний з в'язкопружної матриці та пружних включень, може бути представлений за допомогою функцій в'язкопружних властивостей матриці та її об'ємної частки, а також еластичних властивостей модулів включень.

Авторами G. C. Paranicolaou, S. P. Zaoutsos у [62] розглянуто питання визначення характеристик повзучості та релаксації полімерних композитів. Проведено аналіз різних моделей лінійного та нелінійного в'язкопружного процесу деформації. Досліджено вплив форми, розміру і концентрації армування на в'язкопружну поведінку полімерних композитів.

У роботі [63] J. Yvonnet запропоновано метод обчислення гомогенізованої поведінки лінійних в'язкопружних композитів. У статті [64] N. A. Kupriyanov, F. A. Simankin, K. K. Manabaev використано наближений алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану в'язкопружних тіл. Алгоритм засновано на виведенні виразів ефективних у часі модулів. Ці модулі отримано шляхом ітераційних перетворень верхньої і нижньої оцінки Фойгта–Рейсса.

Також запропоновано алгоритм автоматизованого визначення пружних постійних композитного матеріалу змінної уздовж меридіана оболонки анізотропії. У [65] авторами А. П. Дзюбою, В. Н. Сиренком, Д. В. Клименком, Л. Д. Левитиною, Д. А. Черенковим враховано зв'язок структури композитного матеріалу з технологічним процесом виготовлення оболонки шляхом її намотування армувальною стрічкою під різними кутами до осі обертання. Отримано рівняння стану моментної теорії оболонок змінної уздовж меридіана ортотропії і товщини стінки як крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

У [66] розроблено метод і алгоритм, за допомогою яких проведена чисельна оцінка ефективних механічних властивостей гумокордних композитів із урахуванням скінченних деформацій і низької стисливості гуми. Ефективні властивості виведено у вигляді квадратичної залежності між тензором деформацій Гріна та другим тензором напружень Піоли–Кірхгофа.

1.3 Диференціальні моделі в'язкопружності композиційних матеріалів

При розв'язанні задач розрахунку напружено-деформованого стану композитів багатьма авторами використовуються диференційні реологічні моделі, побудовані за допомогою механічного моделювання композитів під

дією навантаження. Основні реологічні моделі в'язкопружних композиційних матеріалів розглянуто у монографії М. З. Кановича, М. М. Трофімова [67], де також приведені основні співвідношення для розрахунку напружено-деформованого стану пластин та оболонок.

У роботі І. І. Ведьорнікової та ін. [68] представлено структурно-феноменологічну модель повзучості у вигляді системи диференціальних рівнянь з п'ятьма параметрами. Параметри моделі визначені з використанням методу ідентифікації. Виконано побудову та ідентифікацію моделі повзучості для композиційного матеріалу на поліпропіленовій основі з додаванням 70% графіту.

У статті С. В. Шкараєва, М. П. Саврука [69] запропоновано загальний наближений метод розв'язання задач про особливості напружень у в'язкопружних середовищах, що базується на принципі відповідності в'язкопружних і пружних задач. При використанні розв'язку відповідної пружної задачі, побудовано апроксимацію залежностей для асимптотики переміщень і сингулярних напружень поблизу вершини клинчастого вирізу для довільного часу, яка збігається з точним розв'язком для малих і великих часів.

Т. С. Кагадій та ін. запропоновано узагальнення розробленого раніше асимптотичного методу для дослідження напружено-деформованого стану на випадок в'язкопружних анізотропних середовищ, зокрема волокнистих композитів [70, 71].

Аналітичні залежності у матричній формі для оцінки напружено-деформованого стану багатошарового композиційного циліндра при в'язкопружній поведінці матеріалу на основі реологічної моделі Фойгта отримано у [72] В. Г. Маліковим, Ю. М. Шашковим. Показано особливості застосування отриманих залежностей при наявності циліндричної ортотропії в'язкопружних властивостей матеріалів композитного циліндра.

У роботі [73] авторами F. Peng, X. Peng, Y. Fu було вивчено поведінку волокнистих композиційних матеріалів при гідростатичному навантаженні.

Матеріал матриці композиту було прийнято непружно ізотропним, а матеріал волокон – пружним. Явище повзучості змодельовано на мікрорівні степеневим законом, проведено усереднення суми пружних і непружних мікродеформацій за об'ємом, на основі чого представлені криві повзучості у залежності від об'ємної частки волокон і величини гідростатичного напруження.

У [74] Huang Nan-Nong було досліджено в'язкопружну поведінку симетрично перехресно-армованих і антисиметрично косо-армованих шаруватих композитних циліндричних панелей під дією осьового стиснення. Розглянуті композитні панелі – вільно оперті на краях, з початковими хвильовими геометричними недосконаlostями різних амплітуд. Автором виконано аналіз характеристик напружено-деформованого стану типових панелей на основі геометрично нелінійного в'язкопружного підходу. Визначено функцію напружень за допомогою розв'язання рівняння сумісності деформацій із використанням перетворення Лапласа та схеми чисельного інтегрування. Прогини в умовах повзучості розраховані із застосуванням узагальненого методу Гальоркіна.

У статті [75] Y. Kanagawa, S. Murasami, T. Mizobe представлено модель для опису залежної від часу непружної деформації симетрично шаруватих композитних пластин, косоармованих односпрямованими волокнами. Закон кінематичного зміцнення при повзучості, а також рівняння еволюції деформації поширені на опис деформації повзучості початково анізотропних матеріалів. Зокрема, процес еволюції напружень в анізотропному матеріалі охарактеризований за допомогою введення перетвореного тензора деформацій, за допомогою якого вираз для швидкості еквівалентної деформації анізотропного тіла представлено в ідентичній формі, як і для ізотропних матеріалів.

Авторами I. Didu, Nafornița Eliza у [76] на основі різних моделей, що містять пружні і в'язкопружні елементи, отримано певні співвідношення між напруженнями, деформаціями і швидкостями деформації. Отриману

математичну модель запропоновано використовувати для опису поведінки волокнистих композиційних матеріалів при стисненні. Розглянуто випадки навантаження з постійною і змінною швидкістю.

У статті В. Д. Потапова, М. Ю. Жаринова, О. І. Марасанова [77] представлено поширення метода переміщень у поєднанні з методом тригонометричних рядів Фур'є на розрахунок тонкостінних систем із в'язкопружного матеріалу за деформованою схемою. Розглянуто складчасті й пологі багатохвильові оболонки двоякої кривизни на прямокутному плані, що знаходяться під дією заданих навантажень. Матеріал окремих оболонок прийнято ортотропним, лінійно-в'язкопружним.

Запропоновано метод дослідження напруженого стану в'язкопружної багатозв'язаної ізотропної пластинки з пружними включеннями вздовж однієї прямої [78]. Авторами С. А. Калоєровим, А. Б. Мироненком проведено дослідження в'язкопружного стану пластинки зі скінченням або нескінченням числом кругових і лінійних включень. Метод заснований на зведенні вихідної задачі в'язкопружності до ряду задач теорії пружності.

Х. Альтенбах, В. А. Федоров у роботах [38, 39] розробили структурну модель несталої повзучості односпрямованого композиту з пружними волокнами квадратного поперечного перерізу, розташованими за квадратною схемою. Мінімальна представницька комірка моделі представлена чотирма елементами. Припущено однорідність і однокомпонентність напружено-деформованого стану елементів. Отримані дві групи основних та розв'язувальних рівнянь несталої повзучості, погоджених статично або кінематично. Формули для усталеної повзучості композита отримані у вигляді, подібному до закону Нортонна.

У роботі [79] Ellyin Fernand, Xia Zihui, Chen Yu розроблено модель деформування шаруватого композита з перехресним армуванням, що враховує локальне розтріскування матриці. Для опису в'язкопружних властивостей полімерної матриці використана узагальнена модель Кельвіна. Для опису розтріскування матриці прийнятий критерій найбільших головних

деформацій. Прийнято також рівняння, яке описує опір елементів в області локального пошкодження.

У статті [80] авторами Rand Omri, Givoli Dan розглянуто деформації в'язкопружного кільця під синусоїдним зсувним навантаженням на зовнішні півкола. Диференціальні рівняння рівноваги в площині для в'язкопружного тіла з полярною ортотропією властивостей перетворені до вигляду системи звичайних диференціальних рівнянь з азимутальним параметром шляхом інтегрування за радіальним напрямком і використанням радіальних функцій форм скінченних елементів матеріалу. Система перетворена до вигляду лінійних алгебраїчних рівнянь при поданні невідомих деформацій вузлів в азимутальному напрямку гармонічними рядами Фур'є.

У роботі О. М. Власова, М. Г. Мнушкіна, Ю. Г. Яновського [81] наведені результати чисельних досліджень механічної поведінки середовищ, які моделюють волокнонаповнені полімерні композити, під дією навантажень у рамках пружного й в'язкопружнопластичного підходів. М. А. Абросимовим у [50] представлено чисельний метод ідентифікації параметрів визначальних співвідношень в'язкопружної поведінки полімерних композиційних матеріалів, заснований на найкращому узгодженні експериментальних даних і теоретичних розрахунків нестационарного деформування оболонок обертання. Розглянуто задачу центросиметричного деформування сферичних оболонок, навантажених імпульсом внутрішнього тиску.

У [82] авторами Hammerand Daniel C., Karania Rakesh K. розглянуто аналіз великих деформацій лінійного в'язкопружного шаруватого композиту. Запропоновано співвідношення для оцінки впливу властивостей пам'яті композиту. Процес розвитку нелінійної деформації розраховано за ступінями часу із застосуванням методу ітерацій Ньютона-Рафсона. Наведено чисельні приклади розрахунків на стійкість конструкцій, які працюють при дії незалежних від деформацій механічних навантажень та тисках і температурних навантаженнях, що залежать від деформацій.

Модель, що заснована на використанні стрижневих структурних елементів, описана в роботі Д. А. Черноуса, С. В. Шинько [83]. Її застосовано для нелінійного в'язкопружного деформування еластичних поропластів малої щільності.

У роботі І. Г. Терегулова, Р. А. Каюмова, Р. Н. Ільзова [84] запропоновано ітераційну методику уточнення вкладу енергії деформації поперечного зсуву для розрахунку нелінійно-пружних багатошарових композиційних оболонок обертання. Методика проводиться за рахунок визначення закону розподілу поперечних дотичних напружень шляхом інтегрування рівнянь рівноваги при відомих тангенціальних напруженнях.

У статті [85] авторами В. А. Максимюком, І. С. Чернишенком розглянуті задачі статички кругових тороїдальних оболонок з нелінійно-пружних ортотропних композитних матеріалів. Дослідження проведено на основі методу послідовних наближень, варіаційно-різницевого методу, методу множників Лагранжа. Також методи розрахунку ортотропних оболонок представлені у роботі [86] N. Smetankina, A. Merkulova, D. Merkulov, O. Postnyi.

У [87] авторами G. Lvov, V. Martynenko наведено аналітичні дослідження напружено-деформованого стану ділянки сталевого трубопроводу з в'язкопружним ремонтним бандажем для різних режимів монтажу бандажа й умов зміни тиску у трубопроводі. Повна система рівнянь теорії в'язкопружності для ортотропного матеріалу зведена до інтегро-диференціальних рівнянь у переміщеннях, і запропоновано метод їх розв'язку.

К. К. Манабаєвим у [88] запропоновано наближені методи розв'язку задач лінійної в'язкопружності. Вони створені завдяки модифікаціям метода ефективних за часом модулів та ітераційного метода.

1.4 Інтегральні моделі в'язкопружності композиційних матеріалів

При використанні реологічних моделей підвищення точності розрахунку ускладнює математичний опис моделі, тому широке застосування отримали спадкові теорії в'язкопружності. У роботах А. О. Камінського, М. Ф. Селіванова, І. Ю. Подільчука, Г. В. Гаврилова, Ю. О. Черноівана у рамках спадкової теорії Больцмана-Вольтерра отримано підхід для розв'язання задач руйнування в'язкопружних композитів, який базується на апроксимації іраціональної функції інтегральних операторів ланцюговим дробом [89, 90]. Розглянуто задачі деформації пластин з органічного пластику та з композиту з тріщинами [91, 92], задачу тривалого руйнування шаруватого в'язкопружного композита внаслідок докритичного поширення дископодібної тріщини [93], задачу руйнування анізотропного старіючого в'язкопружного тіла [94]. За допомогою запропонованого підходу досліджено перерозподіл напружень у часі у в'язкопружному трансверсально-ізотропному тілі з гіперболоїдальною виточкою [95]. Також запропоновано розвинення методу для розв'язання деяких задач лінійної теорії в'язкопружності анізотропних тіл та композитів [96, 97]. Розглянуто задачу про напружений стан в'язкопружної ортотропної півплощини [98], деформування волокнистого композиту [43], граничну задачу лінійної в'язкопружності [99–101].

Авторами Г. А. Ваніним, Нгуєн Дінь Дик [102] запропоновано варіант теорії повзучості сферопластика на основі наближених рівнянь для інтегральних параметрів і принципу Вольтерра. Для опису лінійної повзучості матриці застосована теорія в'язкопружності Работнова. Інші компоненти композита прийняті пружними. Повна система операторних рівнянь лінійної в'язкопружності сферопластиків отримана на основі гіпотези пружного деформування композита й гідростатичного тиску.

В. Ф. Бондіним викладено розв'язок задачі про переміщення і напруження у компонентах в'язкопружного бруса, армованого в'язкопружними або пружними стрижнями, при впливі навантажень, що неперервно змінюються у часі за будь-яким заданим законом [103]. Замкнений розв'язок отримано у рамках теорії лінійної спадковості Больцмана-Вольтерра при експоненційних ядрах повзучості і за елементарною теорією вигину.

У статті С. М. Гребенюка, В. В. Киричевського, В. О. Толока [37] при визначенні напружено-деформованого стану композитних матеріалів в умовах в'язкопружного деформування для опису в'язкопружних властивостей кожного компонента композита також використана спадкова теорія Больцмана-Вольтерра. У роботах [104,105] Я. Г. Ляшенко розв'язано просторову задачу механіки матричних стохастично армованих композитних матеріалів, компоненти яких проявляють в'язкопружні властивості. В'язкопружні характеристики композитного середовища визначено за допомогою принципу Вольтерра та методу змінних у часі модулів. Для цього пружні модулі замінені операторами з ядрами типу Работнова. У процесі дослідження неоднорідного середовища стохастичної структури використано методи усереднення та моментних умовних функцій.

В. П. Шевченко, Р. М. Нескородевим у [106] запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язку задач лінійної в'язкопружності анізотропного тіла, що не вимагає явної побудови аналітичного подання ядер повзучості та релаксації. Наближене розв'язування інтегральних рівнянь базується на безпосередньому використанні експериментальних даних, попередньо згладжених і заповнених більш густою сіткою. Також у роботі [107] побудований розв'язок задачі вигину в'язкопружних трансверсально-ізотропних плит в уточненій постановці, який зведено до системи диференціальних рівнянь шостого порядку. Метод розв'язку засновано на перетворенні інтегральних рівнянь стану задач в'язкопружності до часового рівняння закону Гука.

У статті J. Gotas [108] приведено порівняння розв'язків задачі про вигин пластин з волокнистого армованого в'язкопружного композиту з використанням різних гіпотез. Матеріал матриці підпорядкований лінійному визначальному співвідношенню в'язкопружності інтегрального типу. У роботі А. О. Камінського, М. І. Затули, В. М. Дякона [109] досліджено напружено-деформований стан в'язкопружних кусково-однорідних тіл методом граничних інтегральних рівнянь.

Деякі методи, які в теорії в'язкопружності прийнято називати методами апроксимації, описані Б. Є. Победрею. У роботі [110] розглянуто ізотропне й структурно анізотропне середовища, а також «прості» композити. Для «складних» композитів запропоновано метод канонічних операторів. Описано можливість отримання апріорних оцінок точності розв'язку квазістатичних задач теорії в'язкопружності.

Автори Ю. О. Басистов, Ю. Г. Яновський у роботі [111] аналізують класичні лінійні та оригінальні нелінійні феноменологічні й математичні моделі, які описують поведінку в'язкопружних середовищ. Для ідентифікації лінійної моделі на основі інтегрального оператора Фредгольма першого роду запропоновано використовувати метод Тихонова.

У роботі [112] О. В. Шиверського, О. Ю. Горохова, П. В. Максимова, А. В. Блінова розглянуто квазістатичні задачі лінійної анізотропної в'язкопружності на прикладі пластини з отвором. Розв'язок представлено наближеним методом квазіконстантних операторів.

Авторами роботи [113] К. М. Зінгерманом, Д. А. Шавіріним розроблено приблизний аналітичний метод аналізу напружень у композиті з каучуку, що випробовує скінченні деформації. Метод дозволяє враховувати в'язкопружні властивості композитних компонентів. Припущено, що ці компоненти є нестисливими, а їх механічні властивості описуються інтегральними визначальними відношеннями типу згортки. Метод розв'язку заснований на техніці збурень, перетворенні Лапласа та методі Колосова-Мушлішвілі.

1.5 Метод скінченних елементів у задачах механіки в'язкопружних композитів

Серед багатьох аналітичних та чисельних методів розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла найбільш розповсюдженим є метод скінченних елементів (МСЕ) [114]. Це наближений чисельний метод, реалізація якого неможлива без застосування обчислювальної техніки, але який дозволяє розраховувати конструкції довільної геометричної форми зі складними умовами навантаження та закріплення. МСЕ у класичній постановці та його варіації набули широкого застосування у розв'язанні задач механіки композитів.

У роботі К. Kondo, R. Takiguchi [30] на основі теорії гомогенізації з використанням МСЕ проаналізовано властивості безперервних посиленних волокнами односпрямованих композитів, пов'язані з в'язкопружністю. У статті Labeed Nadia, Turbe Nikole [115] приведено обчислення однорідних коефіцієнтів в'язкопружного композита, посиленого сферичними вclusions. Розв'язання задачі проведено методом скінченних елементів. Визначено напруження як функції часу.

С. Д. Акбаровим, О. Г. Рзаєвим у [116] для дослідження розшарування у круглій симетричній в'язкопружній композитній плиті з дископодібною тріщиною використано перетворення Лапласа та МСЕ. Дослідження проведено в рамках точних геометрично нелінійних рівнянь теорії в'язкопружності.

Робота Ю. І. Фомічова [117] висвітлює розрахунок напружено-деформованого стану покриття як торової оболонки обертання змінної товщини і жорсткості. Для розв'язання цієї задачі застосовано програмний комплекс, що ґрунтується на МСЕ і на методі Фур'є. У результаті розрахунку визначено прогин шини, деформації та напруження у всіх її шарах.

Авторами Ellyin Fernand, Xia Zihui, Chen Yu у [79] розроблено скінченно-елементну модель деформування шаруватого композиту з перехресним армуванням, що враховує локальне розтріскування матриці. Наведено картини поширення ушкоджень в околі волокон на вільних краях розглянутого композиту.

У роботі [14] Nasuno Hiroshi, Shimizu Nobuyuki сформували скінченно-елементну модель в'язкопружного тіла, яке описано дробовим диференціальним оператором. У статті Sun Shuang-shuang, Sun Guo-jun, Du Xiao-wei, Wu Jian-sheng [118] описано аналіз методом скінченних елементів поведінки балки з епоксидного композиту, армованого волокнами з нікелідатитану, з урахуванням і без урахування в'язкопружних властивостей матриці.

Авторами Rand Omri, Givoli Dan проведено аналіз деформацій у циліндричних координатах в'язкопружних тіл методом гармонійних скінченних елементів. У [80] наведено чисельні результати для в'язкопружного кільця під синусоїдальним зсувним навантаженням на зовнішньому півколі.

Г. М. Куликовим, С. В. Плотніковою на основі змішаних скінченно-елементних апроксимацій розроблено алгоритм чисельного розв'язання задач статички попередньо напружених багатошарових анізотропних оболонок у геометрично лінійній та нелінійній постановках. У статтях [119, 120] наведено результати розв'язання задачі про вигин циліндричної оболонки під дією двох протилежних зосереджених сил, задачі про навантаження зосередженою силою несиметрично закріпленої кругової арки і задачі локального навантаження багатошарової гумокордної тороподібної оболонки.

У роботі [121] авторів Sasaki Koji, Saito Naoto, Amagi Shiegeo, Tsunoda Tomoya за допомогою МСЕ оцінено технологічні залишкові напруження в ортотропних в'язкопружних матеріалах. Модель використана

для розрахунку залишкових напружень у склопоксидному покритті пристроїв мікроелектроніки.

Авторами Wang Xingguang, Zhong Weifang, Zou Jing у [122] виконано чисельне дослідження методом скінченних елементів деформованого стану композитних балок при поперечному вигині, а також характеристик згинальних коливань. Балки мали полімерну матрицю і підкріплювальні нітінолові волокна і знаходилися під дією термічних і механічних навантажень. Авторами виведено визначальні матричні рівняння пружної рівноваги і руху вузлів побудованої скінченно-елементної сітки.

О. В. Кондаковою, О. Ю. Сметанніковим у роботі [48] використано скінченно-елементний пакет ANSYS 5.5 для дослідження обчислювальних аспектів розв'язання прямих та обернених задач механіки композиційних матеріалів. Сформульовані і чисельно реалізовані задачі обчислення ефективних пружних параметрів композиту, визначення пружних параметрів волокон, прогнозування в'язкопружних характеристик пластиків, задача термов'язкопружності та інші.

Авторами Yang Haitian, Guo Xinglin у [123] представлено комбінований гранично-скінченно-елементний метод збурень для розв'язання деяких задач лінійної повзучості. Показано можливість застосування методу до системи зв'язаних тіл із різними ступенями старіння та будь-якою геометричною конфігурацією.

У роботі [58] І. І. Вдовиченко, О. В. Вершинін, М. Я. Яковлев описують методику, засновану на чисельному скінченно-елементному розрахунку на осередку періодичності композиту. За допомогою цієї методики знайдено чисельні оцінки ефективних механічних і немеханічних характеристик гумокордних композитів. Також на основі методу скінченних елементів у статті [124] Морозова А. В. запропоновано методику проведення серії чисельних експериментів, які необхідні для повного визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу.

У [9, 59, 125] авторами В. Г. Мартиненком, Г. І. Львовим запропоновано метод накладених сіток для програмних комплексів МСЕ. Розроблено чисельний метод гомогенізації ядер ортотропної в'язкопружності ортогонально армованого композиційного матеріалу.

Чисельна процедура гомогенізації для в'язкопружних композитів з використанням МСЕ представлена у [126]. Процедура заснована на моделі елементарної комірки. Авторами досліджено композити з в'язкопружною матрицею та односпрямованими вбудованими циліндричними пружними волокнами. Проаналізовано широкий спектр нестандартних односпрямованих розподілів волокон.

У роботі В. Tressou, R. Vaziri, C. Nadot-Martin [60] з використанням МСЕ розроблено чисельний алгоритм методу двоспрямованої асимптотичної гомогенізації для оцінки лінійних в'язкопружних ефективних властивостей композитів з періодичною структурою й волокнами прямокутного поперечного перерізу. У [66] чисельна оцінка ефективних механічних властивостей гумокордних композитів проведена із урахуванням скінченних деформацій і низької стисливості гуми. Наведено результати чисельної оцінки ефективних механічних властивостей гумокордного композиту при скінченних деформаціях.

У роботах В. В. Киричевського, С. М. Гребенюка та ін. [33, 36, 37, 114, 127–133] на основі методу скінченних елементів представлено розв'язання багатьох задач механіки деформівного твердого тіла, таких як задачі лінійної та нелінійної теорії пружності, лінійної та нелінійної в'язкопружності, термопружності й теплопровідності, довговічності, лінійної та нелінійної механіки руйнування, механіки композитів та еластомерів.

