МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Методичні вказівки
та індивідуальні завдання

до контрольної роботи з дисципліни

“Вища математика”

(розділи**:** лінійна алгебра та аналітична геометрія, диференційне числення функції однієї та багатьох змінних)

для студентів ФРЕТ та ФКНТ заочної форми навчання

2022

Методичні вказівки та індивідуальні завдання до контрольної роботи з дисципліни "Вища математика" (розділи: лінійна алгебра та аналітична геометрія, диференційне числення функції однієї та багатьох змінних)" для студентів ФРЕТ та ФКНТ заочної форми навчання / Укл.: Нечипоренко Н.О., Щербина О.А., Коротунова О.В. – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2022. – 66 с.

Укладачі: Нечипоренко Н.О., доцент, к.ф.-м.н.
Щербина О.А., асистент
Коротунова О.В., доцент, к.т.н.

Рецензент: Левицька Т.І., доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Нечипоренко Н.О.

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
Протокол № 9 від 25.03.2022 р.

Рекомендовано до видання
НМК факультету
радіоелектроніки та
телекомунікацій
Протокол №8 від 29.04.2022р.

ЗМІСТ

1. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Матриці. Дії над матрицями: лінійні операції над матрицями, добуток матриць, транспонування матриць.
2. Визначники квадратних матриць, їх властивості.
3. Обернена матриця . Ранг матриці.
4. Системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі.
5. Метод Крамера розв'язування системи лінійних рівнянь.
6. Метод Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь.
7. Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь.
8. Однорідні системи. Теорема про ранг однорідної системи лінійних рівнянь.
9. Вектор та його координати. Лінійні операції над векторами.
10. Скалярний, векторний та змішаний добуток векторів. Їх властивості.
11. Рівняння прямої на площині, різні форми рівнянь прямої.
12. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Кут між двома прямими.
13. Рівняння площини. Взаємне розміщення двох площин.
14. Рівняння прямої в просторі: загальне, канонічне, параметричне.
15. Взаємне розміщення прямої й площини.
16. Канонічні рівняння ліній другого порядку: еліпс, коло, гіпербола. парабола.
17. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного виду.
18. Параметричні рівняння ліній. Полярна система координат.
19. Поверхні другого порядку. Циліндричні поверхні. Поверхні обертання.
20. Границя функції. Основні теореми про границі.
21. Перша та друга важливі границі.
22. Властивості й порівняння нескінченно малих функцій.
23. Неперервність функції. Точки розриву функції.
24. Властивості функцій, неперервних на відрізку.
25. Похідна функції. Диференціал функції. Правила диференціювання.
26. Похідні й диференціали вищих порядків.

27. Основні теореми диференційного числення.

28. Застосування похідної до обчислення границь. Правило Лопіталя.

29. Формула Тейлора та Маклорена.

30. Умови монотонності функції. Необхідні й достатні умови локального екстремуму.

31. Найбільше та найменше значення функції.

32. Напрями опуклості й точки перегину графіка функції.

33. Асимптоти графіка функції.

34. Означення функції багатьох змінних. Частинні похідні першого та другого порядку.

35.Дотична площина і нормаль до поверхні.

36. Похідні складеної функції.

37. Повний диференціал функції двох змінних.

38. Похідна за напрямом. Градієнт функції, його властивості.

39. Локальні екстремуми функції. Необхідні й достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.

40. Умовний екстремум функції двох змінних. Метод множників Лагранжу.

2. РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

ЗАВДАННЯ 2.1.

Задано наступні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix};\quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити матрицю X за формулою $X = A \cdot \left(B + 2 \cdot C^{\mathrm{T}}\right)$.

Розв'язання

1) Якщо в матриці C поміняти місцями відповідні рядки та стовпці, то одержимо транспоновану матрицю C^{T}:

$$\mathrm{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $2 \cdot \mathrm{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, тобто кожен елемент матриці C слід помножити на 2.

3) Для знаходження суми матриць слід додати їх відповідні елементи, тому

$$\mathrm{B} + 2 \cdot \mathrm{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-10) & 3+(-2) \\ 2+(-4) & 0+8 & 1+4 \\ 3+2 & 5+6 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 1 \\ -2 & 8 & 5 \\ 5 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Добутком матриці R розміру $m\times\ p$ на матрицю S розміру $p\times\ n$ називається така матриця $G = R \cdot S$ розміру $m\times n$, кожний елемент q_{ij} якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника R та j-го стовпця другого співмножника S. Тому маємо:

$$X = A \cdot \left(B + 2 \cdot C^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -8 & 1 \\ -2 & 8 & 5 \\ 5 & 11 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 & 1 \cdot (-8) + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 11 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 & 3 \cdot (-8) + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 11 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 17 & 15 \\ 1 & -16 & 8 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ 2.2.

Задана система лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -10, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв’язати її: а) за формулами Крамера;
б) матричним методом;
в) методом Гауса.

Розв'язання

а) Формули Крамера використовуються лише тоді, коли основна матриця системи квадратна й невироджена. Формули мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

За правилом «трикутників» визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком «+», а три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі й у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком «-».

Обчислимо основний визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + (-3) \cdot (-3) \cdot 2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 -$$
$$-3 \cdot (-3) \cdot 1 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 52.$$

Оскільки цей визначник не дорівнює нулю, матриця системи невироджена й тому система має єдиний розв'язок.

Замінимо тепер перший стовпець визначника на стовпець вільних членів та обчислимо визначник

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -10 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-10) \cdot 4 -$$
$$-4 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) \cdot 7 - (-10) \cdot (-3) \cdot 1 = -104.$$

Замінимо тепер другий та третій стовпець визначника на стовпець вільних членів та обчислимо відповідні визначники:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & -10 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 52; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 5 & -10 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 156.$$

За формулами Крамера дістанемо

$$x_1 = \frac{-104}{52} = -2; \qquad x_2 = \frac{52}{52} = 1; \qquad x_3 = \frac{156}{52} = 3.$$

б) Для розв'язку системи матричним методом запишемо систему рівнянь у матричному вигляді $A \cdot X = B$, де A - основна матриця системи, B - матриця-стовпець вільних членів. Тоді розв'язком системи буде матриця-стовпець $X = A^{-1} \cdot B$.

Обернена матриця A^{-1} обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A},$$

де Δ - основний визначник системи , а $\tilde{A}$ – приєднанна матриця. Для побудови приєднанної матриці необхідно кожен елемент a_{ij} матріці A замінити на його алгебраїчне доповнення A_{ij} та отриману матрицю транспонувати (поміняти місцями відповідні рядки та стовпці матриці).

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \ ,$$

де мінор M_{ij} одержується з визначника Δ видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

В нашому прикладі: $\Delta = 52$.

Враховуючи, що визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей, обчислимо:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 17;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -9;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2.$

Аналогічно знайдемо:

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 19;$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7;$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -11;$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 15;$ $A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 14.$

Тепер можна записати обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 17 & 19 & -11 \\ -9 & -7 & 15 \\ 2 & -10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо розв'язок системи за формулою $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 17 & 19 & -11 \\ -9 & -7 & 15 \\ 2 & -10 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 17 \cdot 7 + 19 \cdot (-10) + (-11) \cdot 3 \\ (-9) \cdot 7 + (-7) \cdot (-10) + 15 \cdot 3 \\ 2 \cdot 7 + (-10) \cdot (-10) + 14 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} -104 \\ 52 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тобто $x_1 = -2;$ $x_2 = 1;$ $x_3 = 3.$

в) Розв'яжемо тепер систему методом Гауса. Для цього систему запишемо у вигляді розширеної матриці, де кожен рядок представляє собою задане рівняння:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & -3 & -10 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Виключимо x_1 з другого та третього рядків. Для цього помножимо на (-3) перше рівняння і додамо те, що отримали до другого рівняння. Потім знову перше рівняння помножимо на (-2) і додамо те, що отримали до третього рівняння. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 14 & -15 & -31 \\ 0 & 10 & -7 & -11 \end{array}\right).$$

Віднімемо третій рядок від другого та отриманий рядок поділимо на 4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & -8 & -20 \\ 0 & 10 & -7 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 10 & -7 & -11 \end{array}\right).$$

Друге рівняння помножимо на (-10), та додамо до третього рівняння. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right).$$

Цій розширеній матриці відповідає трикутна система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7; \\ x_2 - 2x_3 = -5; \\ 13x_3 = 39. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 + 3x_2 - 4x_3 = -2; \\ x_2 = -5 + 2x_3 = 1; \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow$$

Отже, система рівнянь має розв'язок: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

ЗАВДАННЯ 2.3.

Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=0, \\ x-y+4z=0, \\ 5x+2y+10z=0. \end{cases}$$

Розв'язання

Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right).$$

Застосуємо метод Гауса та здійснимо елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} \text{II ряд} + \text{I ряд } \times(-3) \\ \text{III ряд} + \text{I ряд } \times(-5) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Одержаній матриці відповідає система:

$$\begin{cases} x-y+4z=0, \\ 7y-10z=0. \end{cases}$$

Це система двох рівнянь з трьома невідомими, яка має нескінченну множину розв'язань. Переносимо невідому z у праву частину рівнянь:

$$\begin{cases} x-y=-4z, \\ 7y=10z. \end{cases}$$

Звідси дістанемо розв’язок системи:

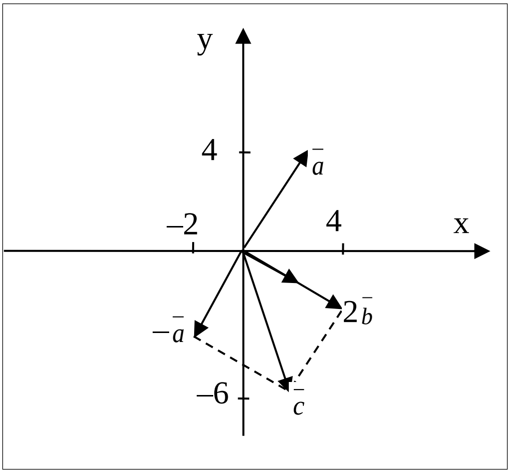
$$\begin{cases} y=\dfrac{10z}{7}, \\ x=-\dfrac{18z}{7}, \\ z-\textit{будь яке число}. \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ 2.4.

По заданим векторам $\overline{a} = (2{,}4)$, $\overline{b} = (2, -1)$ побудувати вектор $\overline{c} = -\overline{a} + 2 \cdot \overline{b}$.

Розв'язання

Розглянемо прямокутну декартову систему координат на площині, побудуємо на ній вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$.



Вектори $-\overline{a}$ та $2 \cdot \overline{b}$ мають координати $-\overline{a} = (-2, -4)$, $2 \cdot \overline{b} = (4, -2)$. Тоді сума $\overline{c}$ цих векторів зображується як діагональ паралелограма, побудованого на векторах $-\overline{a}$ та $2 \cdot \overline{b}$, і має координати : $\overline{c} = (-2 + 4,\ -4 - 2) = (2, -6)$.

ЗАВДАННЯ 2.5.

Трикутник ABC задано координатами точок A(6,6,5), B(4,9,5), C(4,6,11). Знайти кут при вершині A.

Розв'язання

Кут між двома векторами $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ знаходиться за формулою

$$cos\,\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|},$$

де $(\bar{a}, \bar{b})$ – скалярний добуток векторів,

$|\bar{a}|, |\bar{b}|$ - довжина векторів $\bar{a}, \bar{b}$.

Вони обчислюються за формулами:

$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3;$

$|\bar{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2};\quad |\bar{b}| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2};$

В нашому прикладі:

$\bar{a} = \overline{AB} = (4-6, 9-6, 5-5) = (-2,3,0),$

$\bar{b} = \overline{AC} = (4-6, 6-6, 11-5) = (-2,0,6).$

$$cos\,\angle A = \frac{(-2)\cdot(-2)+3\cdot 0+0\cdot 6}{\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+0^2+6^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{130}}.$$

ЗАВДАННЯ 2.6.

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, де $\bar{a} = \bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}$; $|\bar{p}| = 3$; $|\bar{q}| = 2$; $(\bar{p}\hat{\ }\bar{q}) = \pi/2$.

Розв'язання

Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку $\bar{a} \times \bar{b}$. Знайдемо цей добуток, враховуючи властивості векторного добутку:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (\bar{p} - \bar{q}) \times (3\bar{p} + q) = 3\bar{p} \times \bar{p} + \bar{p} \times \bar{q} - 3\bar{q} \times \bar{p} - \bar{q} \times \bar{q} =$$

$$= \bar{p} \times \bar{q} + 3\bar{p} \times \bar{q} = 4\bar{p} \times \bar{q}.$$

Оскільки $|\bar{p} \times \bar{q}| = |\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cdot sin(\bar{p}\hat{\ }\bar{q})$, то

$$S = |4\bar{p} \times \bar{q}| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Отже, площа паралелограма S дорівнює 24 (кв. од.)

ЗАВДАННЯ 2.7.

Задані координати вершин піраміди $A_1(1;0;2)$, $A_2(-1;3;1)$, $A_3(2;1;4)$, $A_4(1;2;0)$. Обчислити об'єм піраміди та її висоту, проведену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Розв'язання

Обчислимо координати векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, віднімаючи із координат кінця координати початку вектора.

$\overline{A_1A_2} = (-2;3;-1)$, $\overline{A_1A_3} = (1;1;2)$, $\overline{A_1A_4} = (0;2;-2)$.

Об'єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ модуля мішаного добутку цих векторів. Знайдемо цей добуток:

$$\left(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right)\overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 8 + 6 = 16.$$

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

З іншої сторони , $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} S_{осн} \times H$. З цієї формули випливає, що $H = \frac{3V}{S}$.

Знайдемо площу основи, тобто площу трикутника $A_1A_2A_3$:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|.$$

Обчислюємо векторний добуток

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\bar{\imath} - \bar{\jmath} - 2\bar{k} - 3\bar{k} + \bar{\imath} + 4\bar{\jmath} =$$
$$= 7\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - 5\bar{k}.$$

$$\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{7^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{83}.$$

Таким чином, $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{\sqrt{83}}{2}$; $H = \frac{3\times 8}{3\times\sqrt{83}} = \frac{8\sqrt{83}}{83}$.

ЗАВДАННЯ 2.8.

Задані вершини трикутника ABC: A(3,6), B(2,3), C(-3,1). Знайти:
а) рівняння сторони AB;
б) рівняння висоти CH;
в) рівняння медіани AM;
г) точку N перетину медіани AM та висоти CH;
д) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно AB;
е) відстань від точки C до прямої AB.

Розв'язання

а) Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Тоді рівняння сторони AB:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-6}{3-6};\Rightarrow\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y-6}{-3};\Rightarrow\ 3\cdot(x-3)=y-6;$$

$y=3\cdot x-3$ - рівняння сторони AB, кутовий коефіцієнт k =3.

У загальному вигляді це рівняння можна записати так:

$$3x-y-3=0.$$

б) Висота CH перпендикулярна до сторони AB. Тоді з умови перпендикулярності $k_{AB}\cdot k_{CH}=-1$ знаходимо $k_{CH}=-\frac{1}{3}$.

Застосовуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Таким чином, рівняння висоти CH має вигляд:

$$y-1=-\frac{1}{3}\cdot(x+3)\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{3}\cdot x.$$

в) Знайдемо тепер рівняння медіани AM. Відомо, що координати середини сторони знаходяться за формулою:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Тоді координати точки M, яка є серединою BC, будуть такі:

$$x_M = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}\,;\; y_M = \frac{3+1}{2} = 2\,.$$

Рівняння медіани AM знаходимо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (A і M):

$$\frac{x-3}{-\frac{1}{2}-3} = \frac{y-6}{2-6};\;\Rightarrow\; -4\cdot x + 12 = -\frac{7}{2}\cdot y + 21.$$

Отже, рівняння AM: $-8\cdot x + 7\cdot y - 18 = 0.$

г) Точку N перетину медіани AM та висоти CH знайдемо з рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}\cdot x, \\ -8\cdot x + 7\cdot y - 18 = 0. \end{cases}$$

$$-8\cdot x - \frac{7}{3}\cdot x = 18;\Rightarrow x = -\frac{54}{31}; y = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{54}{31}\right) = \frac{18}{31}.$$

Тобто $N\left(-\frac{54}{31},\frac{18}{31}\right)$.

д) Знайдемо тепер рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно AB. Оскільки шукана пряма паралельна прямій AB, то їхні кутові коефіцієнти рівні, тобто $k = k_{AB} = 3$. Також відомо, що пряма проходить через точку C(-3,1). Використовуючи формулу

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

дістанемо :

$$y - 1 = 3(x+3) \Rightarrow \quad y = 3\cdot x + 10\;,$$

що є рівнянням шуканої прямої.