1.6 Висновки до розділу 1

Можна зробити висновки, що дослідження напружено-деформованого стану волокнистих композитів в умовах в'язкопружного деформування стикається із низкою проблем, а саме:

- більшість методів дослідження в'язкопружної поведінки волокнистих композиційних матеріалів спрямована на розв'язання задач із низкою гіпотез, які дозволяють зменшити їх розмірність, але це не дає можливості врахувати просторові ефекти при деформуванні. Так, при дослідженні еластомерних матеріалів адекватне врахування слабкої стисливості можливе лише у просторових задачах;

- при практичному застосуванні вибір математичної моделі, що враховує в'язкопружні властивості компонентів волокнистого композиційного матеріалу, обмежений наявними реологічними характеристиками для конструкційних матеріалів, які, як правило, отримують у результаті експериментальних досліджень.

Огляд робіт з дослідження, моделювання та обчислення напружено-деформованого стану в'язкопружних волокнистих композитів дає змогу зробити висновок про деяку обмеженість методів дослідження, призначення їх або для розв'язання конкретних задач, або для моделювання певних матеріалів. Це підтверджує необхідність проведення дослідження у вибраному науковому напрямі згідно з метою та задачами даної роботи. Найбільш доцільним для моделювання в'язкопружної поведінки композиційного матеріалу на думку автора є використання спадкової теорії Больцмана-Вольтерра з реологічними характеристиками на основі миттєвих та тривалих механічних характеристик матеріалу у комбінації з методом скінченних елементів, як одним з найбільш ефективних чисельних методів розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КОМПОЗИЦІЙНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ТІЛ У ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

2.1 Вихідні співвідношення

Для побудови розв'язувальних рівнянь тривимірної задачі теорії пружності й в'язкопружності та співвідношень метода скінченних елементів будемо користуватися методами тензорного обчислення, прийнятими відповідно до робіт [127–129, 134, 135]. Використання апарату тензорного обчислення дозволяє описувати операції над розглянутими величинами без громіздких математичних викладок і, таким чином, уникнути різного роду помилок.

Нехай величини z^1, z^2, z^3 – координати точки простору у прямокутній декартовій системі координат, що має напрямні одиничні вектори $\vec{i}^1, \vec{i}^2, \vec{i}^3$. Дану систему координат будемо називати базисною. Базисна система координат не змінюється у процесі деформування середовища й служить для завдання у ній вихідних геометричних і фізико-механічних характеристик досліджуваних об'єктів, а також для полегшення опису граничних, початкових і силових умов конструкцій у процесі деформування.

Введемо криволінійну систему координат x^1, x^2, x^3 з векторами базису $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$. Дану систему координат будемо називати місцевою. Місцева система координат у загальному випадку є неортогональною та змінюється у процесі деформування тіла. Між координатами базисної та місцевої систем існує зв'язок. Координати точок у місцевій системі координат можна представити неперервними функціями декартових координат:

$$x^k = x^k(z^{1'}, z^{2'}, z^{3'}). \quad (2.1)$$

Похідні від функцій $z^{i'}$, x^i пов'язані співвідношеннями:

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^{s'}} \frac{\partial z^{s'}}{\partial x^j} = \delta_j^i; \quad \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial z^{j'}} = \delta_{j'}^{i'}, \quad (2.2)$$

де δ_j^i – символ Кронекера, що визначається за формулою:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Введемо у просторі координат $z^{i'}$ радіус-вектор $\vec{r}(x^i)$, що визначає положення точок тіла. Початок радіус-вектора помістимо у нерухому точку. Будемо вважати, що $\vec{r}(x^i)$ – функція однозначна, неперервна й диференційовна потрібне число раз за будь-яким параметром x^i . Тоді його можна записати у вигляді розкладу:

$$\vec{r} = \vec{r}(z^{1'}, z^{2'}, z^{3'}) = z^{k'} \vec{i}_{k'}, \text{ або } \vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2, x^3) = x^k \vec{\varepsilon}_k. \quad (2.3)$$

Кожній точці тіла відповідають два основні базиси векторів [93]:

$$\vec{r}_{i'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z^{i'}}, \quad \vec{r}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}. \quad (2.4)$$

Обидві системи координат характеризуються своїм метричним тензором, компоненти якого визначаються за формулою:

$$g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j = C_i^{n'} C_j^{m'} \vec{i}_{n'} \cdot \vec{i}_{m'}, \quad (2.5)$$

де

$$C_s^{k'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial x^s}$$

– величини, що показують перетворення декартових координат у криволінійні.

Визначник матриці

$$g = |g_{ij}| = |C_i^{n'}| |C_j^{n'}| = J^2 \quad (2.6)$$

характеризує елементарний об'єм

$$dv = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (2.7)$$

Зміну базису при переході від однієї точки до іншої можна характеризувати значеннями похідних $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x^k}$.

Процес деформування тіла описується тензором скінченних деформацій. Вираз для визначення тензора скінченних деформацій у довільній місцевій системі координат запишеться через переміщення у базисній системі координат і коефіцієнти матриці перетворень у такому вигляді:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j} + u_{m',i} u_{m',j}) \quad (2.8)$$

де $u_{m'}$ – компоненти вектора переміщень. У випадку малих переміщень у виразі (2.8) останній доданок не враховують.

Компоненти тензора напружень для пружного, у загальному випадку анізотропного, тіла визначаються на основі узагальненого закону Гука [134]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.9)$$

Компоненти тензора пружних сталей C^{ijkl} для ортотропного тіла (у системі армування x'_m) будуть мати такий вигляд [128]:

$$C^{ijkl} = \begin{bmatrix} C^{1111} & 0 & 0 & 0 & C^{1122} & 0 & 0 & 0 & C^{1133} \\ 0 & C^{1212} & 0 & C^{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{1313} & 0 & 0 & 0 & C^{1331} & 0 & 0 \\ 0 & C^{2112} & 0 & C^{2121} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C^{2211} & 0 & 0 & 0 & C^{2222} & 0 & 0 & 0 & C^{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2323} & 0 & C^{2332} & 0 \\ 0 & 0 & C^{3113} & 0 & 0 & 0 & C^{3131} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{3223} & 0 & C^{3232} & 0 \\ C^{3311} & 0 & 0 & 0 & C^{3322} & 0 & 0 & 0 & C^{3333} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

та їх значення обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} C^{1111} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (1 - \nu_{23}\nu_{32}); & C^{1122} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}); & C^{1133} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (\nu_{21}\nu_{32} + \nu_{31}); \\ C^{2211} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}); & C^{2222} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (1 - \nu_{13}\nu_{31}); & C^{2233} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}); \\ C^{3311} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (\nu_{12}\nu_{23} + \nu_{13}); & C^{3322} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}); & C^{3333} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (1 - \nu_{21}\nu_{12}); \\ C^{1212} &= \frac{G_{12}}{2}; & C^{1313} &= \frac{G_{13}}{2}; & C^{2323} &= \frac{G_{23}}{2}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

де

$$\Delta_* = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32},$$

тут E_1, E_2, E_3 – модулі пружності у відповідних напрямках; G_{ij} – модуль зсуву матеріалу; ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона, причому перший індекс указує напрям діючого напруження, а другий – напрям деформації, яка при цьому виникає.

Для опису процесів деформування в'язкопружних матеріалів використовується пружно-спадкова теорія, згідно з якою зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій має часовий характер [136]. Реологічну модель тіла може бути прийнято у класі диференціальних або інтегральних залежностей. Інтегральні рівняння встановлюють більш загальний зв'язок між напруженнями й деформаціями, ніж диференціальні, крім того, дозволяють враховувати всі особливості процесу деформування. Інтегральне рівняння стану записують на основі спадкової теорії Больцмана–Вольтерра: повна деформація тіла складається з миттєвої та спадкової деформації. Миттєву деформацію за законом Гука визначає напруження, що діє у даний момент часу. Спадкова деформація пропорційна напруженню, тривалості його дії від моменту прикладення навантаження до теперішнього моменту й зменшується протягом часу.

Основне рівняння стану в'язкопружного матеріалу можна представити у вигляді закону Гука, в якому пружні константи замінені інтегральними операторами:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.12)$$

тут \tilde{C}^{ijkl} – інтегральний оператор тензора пружних сталих:

$$\tilde{C}^{ijkl} \varphi = C^{ijkl} \varphi(t) - \int_0^t R^{ijkl}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (2.13)$$

де C^{ijkl} – тензор пружних сталих матеріалу, а R^{ijkl} – тензор ядер релаксації матеріалу.

Для опису повзучості композитів широко використовують експоненційне представлення ядер R^{ijkl} , тому, використовуючи (2.13), рівняння зв'язку між напруженнями і деформаціями можна записати у вигляді інтегрального виразу [137, 138]:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - (C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}) \int_0^t e^{-(t-\tau)} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (2.14)$$

де C_0^{ijkl} – миттєвий тензор пружних сталих композиційного матеріалу, C_∞^{ijkl} – тривалий тензор пружних сталих.

Застосування інтегрального оператора саме в такому вигляді є цілком доцільним, зважаючи на те, що миттєві і тривалі модулі пружності можуть бути знайдені експериментальним шляхом, а отже відомі для більшості матеріалів, які використовують як матеріал матриць композиційного матеріалу.

На відміну від (2.9) у (2.14) зв'язок між компонентами тензора деформацій і напружень має часовий характер. Таким чином, деформація тіла залежить не тільки від сили, що діє у даний момент часу, але й від усіх попередніх сил, вплив яких тим менший, чим більше часу пройшло з моменту їх прикладення (при цьому застосований принцип суперпозиції). Залежність від різниці аргументів $t - \tau$ вказує на незмінність властивостей матеріалів у часі. Враховуючи, що за початок відліку часу приймається момент прикладення навантаження, то нижня границя в інтегралі дорівнює нулю.

2.2 Дискретизація за часом у методі скінченних елементів

При практичному використанні традиційних схем МСЕ у формі методу переміщень, побудованих на базі варіаційного принципу Лагранжа для розв'язування специфічних задач механіки (врахування слабкої стисливості, розрахунок пластин і оболонок на базі тривимірних скінченних елементів і ін.), виникають суттєві труднощі, для подолання яких використовуються інші варіаційні принципи, тобто змішані схеми МСЕ. Маючи позитивні особливості, змішані моделі мають і низку недоліків, таких як збільшення порядку розв'язувальної системи рівнянь, порушення додатної визначеності матриці рівнянь. Тому для задач із зазначеними особливостями кращим є розвиток гібридних схем МСЕ у формі методу переміщень на базі варіаційного принципу Лагранжа.

Стандартна схема МСЕ у формі методу переміщень не враховує жорсткі зміщення скінченних елементів як абсолютного цілого, а також «ефект хибного зсуву», тому для усунення вказаних недоліків скористаємося моментною схемою скінченних елементів [127–129]. При виведенні основних співвідношень МСЕ будемо слідувати методиці, що викладена у роботах [37, 114, 128–130] та інших.

Розглянемо ізопараметричний скінченний елемент у вигляді шестигранного паралелепіпеду. Припустимо, що об'єм V , який займає елемент, відображений на куб зі стороною 2. Помістимо у центр куба, віднесеного до базисної системи координат z^i , початок місцевої системи координат x^1, x^2, x^3 , спрямовуючи вісі вздовж ребер (рис. 2.1).

Згідно з варіаційним принципом Лагранжа рівновага скінченного елемента визначена, якщо варіація повної потенціальної енергії приймає мінімальне значення, тобто:

$$\delta\tilde{\Pi} = \delta\tilde{W} - \delta A = 0, \quad (2.15)$$

де $\delta\tilde{W}$ – варіація енергії в'язкопружної деформації, δA – варіація роботи розподілених об'ємних і поверхневих сил.

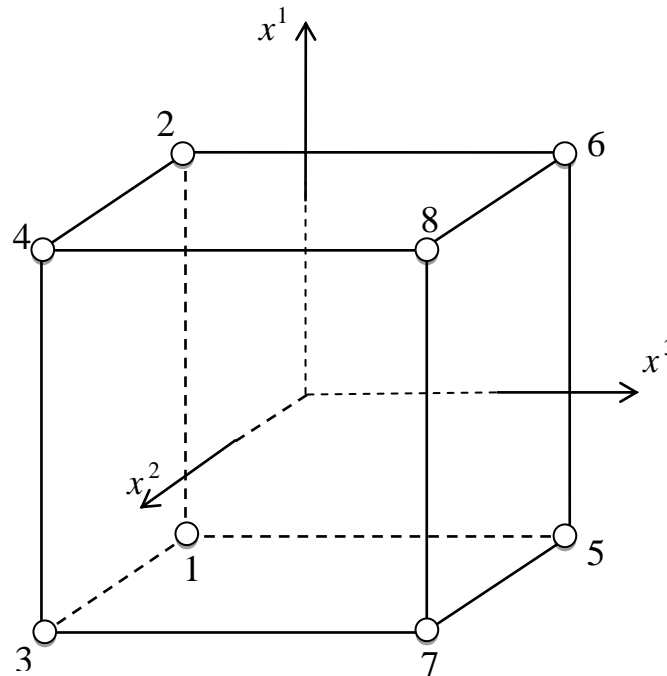


Рисунок 2.1 – Лінійний паралелепіпедний скінченний елемент

Варіацію енергії в'язкопружної деформації можна представити у вигляді:

$$\delta\tilde{W} = \iiint_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV, \quad (2.16)$$

де для опису в'язкопружних властивостей композиційного матеріалу скористалися спадковою теорією Больцмана-Вольтерра і тензор напружень взяли у вигляді інтегрального оператора із застосуванням миттєвих і тривалих пружних сталей (2.14).

Далі будемо слідувати моментній схемі скінченного елемента. Для побудови матриці жорсткості необхідно задати всередині скінченного елемента апроксимацію полів переміщень та компонентів тензора деформацій. Проведемо спочатку часову дискретизацію, розіб'ємо часовий проміжок вузловими значеннями t_i . Для отримання матриці жорсткості

скінченного елемента у момент часу t всередині кожного часового проміжку проведемо апроксимацію переміщень у вигляді [139]:

$$u_m(t) = u_m(t_{n-1})N_{n-1}(t) + u_m(t_n)N_n(t), \quad (2.17)$$

де $u_m(t_{n-1})$, $u_m(t_n)$ – вектори переміщень у вузлах t_{n-1} і t_n відповідно у просторовому напрямі m ; $N_{n-1}(t_{n-1})$ і $N_n(t_n)$ – базисні функції, що визначаються співвідношеннями:

$$N_{n-1}(t) = 1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad N_n(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}.$$

Тоді

$$u_m(t) = u_m(t_{n-1}) \left(1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) + u_m(t_n) \left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right). \quad (2.18)$$

Для визначення тензора деформацій скінченного елемента надамо переміщенням $u_m(t)$ наступного вигляду:

$$u_m(t) = \sum_{s=1}^8 u_m^s(t, x_1^s, x_2^s, x_3^s) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) = u_m^s(t) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3). \quad (2.19)$$

Тоді

$$\varepsilon_{kl}(t) = \frac{1}{2} \left(C_l^m \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_l} \right). \quad (2.20)$$

Звідси, враховуючи, що

$$\begin{aligned}
u_m(t) &= u_m^s(t_{n-1}) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) \cdot \left(1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\right) + u_m^s(t_n) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) \cdot \left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\right) = \\
&= \left(u_m^s(t_{n-1}) \cdot \left(1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\right) + u_m^s(t_n) \cdot \left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\right)\right) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) = \\
&= u_m^s(t) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3), \tag{2.21}
\end{aligned}$$

отримаємо

$$\varepsilon_{kl}(t) = \frac{1}{2} u_m^s(t) \cdot \left(C_l^m \frac{\partial N_s(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_l} \right). \tag{2.22}$$

Підставляючи (2.14) і (2.22) у (2.16), отримаємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{W} &= \iiint_V \left(C_0^{ijkl} \cdot \frac{1}{2} u_m^s(t) \cdot \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) - \right. \\
&- \left. \left(C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl} \right) \int_0^t e^{-(t-\tau)} \frac{1}{2} u_m^s(\tau) \cdot \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) d\tau \right) \times \\
&\times \delta \left(\frac{1}{2} u_m^s(t) \cdot \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) \right) dV. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Прийнявши такі позначення:

$$K = \frac{1}{4} \iiint_V C_0^{ijkl} \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) dV, \tag{2.24}$$

$$\Delta K = \frac{1}{4} \iiint_V \left(C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl} \right) \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) dV, \tag{2.25}$$

отримаємо

$$\delta\tilde{W} = \left(Ku_m^s(t) - \int_0^t \Delta Ku_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \right) \delta u_m^s(t), \quad (2.26)$$

де K і ΔK – шукані матриці жорсткості скінченного елемента. Таким чином бачимо, що варіація енергії в'язкопружної деформації складається з пружної і спадкової складових.

2.3 Побудова матриці жорсткості скінченного елемента для в'язкопружного волокнистого композиту.

Розглянемо пружну складову. Для визначення матриці жорсткості проведемо просторову апроксимацію. Варіацію енергії пружної деформації скінченного елемента запишемо у вигляді:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (2.27)$$

Враховуючи вираз (2.9), варіація енергії пружної деформації скінченного елемента відображається у вигляді:

$$\delta W = \iiint_V C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (2.28)$$

Просторова апроксимація полів переміщень відносно базисної системи координат буде мати вигляд лінійного закону:

$$u_{k'} = \sum_{pqr} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (2.29)$$

де $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу, $\psi^{(pqr)}$ – набір степеневих координатних функцій вигляду:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p}{p!} \frac{(x^2)^q}{q!} \frac{(x^3)^r}{r!},$$

де $p=0, 1, \dots, l$; $q=0, 1, \dots, m$; $r=0, 1, \dots, n$ – степені апроксимуючого полінома за відповідними координатними напрямками.

Для координатних функцій виконується умова диференціювання:

$$\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \psi^{(pqr)} = \psi^{(p-\alpha, q-\beta, r-\gamma)}. \quad (2.30)$$

Таким чином, апроксимація переміщень по об'єму скінченного елемента буде представлена у вигляді:

$$\begin{aligned} u_{k'} = & \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \\ & + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(111)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

На основі формул (2.30) й (2.31) вирази для похідних мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_{k',1} = & \omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)}, \\ u_{k',2} = & \omega_{k'}^{(101)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)}, \\ u_{k',3} = & \omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Компоненти тензора деформацій апроксимуються шляхом розкладу компонентів ε_{ij} у ряд Маклорена в околі початку координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{(ij)} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)}, \quad (2.33)$$

де

$$\sum_{stg}^{(ij)} = \sum_{s=0}^{L_{ij}} \sum_{t=0}^{M_{ij}} \sum_{g=0}^{N_{ij}} ;$$

$$L_{ij} = \begin{cases} l, & i, j \neq 1 \\ l-1, & \end{cases}; \quad M_{ij} = \begin{cases} m, & i, j \neq 2 \\ m-1, & \end{cases}; \quad N_{ij} = \begin{cases} n, & i, j \neq 3 \\ n-1, & \end{cases},$$

причому у розкладі (2.33) залишаються тільки ті члени, які не змінюються при збільшенні порядку апроксимації переміщень.

Коефіцієнти розкладу $e_{ij}^{(stg)}$ обчислюються за формулами:

$$e_{11}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu+1q-\nu r-\eta)}^{k'} ;$$

$$e_{22}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q-\nu+1r-\eta)}^{k'} ;$$

$$e_{33}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} ; \quad (2.34)$$

$$e_{12}^{(pqr)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu+1q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu+1r-\eta)}^{k'} \right);$$

$$e_{13}^{(pqr)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu+1q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right);$$

$$e_{23}^{(pqr)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left(\omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu+1r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right);$$

тут

$$b_{(\mu\nu\eta)}^{k'} = \frac{\partial^{(\mu+\nu+\eta)} z^{k'}}{(\partial x^1)^\mu (\partial x^2)^\nu (\partial x^3)^\eta} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}. \quad (2.35)$$

Розписавши кожну з компонентів $e_{ij}^{(pqr)}$ згідно з (2.33)–(2.35), можна помітити, що не всі коефіцієнти $\omega_k^{(pqr)}$ входять у розклад для апроксимації переміщень (2.31) та їх похідних (2.32). Тому коефіцієнти розкладу $e_{ij}^{(pqr)}$, що містять такі $\omega_k^{(pqr)}$, повинні бути видалені з розкладу (2.33). У результаті компоненти тензора деформацій будуть відображені такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{11}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{11}^{(011)}\psi^{(011)}, \\ \varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{22}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{22}^{(101)}\psi^{(101)}, \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{33}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{33}^{(110)}\psi^{(110)}, \\ \varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)}\psi^{(001)}, \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)}\psi^{(010)}, \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)}\psi^{(100)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

У матричному вигляді вирази (2.33) і (2.34) можна подати як:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\}, \quad (2.37)$$

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\}, \quad (2.38)$$

де матриця $[F_{ij}^{k'}]$ будується за допомогою співвідношень (2.35) (додаток А).

Підставляючи співвідношення (2.37) у (2.28), отримаємо:

$$\delta W = \iiint_V \{\delta e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \{e_{kl}\} dV = \{\delta e_{ij}\}^T [H^{ijkl}] \{e_{kl}\}, \quad (2.39)$$

з урахуванням (2.38):

$$\delta W = \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] \{\omega_{t'}\}, \quad (2.40)$$

тут

$$[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{kl}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (2.41)$$

$[C^{ijkl}]$ – матриця пружних сталих, що характеризує фізичні властивості анізотропного матеріалу з урахуванням метрики простору, елементами якого є компоненти метричного тензора \hat{g} .

Елементи матриці $[H^{ijkl}]$ з урахуванням співвідношень (2.11) мають вигляд [128]:

$$\begin{aligned} [H^{1111}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{11}\}^T \left[\frac{E_1}{\Delta_*} (1 - \nu_{23}\nu_{32}) \right] \{\psi_{11}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\ [H^{1122}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{22}\}^T \left[\frac{E_2}{\Delta_*} (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{32}) \right] \{\psi_{11}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\ [H^{1133}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{33}\}^T \left[\frac{E_3}{\Delta_*} (\nu_{21}\nu_{32} + \nu_{31}) \right] \{\psi_{11}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\ [H^{2211}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{11}\}^T \left[\frac{E_1}{\Delta_*} (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \right] \{\psi_{22}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\ [H^{2222}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{22}\}^T \left[\frac{E_2}{\Delta_*} (1 - \nu_{13}\nu_{31}) \right] \{\psi_{22}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\ [H^{2233}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{33}\}^T \left[\frac{E_3}{\Delta_*} (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}) \right] \{\psi_{22}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
[H^{3311}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{11}\}^T \left[\frac{E_1}{\Delta_*} (\nu_{12}\nu_{32} + \nu_{13}) \right] \{\psi_{33}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\
[H^{3322}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{22}\}^T \left[\frac{E_2}{\Delta_*} (\nu_{32} + \nu_{13}\nu_{21}) \right] \{\psi_{33}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\
[H^{3333}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{33}\}^T \left[\frac{E_3}{\Delta_*} (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \right] \{\psi_{33}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\
[H^{1212}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{12}\}^T \left[\frac{G_{12}}{2} \right] \{\psi_{12}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\
[H^{1313}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{13}\}^T \left[\frac{G_{13}}{2} \right] \{\psi_{13}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \\
[H^{2323}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{23}\}^T \left[\frac{G_{23}}{2} \right] \{\psi_{23}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.
\end{aligned}$$

Для побудови матриці жорсткості композиційного матеріалу у виразі (2.40) необхідно перейти від коефіцієнтів розкладу $\{\omega_k\}$ виразу (2.29) до коефіцієнтів розкладу для переміщень через інтерполяційні поліноми Лагранжа вигляду [128]:

$$u_i = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^L u_i^{(pqr)} \varphi^{(pqr)} = u_i^{(pqr)} N_{(pqr)}, \quad (2.43)$$

де $N_{(pqr)}$ – функції форми, $u_i^{(pqr)}$ – вузлові значення переміщень скінченного елемента, $\varphi^{(pqr)}$ – апроксимуюча функція, що задається за допомогою одномірних поліномів Лагранжа у вигляді:

$$\begin{aligned}
N_{(pqr)} &= \varphi^{(pqr)} = R_{1(p)}^M R_{2(q)}^N R_{3(r)}^L, \\
R_{i(j)}^k &= \frac{\prod_{m=1}^k (x^i - x_{(m)}^i)}{(x^i - x_{(m)}^i) \prod_{r=1}^k (x_{(j)}^i - x_{(m)}^i + \delta_{(m)}^{(j)})},
\end{aligned}$$

M, N, L – максимальні степені апроксимуючих поліномів у (2.43) відносно осей координат x^1, x^2, x^3 відповідно.

Зіставляючи (2.29) і (2.43), записані у матричному вигляді:

$$u_{k'} = \{\omega_{k'}\}^T \{\psi\}, \quad (2.44)$$

$$u_i = \{u_i\}^T \{N\}, \quad (2.45)$$

помічаємо, що зв'язок між інтерполяційними поліномами Лагранжа і степеневими функціями розкладу (2.29) має вигляд:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]\{u_{k'}\}, \quad (2.46)$$

або

$$\{N\} = [A]^T \{\psi\}, \quad (2.47)$$

де $[A]$ – матриця перетворення.

Для побудови матриці перетворення $[A]$ запишемо функції форми для вузлів скінченного елемента N_i :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 - x_1x_2x_3, \\ N_2 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3 + x_1x_2x_3, \\ N_3 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 + x_1x_2x_3, \\ N_4 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3 - x_1x_2x_3, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
N_5 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3 + x_1x_2x_3, \\
N_6 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 - x_1x_2x_3, \\
N_7 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3 - x_1x_2x_3, \\
N_8 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 + x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

Тоді матриця $[A]$ буде мати вигляд:

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 4 & 4 & -4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ -8 & 8 & 8 & -8 & 8 & -8 & -8 & 8 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Для подальшого відшукування матриці жорсткості підставимо (2.46) у (2.40) і отримаємо:

$$\delta W = \delta\{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl} [F_{kl}^{t'}] [A]] \{u_{t'}\} = \delta\{u_{s'}\}^T [K^{s't'}] \{u_{t'}\}, \quad (2.50)$$

де

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl} [F_{kl}^{t'}] [A]]$$

– шукана матриця жорсткості скінченного елемента для композиційного матеріалу. Розмірність матриці жорсткості: 24×24 .

Матриця ΔK отримана за аналогічним алгоритмом з використанням тривалих пружних сталей.

2.4 Виведення системи розв'язувальних рівнянь

Підставивши у варіаційний принцип Лагранжа (2.15) отриманий вираз (2.26) і прийнявши варіацію роботи поверхневих сил у вигляді:

$$\delta A = \iint_S P_m \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) \cdot \delta u_m^s(t) dS, \quad (2.51)$$

і позначивши

$$P = \iint_S P_m \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) dS, \quad (2.52)$$

отримуємо систему розв'язувальних рівнянь вигляду:

$$Ku_m^s(t) - \int_0^t \Delta Ku_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = P. \quad (2.53)$$

Розіб'ємо період часу від 0 до t на $n-1$ часовий інтервал, тоді рівняння (2.53) можна записати у вигляді:

$$Ku_m^s(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Ku_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = P. \quad (2.54)$$

Прийmemo розбиття на часові інтервали таким, щоб воно співпадало з розбиттям на часові скінченні елементи. Нехай t належить $n-1$ -му скінченному елементу, тобто $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ (а саме, прийmemo $t = t_n$), тоді переміщення апроксимуються функцією (2.17):

$$K \left(u_m^s(t_{n-1}) \left(1 - \frac{t_n - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) + u_m^s(t_n) \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta K \left(u_m^s(t_i) \left(1 - \frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) + u_m^s(t_{i+1}) \left(\frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) e^{-(t_n - \tau)} d\tau = P \quad (2.55)$$

або

$$Ku_m^s(t_n) - \Delta K \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(u_m^s(t_i) \left(\frac{t_{i+1} - \tau}{t_{i+1} - t_i} \right) + u_m^s(t_{i+1}) \left(\frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) e^{-(t_n - \tau)} d\tau = P. \quad (2.56)$$

Після математичних перетворень отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\tilde{K}u_m^s(t_n) = P + \sum_{i=1}^{n-2} Q_i + \tilde{Q}_{n-1}, \quad (2.57)$$

де P – вектор зовнішніх навантажень.

Тоді маємо

$$\tilde{K} = K - \Delta K \left(1 - \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left(1 - e^{t_{n-1} - t_n} \right) \right) \quad (2.58)$$

– матриця жорсткості в'язкопружного матеріалу в момент часу t ,

$$Q_i = \Delta K \left(u_m^s(t_i) \left(\frac{1}{t_{i+1} - t_i} (e^{t_{i+1} - t_n} - e^{t_{n-1} - t_n}) - e^{t_i - t_n} \right) + \right. \quad (2.59)$$

$$\left. + u_m^s(t_{i+1}) \left(e^{t_{i+1} - t_n} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i} (e^{t_{i+1} - t_n} - e^{t_i - t_n}) \right) \right)$$

– вектор додаткового навантаження, що обумовлений впливом i -го часового скінченного елемента,

$$\tilde{Q}_{n-1} = \Delta K u_m^s(t_{n-1}) \left(\frac{1}{t_n - t_{n-1}} (1 - e^{t_{n-1} - t_n}) - e^{t_{n-1} - t_n} \right) \quad (2.60)$$

– вектор додаткового навантаження, що обумовлений впливом $n-1$ -го часового скінченного елемента.

Одним із способів верифікації отриманих співвідношень для матриці жорсткості скінченного елемента та чисельних підходів розв’язання задачі в’язкопружності є дослідження чисельної збіжності результатів розрахунку. Для цього при різних сітках розбиття на скінченні елементи було розв’язано задачу визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндру, затисненого по зовнішній поверхні, під дією внутрішнього тиску. Для перевірки правильності роботи чисельного підходу розв’язання задачі в’язкопружності було розв’язано задачу для однорідного матеріалу. Внутрішній радіус порожнистого циліндра $a = 0,1$ м, зовнішній радіус порожнистого циліндра $b = 0,15$ м, внутрішній тиск $q = 5$ МПа. Матеріал – гума марки 2959, з механічними характеристиками [140]: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,49$; миттєвий модуль зсуву $G_0 = 1,76$ МПа; тривалий модуль зсуву $G_\infty = 0,74$ МПа; параметри ядра Ю. М. Работнова – $\alpha = -0,6$; $\beta = 1,06$; $\gamma = 0,58$.

Задачу в'язкопружності було розв'язано за допомогою вищеописаного підходу з використанням миттєвих та тривалих механічних характеристик та ітераційного підходу, описаному у монографії [128], з використанням ядра Ю. М. Работнова. Спочатку було досягнуто прийнятну збіжність чисельних результатів при згущенні сітки за просторовими напрямками: подальше згущення сітки $10 \times 21 \times 3$ приводило до зміни результатів менше ніж на 1%. Далі змінювалась дискретизація за часом, найбільша різниця між розв'язками за двома підходами спостерігалась при малих значеннях часу (1–7 с) і досягала 5%. Це пояснюється тим, що крива деформування точніше описується за допомогою ядра Ю. М. Работнова, ніж за експоненціальним законом. При великих значеннях часу (більше 7 с), результати різнилися менше ніж на 1,5%.

Для перевірки роботи розробленого підходу для композиційного матеріалу було розв'язано аналогічну задачу, але для гуми, армованої волокнами. Як матеріал волокна використано поліамідний корд 23КНТС з механічними характеристиками $E_C = 1277,5$ МПа; $\nu_C = 0,3$ [141]. Армування прийнято осьовим та окружним. Об'ємний вміст волокна складав 0,1; 0,2 та 0,3. Досягнуто прийнятну чисельну збіжність результатів за часом: при збільшенні кількості дискретних вузлів за часом більш, ніж 10, чисельні результати (переміщення) не збільшувалися більше, ніж на 1%.

2.5 Висновки до розділу 2

На основі спадкової теорії Больцмана-Вольтерра з використанням миттєвих та тривалих характеристик компонентів композиційного матеріалу розроблено чисельний підхід розв'язання задачі в'язкопружності для композиційного матеріалу. Отримано основні співвідношення для складових

матриці жорсткості просторово-часового скінченного елемента, що використовуються в отриманих рівняннях. З метою поліпшення результатів розрахунку для визначення складових матриці жорсткості просторово-часового скінченного елемента застосовано моментну схему скінченного елемента.

РОЗДІЛ 3

**ОПИС ПАКЕТУ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ ЧИСЕЛЬНОГО
ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТУ В УМОВАХ В'ЯЗКОПРУЖНОГО
ДЕФОРМУВАННЯ**

3.1 Алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану композиту

Задачі в'язкопружності зазвичай зводяться до послідовності лінійних задач за допомогою так званих крокових ітераційних алгоритмів. Скористаємося одним із таких методів – модифікованим методом Ньютона-Канторовича. При розв'язуванні непружних задач у поєднанні з модифікованим методом Ньютона-Канторовича використовують метод інтегрування за параметром навантаження або параметром переміщення характерних точок конструкції з перевіркою рівнянь рівноваги.

Розглянемо роботу покрокового алгоритму розв'язання задачі в'язкопружності.

1. На m -ому кроці за часом за відомими значеннями вектора переміщень $\{u_i^{(m-1)}\}$, компонентів тензора напружень $\{\sigma_{ij}^{(m-1)}\}$, координат вузлів сітчастої області $\{x_i^{(m-1)}\}$ конструкції обчислюють матрицю жорсткості в'язкопружних компонентів матеріалу.

2. Задають значення навантаження P .

3. Для моменту часу $t_{(m)} = t_{(m-1)} + \Delta t_{(m)}$ обчислюють вектор додаткового навантаження $\{Q_{(m)}^{(kl)}\}$ як функцію $\{u_{(m)}^{(kl-1)}\}$ і $t_{(m)}$ за формулами (2.59) і (2.60).

При $kl=1$ за $\{u_{(m)}^{(0)}\}$ береться розподіл переміщень, що отриманий на попередній, $m-1$ -ій, ітерації. На першій ітерації за часом, коли $m=1$, за $\{u_{(m)}^{(0)}\}$ береться пружний розв'язок, якому відповідає $t_{(0)} = 0$ й $\{Q_{(0)}^{(0)}\} = 0$.

4. Аналізують значення вектора додаткового навантаження $\{Q_{(m)}^{(kl)}\}$.

Умова, за якої вважається, що вектор переміщень $\{u_{(m)}^{(kl-1)}\}$ задовольняє вихідним рівнянням із заданим ступенем точності ε , мають вигляд:

$$\left\{ Q_{(m)}^{*} \right\} < \left\{ P_{(n)}^{*} \right\} \varepsilon, \quad (3.1)$$

де $\left\{ Q_{(m)}^{*} \right\}$ – сума квадратів компонентів вектора додаткового навантаження.

Якщо умова (3.1) виконується, то алгоритм продовжує свою роботу з пункту 8. Якщо ця умова не виконується, то алгоритм переходить до виконання наступного пункту.

5. Вектор додаткового навантаження $\{Q_{(m)}^{(kl)}\}$ підставляють у праву частину лінеаризованої системи рівнянь (2.52).

6. Розв'язують систему лінеаризованих рівнянь і знаходять вектор переміщень $\{\Delta u_{(m)}^{(kl)}\}$. Потім цей вектор сумують:

$$\{u_{(m)}^{(kl)}\} = \{u_{(m)}^{(kl-1)}\} + \{\Delta u_{(m)}^{(kl)}\}. \quad (3.2)$$

7. Номеру ітерації надається значення $kl + 1$ і алгоритм повторює операції, починаючи з пункту 3.

8. На кожному кроці відбувається запам'ятовування й підсумовування спадкових складових напружень.

9. Перевіряють, чи досягло поточне значення часу максимального (заданого) значення:

$$t_{(m)} = t_{\max}. \quad (3.3)$$

Якщо умова (3.3) виконується, то алгоритм завершує свою роботу. Якщо ж умова (3.3) не виконується, то алгоритм переходить до виконання наступної операції.

10. Номеру кроку за часом надається значення $m + 1$. Алгоритм починає виконання операцій з пункту 1.

Блок-схему алгоритму приведено у додатку Б.

3.2 Структура пакету прикладних програм KMVIS програмного комплексу «МІРЕЛА+»

Пакет прикладних програм KMVIS реалізований на персональному комп'ютері. Він призначений для розрахунку напружено-деформованого стану композиційних матеріалів в умовах в'язкопружного деформування.

Пакет прикладних програм KMVIS є складовою частиною та розвитком програмного комплексу «МІРЕЛА+» [133], призначеного для розв'язування задач будівельної механіки, механіки руйнування й механіки деформівного твердого тіла та складається з декількох підсистем, відповідальних за ту чи іншу сферу досліджень. Структура обчислювального комплексу «МІРЕЛА+» показана на рисунку 3.1. Розрахунок конструкцій у програмному пакеті здійснюється у три послідовних етапи:

1) підготовка вихідних даних – опис фізико-механічних характеристик матеріалу, геометрії конструкції, силових граничних умов, скінченно-елементна дискретизація об'єкта тощо;

2) чисельний розрахунок скінченно-елементної моделі – обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості скінченних елементів, формування глобальної системи розв'язувальних рівнянь та її розв'язок;

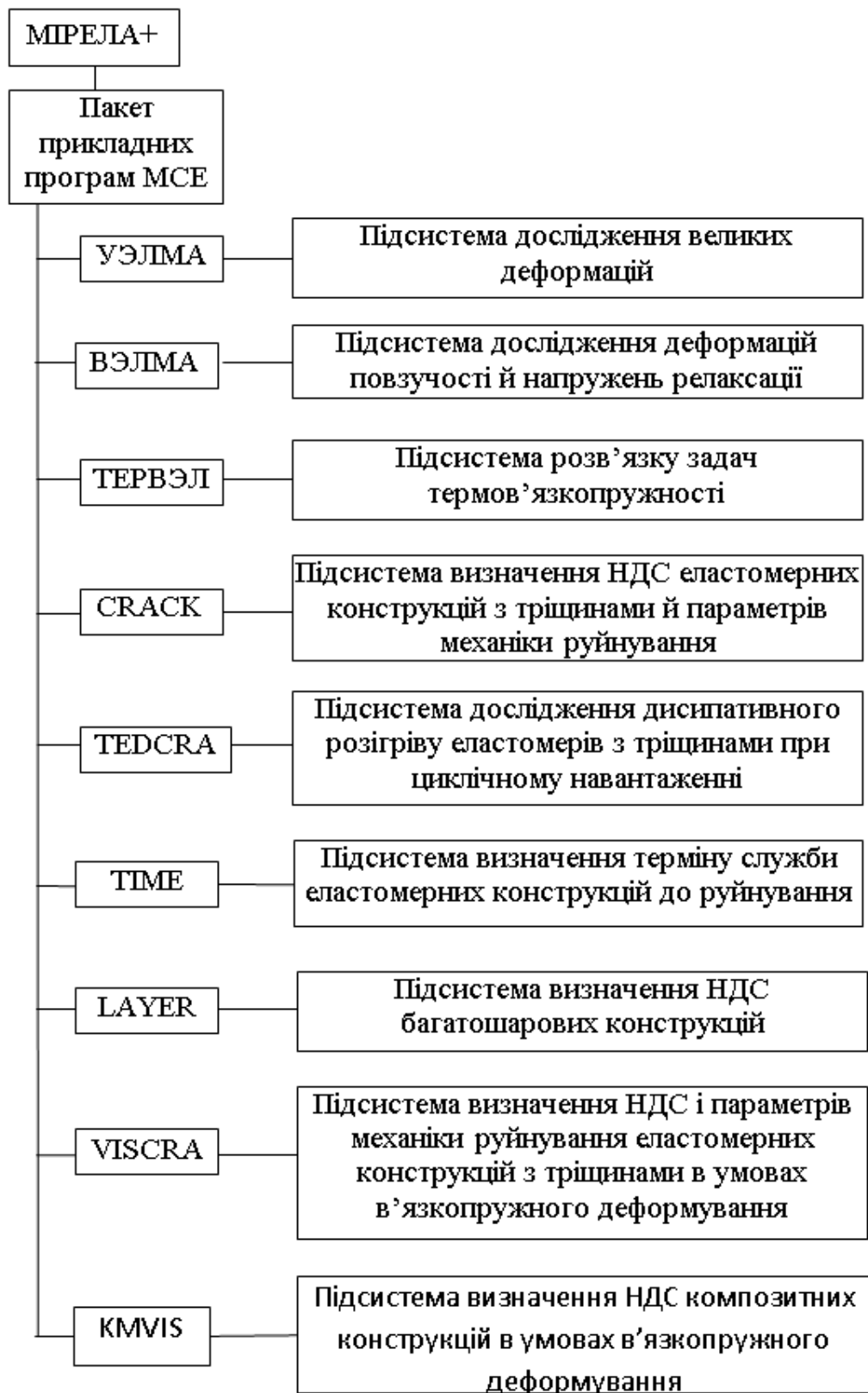


Рисунок 3.1 – Структура програмного комплексу «MIPELA+»

3) обробка результатів розв'язання – обчислення параметрів напружено-деформованого стану конструкції; їх візуальне представлення у вигляді таблиць, графіків, двовимірних або тривимірних зображень.

Наведена вище математична модель і алгоритм розв'язку реалізовані у вигляді окремих програм, кожна з яких виконує певні функціональні дії та які у процесі роботи взаємодіють між собою. Взаємодію програм підсистеми KMVIS із програмами обчислювального комплексу «МІРЕЛА+» під час розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій надано на рисунку 3.2. У додатку В приведено розшифрування кожної з програм.

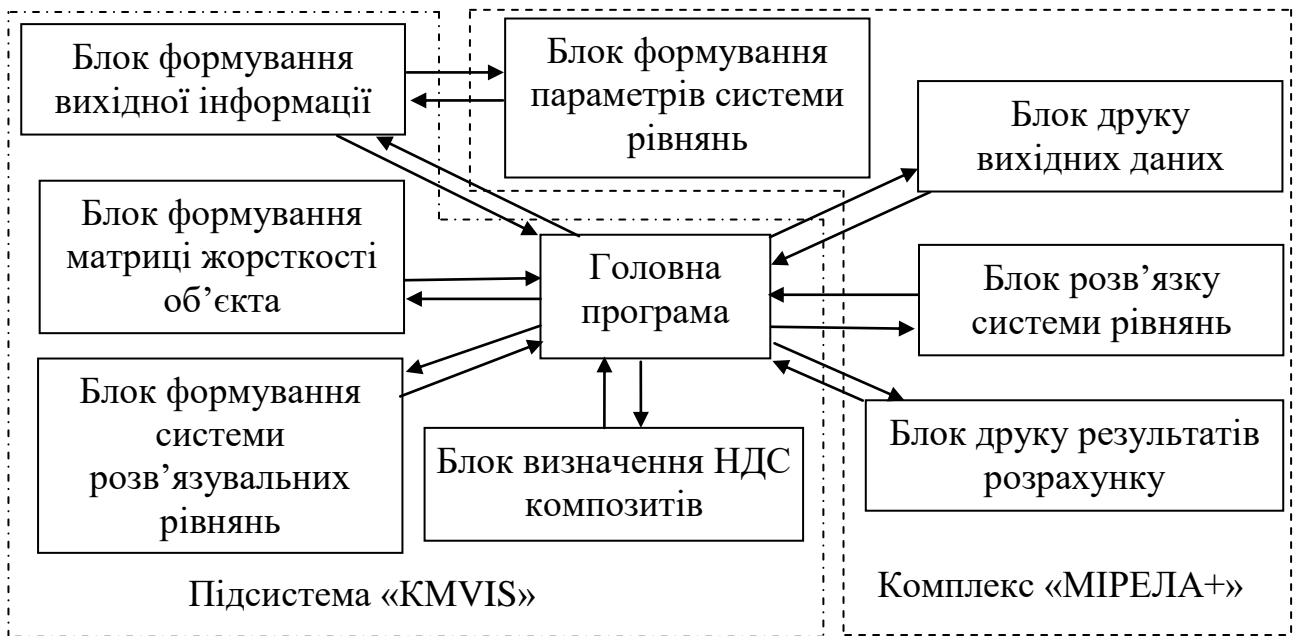


Рисунок 3.2 – Взаємодія програм підсистеми «KMVIS» з програмами комплексу «МІРЕЛА+»

3.3 Опис роботи пакету прикладних програм KMVIS

Щоб розрахувати конструкцію за допомогою пакету прикладних програм KMVIS, необхідно задати вхідну інформацію, яка включає у себе відомості про геометрію, силові впливи, топологію дискретної моделі,

граничні й початкові умови, фізико-механічні характеристики й реологічні параметри матеріалу, режими управління, обробки та видачі результатів розрахунку.

Геометрія конструкції описується у підпрограмах KORPLI, KORCIL, KORGIP у залежності від форми конструкції, для цього вводиться базисна, як правило декартова, система координат. Задається сітка розбиття $M1 \times M2 \times M3 \times M4$, де $M1$ – кількість розбиттів за віссю x_1 , $M2$ – кількість розбиттів за віссю x_2 , $M3$ – кількість розбиттів за віссю x_3 , $M4$ – кількість розбиттів за часом. Сітка скінченних елементів наноситься у залежності від силових дій, геометрії конструкції та часу течії процесу деформації. При цьому необхідно слідкувати, щоб відношення лінійних розмірів скінченного елемента не перебільшувало 10, і число розбиттів за напрямом x_1 було мінімальним, що дозволяє зменшити машинний час розрахунку. Геометрія конструкції задається у вигляді масиву координат вузлових точок $X(NUX,3)$, де NUX – зарезервований розмір масиву.

Інформація про наявні вирізи та отвори задається за допомогою підпрограми TELOS:

CALL TELOS(N1, N2, N3, K1, K2, K3, NF),

де $N1, N2, N3$ – початкові номери вузлів області, а $K1, K2, K3$ – кінцеві номери, NF – масив ознак:

$NF = 7$ – для вузлів, у яких немає скінченного елемента;

$NF = 71$ – для вузлів, у яких є скінченний елемент.

Належність скінченного елемента до вузла визначається додатнім напрямом осей місцевої системи координат.

Масив вузлових навантажень $Q(NUX,3)$ формується у підпрограмі HAGPO3:

CALL HAGPO3(N1, N2, N3, K1, K2, K3, KG, NUX, NF, X, Q),

де $N1, N2, N3$ – початкові номери вузлів області прикладання поверхневого навантаження, $K1, K2, K3$ – кінцеві номери вузлів області прикладання

поверхневого навантаження, KG – номер грані дії навантаження (KG приймає значення від 1 до 6).

Межові умови формуються у підпрограмі ZAKREP у вигляді заборони на переміщення за тим чи іншим напрямом осей:

CALL ZAKREP(N1, N2, N3, K1, K2, K3, F, NF),

де $N1, N2, N3$ – початкові номери вузлів області заборони переміщень, $K1, K2, K3$ – кінцеві номери вузлів області заборони переміщень, F – параметр, який визначає тип межової умови:

$NF = 1$ – заборона переміщень вздовж осі x_1 ;

$NF = 2$ – заборона переміщень вздовж осі x_2 ;

$NF = 3$ – заборона переміщень вздовж осей x_1 і x_2 ;

$NF = 4$ – заборона переміщень вздовж осі x_3 ;

$NF = 5$ – заборона переміщень вздовж осей x_1 і x_3 ;

$NF = 6$ – заборона переміщень вздовж осей x_2 і x_3 ;

$NF = 7$ – повне закріплення.