е) Відстань d від точки C до прямої AB знайдемо за формулою:

$$d = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

Використовуючи рівняння прямої AB у загальному вигляді , обчислимо

$$d = \frac{|3\cdot x_C - y_C - 3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|3\cdot(-3) - 1 - 3|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}}\,.$$

ЗАВДАННЯ 2.9.

Задані точки A(2,0,-1), B(0,1, 2), C(2,1,0), D(1,-1,2). Знайти проекцію точки D на площину, яка проходить через точки A, B, C.

Розв'язання

При розв’язанні використовуються наступні теоретичні дані.

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Вектор $\overline{N} = (A, B, C)$ перпендикулярний до цієї площини, він називається нормальним вектором площини.

Якщо площина проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N} = (A, B, C)$, то її рівняння має вигляд:

$$\mathrm{A}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \mathrm{B}(\mathrm{y} - y_0) + \mathrm{C}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) = 0.$$

Якщо площина проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій, то рівняння площини має вигляд :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Пряму L у просторі можна визначити точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить цій прямій і напрямним вектором $\overline{q} = (l, m, n)$ цієї прямої.

Канонічні рівняння прямої L:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} .$$

Якщо в цьому рівнянні значення відношень позначити параметром t, а потім розв'язати одержані рівняння відносно x, y, z, то дістанемо:

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t. \end{cases}$$

Ці рівняння називаються параметричними рівняннями прямої L.

Напишемо рівняння площини , яка проходить через точки A, B, C:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 0-2 & 1-0 & 2+1 \\ 2-2 & 1-0 & 0+1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot(-2) - y\cdot(-2) + (z+1)\cdot(-2) = 0,$$

$$x - y + z - 1 = 0.$$

Отже, ми знайшли рівняння плошини ABC. Нормальний вектор площини: $\overline{N} = (1,-1,1)$.

Складемо рівняння прямої, що проходить через точку D перпендикулярно площині ABC. Напрямним вектором прямої буде вектор $\overline{q}||\overline{N}$. Звідси рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

Проекцією точки D на площину ABC буде точка перетину прямої і площини. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\frac{x-1}{1} = t; \qquad \frac{y+1}{-1} = t; \qquad \frac{z-2}{1} = t;$$

$$\begin{cases} x = t+1, \\ y = -t-1, \\ z = t+2. \end{cases}$$

Підставимо отримані рівності в рівняння площини:

$$t + 1 + t + 1 + t + 2 - 1 = 0 ,$$

$$3t = -3,$$

$$t = -1.$$

Тоді

$$\begin{cases} x_0 = -1 + 1 = 0, \\ y_0 = 1 - 1 + 0, \\ z_0 = -1 + 2 = 1. \end{cases}$$

Отже, $M_0(0,0,1)$ – проекція точки D на площину ABC.

ЗАВДАННЯ 2.10.

Привести задане рівняння до канонічного виду, визначити тип кривої та побудувати її:

а) $7x^2 + 16y^2 = 112$,
б) $x^2 - 2y + y^2 - 3 = 0$,
в) $5x^2 - 4y^2 = 20$,
г) $y^2 + 2x - 3 = 0$.

Розв'язання

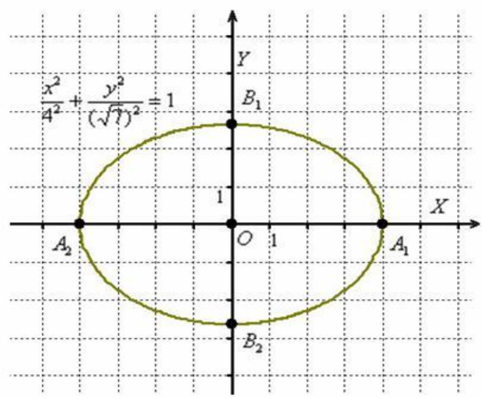
Наведемо канонічні рівняння кривих другого порядку.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Еліпс
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Гіпербола
$y^2 = 2px$, $p > 0$	Парабола
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	Мнимий еліпс
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	Пара прямих, що перетинаються
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	Пара мнимих прямих, що перетинаються
$y^2 - a^2 = 0$	Пара паралельних прямих
$y^2 + a^2 = 0$	Пара мнимих паралельних прямих

а) Приведемо рівняння до канонічного виду. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 112. Отримаємо:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = 1.$$

Данна крива – еліпс з півосями $a = 4$, $b = \sqrt{7}$ та центром у точці $O(0; 1)$.



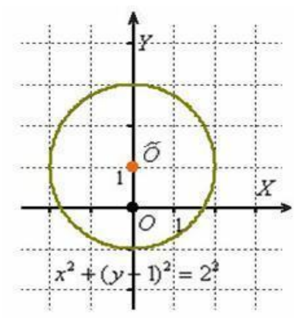
б) Виділемо повні квадрати при змінних, які входять в рівняння:

$$x^2+(y^2-2y+1-1)-3=0\,,$$

$$x^2+(y-1)^2=4 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-1)^2=2^2\,.$$

При паралельному переносі осей координат, яке задається формулами $x'=x$, $y'=y-1$ початок координат нової системи опиниться у точці $O'(0;1)$, а рівняння кривої прийме канонічній вид

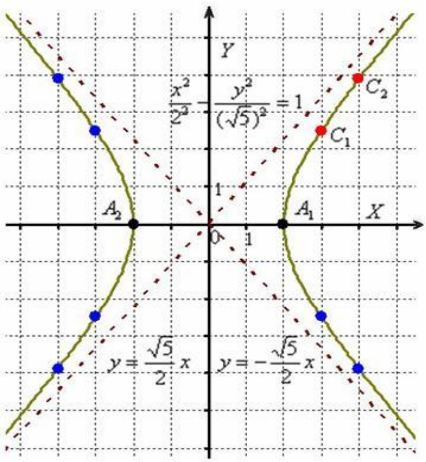
$(x')^2+(y')^2=2^2$ – коло з радіусом $r=2$.



в) Приведемо рівняння до канонічного виду. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 20. Отримаємо:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1\,.$$

Данна крива – гіпербола з півосями $a = 2, b = \sqrt{5}$ та центром у точці $O(0; 0)$.

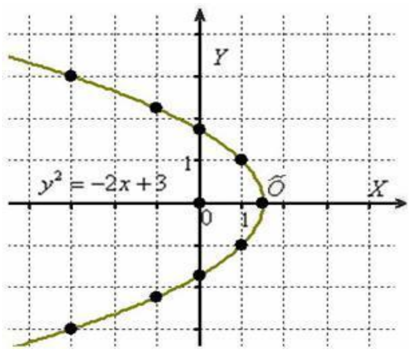


г) Приведемо рівняння до канонічного виду:

$$y^2 = -2x + 3 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

При паралельному переносі осей координат, яке задається формулами $x' = x - \frac{3}{2}$, $y' = y$ початок координат нової системи опиниться у точці $O'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, а рівняння кривої прийме канонічній вид

$$(y')^2 = -2(x')^2 \text{ – парабола .}$$



ЗАВДАННЯ 2.11.

Привести задане рівняння до канонічного виду та визначити тип поверхні:

а) $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 2x - 12y - 8z - 3 = 0$,

б) $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$.

Розв'язання

Наведемо рівняння деяких поверхонь:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Еліпсоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Однопорожнинний гіперболоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	Двопорожнинний гіперболоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Конус другого порядку
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	Еліптичний параболоїд
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	Гіперболічний параболоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Еліптичний циліндр
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гіперболічний циліндр
$x^2 = 2py$	Параболічний циліндр

а) Виділяємо повні квадрати при змінних, які входять в рівняння:

$$\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 2\left(y^2 + 6y + 9 - 9\right) + 4\left(z^2 - 2z + 1 - 1\right) - 3 = 0,$$

$$(x+1)^2 - 2(y+3)^2 + 4(z-1)^2 = -10,$$

$$\frac{(x+1)^2}{10} - \frac{(y+3)^2}{5} + \frac{(z-1)^2}{5/2} = -1.$$

При паралельному переносі осей координат, яке задається формулами $x' = x + 1,\ y' = y + 3,\ z' = z - 1$ початок координат нової системи окажеться в точці $O'(-1; -3; 1)$, а рівняння поверхні прийме канонічній вид

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2} - \frac{(y')^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{(z')^2}{\left(\sqrt{5/2}\right)^2} = -1.$$

Данна поверхня – двопорожнинний гіперболоїд з півосями $a = \sqrt{10}, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{\frac{5}{2}}$, розташований вздовж нової осі $O'Y'$.

б) Виділяємо повні квадрати при змінних, які входять в рівняння:

$$\left(x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16 - 16\right) + (2y)^2 = 0,$$

$$(x-4)^2 + 4y^2 = 16,$$

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

При паралельному переносі осей координат, яке задається формулами $x' = x - 4$, $y' = y$ - початок координат нової системи буде у точці $O'(4; 0; 0)$, а рівняння поверхні прийме канонічній вид

$$\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$$

Дана поверхня – еліптичний циліндр з півосями $a = 4, b = 2$, розташований вздовж осі $O'Z$.

ЗАВДАННЯ 2.12.

Знайти вказані границі:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.

Розв'язання

а) Окільки чисельник та знаменник дробу перетворюються в нуль при $x=1$, то для розкриття невизначеності $\dfrac{0}{0}$ розкладемо чисельник та знаменник на множники та поділимо їх на (x-1).

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\frac{0}{-3}=0\cdot$$

б) Щоб розкрити невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, треба чисельник та знаменник дробу поділити почленно на найвищий степінь змінної.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{3}{2},$$

оскільки $\dfrac{const}{\infty}\to0$.

в) Якщо чисельник або знаменник є ірраціональні функції, то для розкриття невизначеності необхідно виконати перетворення з ірраціональністю (наприклад, помножити на спряжений вираз).

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(x^2-16\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x+1-9)}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2}{(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\frac{2}{48}=\frac{1}{24}.$$

г) Невизначеність виду 1^{∞} розкривається за допомогою другої стандартної границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x-3}-1\right)^{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-x+3}{x-3}\right)^{x-5}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{3}}\right]^{\frac{3(x-5)}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3(x-5)}{x-3}}=e^{3}.$$

ЗАВДАННЯ 2.13.

Знайти похідні функцій:

а) $y=\frac{e^{\cos 2x}}{(x+1)^3}$;

б) $\cos y=2xy^3-7x$;

в) $y=x^{\cos 3x}$;

г) $\begin{cases} y=e^{2t}\cdot\sin 3t \\ x=e^{2t}\cdot\cos 3t \end{cases}$.

Розв'язання

При диференціюванні функцій треба використовувати таблицю похідних та основні правила диференціювання.

Таблиця похідних:

1. $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$;

$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}$; $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

2. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\cdot u';$ $\qquad (e^{u})' = e^{u}u';$

3. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}u';$ $\qquad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u};$

4. $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u';$

5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u';$

6. $\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u';$

7. $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u';$

8. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u';$

9. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u';$

10. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}u';$

11. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'.$

Основні правила диференціювання:

1. $c' = 0$, де c=const;
2. $\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x)+v'(x);$
3. $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x);$
4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)};$
5. Якщо функція $u=\varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну f'_u у відповідній точці u, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x і справедлива формула $y'_x = f'_u\cdot u'_x$.

Обчислимо тепер похідні від заданих функцій.

а) $$\left(\frac{e^{\cos 2x}}{(x+1)^3}\right)' = \frac{\left(e^{\cos 2x}\right)'\cdot(x+1)^3 - e^{\cos 2x}\cdot\left((x+1)^3\right)'}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{e^{\cos 2x}\cdot(\cos 2x)'\cdot(x+1)^3 - e^{\cos 2x}\cdot 3(x+1)^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{e^{\cos 2x}(-\sin 2x\cdot 2)(x+1)^3 - e^{\cos 2x}\cdot 3(x+1)^2\cdot 1}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{-e^{\cos 2x}\left(2\sin 2x(x+1)-3\right)}{(x+1)^4}.$$

б) Якщо функціональна залежність між y та x задана неявно, тобто рівністю $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної по x від функції y треба обидві частини рівняння $F(x, y(x))=0$ продиференціювати по x враховуючи, що y залежить від x, а потім розв'язати добуте рівняння відносно y'.

У нашому прикладі y задано рівністю

$$cos\, y - 2xy^2 + 7x = 0.$$

Диференціюючи обидві частини рівняння по x, дістанемо

$$-sin\, y\cdot y' - 2y^2 - 2x\cdot 2y\cdot y' + 7 = 0.$$

Виражаємо з даного рівняння y':

$$-y'(sin\, y + 4xy) = 2y^2 - 7.$$

$$y' = \frac{7-2y^2}{sin\, y+4xy}.$$

в) Функція вигляду $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$, де й основа і показник змінюються одночасно з незалежною змінною, називається показниково-степеневою. Щоб знайти похідну такої функції, необхідно її прологарифмувати:

$$\ln y = \varphi(x)\cdot\ln(f(x)).$$

Диференціюючи обидві частини рівняння по x, дістанемо:

$$\frac{y'}{y}=\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\varphi(x).$$

Тоді

$$y'=y\cdot\left(\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\varphi(x)\right),$$

$$y'=f(x)^{\varphi(x)}\cdot\left(\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\varphi(x)\right).$$

У нашому прикладі y задано рівністю $y=x^{\cos 3x}$. Тоді

$$\ln y = \ln x^{\cos 3x};$$
$$\ln y = \cos 3x\cdot\ln x;$$
$$\frac{1}{y}y' = -3\sin 3x\cdot ln\, x+\cos 3x\cdot\frac{1}{x}.$$

Підставляючи в цей вираз y, маємо

$$y' = x^{\cos 3x}\cdot\left(-3\sin 3x\cdot\ln x+\cos 3x\,\frac{1}{x}\right).$$

г) Нехай функція $y=f(x)$ задана рівняннями

$$\begin{cases} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$$

Завдання функціональної залежності між двома змінними, які, в свою чергу, є функціями однієї й тієї самої допоміжної змінної t, називається параметричним. Похідна параметрично заданої функції обчислюються за формулою:

$$y'=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Знайдемо y'_x для нашого прикладу:

$$y'_x=\frac{(e^{2t}\cdot\sin 3t)'_t}{(e^{2t}\cdot\cos 3t)'_t}=\frac{2e^{2t}\cdot\sin 3t+e^{2t}\cdot 3\cos 3t}{2e^{2t}\cdot\cos 3t-e^{2t}\cdot 3\sin 3t}=\frac{2\sin 3t+3\cos 3t}{2\cos 3t-3\sin 3t}.$$

ЗАВДАННЯ 2.14.

Обчислити за правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{\ln(x^2-3)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання

Правило Лопиталя застосується для невизначеності виду $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$. Згідно цього правила границя відношення двох функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо вона існує.

а) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{\ln\left(x^2-3\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-7x+10\right)'}{\left(\ln\left(x^2-3\right)\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{\frac{2x}{x^2-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-7)\left(x^2-3\right)}{2x}=\frac{-3\cdot 1}{4}=-\frac{3}{4}.$$

б) $$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}=\infty.$$

ЗАВДАННЯ 2.15.

Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання

Для дослідження функції та побудови її графіка доцільно дотримуватися такої схеми.

1. Знаходимо область визначення функції .
2. Досліджуємо функцію на парність чи непарність, періодичність.
3. Знаходимо асимптоти графіка функції .
4. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання та спадання функції, точки екстремумів.
5. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості, точки перегину функції.

Розв'язування проведемо згідно вказаної схеми.

1. Задана функція має розрив в точці $x = 1$, тому
$$x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$
2. Задана функція не буде парною, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ и не буде непарною, оскільки $f(-x) \neq -f(x)$.
3. Знайдемо асимптоти графіка функції.

Обчислимо:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty.$$

Отже, пряма $x = 1$ є вертикальна асимптота.

Перевіримо, чи має функція похилі асимптоти. Обчислимо

$$\text{k}= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Тому пряма $y = k \cdot x + b = 0 \cdot x + 0,$ тобто $y = 0$ буде похилою (горизонтальною) асимптотою.

4. Обчислимо похідну функції:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = -\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Похідна не існує у точці x = 1 і дорівнює нулю при x = 0.
Складаємо таблицю:

x	(-∞, 0)	0	(0, 1)	**1**	(1, ∞)
$f'(x)$	—	0	+	не існує	—
$f(x)$	↘	min	↗	не існує	↘

$y_{\min} = y(0) = -1$.