У підпрограмі даних DARMIR задаються пружні сталі матеріалу конструкції: $E_C, E_{R0}, E_{R\infty}$ – модулі пружності й ν_C, ν_R – коефіцієнти Пуассона для матеріалів волокна й матриці. Друк вихідних даних у вигляді полів координат X , ознак NF , вузлових навантажень Q і температур T виконується за допомогою підпрограми DANPRI.

Після формування вихідних даних здійснюється побудова й розв'язок системи розв'язувальних рівнянь метода скінченних елементів. Побудова глобальної матриці жорсткості конструкції здійснюється за допомогою підпрограми FOMAKR, обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості здійснюється у підпрограмі AKOFM3, розв'язок системи розв'язувальних рівнянь здійснюється блочним методом Гауса за допомогою підпрограм GASAL і GALOA, в яких виконується приведення матриці до трикутного вигляду і отримання розв'язку зворотним ходом.

Обчислення вектора вузлових нев'язок і вектора додаткового навантаження при розв'язанні задачі в'язкопружності здійснюється підпрограмою NAGR3. За знайденими вузловими переміщеннями у підпрограмі SIGKE32 обчислюються компоненти тензора в'язкопружних напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ у центрі скінченного елемента. Підпрограма PRINKE призначена для друку знайдених вузлових переміщень і компонентів тензора напружень у центрах скінченних елементів.

3.4 Висновки до розділу 3

Описано створений пакет прикладних програм KMVIS, який дозволяє визначати напружено-деформований стан конструкцій із композиційних матеріалів в умовах в'язкопружного деформування, його взаємодію з іншими блоками програмного комплексу «MIRELA+». Детально описано основні програми для вводу основної вихідної інформації для розв'язання в'язкопружної задачі механіки композитів. Наведено покроковий алгоритм для програмної реалізації розв'язання задачі в'язкопружності за допомогою просторово-часових скінченних елементів та підходу, розробленого у розділі 2.

РОЗДІЛ 4

**ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО
СТАНУ КОМПОЗИТНИХ КОНСТРУКЦІЙ В УМОВАХ
В'ЯЗКОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ**

4.1 В'язкопружні деформації у затисненій двошаровій гумокордній пластині

Квадратна пластина, затиснена з одного краю й навантажена розподіленою силою з іншого, має два шари з перехрестною схемою армування (рис. 4.1) з кутом укладки волокон $\gamma^{(k)} = (-1)^{k-1} \gamma$. Кожний шар являє собою гумокордний композит, виготовлений з гуми 2959: $E_{R0} = 5,28$ МПа, $E_{R\infty} = 2,22$ МПа, $\nu_R = 0,49$ і поліамідного корда 23КНТС: $E_C = 1277,5$ МПа, $G_C = 490$ МПа. Діаметр волокон: $d_C = 0,07$ см, частота армування: $i_C = 2900$ ниток/м, товщина кожного шару: $h_0 = 0,8$ см (коефіцієнт армування $\psi_C = 0,14$). Геометричні розміри: $a \times b = 0,1 \times 0,1$ м. Інтенсивність розтяжного навантаження: $q = 1,5$ МПа. Результати представлені для сітки розбиття на скінченні елементи: $9 \times 9 \times 8$.

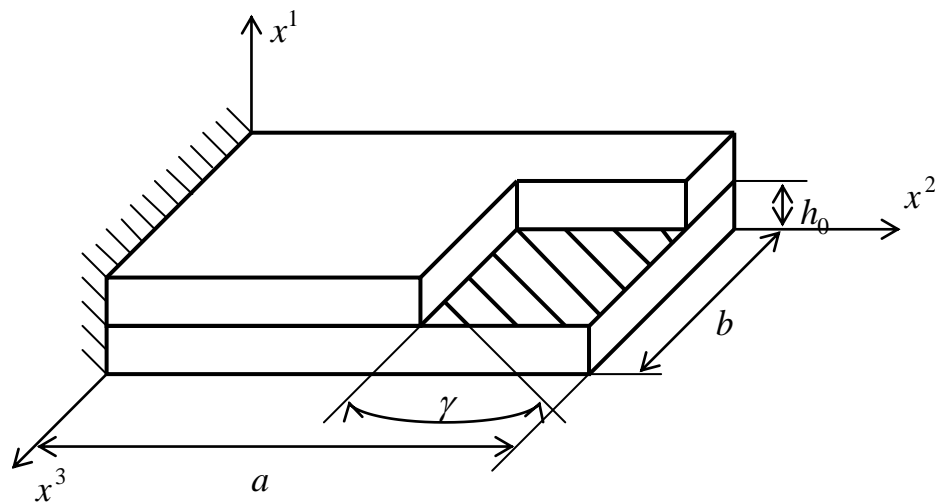


Рисунок 4.1 – Затиснена двошарова гумокордна пластина

На рисунку 4.2 показано максимальні переміщення точки, яка лежить на серединній поверхні вільного краю пластини.

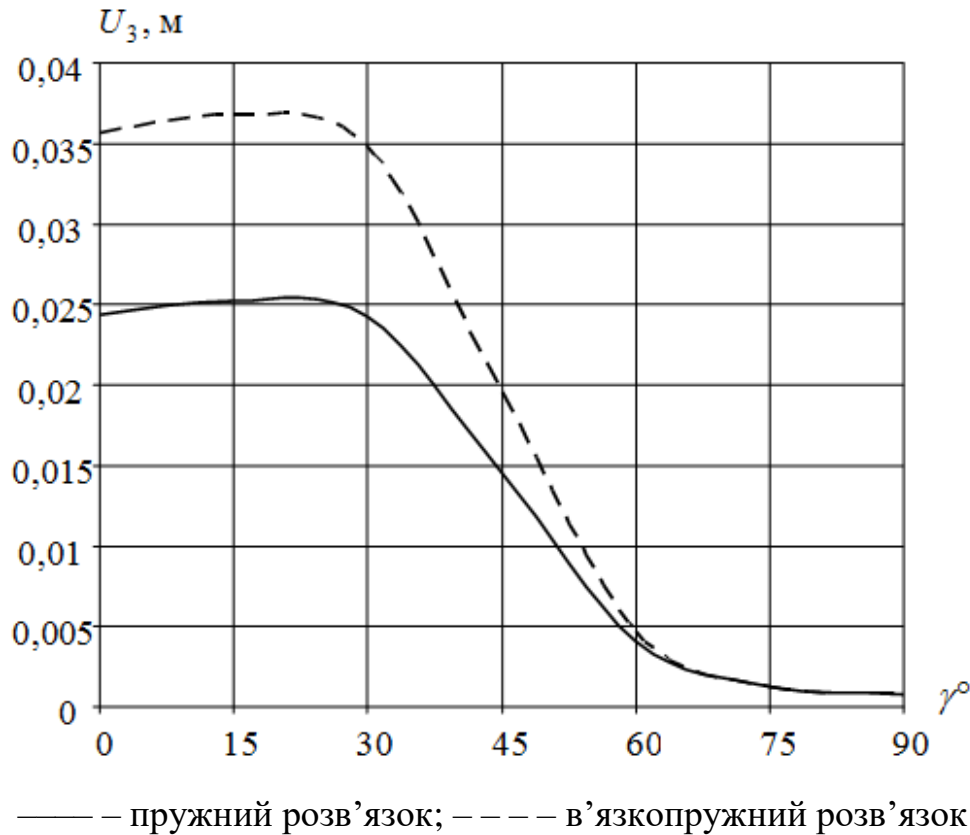


Рисунок 4.2 – Залежність переміщень вільного краю пластини під дією розтяжних навантажень від кута укладки волокон

Розподіл нормальних напружень σ_{33} за товщиною пластини представлено на рисунку 4.3. Як показує аналіз чисельного дослідження напружено-деформованого стану, збільшення переміщень через в'язкопружність досягає 46,6 % для значення кута армування $\gamma = 0^\circ$. Зі збільшенням кута армування ця різниця зменшується та фактично зникає при куті $\gamma = 90^\circ$, коли навантаження фактично сприймають пружні волокна. Тобто, зі збільшенням значень кута армування зростає жорсткість конструкції. Можна спостерігати кількісну різницю розподілу напружень за геометрією конструкції на затисненому й на вільному краях. Пружний розв'язок задачі було порівняно з пружним розв'язком аналогічної задачі у [128], різниця значень складає до 0,5%.

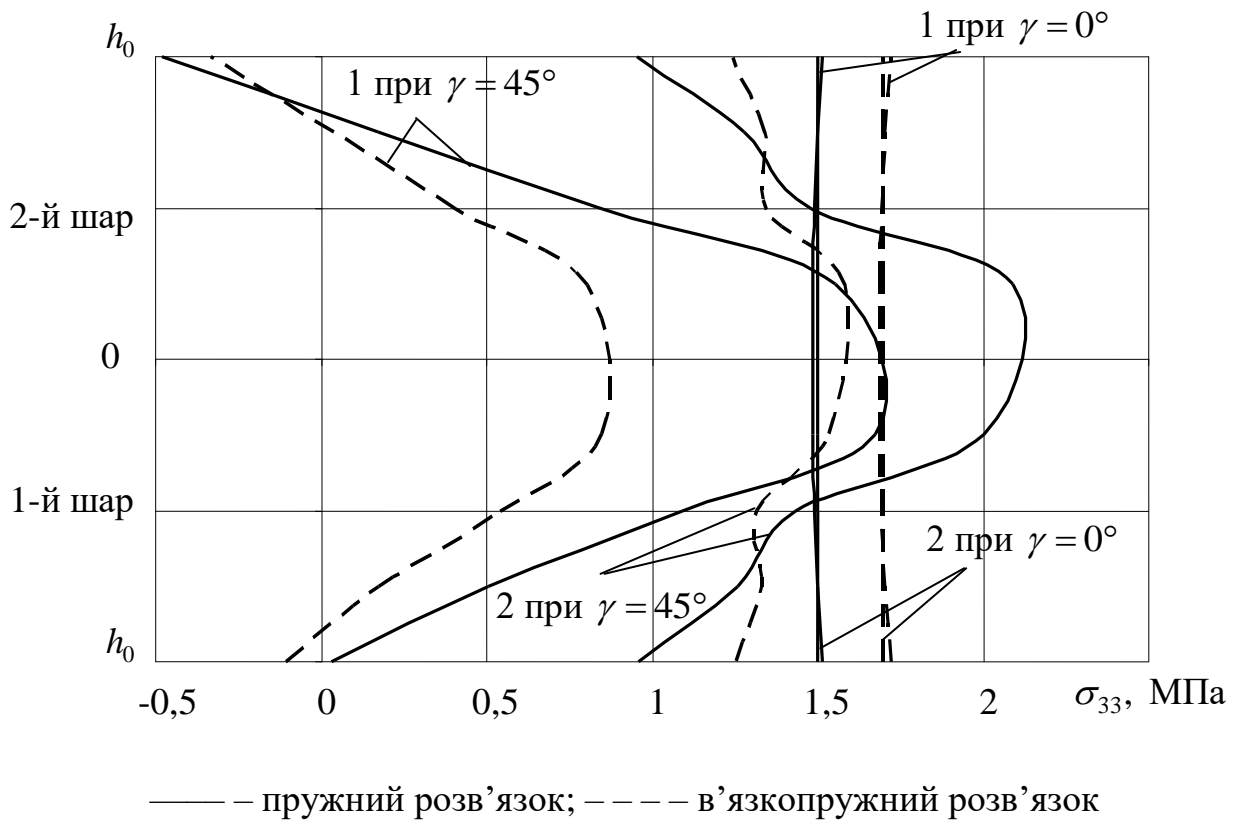


Рисунок 4.3 – Розподіл нормальних навантажень σ_{33} за товщиною пластини:

1 – на затисненому краї, 2 – на вільному краї

4.2 Дослідження напружено-деформованого стану круглої пластини

Кругла пластина виготовлена з гуми 2959 (фізичні величини: $E_{R0} = 5,28$ МПа, $E_{R\infty} = 2,22$ МПа, $\nu_R = 0,49$) і поліамідного корда 23КНТС (фізичні величини: $E_C = 1277,5$ МПа, $G_C = 490$ МПа). Діаметр волокон: $d_C = 0,07$ см, частота армування: $i_C = 11$ ниток/см (коефіцієнт армування $\psi_C = 0,004$).

Радіус пластини: $R = 1,0$ м, відносна товщина: $h/R = 0,1$. Пластина вільно оперта вздовж контуру і перебуває під дією рівномірно розподіленого

поверхневого навантаження (рис. 4.4). Інтенсивність навантаження: $q = 10^4$ Па. Розрахунок було проведено на сітці розбиття: $10 \times 16 \times 3$.

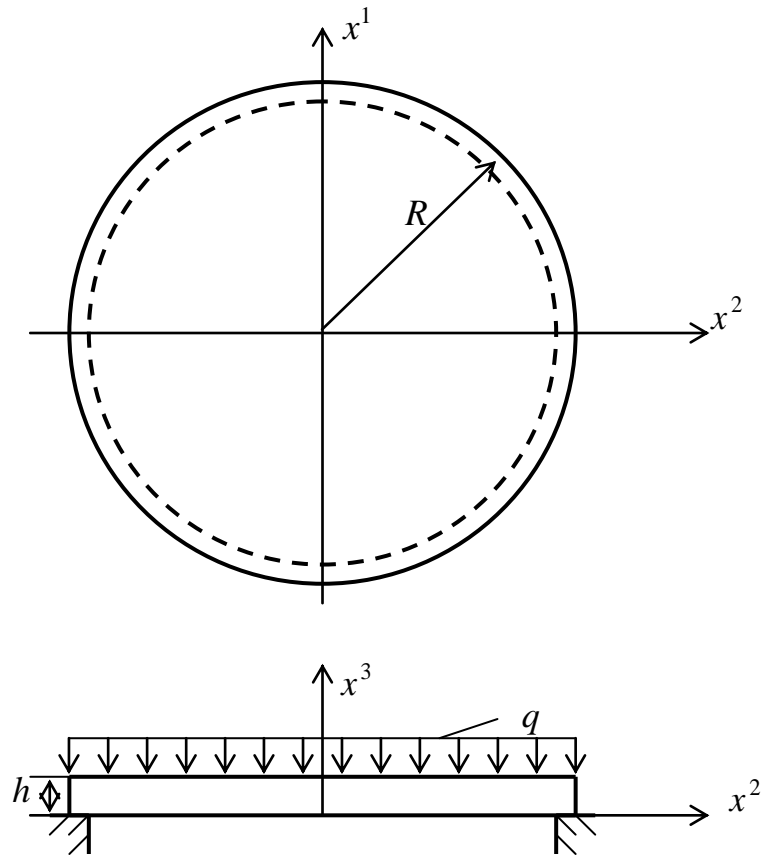
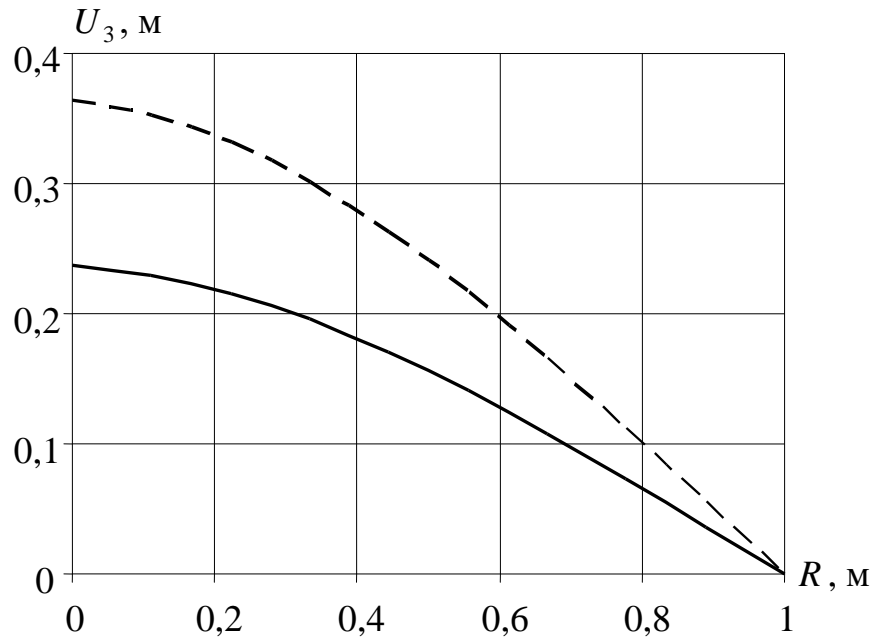


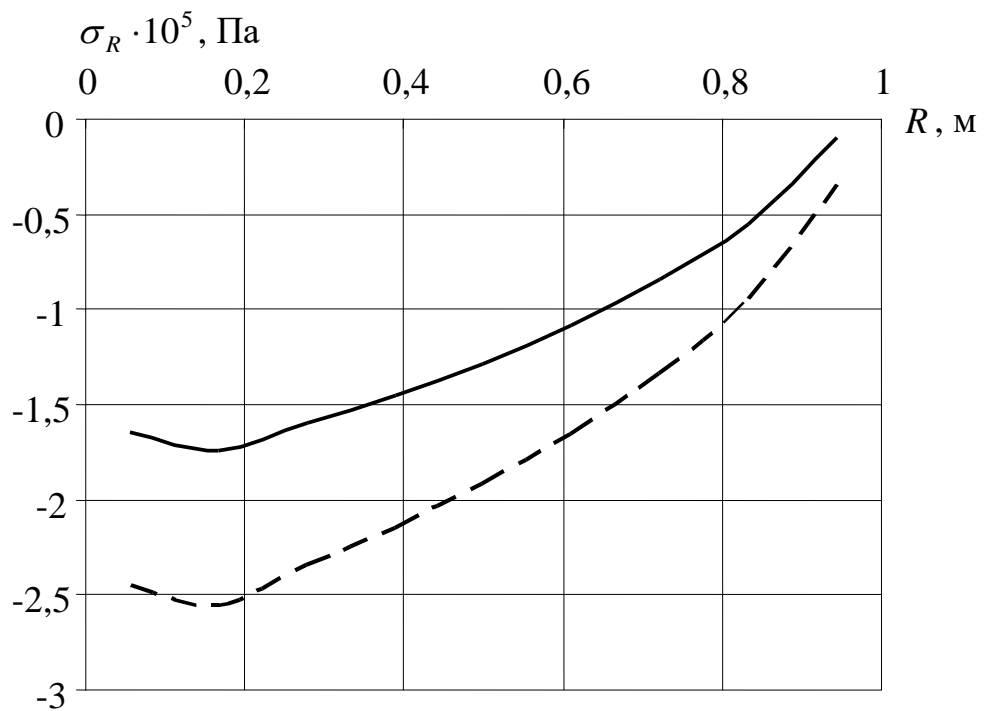
Рисунок 4.4 – Суцільна вільно оперта вздовж контуру кругла пластина під дією рівномірно розподіленого навантаження

На рисунку 4.5 показано величину прогину пластини у радіальному напрямку. В'язкопружний розв'язок значно відрізняється від пружного за рахунок повзучості матеріалу і ця різниця досягає максимальних значень (до 50%) у центрі пластини. Величини радіальних напружень за рахунок релаксації теж мають значні відмінності у в'язкопружному випадку у порівнянні з пружним (рис. 4.6), і досягають різниці до 53%.



— пружний розв'язок; - - - в'язкопружний розв'язок

Рисунок 4.5 – Величина прогину в залежності від радіуса пластини



— пружний розв'язок; - - - в'язкопружний розв'язок

Рисунок 4.6 – Розподіл радіальних навантажень вздовж радіуса пластини

4.3 Гумокордна труба під дією внутрішнього тиску

Труби з гумокордного матеріалу досить часто використовуються як з'єднувальні трубки та шланги для подачі різних рідин та газів. Розглянемо трубу, затиснену вздовж зовнішньої поверхні, яка перебуває під внутрішнім тиском (рис. 4.7). Фізичні величини матеріалу: $E_C = 1277,5$ МПа (поліамідний корд 23КНТС), $E_{R0} = 5,28$ МПа, $E_{R\infty} = 2,22$ МПа, $\nu_R = 0,49$ (гума 2959). Діаметр волокон: $d_C = 0,07$ см, частота армування: $i_C = 11$ ниток/см (коефіцієнт армування $\psi_C = 0,008$). Геометричні розміри оболонки: $R = 0,1$ м, $L = 1$ м, $h = 0,05$ м. Інтенсивність внутрішнього тиску: $q = 0,2$ МПа. Сітка розбиття на скінченні елементи: $5 \times 16 \times 8$.

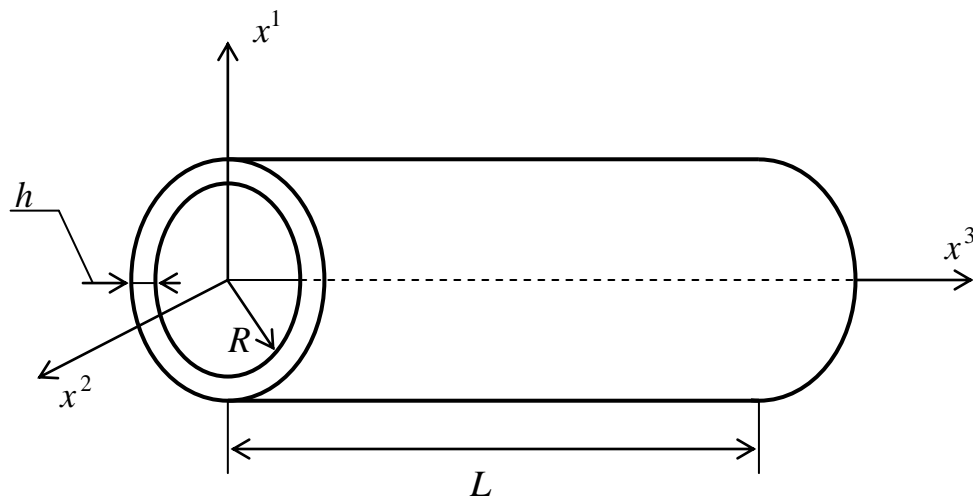


Рисунок 4.7 – Труба, навантажена внутрішнім тиском

На рисунках 4.8–4.10 зображено розподіл переміщень, а також розподіли нормальних і тангенціальних напружень у товщині труби через 1 с після моменту навантаження. Для переміщень різниця між пружним і в'язкопружним розв'язками складає до 54%, максимально збільшуючись на внутрішній поверхні труби.