5. Друга похідна має вигляд:

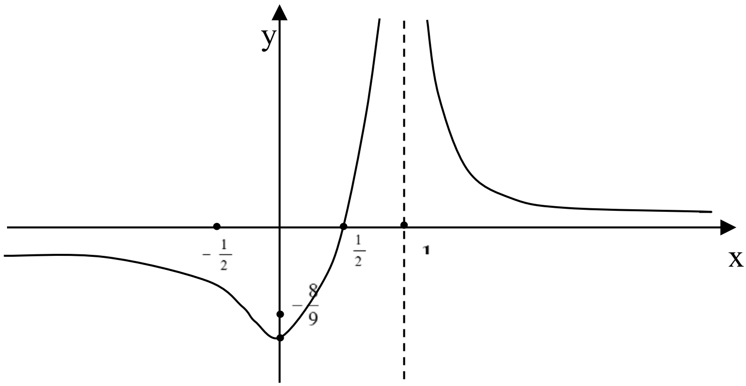
$$y'' = -\frac{2(x-1)^3 - 2x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -\frac{2x-2-6x}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4}.$$

$y'' = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$, y'' не існує при x = 1.
Складаємо таблицю:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	**1**	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	не існує	+
$f(x)$	$\cap$	точка перегину	$\cup$	не існує	$\cup$

При $x = -\frac{1}{2}$ функция має перегин, $y_{\text{пер}} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$.

За одержаними результатами будуємо графік заданої функції.



ЗАВДАННЯ 2.16.

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ у точці $M_0(-1; 0; 1)$.

Розв'язання

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x;y;z) = 0$, то рівняння дотичної площини має вид:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x; y)$, то рівняння дотичної площини має вид:

$$f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Для нашого прикладу знаходимо частинні похідні

$$f'_x(x; y) = 2x + 3y - 4; \qquad f'_y(x; y) = -2y + 3x + 2.$$

Підставляємо в ці вирази координати точки $M_0(-1; 0; 1)$:

$$f'_x(x_0; y_0) = -6; \qquad f'_y(x_0; y_0) = -1.$$

Отже рівняння дотичної площини: $-6(x+1)-y-(z-1)=0$;

$$6x+y+z+5=0.$$

Рівняння нормалі: $\frac{x+1}{6}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$.

ЗАВДАННЯ 2.17.

Для функції $z=x^y+ln\frac{x}{y}$:

а) знайти частинні похідні І-го порядку;

б) знайти градієнт у точці $M_0(1,1)$ та у загальному вигляді.

Розв'язання

а) При обчисленні частинних похідних потрібно користуватися відомими правилами та формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другу змінну постійною.

Вважаючи змінну y сталою, отримаємо

$$z'_x=y\cdot x^{y-1}+\frac{1}{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=y\cdot x^{y-1}+\frac{1}{x}.$$

Якщо вважати x сталою, отримаємо

$$z'_y=x^y\cdot ln\,x+\frac{1}{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=x^y\,ln\,x-\frac{1}{y}$$

б) Градієнтом функції $z=f(x,y)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні цієї функції, тобто

$$\overline{gradz}=\{z'_x,z'_y\}=z'_x\cdot\bar{i}+z'_y\cdot\bar{j}.$$

У нашому випадку градієнт у загальному вигляді буде таким:

$$\overline{gradz}=\left(y\cdot x^{y-1}+\frac{1}{x}\right)\cdot\bar{i}+\left(x^y\cdot ln\,x-\frac{1}{y}\right)\cdot\bar{j},$$

а у точці $M_0(1,1)$:

$$\overline{gradz(M_0)}=\left.\left(y\cdot x^{y-1}+\frac{1}{x}\right)\right|_{M_0}\cdot\bar{i}+\left.\left(x^y\cdot ln\,x-\frac{1}{y}\right)\right|_{M_0}\cdot\bar{j}=$$

$$=\left(1\cdot 1^0+\frac{1}{1}\right)\cdot\bar{i}+\left(1^1\cdot ln\,1-\frac{1}{1}\right)\cdot\bar{j}=2\cdot\bar{i}-1\cdot\bar{j}.$$

ЗАВДАННЯ 2.18.
Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання
Необхідні умови екстремуму функції двох змінних мають вигляд:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні та отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему та знаходимо дві критичні точки

$$M_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ та } \quad M_2: \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

Перевіримо достатні умови екстремуму для добутих точок. Знайдемо спочатку частинні похідні другого порядку:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3; \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Тепер обчислимо $\Delta = A \cdot C - B^2$ у кожній критичній точці. Для нашого прикладу $\Delta = 36xy - 9$. Підставивши координати критичних точок, дістанемо

для точки M_1 :

$\Delta = -9 < 0$, тобто в цій точці екстремуму не має;

для точки M_2:

$\Delta = 27$, $A = 6$. Оскільки $\Delta > 0$, то у точці M_2 є екстремум, причому мінімум, тому що $A > 0$.

Таким чином, у точці $M_2(1,1)$ функція досягає локального мінімуму $z_{\min} = z(1,1) = -1$.

3. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ЗАВДАННЯ 3.1.

Задано наступні матриці:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\1&0&3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3&7&0\\2&-5&1\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}3&-1\\1&5\\2&4\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}5&-3\\4&1\end{pmatrix};\qquad H=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&5&6\\2&7&1\end{pmatrix};\qquad M=\begin{pmatrix}5&0&2\\2&5&3\\5&-2&1\end{pmatrix}.$$

Обчислити матрицю X за вказаними формулами .

1. $X=A\cdot C+3D$; **2.** $X=C\cdot B-2H$; **3.** $X=B\cdot B^T+D$;

4. $X=(A+2B)\cdot C$; **5.** $X=C\cdot A+H^T$; **6.** $X=D\cdot A+3B$;

7. $X=C\cdot C^T-2M$; **8.** $X=(2H-M)\cdot C$; **9.** $X=D\cdot B+2A$;

10. $X=C\cdot B+M^T$; **11.** $X=D^T\cdot B-2A$; **12.** $X=M\cdot C+B^T$;

13. $X=C\cdot D-A^T$; **14.** $X=(A-B)\cdot H$; **15.** $X=D\cdot C^T+2B$;

16. $X=B\cdot C-2D$; **17.** $X=A^T\cdot B+3H$; **18.** $X=(A+B)^T\cdot D$;

19. $X=B^T\cdot A-2M$; **20.** $X=C^T\cdot C+2H$; **21.** $X=(M-H)\cdot B^T$;

22. $X=(3A+B)\cdot C$; **23.** $X=C\cdot D+4C$; **24.** $X=H^T\cdot M-2H$

25. $X=M\cdot A^T-C$; **26.** $X=3D-B\cdot C$; **27.** $X=C\cdot B+2M$;

28. $X=H\cdot M-2M$; **29.** $X=(H+2M)\cdot C$; **30.** $X=(3A-B)\cdot H$.

ЗАВДАННЯ 3.2.

Розв'язати систему: а) за формулами Крамера;
б) матричним методом;
в) методом Гауса.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_2 + 7x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x - 5y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 4, \\ -x + y - 3z = -5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 5y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 4, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -6x - 14y + 12z = 2, \\ -4x + 2y + 9z = 28, \\ 9x + 7y - 9z = 5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -14x - 6y + 12z = 2, \\ 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - y + z = 9, \\ 2x + y + 6z = 6, \\ x + 2y + 4z = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$

21 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

23 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$

ЗАВДАННЯ 3.3.

Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

20 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

ЗАВДАННЯ 3.4.

По даним векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$ побудувати вектор $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{в}$.

№	α	β	$\vec{a}$	$\vec{в}$
1.	1	-2	(1,3)	(-2,1)
2.	-1	0.5	(-2,2)	(4,6)
3.	2	-1	(4,0)	(-3,3)
4.	-3	1	(2,3)	(4,8)
5.	0.5	2	(6,2)	(0,5)
6.	-2	4	(1,-1)	(2,1)
7.	3	1	(2,3)	(1,2)
8.	4	-2	(2,0)	(1,4)
9.	-5	0.5	(2,-1)	(4,10)
10.	-4	2	(3,1)	(1,2)
11.	2	1.5	(0,3)	(3,6)
12.	-1.5	-2	(3,6)	(1,4)
13.	3	-2	(2,-5)	(4,1)
14.	-1	5	(1,6)	(3,2)
15.	4	3	(-1,4)	(2,0)
16.	-1	2	(-1,-3)	(2,-1)
17.	1	-0.5	(2,-2)	(-4,-6)
18.	-2	1	(-4,0)	(3,-3)
19.	3	-1	(-2,-3)	(-4,-8)
20.	-0.5	-2	(-6,-2)	(0,-5)
21.	2	-4	(-1,1)	(-2,-1)
22.	-3	-1	(-2,3)	(-1,-2)
23.	-4	2	(-2,0)	(-1,-4)
24.	5	-0.5	(-2,1)	(-4,-10)
25.	4	-2	(-3,-1)	(-1,-2)
26.	-2	-1.5	(0,-3)	(-3,-6)
27.	1.5	2	(-3,-6)	(-1,4)
28.	-3	2	(-2,5)	(-4,-1)
29.	1	-5	(-1,-6)	(-3,-2)
30.	-4	-3	(1,-4)	(-2,0)

ЗАВДАННЯ 3.5.

Трикутник ABC задано координатами своїх вершин. Знайти внутрішній кут при вершині A.

№	A	B	C
1.	(1,3,6)	(2,2,1)	(-1,0,1)
2.	(-4,2,6)	(2,-3,0)	(-10,5,8)
3.	(7,2,4)	(7,-1,-2)	(3,3,1)
4.	(2,1,4)	(-1,5,-2)	(-7,-3,2)
5.	(-1,-5,2)	(-6,0,-3)	(3,6,-3)
6.	(0,-1,-1)	(-2,3,5)	(1,-5,-9)
7.	(5,2,0)	(2,5,0)	(1,2,,4)
8.	(2,-1,-2)	(1,2,1)	(5,0,-6)
9.	(-2,0,-4)	(-1,7,1)	(4,-8,-4)
10.	(14,4,5)	(-5,-3,2)	(-2,-6,-3)
11.	(1,2,0)	(3,0,-3)	(5,2,6)
12.	(2,-1,2)	(1,2,-1)	(3,2,1)
13.	(1,1,2)	(-1,1,3)	(2,-2,4)
14.	(2,3,1)	(4,1,-2)	(6,3,7)
15.	(1,1,-1)	(2,3,1)	(3,2,1)
16.	(1,5,-7)	(-3,6,3)	(-2,7,3)
17.	(-3,4,-7)	(1,5,-4)	(-5,-2,0)
18.	(-1,2,-3)	(4,-1,0)	(2,1,-2)
19.	(4,-1,3)	(-1,2,0)	(0,-5,1)
20.	(1,-1,1)	(-2,0,3)	(2,1,-1)
21.	(1,2,0)	(1,-1,2)	(0,1,-1)
22.	(1,0,2)	(1,2,-1)	(2,-2,1)
23.	(1,2,-3)	(1,0,1)	(-2,-1,6)
24.	(3,10,-1)	(-2,3,-5)	(-6,0,-3)
25.	(-1,2,4)	(-1,-2,-4)	(3,0,-1)
26.	(0,-3,1)	(-4,1,2)	(2,-1,5)
27.	(1,3,0)	(4,-1,2)	(3,0,1)
28.	(-2,-1,-1)	(0,3,2)	(1,3,-4)
29.	(-3,-5,6)	(2,1,-4)	(0,-3,-1)
30.	(2,-4,-3)	(5,-6,0)	(-1,3,-3)

ЗАВДАННЯ 3.6.

Обчислити площу паралелограму, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

1. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q},\quad \overline{b}=3\overline{p}-\overline{q},\quad |\overline{p}|=1,\quad |\overline{q}|=2,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/6.$

2. $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q},\quad |\overline{p}|=4,\quad |\overline{q}|=1,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/4.$

3. $\overline{a}=\overline{p}-3\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}+2\overline{q},\quad |\overline{p}|=1/5,\quad |\overline{q}|=1,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/2.$

4. $\overline{a}=3\overline{p}-2\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}+5\overline{q},\quad |\overline{p}|=4,\quad |\overline{q}|=1/2,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=5\pi/6.$

5. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q},\quad \overline{b}=2\overline{p}+\overline{q},\quad |\overline{p}|=2,\quad |\overline{q}|=3,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=3\pi/4.$

6. $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q},\quad |\overline{p}|=2,\quad |\overline{q}|=3,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/3.$

7. $\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}+3\overline{q},\quad |\overline{p}|=3,\quad |\overline{q}|=2,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/2.$

8. $\overline{a}=4\overline{p}+\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}-\overline{q},\quad |\overline{p}|=7,\quad |\overline{q}|=2,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/4.$

9. $\overline{a}=\overline{p}-4\overline{q},\quad \overline{b}=3\overline{p}+\overline{q},\quad |\overline{p}|=1,\quad |\overline{q}|=2,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/6.$

10. $\overline{a}=\overline{p}+4\overline{q},\quad \overline{b}=2\overline{p}-\overline{q},\quad |\overline{p}|=7,\quad |\overline{q}|=2,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/3.$

11. $\overline{a}=3\overline{p}+2\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}-\overline{q},\quad |\overline{p}|=10,\quad |\overline{q}|=1,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/2.$

12. $\overline{a}=4\overline{p}-\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}+2\overline{q},\quad |\overline{p}|=5,\quad |\overline{q}|=4,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/4.$

13. $\overline{a}=2\overline{p}+23q,\quad \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q},\quad |\overline{p}|=6,\quad |\overline{q}|=7,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/3.$

14 $\overline{a}=3\overline{p}-\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}+2\overline{q},\quad |\overline{p}|=3,\quad |\overline{q}|=4,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/3.$

15. $\overline{a}=2\overline{p}+3\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q},\quad |\overline{p}|=2,\quad |\overline{q}|=3,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/4.$

16. $\overline{a}=2\overline{p}-3\overline{q},\quad \overline{b}=3\overline{p}+\overline{q},\quad |\overline{p}|=4,\quad |\overline{q}|=1,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/6.$

17. $\overline{a}=5\overline{p}+\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}-3\overline{q},\quad |\overline{p}|=1,\quad |\overline{q}|=2,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/3.$

18. $\overline{a}=7\overline{p}-2\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}+3\overline{q},\quad |\overline{p}|=1/2,\quad |\overline{q}|=2,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/2.$

19. $\overline{a}=6\overline{p}-\overline{q},\quad \overline{b}=\overline{p}+\overline{q},\quad |\overline{p}|=3,\quad |\overline{q}|=4,\quad (\overline{p}\wedge\overline{q})=\pi/4.$

20. $\bar{a} = 10\bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{b} = 3\bar{p} - 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 4, \quad |\bar{q}| = 1, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = \pi/6.$

21. $\bar{a} = 6\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 8, \quad |\bar{q}| = 1/2, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = \pi/3.$

22. $\bar{a} = 3\bar{p} + 4\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{q} - \bar{p}, \quad |\bar{p}| = 2{,}5, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = \pi/2.$

23. $\bar{a} = 7\bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 3, \quad |\bar{q}| = 1, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = 3\pi/4.$

24. $\bar{a} = \bar{p} + 3\bar{q}, \quad \bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 3, \quad |\bar{q}| = 5, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = \pi/3.$

25. $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 7, \quad |\bar{q}| = 2, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = \pi/4.$

26. $\bar{a} = 5\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 5, \quad |\bar{q}| = 3, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = 5\pi/6.$

27. $\bar{a} = 3\bar{p} - 4\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 3, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = \pi/4.$

28. $\bar{a} = 6\bar{p} - \bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} + 5\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 1/2, \quad |\bar{q}| = 4, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = 5\pi/6.$

29. $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}, \quad \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 1, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = \pi/3.$

30. $\bar{a} = 2\bar{p} - 3\bar{q}, \quad \bar{b} = 5\bar{p} + \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 3, \quad (\bar{p} \hat{\ } \bar{q}) = \pi/2.$

ЗАВДАННЯ 3.7.