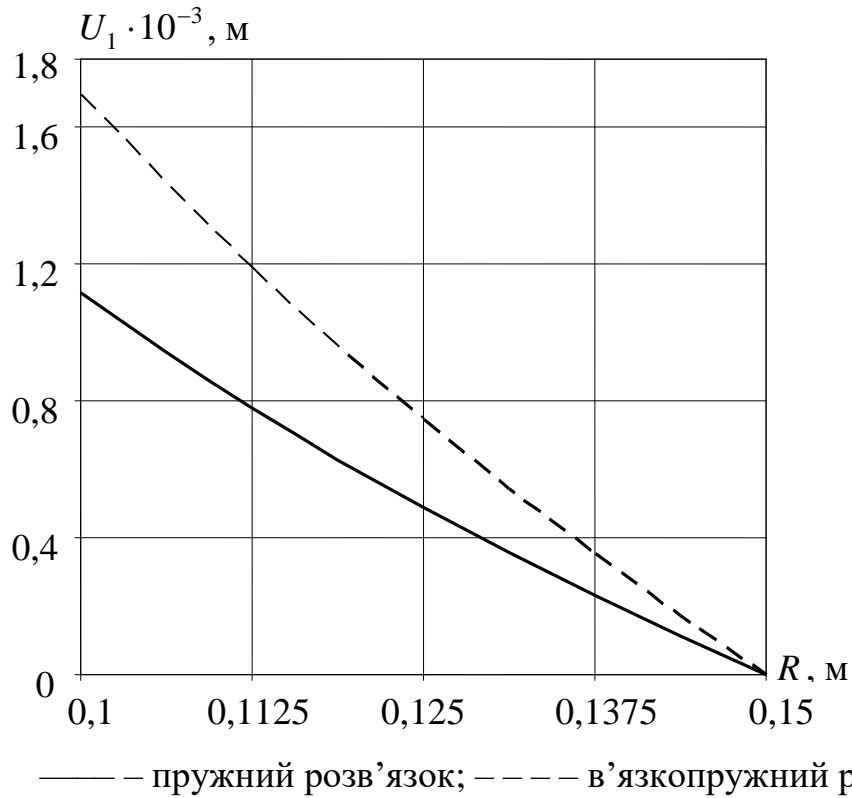


Рисунок 4.8 – Розподіл переміщень по товщині труби у момент часу $t=1$ с

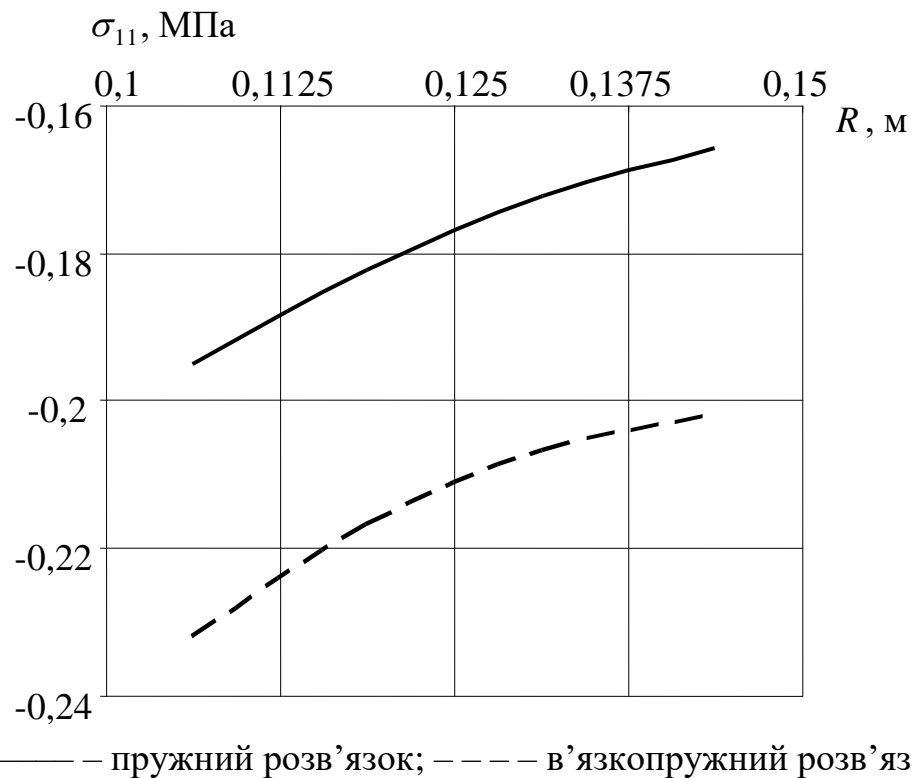


Рисунок 4.9 – Розподіл напружень σ_{11} по товщині труби у момент часу $t=1$ с

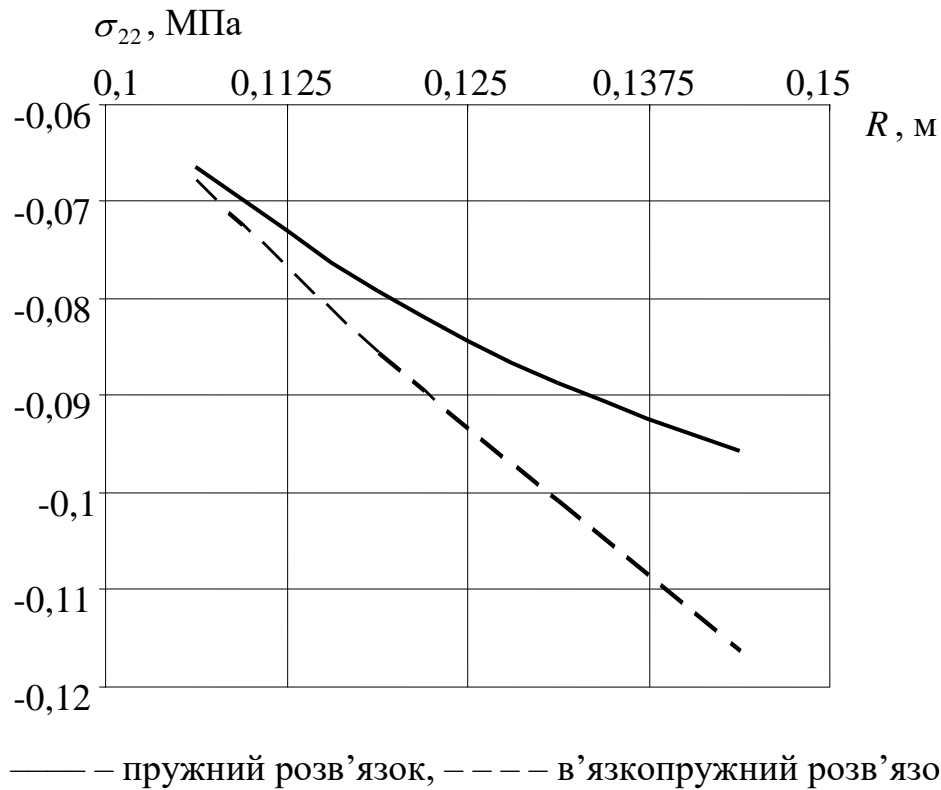


Рисунок 4.10 – Розподіл напружень σ_{22} по товщині труби у момент часу $t=1$ с

Для напружень різниця між пружним і в'язкопружним розв'язками складає до 20 %, причому для нормальних напружень вона близька до сталої по всій товщині труби, а для тангенціальних напружень – збільшується у напрямку зовнішньої поверхні труби, а на внутрішній поверхні значення тангенціальних напружень у в'язкопружному й пружному випадках практично співпадають.

На рисунку 4.11 представлено процес повзучості внутрішньої циліндричної поверхні з плином часу. Як можна спостерігати, переміщення протягом 1 с монотонно збільшуються на 48% у порівнянні із пружним розв'язком.

Отриманий пружний розв'язок даної задачі було порівняно з аналітичним розв'язком, а також з розв'язком, отриманим за іншою чисельною схемою, представленими [128]. Порівняння показало, що розв'язки фактично співпадають.

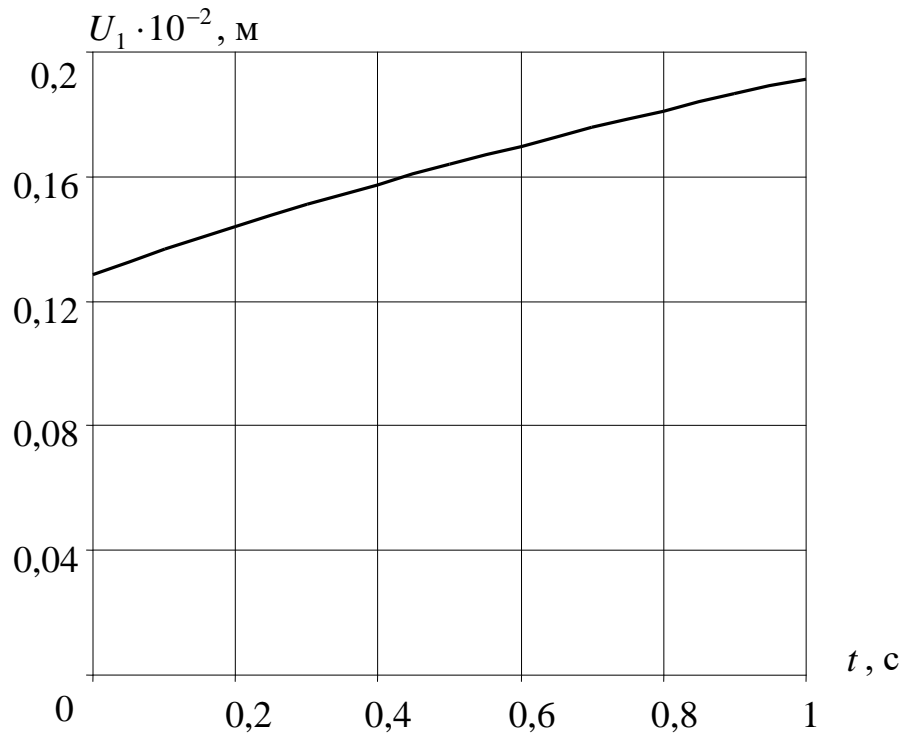


Рисунок 4.11 – Залежність величини радіальних переміщень внутрішньої поверхні труби від часу

4.4 Дослідження напружено-деформованого стану композитної циліндричної оболонки, що навантажена радіальною зосередженою силою

Циліндрична оболонка виконана з гуми 2959 (фізичні величини: $E_{R0} = 5,28$ МПа, $E_{R\infty} = 2,22$ МПа, $\nu_R = 0,49$) і поліамідного корду 23КНТС (фізичні величини: $E_C = 1277,5$ МПа, $G_C = 490$ МПа). Діаметр волокон: $d_C = 0,07$ см, частота армування: $i_C = 11$ ниток/см (коефіцієнт армування $\psi_C = 0,12$). Радіус оболонки: $R = 0,112$ м, відносна товщина: $h/R = 0,03156$, довжина твірної: $L = 2,37R$. Оболонка вільно оперта торцями й навантажена посередині прогону радіальною зосередженою силою: $P = 98$ Н (рис. 4.12). Сітка розбиття на скінченні елементи: $2 \times 16 \times 27$.

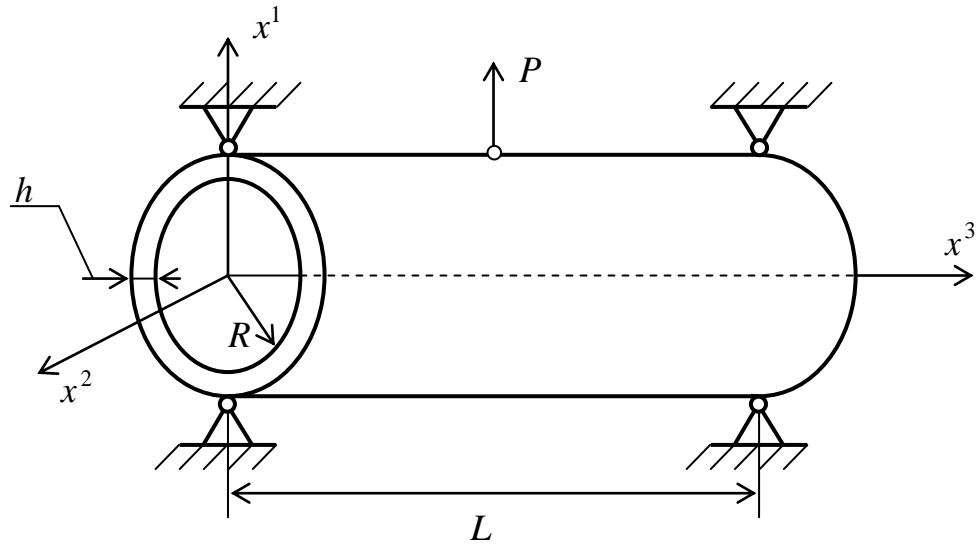


Рисунок 4.12 – Розрахункова схема циліндричної оболонки, навантаженої зосередженою силою

На рисунку 4.13 приведено результати чисельного дослідження розподілу прогину вздовж твірної циліндра в залежності від різних кутів армування.

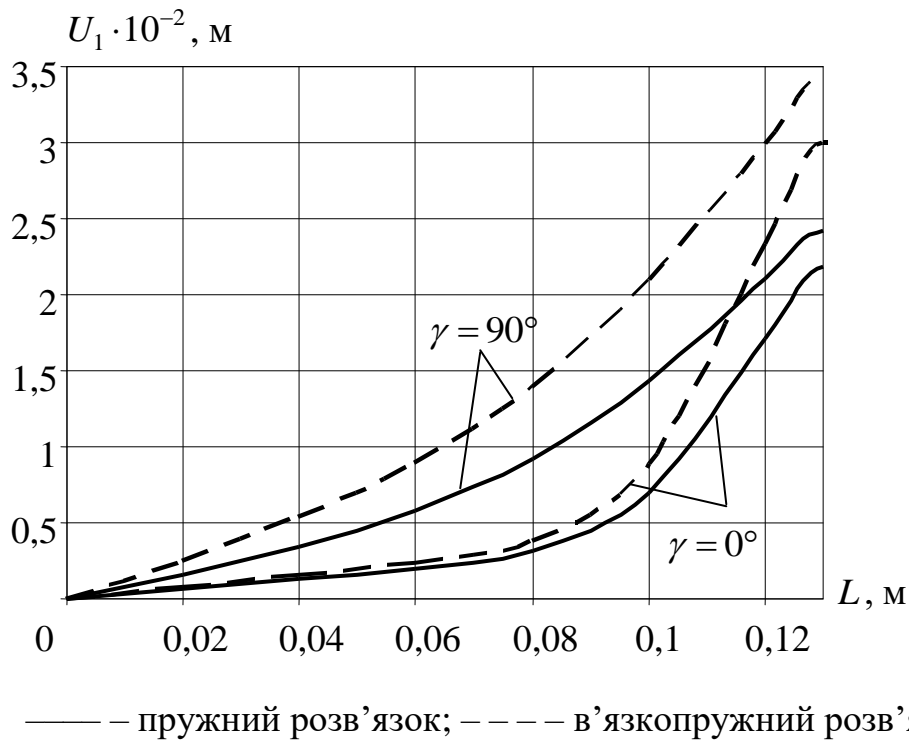


Рисунок 4.13 – Розподіл прогину вздовж твірної циліндричної оболонки при різних кутах армування γ

Можна зауважити, що різниця між пружним і в'язкопружним розв'язками складає до 42%, збільшуючись у напрямку місця прикладання сили. Крім того, спосіб армування також впливає на в'язкопружні властивості матеріала. Найменше повзучість оболонки наявна при радіальному способі армування, найбільше – при армуванні вздовж твірної. Різниця величини переміщень складає до 33%.

4.5 Напружений стан затисненої на торцях багат шарової гумокордної труби

Труба виконана з гуми 2959 (фізичні величини: $E_{R0} = 5,28$ МПа, $E_{R\infty} = 2,22$ МПа, $\nu_R = 0,49$) і поліамідного корду 23КНТС (фізичні величини: $E_C = 1277,5$ МПа, $G_C = 490$ МПа). Діаметр волокон: $d_C = 0,07$ см, частота армування: $i_C = 11$ ниток/см (коефіцієнт армування $\psi_C = 0,09$). Товщина труби: $h = 0,456$ см, внутрішній радіус: $R = 0,1$ м, довжина твірної: $L = 0,5$ м. Труба затиснута на торцях і перебуває під внутрішнім тиском (рис. 4.14). Інтенсивність навантаження: $q = 0,15$ МПа. Розрахунок проведено на сітці розбиття: $5 \times 12 \times 24$.

На рисунку 4.15 зображено залежність прогину внутрішньої поверхні труби від кутів укладки волокон. Можна зазначити, що найбільше повзучість матеріалу проявляє себе при радіальному способі армування, і майже однакова для схем армування, різниця величини переміщень складає від 31% до 55%.

На рисунках 4.16 і 4.17 представлено розподіл напружень у товщині для дво- і чотиришарової труби. Аналізуючи результати дослідження двошарової та чотиришарової труби, можна зробити висновок, що кількість

шарів не впливає на величину радіальних і тангенціальних напружень, σ_{RR} і $\sigma_{\theta\theta}$ відповідно. Напруження $\sigma_{\theta z}$ мають дискретний характер.

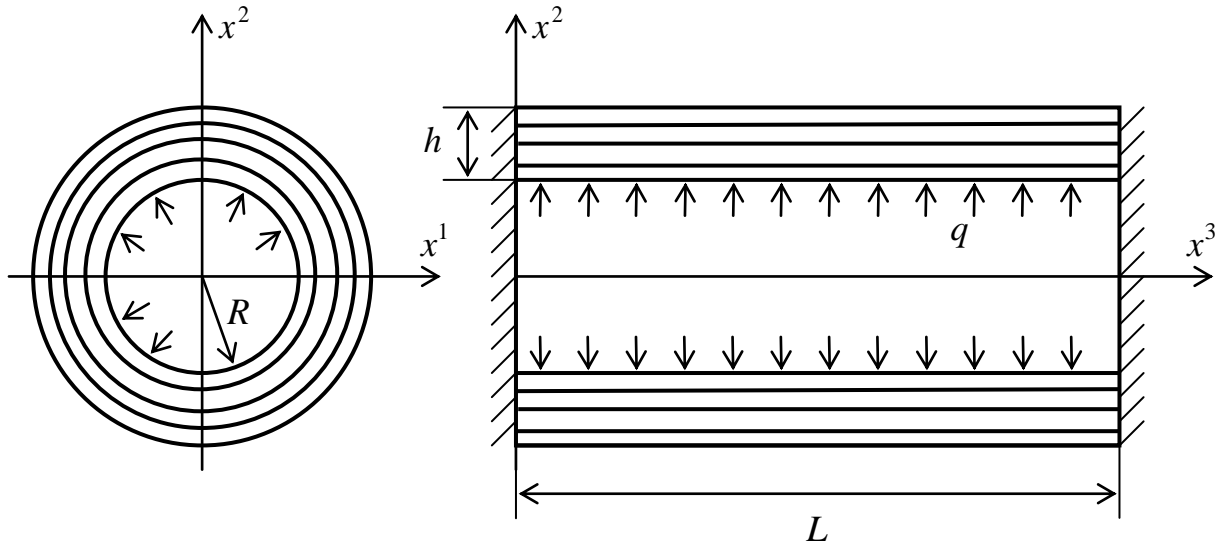


Рисунок 4.14 – Багатошарова циліндрична труба, затиснена на торцях, під дією внутрішнього тиску

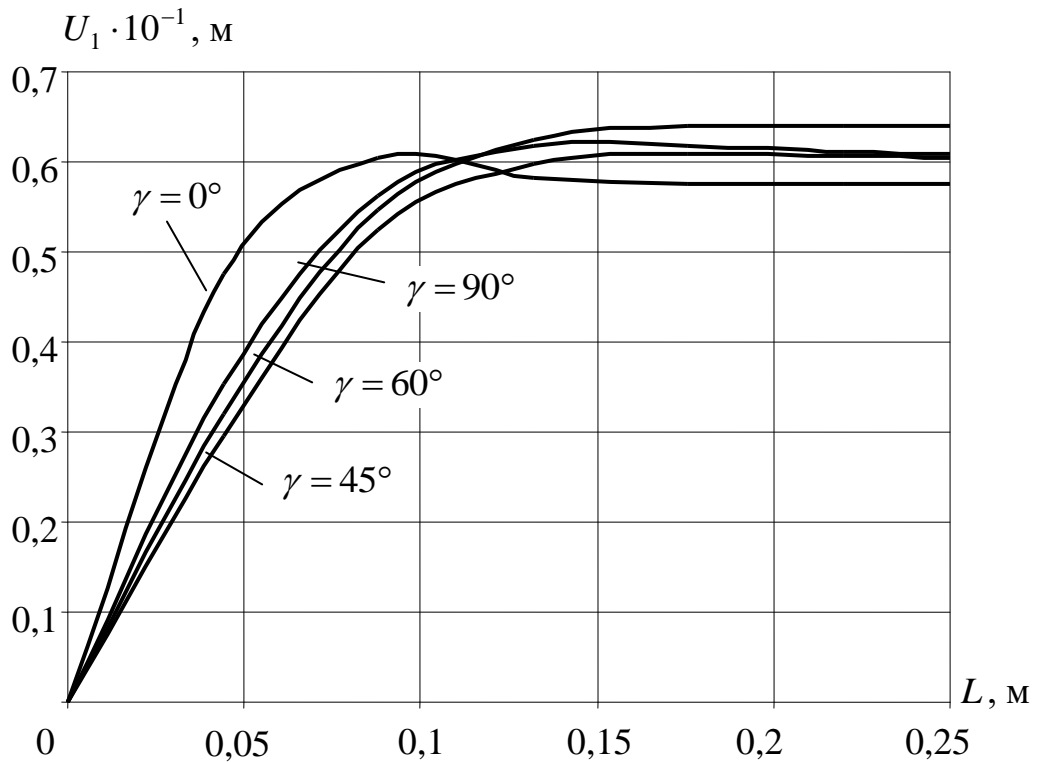


Рисунок 4.15 – Радіальне переміщення внутрішньої поверхні циліндричної труби при різних кутах армування γ

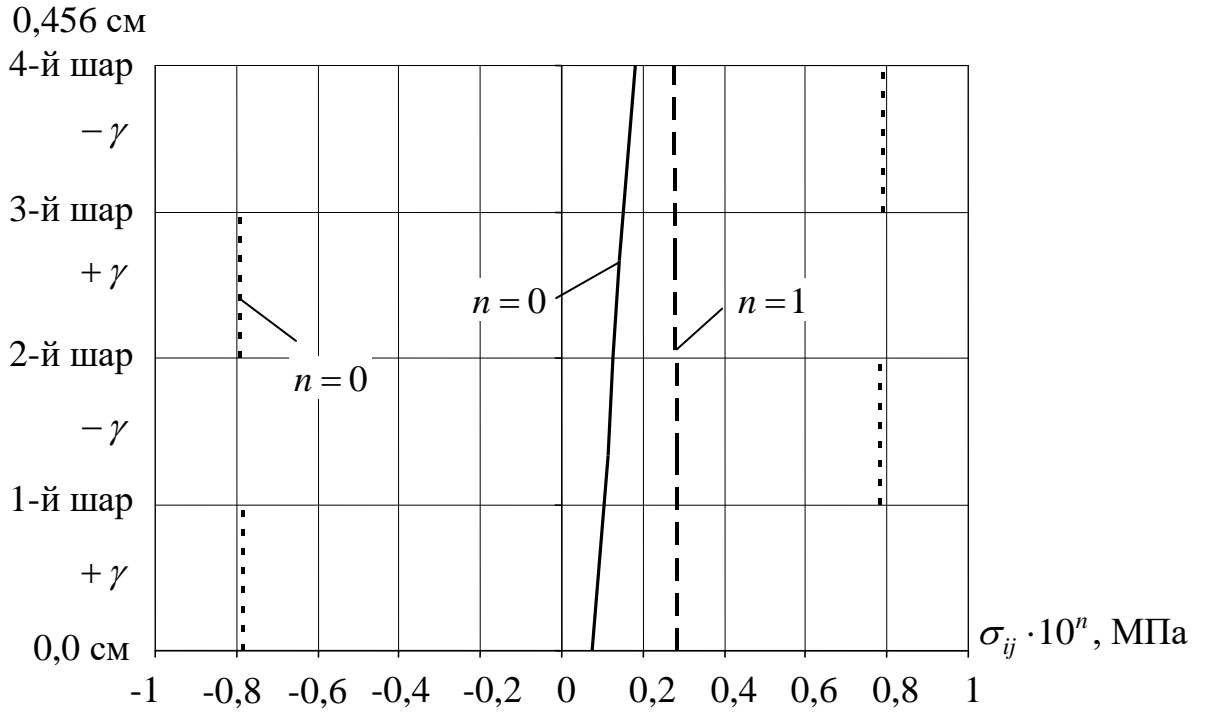


Рисунок 4.16 – Розподіл напружень σ_{ij} у товщині чотиришарової труби всередині конструкції (— σ_{11} , - - - σ_{22} , ····· σ_{23})

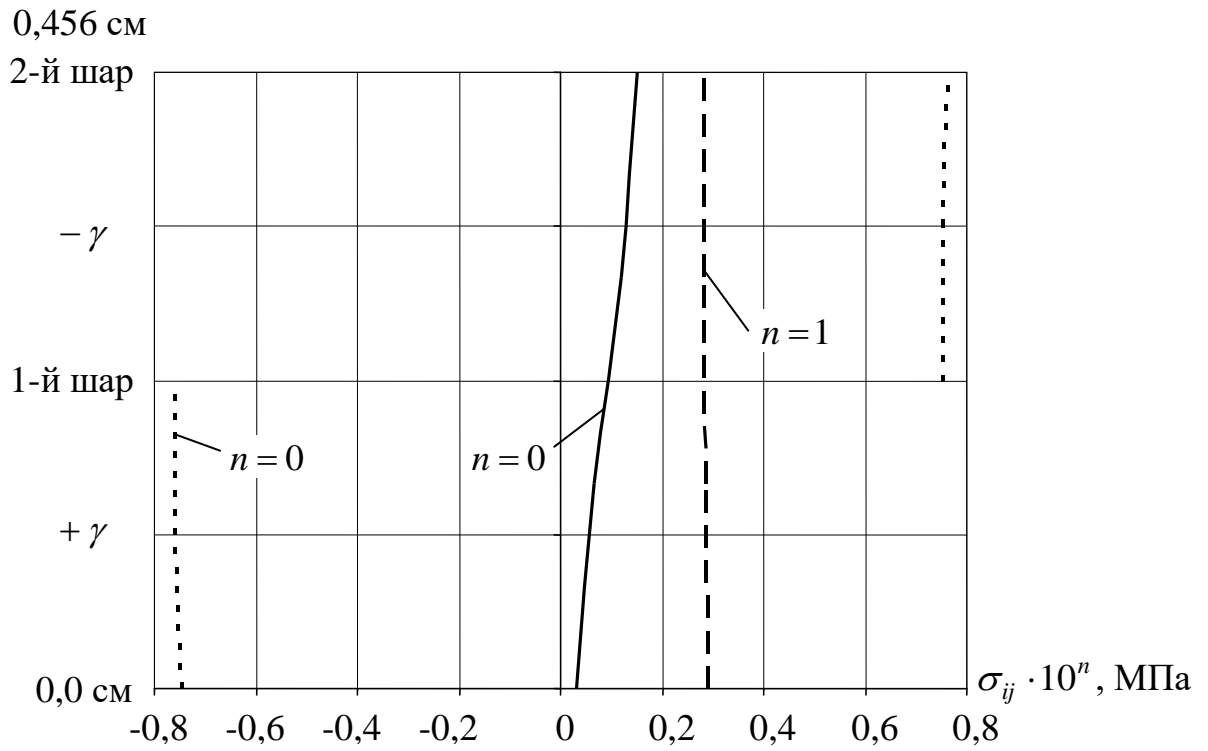


Рисунок 4.17 – Розподіл напружень σ_{ij} по товщині двошарової труби

(— σ_{11} , - - - σ_{22} , ····· σ_{23})

Збіжність чисельних результатів при різних сітках розбиття часового періоду показана у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Збіжність чисельних результатів за часом

Розбиття часового інтервалу	Радіальні переміщення U_1 , м
2	0,11164
5	0,11263
10	0,11275
20	0,11276

4.6 Розтягування консольної циліндричної оболонки, що має парну кількість перехресно армованих шарів

Досліджувана конструкція являє собою двошарову, перехресно армовану циліндричну оболонку (рис. 4.18). Геометричні параметри оболонки наступні: $h = 5$ мм, $L = R = 100$ мм. Вихідним матеріалом однонаправлено армованого шару є поліамідний корд 23КНТС з $E_C = 1277,5$ МПа, $G_C = 490$ МПа, матриця – гума 2959 з $E_{R0} = 5,28$ МПа, $E_{R\infty} = 2,22$ МПа, $\nu_R = 0,49$. Об'ємний коефіцієнт армування $\psi_C = 0,5$. Інші характеристики армованого шару d_C , i_C , h_0 кожного разу необхідно підбирати, виходячи з рівності $h_0 = \frac{h}{N}$, де N – кількість шарів у пакеті, й залежності:

$$\psi_C^{(k)} = \frac{\pi (d_C^{(k)})^2}{4h_0^{(k)}} i_C^{(k)}, \quad (4.1)$$

де $h_0^{(k)}$ – товщина армованого шару, $d_c^{(k)}$ – діаметр волокон, $i_c^{(k)}$ – частота армування. Усі величини з індексом k відповідають k -му шару оболонки. Шари оболонки розташовані антисиметрично з кутами укладки волокон $\gamma^{(k)} = (-1)^k \gamma$. Один із торців оболонки затиснений, інший – переміщується на задану величину $\Delta = 1\text{мм}$. Задачу було розв’язано при сітці розбиття: $5 \times 20 \times 10$.

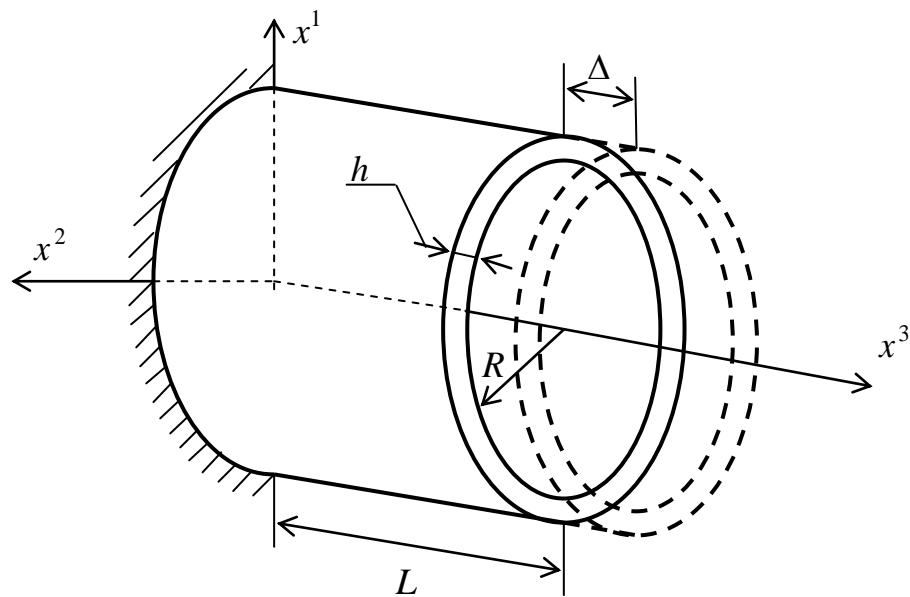
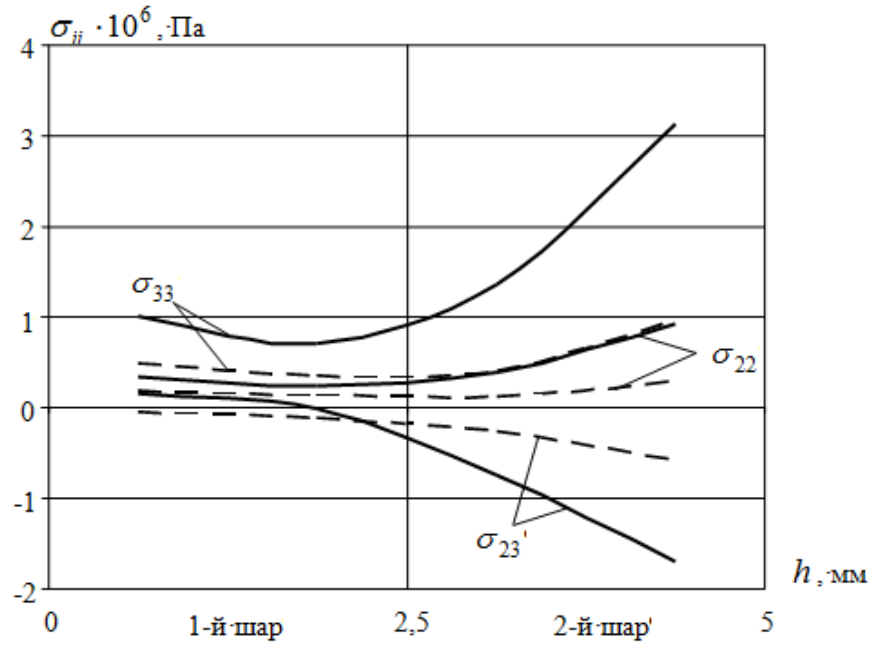


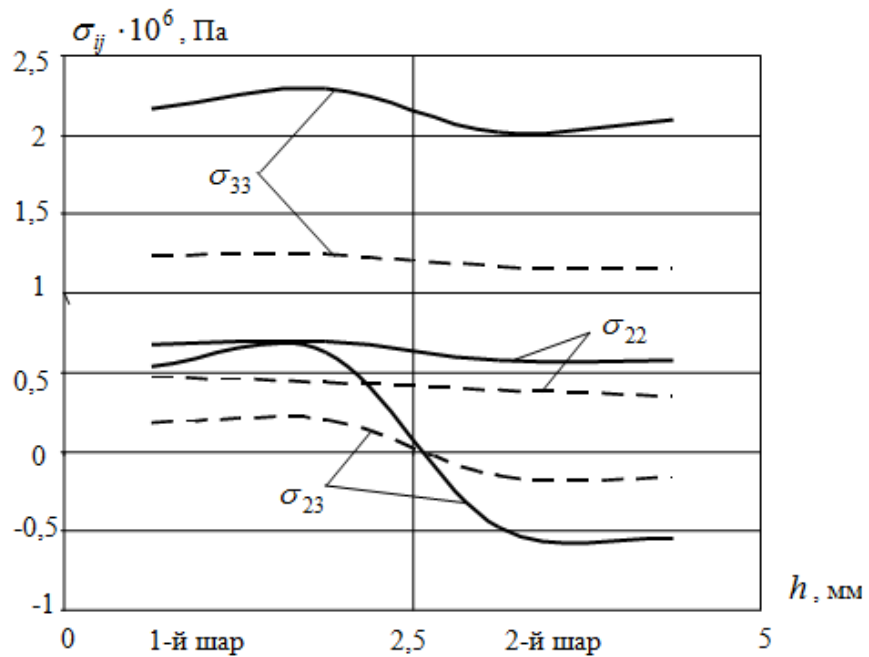
Рисунок 4.18 – Консольна циліндрична оболонка, один торець якої затиснений, а другий переміщується на задану величину Δ

На рисунках 4.19 і 4.20 приведені залежності напружень σ_{22} , σ_{33} й σ_{23} від поперечної координати у затисненні та у центральному перерізі оболонки. У затисненні пружний розв’язок дає значення напружень, що майже втричі перебільшують значення напружень, знайдені за в’язкопружним розв’язком. У центральному перерізі різниця значень складає до 77%. Очевидно, що з часом при постійній деформації у конструкції відбувається процес релаксації напружень як у затисненні, так і у центрі оболонки.



— — пружний розв'язок; - - - - в'язкопружний розв'язок

Рисунок 4.19 – Розподіл напружень у затисненні



— — пружний розв'язок; - - - - в'язкопружний розв'язок

Рисунок 4.20 – Розподіл напружень у центральному перерізі оболонки

4.7 Напружено-деформований стан пневмоелемента з гумокордною оболонкою

Розглянемо однопорожнинний пневмобалон з гумокордною оболонкою (рис. 4.21) [142]. Розміри пневмобалона: $D = 248$ мм, $H = 112$ мм, $D_1 = 150$ мм. Оболонка виготовлена з гуми (миттєвий модуль пружності $E_{R0} = 5,28$ МПа, тривалий модуль пружності $E_{R\infty} = 2,22$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu_R = 0,49$), армованої поліамідними волокнами 23КНТС ($E_C = 1277,5$ МПа, $\nu_C = 0,34$). Волокна розташовані у два шари і мають перехресну схему армування з кутами $\pm \gamma$ відносно меридіану конструкції. Оболонка перебуває під дією внутрішнього тиску $Q = 0,05$ МПа та осьового навантаження $Q = 0,05$ МПа. Розрахунок було проведено при сітці розбиття $5 \times 8 \times 19$.

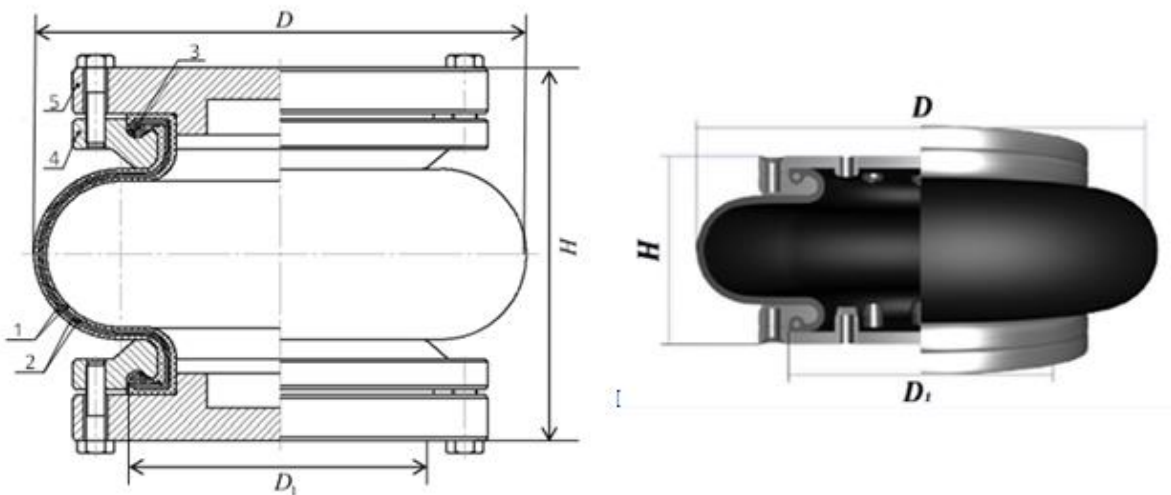


Рисунок 4.21. – Конструкція однопорожнинного гумокордного пневмобалона:

- 1 – гума, 2 – шари корда, 3 – кільце бортове дротяне,
4, 5 – фланці притискні

На рисунку 4.22 представлено розподіл осьових переміщень у пневмобалоні при об'ємному вмісті волокна $\psi_C = 0,3$ та моменту часу $t = 0$ с. Можна бачити, що максимальних значень осеві переміщення набувають у верхній частині пневмобалону у зоні прикладання осевого навантаження.

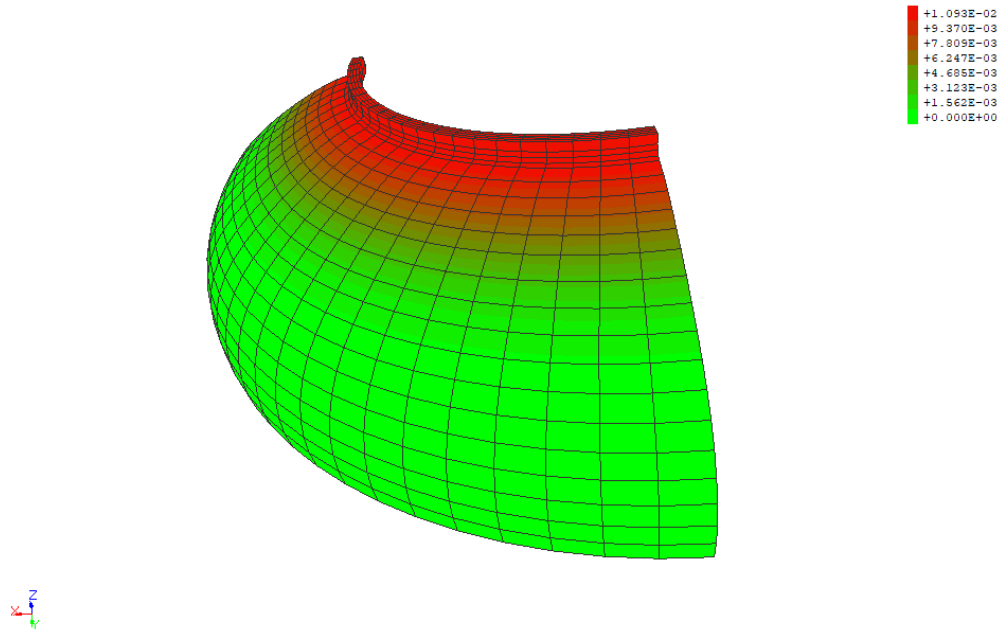


Рисунок 4.22. – Розподіл осьових переміщень у пневмобалоні

Вертикальна осадка (максимальні осеві переміщення) амортизатора в залежності від часу показана на рисунку 4.23. Якісна картина при різному об'ємному вмісті волокна однакова: спочатку йде значне збільшення величини осадки (від 90% при $\psi_C = 0$ до 70% при $\psi_C = 0,3$), а потім процес стабілізується і з плином часу (20 с після навантаження) практично не змінюється. Гума має виражені в'язкопружні властивості, тому чим менше об'ємний вміст волокна, тим більший прояв в'язкопружних властивостей у гумокордному композиційному матеріалі. На рис. 4.24 наведено залежність максимальних стискаючих напружень від часу. Для різних значень об'ємного вмісту волокна у гумокорді ці залежності якісно однакові, максимальне значення напруження набуває у пружному випадку, а потім, з плином часу, монотонно спадає і після деякого моменту часу (15...30 с) набуває практично

сталого значення. Але зона напружень, близьких до максимальних, значно більша для об'ємного вмісту волокна $\psi_C = 0$, і стає більш зконцентрованою із зростанням вмісту волокон у композиті. В той же час абсолютні значення напружень при $\psi_C = 0$ значно менші, ніж при $\psi_C = 0,3$.

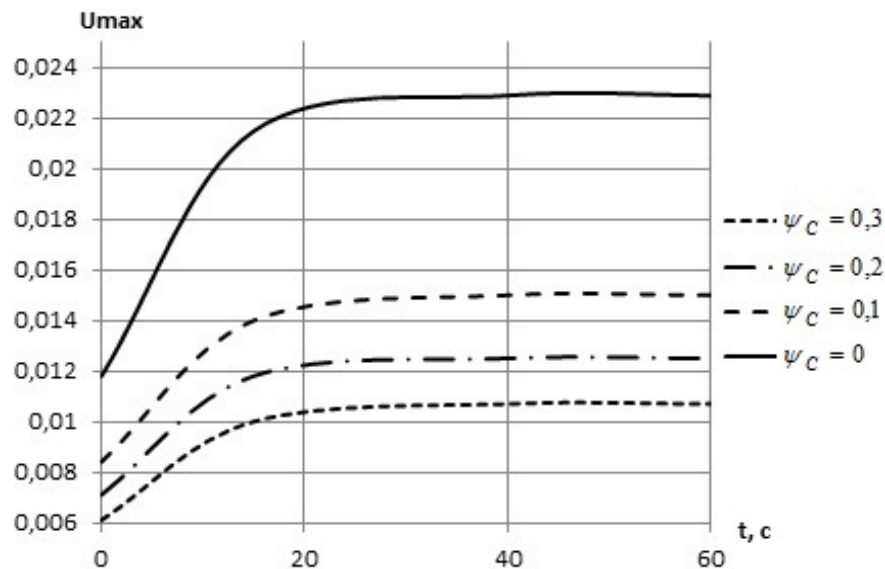


Рисунок 4.23. – Максимальні переміщення в оболонці протягом часу в залежності від об'ємного вмісту волокон.

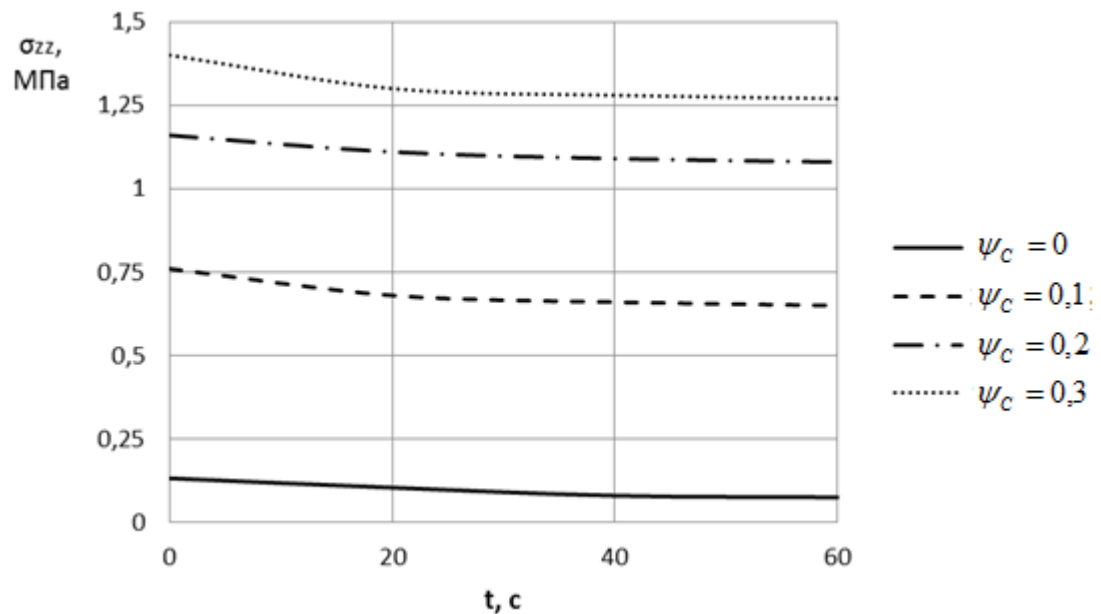


Рисунок 4.24. – Максимальні стискаючі осьові напруження в пневмобалоні з плином часу для об'ємного вмісту волокна

Розрахунок напружено-деформованого стану конструкції дозволяє визначити раціональні характеристики для композиційного матеріалу при заданих навантаженнях та оцінювати міцність конструкції без проведення практичних експериментів.

4.9 Висновки до розділу 4

За допомогою розробленого програмного забезпечення визначно напружено-деформований стан низки конструкцій в умовах пружного та в'язкопружного деформування для різних силових навантажень: квадратна та кругла пластини, циліндричні оболонки, труби, пневмобалон.

Із аналізу результатів розрахунків можна зазначити що врахування в'язкопружних властивостей приводить до значних змін у напружено-деформованому стані конструкцій. А саме, для розглянутих матеріалів внаслідок повзучості переміщення у в'язкопружному випадку можуть бути на 30...50% (а інколи і на 70%) більші, ніж у пружному, в залежності від властивостей матеріалу та характеру армування; чим менший вміст в'язкопружної матриці у композиті, тим менший прояв повзучості. Значення напружень внаслідок релаксації, як правило, зменшуються, але внаслідок спільного перебігу процесів – релаксації напружень та повзучості – абсолютні значення напружень можуть бути як більшими від пружних так і меншими від них.

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язано важливу науково-технічну задачу про визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів в умовах в'язкопружного деформування з використанням миттєвих та тривалих характеристик складових. Основні результати, отримані у дисертаційній роботі, такі:

1) вперше розроблено просторово-часовий скінченний елемент для розв'язування задач в'язкопружності. Із застосуванням моментної схеми скінченних елементів побудовано матрицю жорсткості для модифікованого лінійного паралелепіпедного скінченного елемента;

2) вперше запропоновано чисельні підходи до визначення напружено-деформованого стану композиційних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування на основі розробленого просторово-часового скінченного елемента;

3) на основі запропонованих чисельних підходів створено програмне забезпечення для розв'язування задач в'язкопружності конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів;

4) за допомогою розробленого програмного забезпечення досліджено напружено-деформований стан конструкцій із волокнистого композиційного матеріалу в умовах в'язкопружності;

5) встановлено, що для розглянутих конструкцій із композиційних матеріалів із пружним волокном та в'язкопружною матрицею:

– внаслідок повзучості переміщення у в'язкопружному випадку можуть бути на 30...50% більші, ніж у пружному, в залежності від властивостей матеріалу та характеру армування; чим менший вміст в'язкопружної матриці у композиті, тим менший прояв повзучості;

– зменшення величин напружень внаслідок релаксації, тим сильніше, чим менше об’ємний вміст волокон у композиційному матеріалі.