Обчислити об'єм піраміди з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 та її висоту, проведену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1.	$A_1(1, 3, 6)$,	$A_2(2, 2, 1)$,	$A_3(-1, 0, 1)$,	$A_4(-4, 6, -3)$.
2.	$A_1(-4,2,6)$,	$A_2(2,-3,0)$,	$A_3(-10,5,8)$,	$A_4(-5,2,-4)$.
3.	$A_1(7, 2, 4)$,	$A_2(7, -1, -2)$,	$A_3(3, 3, 1)$,	$A_4(-4, 2, 1)$.
4.	$A_1(2, 1, 4)$,	$A_2(-1, 5, -2)$,	$A_3(-7, -3, 2)$,	$A_4(-6, -3, 6)$.
5.	$A_1(-1, -5, 2)$,	$A_2(-6, 0, -3)$,	$A_3(3, 6, -3)$,	$A_4(-10, 6, 7)$.
6.	$A_1(0, -1, -1)$,	$A_2(-2, 3, 5)$,	$A_3(1, -5, -9)$,	$A_4(-1, -6, 3)$.
7.	$A_1(5, 2, 0)$,	$A_2(2, 5, 0)$,	$A_3(1, 2, 4)$,	$A_4(-1, 1,1)$.
8.	$A_1(2, -1, -2)$,	$A_2(1, 2, 1)$,	$A_3(5, 0, -6)$,	$A_4(-10, 9,-7)$.
9.	$A_1(-2, 0, -4)$,	$A_2(-1, 7, 1)$,	$A_3(4, -8, -4)$,	$A_4(1, -4, 6)$.
10.	$A_1(14, 4, 5)$,	$A_2(-5, -3, 2)$,	$A_3(-2, -6, -3)$,	$A_4(-2, 2, -1)$.
11.	$A_1(1, 2, 0)$,	$A_2(3, 0, -3)$,	$A_3(5, 2, 6)$,	$A_4(8, 4, -9)$.
12.	$A_1(2, -1, 2)$,	$A_2(1, 2, -1)$,	$A_3(3, 2, 1)$,	$A_4(-4, 2, 5)$.

13.	$A_1(1, 1, 2)$,	$A_2(-1, 1, 3)$,	$A_3(2, -2, 4)$,	$A_4(-1, 0-2)$.
14.	$A_1(2, 3, 1)$,	$A_2(4, 1,-2)$,	$A_3(6, 3, 7)$,	$A_4(7, 5,-3)$.
15.	$A_1(1, 1,-0)$,	$A_2(2, 3, 1)$,	$A_3(3, 2, 1)$,	$A_4(5, 9,-8)$.
16.	$A_1(1, 5, -7)$,	$A_2(-3, 6, 3)$,	$A_3(-2, 7, 3)$,	$A_4(-4, 8,-12)$.
17.	$A_1(-3, 4, -7)$,	$A_2(1, 5, -4)$,	$A_3(-5, -2, 0)$,	$A_4(2, 5, 4)$.
18.	$A_1(-1, 2, -3)$,	$A_2(4, -1,0)$,	$A_3(2, 1, -2)$,	$A_4(3, 4, 5)$.
19.	$A_1(4,-1, 3)$,	$A_2(-1, 2, 0)$,	$A_3(0,-5, 1)$,	$A_4(3, 2,-6)$.
20.	$A_1(1, -1, 1)$,	$A_2(-2, 0, 3)$,	$A_3(2, 1, -1)$,	$A_4(2, -2, -4)$.
21.	$A_1(1, 2, 0)$,	$A_2(1, -1, 2)$,	$A_3(0, 1,-1)$,	$A_4(-3, 0, 1)$.
22.	$A_1(1,0,2)$,	$A_2(1,2,-1)$,	$A_3(2,-2, 1)$,	$A_4(2, 1,0)$.
23.	$A_1(1, 2, -3)$,	$A_2(1, 0, 1)$,	$A_3(-2, -1, 6)$,	$A_4(0, -5, -4)$.
24.	$A_1(3, 10, -1)$,	$A_2(-2, 3, -5)$,	$A_3(-6, 0, -3)$,	$A_4(1, -1, 2)$.
25.	$A_1(-1, 2, 4)$,	$A_2(-1, -2, -4)$,	$A_3(3, 0, -1)$,	$A_4(7, -3, 1)$.
26.	$A_1(0,-3, 1)$,	A2(-4, 1, 2),	$A_3(2,-1, 5)$,	$A_4(3, 1,-4)$.
27.	$A_1(1, 3, 0)$,	$A_2(4,-1, 2)$,	$A_3(3, 0, 1)$,	$A_4(-4, 3, 5)$.
28.	$A_1(-2, -1, -1)$,	$A_2(0, 3, 2)$,	$A_3(3, 1, -4)$,	$A_4(-4, 7, 3)$.
29.	$A_1(-3, -5, 6)$,	$A_2(2, 1, -4)$,	$A_3(0, -3, -1)$,	$A_4(-5, 2, -8)$.
30.	$A_1(2, -4, -3)$,	$A_2(5, -6, 0)$,	$A_3(-1, 3, -3)$,	$A_4(-10,-8, 7)$.

ЗАВДАННЯ 3.8.

Задані вершини трикутника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайти:

а) рівняння сторони AB;
б) рівняння висоти CH;
в) рівняння медіани AM;
г) точку N перетин медіани AM та висоти CH;
д) рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB;
е) відстань від точки C до прямої AB.

№	A	B	C
1.	(-2, 4)	(3, 1)	(10, 7)
2.	(-3, -2)	(14, 4)	(6, 8)

№	A	B	C
3.	(1, 7)	(-3, -1)	(11, -3)
4.	(1, 0)	(-1, 4)	(9, 5)
5.	(1, -2)	(7, 1)	(3, 7)
6.	(-2, -3)	(1, 6)	(6, 1)
7.	(-4, 2)	(-6, 6)	(6, 2)
8.	(4, -3)	(7, 3)	(1, 10)
9.	(4, -4)	(8, 2)	(3, 8)
10.	(-3, -3)	(5, -7)	(7, 7)
11.	(1, -6)	(3, 4)	(-3, 3)
12.	(-4, 2)	(8, -6)	(2, 6)
13.	(-5, 2)	(0, -4)	(5, 7)
14.	(4, -4)	(6, 2)	(-1, 8)
15.	(-3, 8)	(-6, 2)	(0, -5)
16.	(6, -9)	(10, -1)	(-4, 1)
17.	(4, 1)	(-3, -1)	(7, -3)
18.	(-4, 2)	(6, -4)	(4, 10)
19.	(3, -1)	(11, 3)	(-6, 2)
20.	(-7, -2)	(-7, 4)	(5, -5)
21.	(-1,-4)	(9, 6)	(-5, 4)
22.	(10, -2)	(4, -5)	(-3, 1)
23.	(-3, -1)	(-4, -5)	(8, 1)
24.	(-2, -6)	(-3, 5)	(4, 0)
25.	(-7, -2)	(3, -8)	(-4, 6)
26.	(0, 2)	(-7, -4)	(3, 2)
27.	(7, 0)	(1, 4)	(-8, -4)
28.	(1, -3)	(0, 7)	(-2, 4)
29.	(-5, 1)	(8, -2)	(1, 4)
30.	(2, 5)	(-3, 1)	(0, 4)

ЗАВДАННЯ 3.9.

Задані точки A, B, C, D. Знайти проекцію точки D на площину, яка проходить через точки A, B, C.