Співвідношення для матриці жорсткості просторово-часового скінченного елемента, чисельні підходи та пакет прикладних програм, запропоновані в дисертаційній роботі, були впроваджені та використані у відділі механіки еластомерних конструкцій Інституту геотехнічної механіки НАН України (м. Дніпро) при проектуванні гумових амортизаторів із гумокордними вставками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Композиционные материалы. Справочник / под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
2. Павлов В. П. Ползучесть полимерных композиционных материалов при переменных повышенных температурах. Экспериментальное исследование и математическое моделирование. Уфа: Изд-во Уфим. гос. авиац. техн. ун-та, 2004. 155 с.
3. Ахундов В. М., Лунев В. П. Расчет и экспериментальное исследование растяжения перекрестно армированного резинокордного композита. *Механика композитных материалов*. 2001. Т. 37, № 2. С. 215–226.
4. Шешенин С. В., Чистяков П. В., Закалюкина И. М. Применение модели вязкоупругости Максвелла для резинокордного композита. *Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ»*. 2017. Т. 9, № 4. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/55TVN417.pdf>
5. Абросимов Н. А., Куликова Н. А. Определение параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных цилиндрических оболочек при ударном нагружении. *Проблемы прочности и пластичности*. 2009. Т. 71, С. 61–70.
6. Абросимов Н. А., Куликова Н. А. Идентификация параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных материалов на основе анализа импульсного нагружения оболочек вращения. *Изв. РАН. МТТ*. 2011. № 3. С. 42–57.
7. Осяев О. Г., Остапенко А. В. Эмпирические зависимости для ядер ползучести и релаксации полимерных композитов в процессе старения. *Полет. Общероссийский научно-технический журнал*. 2010. Т. 10, С. 23–27.
8. Мартиненко В. Г. Методика экспериментального дослідження в'язкопружних властивостей ортотропного матеріалу. *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ»*. *Динаміка і міцність машин*. Харків: НТУ «ХПІ», 2015. № 57(1166). С. 81–87.

9. Мартиненко В. Г. Розробка методів розрахунку елементів конструкцій із в'язкопружних композиційних матеріалів: дис. ... канд. техн. наук: 05.02.09. Харків, 2018. 196 с.

10. Ларин А. А., Петрова Ю. А. Экспериментальные исследования ортотропных упругих и вязкоупругих характеристик эластомерных текстильно армированных композитов. *Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Новые решения в современных технологиях.* Харьков: НТУ «ХПИ», 2016. № 18(1190). С. 55–59.

11. Войтович Л. В. Дослідження напружено-деформованого та граничного станів прозорих композитів (склопластиків) із геометричними концентраторами поляризаційно-оптичним методом: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04. Тернопіль, 2017. 159 с.

12. Голуб В. П., Фернати П. В., Ляшенко Я. Г. Об определении параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности линейно вязкоупругих материалов. *Прикладная механика.* 2008. Т. 44, № 9. С. 12–25.

13. Venkatesh T. A., Dunand D. C. A model for the longitudinal primary creep of a long-fiber composite. *Acta Mater.* 1999. V. 47, № 17. P. 4275–4282.

14. Hiroshi N., Nobuyseki S. Экспериментальная проверка конечно-элементной модели вязкоупругого тела, описанного дробным дифференциальным оператором. *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C.* 2003. V. 69, № 682. P. 1493–1499.

15. Зезин Ю. П., Ломакин Е. В. Исследование вязкоупругих свойств усиленных наночастицами эластомеров. *Изв. РАН. МТТ.* 2015. № 2. С. 6–19.

16. Numaira Obaid, Mark T. Kortschot, Mohini Sain. Predicting the stress relaxation behavior of glass-fiber reinforced polypropylene composites. *Composites Science and Technology.* 2018. V. 161, P. 85–91.

17. Максимов Р. Д., Плуме Э. Длительная ползучесть органостеклопластика. *Механика композитных материалов.* 2001. Т. 37, № 4. С. 435–450.

18. Алексеев К. П., Каюмов Р. А., Терегулов И. Г. Ползучесть намоточных трубчатых образцов из органопластика в условиях чистого радиального внутреннего давления. *Механика оболочек и пластин: сборник докладов 20 Международной конференции по теории оболочек и пластин*, Ниж. Новгород, 17...19 сентября, 2002 г. С. 83–87.

19. Алексеев К. П., Каюмов Р. А., Мухамедова И. З., Терегулов И. Г. Экспериментальное исследование ползучести композиционных материалов на трубчатых образцах из органопластика. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2004. Т. 10, № 2. С. 199–210.

20. Виноградов А. М., Шумахер С. Циклическая ползучесть полимеров и полимерных композитных материалов. *Механика композитных материалов*. 2001. Т. 37, № 1. С. 51–62.

21. Паймушин В. Н., Холмогоров С. А. Остаточные деформации в косоугольно армированных волокнистых композитах: эксперименты на циклическое растяжение. *Материалы X всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела*. Самара, 18...22 сентября 2017 г. С. 136–140.

22. Паймушин В. Н., Каюмов Р. А., Холмогоров С. А., Шишкин В. М. Определяющие соотношения в механике перекрестно армированных волокнистых композитов при кратковременном и длительном одноосном нагружении. *Изв. вузов. Матем.*, 2018. № 6, С. 85–91.

23. Аболиньш Д. С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала. *Механика полимеров*. 1965. № 4. С. 52–59.

24. Ван Фо Фы Г. А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты. *Механика полимеров*. 1966. № 4. С. 593–602.

25. Klasztorny M., Wilszynski A. P. Constitutive equations of viscoelasticity and estimation of viscoelastic parameters of unidirectional fibrous polymeric composites. *J. Compos. Mater.* 2000. V. 34, № 19. P. 1624–1639.

26. Вильчинский А. П. Моделирование вязкоупругих свойств полимерных смол. *Механика композитных материалов*. 2004. Т. 40, № 5. С. 699–709.

27. Kim P., Toll S. Stress spectra and the effective elastic and viscoelastic properties of unidirectional composites under transverse loading. *J. Compos. Mater.* 2000. V. 34, № 17. P. 1418–1436.

28. Gibiansky Leonid V., Milton Graeme W., Berryman James G. On the effective viscoelastic module of two-phase media. III. Rigorous bounds on the complex shear modulus in two dimensions. *Proc. Roy. Soc. London. A*. 1999. V. 455, № 1986. P. 2117–2149.

29. Liang Jun, Du Shan-yi. Rigid line inclusions and cracks in anisotropic piezoelectric solids. *Acta Mater. Compos. Sin.* 2001. V. 18, № 1. P. 97–100.

30. Kondo K., Takiguchi R. Finite element analysis of creep in unidirectional composites based on homogenization theory. *Adv. Compos. Mater.* 2002. V. 11, № 1. P. 31–39.

31. Yi Yeong-Moo, Park Sand-Hoon, Youn Sund-Kie. Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures. *Int. J. Solids and Struct.* 1998. V. 35, № 17. P. 2039–2055.

32. Lui Wen-hui, Zhang Chun-yuan. Приложение ассимптотической теории гомогенизации к вязкоупругим многослойным композитам. *Natur. Sci. J. Xiangtan Univ.* 2003. V. 25, № 4. P. 91–97.

33. Гребенюк С. М. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів: дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.04. Запоріжжя, 2016. 319 с.

34. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Гоменюк С. І. Ефективні механічні характеристики'язкопружних композитів: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2019. 300 с.

35. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації

волокнистых композитів: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.

36. Клименко М. И., Гребенюк С. Н., Богуславская А. М. Характеристики композиционного материала с трансверсально-изотропными вязкоупругими матрицей и волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 94–102.

37. Гребенюк С. Н., Киричевский В. В., Толок В. А. Определение напряженно-деформированного состояния композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. *XII симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов»*. Москва: НИИ шинной промышленности, 2001. Т. 1. С. 147–151.

38. Альтенбах Х., Федоров В. А. Структурные модели упругости и ползучести однонаправленного композита при продольном сдвиге. *Механика композитных материалов*. 2007. Т. 43, № 4. С. 437–448.

39. Федоров В. А. Структурные модели упругости и ползучести однонаправленного композита при поперечном сдвиге. *Механика КМ и конструкций*. 2007 Т. 13, № 4. С. 441–451.

40. Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Черноіван Ю. О. Визначення ефективних характеристик в'язкопружного композита, релаксація компонентів якого описується експонентами різних дробових порядків. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2008. Т. 51, № 3. С. 69–79.

41. Гаврилов Г. В. Определение вязкоупругих характеристик композита на основе рациональной аппроксимации. *Доп. НАН України*. 2006. № 3. С. 47–50.

42. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном подходе к определению характеристик деформирования вязкоупругих материалов. *Прикладная механика*. 2005. Т. 41, № 8. С. 41–50.

43. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикладная механика*. 2005. Т. 41, № 5. С. 9–21.

44. Аношкин А. Н. Метод локального приближения в задачах прогнозирования вязкоупругих характеристик однонаправленных волокнистых композитов. *Вестн. ПГТУ Сер. Технол. мех.* 2002. С. 74–80.

45. Nobutada O., Takaaki A., Takushi M., Shiro B. Вариационный метод анализа распределений напряжений в волокнах однонаправленных композитов с учетом ползучести матрицы. *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* 2000. V. 66, № 643. P. 54–61.

46. Селяев В. П., Низина Т. А. Ползучесть композиционных материалов. *Композиционные строительные материалы. Теория и практика: сборник научных трудов Международной научно-технической конференции.* Пенза: Изд-во Приволж. дома знаний, 2000. Ч. 2. С. 88–90.

47. Ватульян А. О., Явруян О. В. Идентификация композиционных материалов. *Механика КМ и конструкций.* 2007. Т. 13, № 2. С. 174–182.

48. Кондакова Е. В., Сметанников О. Ю. Численное прогнозирование вязкоупругих характеристик однонаправленных волокнистых полимерных композитов. *13 Зимняя школа по механике сплошных сред и Школа молодых ученых по механике сплошных сред: тезисы докладов,* Пермь: Изд-во Ин-та мех. сплош. сред УрО РАН; Екатеринбург: Изд-во УрО РАН. 2003. 194 с.

49. Кравчук А. С., Томило Е. В. Вязкоупругий чистый изгиб слоистых и композиционных призматических брусьев. *Механика машин, механизмов и материалов.* 2014. № 3 (28). С. 48–52.

50. Абросимов Н. А. Идентификация моделей вязкоупругого деформирования композитных оболочек вращения при импульсном нагружении. *Пробл. прочн. и пластич.* 2002. № 64. С. 20–26.

51. Аникина Т. А., Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В. Идентификация неоднородных свойств вязкоупругой круглой пластины. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества,* 2016. 2 квартал. С. 10–18.

52. Глущенко В. С., Архипова Н. А., Хохрякова Ю. В. Эффективные свойства нелинейных максвелловских композиционных материалов. *Мат.*

моделирование и краевые задачи: труды 13 Межвузовской конференции. Ч. 1. Секц. Мат. модели механики, прочность и надежность конструкций. Самара, 29...31 мая, 2003 г. С. 22–26.

53. Глуценков В. С., Архипова Н. А., Хохрякова Ю. В. Эффективные свойства хаотически армированных нелинейных максвелловских композиционных материалов. *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та.* 2003. № 19. С. 165–167.

54. Глуценков В. С., Марарова И. С., Архипова Н. А. К теории ползучести хаотически армированных композиционных материалов. *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та.* 2004. № 26. С. 196–198.

55. Згаевский В. Э., Яновский Ю. Г. Зависимость вязкоупругих свойств композитов с высокоэластической матрицей и жесткими частицами наполнителя от молекулярных и структурных параметров межфазного слоя. *Механика композиционных материалов и конструкций.* 1998. Т. 4, № 3. С. 106–117.

56. Лурье С. А., Минат М. Метод самосогласованного поля Эшелби в задаче определения эффективных свойств композиционных материалов, армированных вискеризованными волокнами. *Механика КМ и конструкций.* 2014. Т. 20 № 2. С. 248–258.

57. Светашков А. А., Симанкин Ф. А., Павлов М. С., Лушников А. В. Гибридные эффективные модули вязкоупругих композитов. *Высокие технологии в современной науке и технике – 2016: сборник трудов V Международной научно-технической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов, Томск, 5...7 декабря 2016 г. С. 168–169.*

58. Вдовиченко И. И., Вершинин А. В., Яковлев М. Я. Об одном варианте методики оценки эффективных механических и немеханических характеристик наполненных эластомеров и резинокорда. *Проблемы шин, рти и эластомерных композитов: сборник научных трудов XXVII международного симпозиума. Москва, 10...14 октября 2016 г. С. 91–99.*

59. Мартиненко В. Г., Львов Г. І. Чисельна методика визначення анізотропних в'язкопружних властивостей ортогонально армованого композиційного матеріалу. *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ»*: збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. № 46(1218). С. 44–51.

60. Tressou B., Vaziri R., Nadot-Martin C. Application of the incremental variational approach (EIV model) to the linear viscoelastic homogenization of different types of microstructures: long fiber-, particle-reinforced and strand-based composites. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. V. 68. 2018. P. 104–116.

61. The-Duong Nguyen, Sy-Tuan Nguyen, Thu-Hien Tran. An asymptotic generalized self-consistent scheme for the effective rheological properties of viscoelastic composites. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2018. P. 1969–1980.

62. Papanicolaou G. C., Zaoutos S. P. Viscoelastic constitutive modeling of creep and stress relaxation in polymers and polymer matrix composites. *Creep and Fatigue in Polymer Matrix Composites*. 2019. P. 3–59.

63. Yvonnet J. Linear Viscoelastic Materials. *Computational Homogenization of Heterogeneous Materials with Finite Elements. Solid Mechanics and Its Applications*. 2019. V. 258, P. 123–144.

64. Kupriyanov N. A., Simankin F. A., Manabaev K. K. New effective moduli of isotropic viscoelastic composites. Part II. Comparison of approximate calculation with the analytical solution. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2016. V. 124. P. 1–6.

65. Дзюба А. П., Сиренко В. Н., Клименко Д. В., Левитина Л. Д., Черенков Д. А. Оптимізація композитних оболонок обертання методами теорії оптимальних процесів. *Space Science and Technology*. 2020. Т. 26, № 5. С. 28–37.

66. Levin V. A., Zingerman K. M., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains. *Composite Structures*. 2015. V. 131, P. 25–36.

67. Канович М. З., Трофимов Н. Н. Сопротивление композиционных материалов. Москва: Мир, 2004. 504 с.
68. Ведерникова И. И., Коршунов А. И., Поляков Л. В., Коновалов А. В. Усовершенствованная структурно-феноменологическая модель ползучести композиционных материалов. *Молодежь в науке: сборник докладов научно-технической конференции*, Саров, 11...13 марта, 2002 г. С. 440–444.
69. Шкараев С. В., Саврук М. П. Особенность напряжений в задачах линейной вязкоупругости. *Фіз.-хім. мех. матер.* 2002. Т. 38, № 3. С. 15–24.
70. Кагадий Т. С., Моссаковская Л. В., Павленко А. В. Метод возмущений в пространственной задаче линейной вязкоупругости анизотропных тел. *Прикладная математика и механика*. 1992. Т. 56, вып. 1. С. 167–172.
71. Кагадій Т. С., Шпорта А. Г., Білова О. В., Щербина І. В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Applied questions of mathematical modelling*. V. 3(2.1), P. 107–116.
72. Маликов В. Г., Шашков Ю. М. Напряженно-деформированное состояние многослойного композиционного цилиндра при вязкоупругом поведении материала. *Пробл. машиностр. и надеж. машин*. 2002. № 2. С. 42–45.
73. Peng F., Peng X., Fu Y. Анализ поведения волокнистых композитов при ползучести. *J. Hunan Univ. Natur. Sci.* 1999. V. 26, № 5. P. 6–9.
74. Nan-Nong H. Creep deflection of viscoelastic laminated cylindrical panels with initial deflection under axial compression. *Compos. B*. 1999. V. 30, № 2. P. 145–156.
75. Kanagawa Y., Muracami S., Mizobe T. An inelastic constitutive equation of fiber reinforced plastic laminated. *Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol.* 1998. V. 120, № 1. P. 13–18.
76. Didu I., Nafornița E. A theory about the mathematical model for the presage of the fibrous materials with viscoelastically properties. *Sci. Bull. D. «Politehn.» Univ. Bucharest*. 1998. V. 60, № 1 P. 61–73.

77. Потапов В. Д., Жаринов М. Ю., Марасанов А. И. Расчет ортотропных вязкоупругих тонкостенных пространственных систем по деформированной схеме. *Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы*: труды международной научной конференции, Москва, 4...8 июня, 2001 г. С. 330–335.

78. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями. *Прикладная механика*. 2007. Т. 43, № 2. С. 88–98.

79. Ellyin Fernand, Xia Zihui, Chen Yu. Viscoelastic micromechanical modeling of free edge and time effects in glass fiber/epoxy cross-ply laminates. *Composites. A*. 2002. V. 33, № 3. P. 399–409.

80. Rand O., Givoli D. Harmonic finite element analysis for anisotropic viscoelasticity. *AIAA Journal*. 2001. V. 39, № 2. P. 349–352.

81. Власов А. Н., Мнушкин М. Г., Яновский Ю. Г. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния волоконнаполненных полимерных композитов при нагружении вплоть до момента разрушения. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5, № 4. С. 167–184.

82. Hammerand Daniel C., Kapania Rakesh K. Geometrically nonlinear shell element for hydrothermorheologically simple linear viscoelastic composites. *AIAA Journal: American Institut of Aeronautics and Astronautics*. 2000. V. 38, № 12. P. 2305–2319.

83. Черноус Д. А., Шинько С. В. Анализ вязкоупругого деформирования эластичного поропласта при постоянной скорости нагружения. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2004. Т. 10, № 3. С. 385–392.

84. Терегулов И. Г., Каюмов Р. А., Ильязов Р. Н. Расчет нелинейно-упругих многослойных композиционных оболочек вращения с учетом

поперечного сдвига и изменения метрики по толщине. *Прикл. пробл. прочн. и пластич.* 2000. № 61. С. 17–21.

85. Максимюк В. А., Чернышенко И. С. Нелинейно-упругое состояние тонкостенных тороидальных оболочек из ортотропных композитных материалов. *Прикладная механика.* 1999. Т. 35, вып. 12. С. 49–55.

86. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O. Dynamic Response of Laminate Composite Shells with Complex Shape under Low-Velocity Impact. *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering-2020.* Springer: Cham. 2020. P. 267–276.

87. Lvov G., Martynenko V. Analysis of the stress-strain state of a pipeline with a viscoelastic repair bandage on different operating modes. *Вісник Київського політехнічного інституту. Серія: Машинобудування.* 2015. Т. 1. С. 22–28.

88. Манабаев К. К. Модификации приближенных методов расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из вязкоупругих и композиционных материалов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Томск, 2016. 152 с.

89. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Развитие трещины с немалой зоной предразрушения в вязкоупругой ортотропной пластине под действием переменных нагрузок. *Прикладная механика.* 2000. Т. 36, вып. 6. С. 121–129.

90. Подильчук И. Ю. К определению корней характеристического уравнения вязкоупругого трансверсально-изотропного тела. *Теор. и прикл. ел.* (Киев). 1999. С. 92–104.

91. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Метод операторных ветвящихся цепных дробей в линейной теории вязкоупругости. *Доп. Нац. АН Украины.* 2002. № 8. С. 42–47.

92. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Вязкоупругое деформирование армированной пластины с трещиной. *Прикладная механика.* 2002. Т. 38, вып. 12. С. 111–120.

93. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Длительное разрушение слоистого вязкоупругого композиционного материала с трещиной под действием нагрузки, изменяющейся со временем. *Механика композитных материалов*. 2000. Т. 36, № 4. С. 545–558.

94. Каминский А. А., Гаврилов Г. В. Об одном методе решения задач линейной теории вязкоупругости для стареющих анизотропных материалов. *Прикладная механика*. 1998. Т. 34, вып. 11. С. 60–65.

95. Подильчук И. Ю. Исследование концентрации напряжений в вязкоупругом трансверсально-изотропном гиперboloиде. *Приклад. механика*. 1999. Т. 35, № 3. С. 33-41.

96. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Перераспределение напряжений около эллиптического отверстия в вязкоупругой ортотропной пластине вследствие ползучести материала. *Доп. НАН Украины*. 2004. № 6. С. 49–54.

97. Каминский А. А. Исследование деформирования анизотропных вязкоупругих тел. *Прикладная механика*. 2000. Т. 36, вып. 11. С. 39–63.

98. Каминский А. А., Черноиван Ю. А. Напряженное состояние вязкоупругой ортотропной полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой. *Прикладная механика*. 2000. Т. 36, вып. 2. С. 124–130.

99. Каминский А. А., Подильчук И. Ю. Об одном методе решения граничных задач линейной теории вязкоупругости. *Прикладная механика (Киев)*. 1998. Т. 34, № 12. С. 77–85.

100. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе решения граничных задач линейной теории вязкоупругости для анизотропных композитов. *Прикладная механика*. 2003. Т. 39, № 11. С. 67–75.

101. Kaminsky A. A., Selivanov M. F. On the application of operator branched continued fractions for a boundary problem of linear viscoelasticity. *Приклад. механика*. 2006. Т. 42, № 1. С. 133–143.

102. Ванин Г. А., Нгуен Динь Дык. Ползучесть сферопластиков. *Механика композитных материалов*. 1996. Т. 32, № 5. С. 668–675.

103. Бондин В. Ф. Изгиб вязкоупругого армированного бруса при сложных нагружениях. *Изв. вузов. Стр-во.* 2000. № 6. С. 17–25.
104. Ляшенко Я. Г. Концентрація напружень в елементах мікроструктури в'язкопружних композитних матеріалів. *Пробл. прочності.* 2005. № 5. С. 138–149.
105. Ляшенко Я. Г. Концентрація напружень на міжфазних поверхнях канонічної форми у в'язко-пружних композитних матеріалах: дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. Київ, 2003. 168 с.
106. Шевченко В. П., Нескородев Р. Н. Численно-аналитический метод решения задач линейной теории вязкоупругости. *Прикладная механика.* 2014. Т. 50, № 3. С. 42–53.
107. Нескородев Р. Н. Изгиб трансверсально-изотропных вязкоупругих плит в уточненной постановке. *Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки.* 2017. № 1. С. 26–35.
108. Gotas J. On necessity of making allowance for shear strain in cylindrical bending of fiber composite viscoelastic plates. *Arch. Civ. Eng.* 1997. V. 43, № 2. P. 121–147.
109. Каминский А. А., Затула Н. И., Дякон В. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния вязкоупругих кусочно-однородных тел методом граничных интегральных уравнений. *Мех. композит. матер.* 2002. Т. 38, № 3. С. 321–330.
110. Победря Б. Е. Методы аппроксимации в теории вязкоупругости. *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. н.* 2000. № 3. С. 124–126.
111. Басистов Ю. А., Яновский Ю. Г. Некорректные задачи в механике (реологии) вязкоупругих сред и их регуляризация. *Механика КМ и конструкций.* 2010. Т. 16, № 1. С. 117–143.
112. Шиверский А. В., Горохов А. Ю., Максимов П. В., Блинов А. В. Анализ эволюции напряжений в ортотропной вязкоупругой пластинке в окрестности круглого отверстия при различных видах внешнего нагружения. *Современные проблемы науки и образования.* 2015. № 2. С. 767–776.

113. Зингерман К. М., Шавырин Д. А. Способ расчета напряженного состояния в резинокордном композите с учетом вязкоупругости и конечных деформаций. *Проблемы шин, рти и эластомерных композитов*: сборник научных трудов XXVII междунар. симпозиума, Москва, 10...14 октября 2016 г. С. 140–146.

114. Толок В. А., Киричевский В. В., Гоменюк С. И., Гребенюк С. Н., Бувайло Д. П. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация. Киев: Наукова думка, 2003. 316 с.

115. Laped N., Turbe N. Computation of homogenized coefficients for a viscoelastic composite reinforced with spherical inclusions. *J. Compos. Mater.* 1998. V. 32, № 14. P. 1297–1310.

116. Акбаров С. Д., Рзаев О. Г. О расслоении вязкоупругой композитной круговой плиты. *Прикладная механика*. 2003. Т. 39, № 3. С. 137–143.

117. Фомичев Ю. И. Напряженно-деформированное состояние многослойных ортотропных оболочечных конструкций в проблеме расчета резинокордных композитов и шин. *VIII симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов. Дорога, шина, автомобиль»*. Москва: НИИ шинной промышленности, 1997. Т. 2. С. 418–423.

118. Sun Shuang-shuang, Sun Guo-jun, Du Xiao-wei, Wu Jian-sheng. Изгиб вязкоупругой балки, армированной волокнами из сплава с памятью формы. *J. Shanghai Jiaotong Univ.* 2002. V. 36, № 11. P. 1663–1666.

119. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 1. Геометрически линейная постановка. *Механика композитных материалов*. 2002. Т. 38, № 5. С. 607–620.

120. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 2. Геометрически нелинейная постановка. *Механика композитных материалов*. 2002. Т. 38, № 6. С. 815–826.

121. Sasaki Koji, Saito Naoto, Amagi Shiegeo, Tsunoda Tomoya. Численный анализ остаточных напряжений в прессованных из смол изделиях. Ч. 2. Вязкоупругий анализ остаточных напряжений в ортотропных волокнистых пластиках. *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* 2000. V. 66, № 652. P. 2122–2127.
122. Wang Xingguang, Zhong Weifang, Zou Jing. FEM analysis of NiTiInol-reinforced composite beams. *J. Huazhong Univ. Sci. and Technol.* 1999. V. 27, № 2. P. 43–45.
123. Yang Haitian, Guo Xinglin. Perturbation boundary-finite element combined method for solving the linear creep problem. *Int. J. Solids and Struct.* 2000. V. 37, № 15. P. 2167–2183.
124. Морозов А. В. Визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу. *Вчені записки ТНУ імені В. І. Вернадського. Серія: технічні науки.* 2020. Т. 31 (70). Ч. 1. №2. С. 44–51.
125. Мартиненко В. Г. Теоретичні основи методу накладених сіток. *Mechanics and Advanced Technologies.* 2019. V. 1 (85), P. 93–100.
126. Harald Berger, Mathias Würkner, José A. Otero, Raúl Guinovart-Díaz, Julián Bravo-Castillero, Reinaldo Rodríguez-Ramos. Unit Cell Models of Viscoelastic Fibrous Composites for Numerical Computation of Effective Properties. *Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials, STRUCTMAT,* 2018, V. 89. P. 69–82.
127. Киричевский В. В., Сахаров А. С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. Київ: Будівельник, 1992. 216 с.
128. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Київ: Наук. думка, 2002. 655 с.
129. Киричевский В. В., Толоч В. А. Метод конечных элементов и суперэлементов в приложении к трехмерным задачам механики. Київ: Наук. думка, 2001. 364 с.

130. Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Карпушин А. Д. Матрица жесткости пространственного конечного элемента для исследования конструкций из композиционных материалов. *Вісник Східноукр. держ. ун-ту*. 1999. № 3(18). С. 109–116.
131. Гоменюк С. И., Гребенюк С. Н., Бова А. А., Юречко В. З. Исследование напряженно-деформированного состояния резинометаллической сейсмоопоры. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2014. № 2(35). С. 64–81.
132. Гребенюк С. М., Клименко М. І., Лісняк А. О. Скінченно-елементне моделювання напружено-деформованого стану автомобільної шини. *Вісник ХНТУ*. 2015. № 3(54). С. 108–112.
133. Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г., Гоменюк С. И., Киричевский Р. В., Гребенюк С. Н. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+». Киев: Наук. думка, 2005. 403 с.
134. Лурье А. И. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. 940 с.
135. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
136. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., 1966. 752 с.
137. Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига: Зинатне, 1988. 299 с.
138. Тетерс Г. Оценка надежности оптимальных вязкоупругих композиционных оболочек в расчетах критического времени. *Механика композитных материалов*. 2003. Т. 39, № 6. С. 831–838.
139. Высоцкая Н. Д. Определение параметров эластомерных элементов для совершенствования амортизирующих устройств тракторов и технологического процесса высевающих аппаратов с учетом нелинейного вязкоупругого деформирования: дис. ... канд. техн. наук: 05.20.01. Луганск, 1996. 195 с.

140. Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей: монография. Днепропетровск-Запорожье: ЗНУ, 2012. 370 с.

141. Класторны М., Кондерла П., Пиекарский Р. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 1. С. 109–144.

142. Онуфриенко А. В. Виброизоляция агрегатов машин с использованием рукавных амортизаторов растяжения: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06. 2018, 169 с.

143. Mizerna O. Calculation of the stress-strain state of a pneumocylinder with a rubber-cord shell. *Polish journal of science*. 2020. № 24. Vol. 1. P. 56–60.

144. Мизерная Е. Л. Исследование напряженно-деформированного состояния композита с вязкоупругой матрицей. *VIII Международные молодежные научно-технические чтения им. А. Ф. Можайского: тезисы докладов*, Запорожье, 19...20 мая 2015 г. С. 36–37.

145. Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Клименко М. І., Мізерна О. Л. Чисельне деформування в'язкопружного деформування віброізолятора із волокнистого композиційного матеріалу. *Вісник ХНТУ*. 2018. № 3 (66). Т. 1. С. 39–44.

146. Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитов и конструкций на их основе. *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління*. 2006. № 2. С. 50–54.

147. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Влияние вязкоупругих свойств эластомера на напряженно-деформированное состояние композитных конструкций. *Механика эластомеров – 2005: тезисы докладов VI Международного симпозиума*, Днепропетровск, 22...24 ноября 2005 г. С. 39–40.

148. Grebenyuk S. N., Kirichevsky Val. V., Mizernaya E. L. Modeling of features is stressdeformed states of designs from composite materials. *Advanced*

Problems in Mechanics: XXXIV Summer School- Conference, St. Petersburg, june 25...july 1, 2006 у. Р. 40–41.

149. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния и разрушения композитных конструкций в условиях упругого и вязкоупругого деформирования. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики: тезисы докладов Международной конференции, Харьков, 23...26 октября 2006 г.* С. 63.

150. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние полого ортотропного цилиндра в условиях вязкоупругого деформирования. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні.* 2005. № 2. С. 76–80.

151. Гребенюк С. Н., Лисица Н. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с круговым отверстием. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць.* Дніпропетровськ, 2006. Вип. 63. С. 154–160.

152. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженное состояние защемленной по торцам многослойной резинокордной цилиндрической оболочки. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць.* Днепропетровск, 2007. Вип. 71. С. 166–170.

153. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. *Вісник Східноукраїнського національного університету.* Луганськ, 2010. № 10(152). Ч. 2. С. 41–48.

154. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние композитной пластины с круговым отверстием. *Современные проблемы машиностроения: тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов, Харьков, 1...7 декабря 2006 г.* С. 13.

155. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Вязкоупругое деформирование конструкций из композитных материалов. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: тези доповідей міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського, Дніпропетровськ, 17...19 жовтня 2007 р. С. 180.

156. Мизерная Е. Л., Гребенюк С. Н. Моделирование вязкоупругого деформирования композитных материалов в программном комплексе «МІРЕЛА». *Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці*: тези доповідей IV Всеукраїнської науково-практичної конференції, Луганськ, 15...17 квітня 2010 р. С. 66–67.

157. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Решевская Е. С., Тархова В. М. Специальные конечные элементы в программном комплексе «МІРЕЛА». *Международная конференция по математическому моделированию*: тезисы докладов, Херсон, 12...17 сентября 2010 г. Вып. 3 (39). С. 132–136.

158. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Моделирование и расчет резинокордных конструкций с применением МКЭ. *Математические проблемы технической механики – 2011*: тезисы докладов Международной научной конференции, Днепропетровск, 13...15 апреля 2011 г. С. 60–61.

Таблиця А.4 – Значення коефіцієнтів матриці $[F_{12}^{s'}]$

$F_{12}^{s'} = \frac{1}{2}$	pqr	000	100	010	110	001	101	011	111
	000		$b_{(010)}$	$b_{(100)}$					
	001		$b_{(011)}$	$b_{(101)}$			$b_{(010)}$	$b_{(100)}$	

Таблиця А.5 – Значення коефіцієнтів матриці $[F_{13}^{s'}]$

$F_{13}^{s'} = \frac{1}{2}$	pqr	000	100	010	110	001	101	011	111
	000		$b_{(001)}$			$b_{(100)}$			
	010		$b_{(011)}$		$b_{(001)}$	$b_{(110)}$		$b_{(100)}$	

Таблиця А.6 – Значення коефіцієнтів матриці $[F_{23}^{s'}]$

$F_{23}^{s'} = \frac{1}{2}$	pqr	000	100	010	110	001	101	011	111
	000			$b_{(001)}$		$b_{(010)}$			
	100			$b_{(101)}$	$b_{(001)}$	$b_{(110)}$	$b_{(010)}$		

ДОДАТОК Б

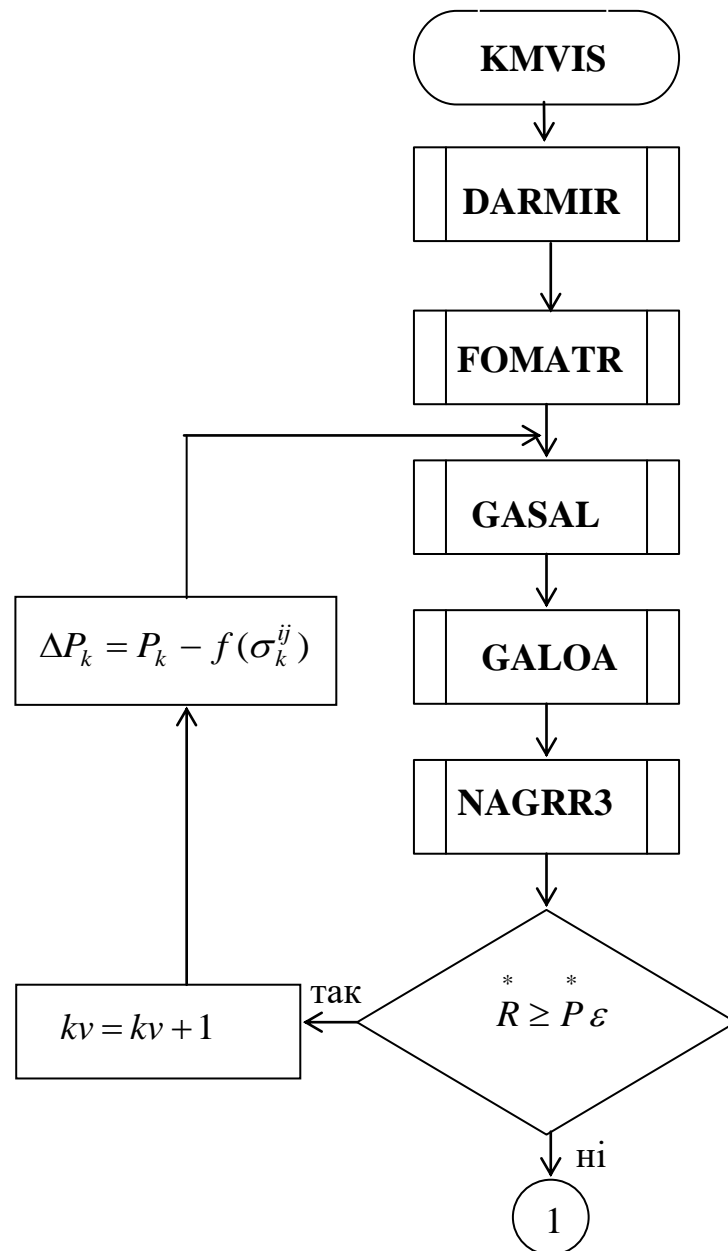


Рисунок Б.1 – Блок-схема алгоритму розв'язку задачі в'язкопружності механіки композитів

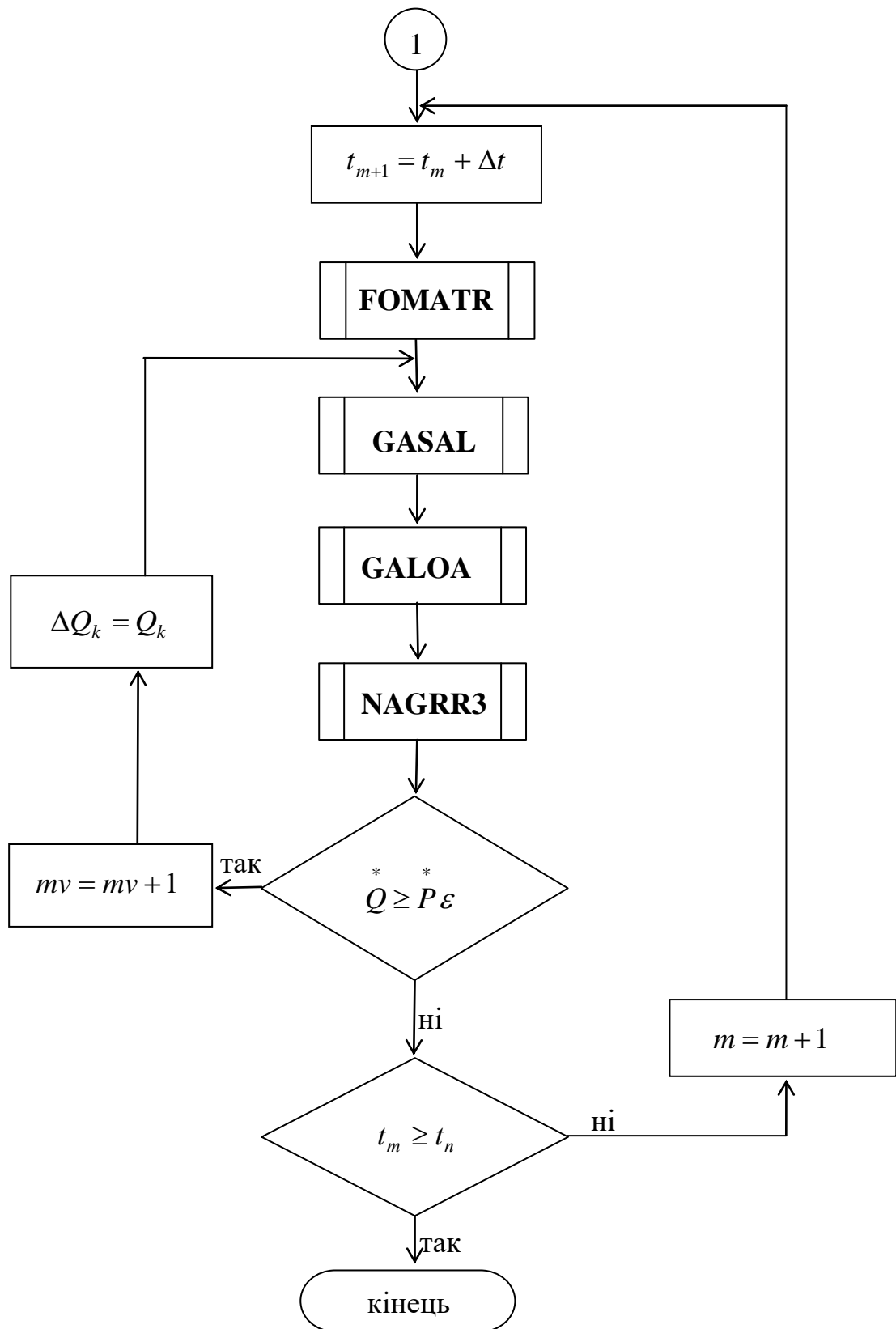


Рисунок Б.2 – Блок-схема алгоритму розв'язку задачі в'язкопружності механіки композитів (продовження)

Умовні позначення до блок-схеми алгоритму:

k – номер кроку за навантаженням;

m – номер кроку за часом;

$k\nu$, $m\nu$ – номери внутрішніх ітерацій;

P – прикладене навантаження;

t – час;

ε – точність обчислення;

x_{ij} – координати вузлів;

u_{ij} – переміщення вузлів;

P^* , R^* , Q^* – суми квадратів вузлових навантажень, нев'язок і додаткових навантажень відповідно.

ДОДАТОК В

Таблиця В.1 – Функціональне призначення програм підсистеми KМVIS

Назва підпрограми	Призначення підпрограми
MAIN	Головна програма управління розв'язанням задач механіки композитів в умовах в'язкопружного деформування
DARMIR	Формування вихідних даних
TELOS	Формування топології конструкції
ZAKREP	Формування межових умов
KORPLI, KORCIL, KORGIP	Формування координат у залежності від виду конструкції
HAGPO3	Формування вузлових навантажень
NUGLOB	Глобальна нумерація невідомих
NNNST3	Визначення розмірності системи рівнянь NEQ і ширини стрічки NST
PARKE	Обчислення параметрів скінченного елемента й координат точок інтегрування
DANPRI	Друк вихідних даних
PECDA3	Друк даних про дискретну модель
NMAQ1	Формування системи розв'язувальних рівнянь
NAGR3	Обчислення напружень у вузлах
ALPRO	Запис і зчитування блоків матриці жорсткості з магнітного диску
PNTPRO	Просторова нумерація вузлів скінченного елемента
WPRO	Обчислення розмірів скінченного елемента
CKPRO	Обчислення тензора перетворень координат C_j^i

Таблиця В.1 – Функціональне призначення програм підсистеми KМVIS
(продовження)

Назва підпрограми	Призначення підпрограми
GKN	Визначення компонентів коваріантного метричного тензора g_{ij}
OBRM33	Обчислення оберненої матриці розмірністю 3x3
TRAN33	Транспонування матриці розмірністю 3x3
SIGDEK	Перетворення тензора другого рангу з місцевої системи координат у декартову
SIGARM	Обчислення напружень у системі армування
SIGMA3	Обчислення пружних напружень у декартовій системі координат
SIGMA31	Обчислення в'язкопружних напружень у декартовій системі координат
PRFMK	Обчислення похідних функції $\psi^{(pqr)}$
DEFOR1	Обчислення компонентів тензора деформацій у місцевій системі координат
DEFCUE	Обчислення компонентів тензора деформацій у місцевій системі координат
FOMAKR	Формування глобальної матриці жорсткості
GASAL	Розв'язання системи рівнянь методом Гауса
GALOA	Зворотній хід метода Гауса
PRINKE	Друк вузлових переміщень і напружень

ДОДАТОК Г

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Зам. директора інституту

геотехнічної механіки

ім. М.С. Полякова НАН України

чл.-корр. НАН України



Круковський О.П.

2021 р.

Акт

про впровадження результатів кандидатської дисертації
МІЗЕРНОЇ ОЛЕНИ ЛЕОНІДІВНИ
 «Напружено-деформований стан волокнистих композиційних матеріалів в
 умовах в'язкопружного деформування»

Комісія в складі: Зав. відділом, докт. техн. наук Дирди В.І.; ст. наук. співр. докт. техн. наук Васильєва Д.Л.; ст. наук. співр., канд. техн. наук Лисиці М.І.; мол. наук. співр. Агальцова Г.М. склала цей акт про те, що розроблена теорія, підходи та пакет прикладних програм, які представлені у кандидатській роботі Мізерної О.Л. «Напружено-деформований стан волокнистих композиційних матеріалів в умовах в'язкопружного деформування», були впроваджені та використані у відділі механіки еластомерних конструкцій Інституту геотехнічної механіки НАН України при розрахунку та створенні гумових амортизаторів із гумовокордними вставками.

Члени комісії:

Дирда В.І.

Васильєв Д.Л.

Лисиця М.І.

Агальцов Г.М.

ДОДАТОК Д

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати

17. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние полого ортотропного цилиндра в условиях вязкоупругого деформирования. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2005. № 2. С. 76–80. (фахове видання)

18. Гребенюк С. Н., Лисица Н. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с круговым отверстием. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць*. Дніпропетровськ, 2006. Вип. 63. С. 154–160. (фахове видання)

19. Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитов и конструкций на их основе. *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління*. 2006. № 2. С. 50–54. (фахове видання, Web of Science)

20. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженное состояние защемленной по торцам многослойной резинокордной цилиндрической оболочки. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць*. Дніпропетровськ, 2007. Вип. 71. С. 166–170. (фахове видання)

21. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. *Вісник Східноукраїнського національного університету*. Луганськ, 2010. № 10(152). Ч. 2. С. 41–48. (фахове видання, Google Scholar)

22. Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Клименко М. І., Мізерна О. Л. Чисельне моделювання в'язкопружного деформування віброізолятора із волокнистого композиційного матеріалу. *Вісник ХНТУ*. 2018. № 3(66). Т. 1. С. 39–44. (фахове видання)

23. Mizerna O. Calculation of the stress-strain state of a pneumocylinder with a rubber-cord shell. *Polish journal of science*. 2020. № 24. Vol. 1. P. 56–60. (Google Scholar)

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

24. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Влияние вязкоупругих свойств эластомера на напряженно-деформированное состояние композитных конструкций. *Механика эластомеров – 2005: Тезисы докладов VI Международного симпозиума, 22...24 ноября 2005 г., Днепропетровск, 2005*. С. 39–40.

25. Grebenyuk S. N., Kirichevsky Val. V., Mizernaya E. L. Modeling of features is stressdeformed states of designs from composite materials. *Advanced Problems in Mechanics: XXXIV Summer School-Conference, June 25...July 1 2006 y., St. Petersburg, 2006*. P. 40–41.

26. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния и разрушения композитных конструкций в условиях упругого и вязкоупругого деформирования. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики: Тезисы докладов Междунар. конф., 23...26 октября 2006 г., Харьков, 2006*. С. 63.

27. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние композитной пластины с круговым отверстием. *Современные проблемы машиностроения: Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов, 1...7 декабря 2006 г., Харьков, 2006*. С. 13.

28. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Вязкоупругое деформирование конструкций из композитных материалов. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: Тези доповідей міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського, 17...19 жовтня 2007 р., Дніпропетровськ, 2007. С. 180.

29. Мизерная Е. Л., Гребенюк С. Н. Моделирование вязкоупругого деформирования композитных материалов в программном комплексе «МІРЕЛА». *Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці*: Тези доповідей IV Всеукраїнської науково-практичної конференції, 15...17 квітня 2010 р., Луганськ, 2010. С. 66–67.

30. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Решевская Е. С., Тархова В. М. Специальные конечные элементы в программном комплексе «МІРЕЛА». *Международная конференция по математическому моделированию*: Тезисы докладов, 12...17 сентября 2010 г., Херсон, 2010. Вып. 3(39). С. 132–136.

31. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Моделирование и расчет резинокордных конструкций с применением МКЭ. *Математические проблемы технической механики – 2011*: Тезисы докладов Международной научной конференции, 13...15 апреля 2011 г., Днепропетровск, 2011. С. 60–61.

32. Мизерная Е. Л. Исследование напряженно-деформированного состояния композита с вязкоупругой матрицей. *VIII Международные молодежные научно-технические чтения им. А. Ф. Можайского*: Тезисы докладов, 19...20 мая 2015 г., Запорожье, 2015. С. 36–37.