1.	A(1, 3, 6),	B(2, 2, 1),	C(-1, 0, 1),	D(-4, 6, -3).
2.	A(-4,2,6),	B(2,-3,0),	C(-10,5,8),	D(-5,2,-4).
3.	A(7, 2, 4),	B(7, -1, -2),	C(3, 3, 1),	D(-4, 2, 1).
4.	A(2, 1, 4),	B(-1, 5, -2),	C(-7, -3, 2),	D(-6, -3, 6).
5.	A(-1, -5, 2),	B(-6, 0, -3),	C(3, 6, -3),	D(-10, 6, 7).
6.	A(0, -1, -1),	B(-2, 3, 5),	C(1, -5, -9),	D(-1, -6, 3).
7.	A(5, 2, 0),	B(2, 5, 0),	C(1, 2, 4),	D(-1, 1,1).
8.	A(2, -1, -2),	B(1, 2, 1),	C(5, 0, -6),	D(-10, 9, -7).
9.	A(-2, 0, -4),	B(-1, 7, 1),	C(4, -8, -4),	D(1, -4, 6).
10.	A(14, 4, 5),	B(-5, -3, 2),	C(-2, -6, -3),	D(-2, 2, -1).
11.	A(1, 2, 0),	B(3, 0, -3),	C(5, 2, 6),	D(8, 4, -9).
12.	A(2, -1, 2),	B(1, 2, -1),	C(3, 2, 1),	D(-4, 2, 5).
13.	A(1, 1, 2),	B(-1, 1, 3),	C(2, -2, 4),	D(-1, 0-2).
14.	A(2, 3, 1),	B(4, 1,-2),	C(6, 3, 7),	D(7, 5,-3).
15.	A(1, 1,-0),	B(2, 3, 1),	C(3, 2, 1),	D(5, 9,-8).
16.	A(1, 5, -7),	B(-3, 6, 3),	C(-2, 7, 3),	D(-4, 8, -12).
17.	A(-3, 4, -7),	B(1, 5, -4),	C(-5, -2, 0),	D(2, 5, 4).
18.	A(-1, 2, -3),	B(4, -1,0),	C(2, 1, -2),	D(3, 4, 5).
19.	A(4,-1, 3),	B(-1, 2, 0),	C(0,-5, 1),	D(3, 2,-6).
20.	A(1, -1, 1),	B(-2, 0, 3),	C(2, 1, -1),	D(2, -2, -4).
21.	A(1, 2, 0),	B(1, -1, 2),	C(0, 1,-1),	D(-3, 0, 1).
22.	A(1,0,2),	B(1,2,-1),	C(2,-2, 1),	D(2, 1,0).
23.	A(1, 2, -3),	B(1, 0, 1),	C(-2, -1, 6),	D(0, -5, -4).
24.	A(3, 10, -1),	B(-2, 3, -5),	C(-6, 0, -3),	D(1, -1, 2).
25.	A(-1, 2, 4),	B(-1, -2, -4),	C(3, 0, -1),	D(7, -3, 1).
26.	A(0,-3, 1),	B(-4, 1, 2),	C(2,-1, 5),	D(3, 1,-4).
27.	A(1, 3, 0),	B(4,-1, 2),	C(3, 0, 1),	D(-4, 3, 5).
28.	A(-2, -1, -1),	B(0, 3, 2),	C(3, 1, -4),	D(-4, 7, 3).
29.	A(-3, -5, 6),	B(2, 1, -4),	C(0, -3, -1),	D(-5, 2, -8).
30.	A(2, -4, -3),	B(5, -6, 0),	C(-1, 3, -3),	D(-10, -8, 7).

ЗАВДАННЯ 3.10.

Привести рівняння лінії до канонічного виду та побудувати цю лінію.

1. $2x^2 - 4x + 2y - 6 = 0.$
2. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0.$
3. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0.$
4. $-\frac{1}{6}x^2 + 2x - y - 7 = 0.$
5. $x^2 + 4y^2 + 8y = 0.$
6. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$
7. $-y^2 + 2y - x - 1 = 0.$
8. $6y^2 + 9z^2 - 12y + 18z - 39 = 0.$
9. $16x^2 - 9y^2 + 64x + 108y - 116 = 0.$
10. $-2x^2 - 4x + 2y - 6 = 0.$
11. $16z^2 + 25x^2 - 32z + 50x - 359 = 0.$
12. $-4y^2 + 9z^2 + 64y - 18z - 211 = 0.$
13. $-\frac{1}{6}x^2 + 2x - y - 7 = 0.$
14. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0.$
15. $16x^2 - 9z^2 + 64x - 18z + 199 = 0.$
16. $y^2 + 2y - x - 1 = 0.$
17. $4y^2 + 9x^2 + 16y + 18x - 11 = 0.$
18. $y^2 - 2z^2 - 2y - 4z - 6 = 0.$
19. $\frac{1}{4}y^2 + y - x + 2 = 0.$
20. $4z^2 + 3y^2 - 8z + 2y - 32 = 0.$
21. $z^2 - 4x^2 + 2z + 8x - 19 = 0.$
22. $4y^2 - 8y - x + 7 = 0.$
23. $6z^2 + 9y^2 - 12z - 18y - 39 = 0.$
24. $-9z^2 + 8x^2 + 18z + 6x + 71 = 0.$
25. $3y^2 + 6y + 5z - 2 = 0.$
26. $x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 12 = 0.$
27. $4x^2 - z^2 + 3x + 2z + 7 = 0.$
28. $-\frac{1}{4}y^2 + y - x + 2 = 0.$
29. $z^2 + 4x^2 - 8z - 8x + 4 = 0.$
30. $-4y^2 + 9y^2 + 64x - 36y - 184 = 0.$

ЗАВДАННЯ 3.11.

Привести рівняння до канонічного виду та визначити тип поверхні.

1. $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-11=0.$
2. $36z^2+36x^2-36z-24x-18y-14=0.$
3. $-x^2+y^2+z^2+2x+4y+8z+19=0.$
4. $4z^2+9y^2-16z-18y-72x-47=0.$
5. $x^2+2y^2+4z^2-6x-4y-16z-21=0.$
6. $x^2+2y^2-4z^2-6x-4y-16z-5=0.$
7. $-16x^2+9y^2+z^2-32x-36y-144z+5204=0.$
8. $16z^2-9y^2-6x=0.$
9. $4x^2-y^2+4z^2+16x+2y-8z+19=0.$
10. $16z^2+25y^2-36z+50y+800x-759=0.$
11. $16z^2+9y^2+z^2-32x-36y+16z-28=0.$
12. $4x^2+9y^2-25z^2-32x-36y+50z+75=0.$
13. $4x^2+9y^2+25z^2-32x-36y+50z-775=0.$
14. $-4z^2+y^2-2x=0.$
15. $16z^2+9y^2+36x^2-64z-18y+72x-35=0.$
16. $x^2+y^2+y+4z+4\frac{1}{4}=0.$
17. $4z^2+3y^2-8z+2y-48x-32=0.$
18. $-z^2+y^2+x^2+\alpha z+4y+8x+19=0.$
19. $z^2+2y^2+4x^2-6z-4y+6x-21=0.$
20. $4x^2-z^2-2y=0.$
21. $16z^2+9x^2+y^2-32z-36x-144y+52=0.$
22. $4x^z-z^2+4y^2+16x+2z-8y+19=0.$
23. $4x^2+z^2+4y^2+16x+2z-8y+5=0.$
24. $16x^2-9z^2+\log^2-64x-18z-36y+64=0.$
25. $x^2+y^2+z^2+2x+4y+8z-15=0.$
26. $4z^2-8x^2-4y=0.$
27. $-2x^2+3z^2+y^2+4x+12z+4y+14=0.$
28. $x^2+y^2-2x+4y+18z+5=0.$
29. $16x^2+9y^2+z^2-32x-36y-144z+52=0.$
30. $-\frac{1}{25}z^2+\frac{1}{4}y^2+x^2-20z+32y+36x-1152=0.$

ЗАВДАННЯ 3.12.

Обчислити границі:

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+x}{x+8}\right)^{-3x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{12-x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 1/3}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{6+x}}{2x^2-7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{17+3x}-\sqrt{12+2x}}{x^2+8x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{1+2x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x-7}{3x^2-x+11}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{2+3x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2+3x+4}{-2x^2-5x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+x}{x+8}\right)^{-3x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{12-x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 1/3}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{6+x}}{2x^2-7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\sqrt{17+3x}-\sqrt{12+2x}}{x^2+8x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{1+2x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x-7}{3x^2-x+11}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{2+3x}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2+3x+4}{-2x^2-5x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$.

ЗАВДАННЯ 3.13.

Знайти похідні функцій:

1. а) $y = x + \sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}$; г) $y = (arctg\,x)^{\sin 2x}$;

б) $y = ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; д) $x^3 + y^3 + 3xy = 0$;

в) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; е) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t\,, \\ y = 3\sin^2 t\,. \end{cases}$

2. а) $y = 5\,\cdot\sqrt[5]{x^3 + 3x^2 - \frac{1}{x}}$; г) $y = (\cos 2\,x)^{tg\,x}$;

б) $y = x(sinln\,x + cosln\,x)$; д) $xy = ctgy$;

в) $y = \frac{1+x\,arctg\,x}{\sqrt{1+x^2}}$; е) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

3. а) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; г) $y = x^{arctg\,x}$;

б) $y = 3^{arctg\sqrt{x}} - ln(\,x^2 - 5x)$; д) $y = e^y + 4x$;

в) $y = ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$; е) $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$

4. а) $y = x + \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^3}}$; г) $y = x^{arcctgx}$;

б) $y = 2^{\sin x}\,ctg^3\,\frac{x}{2}$; д) $y = 7x - ctgy$;

в) $y = x\arcsin\sqrt{x} + ln\sqrt{1+x}$; е) $\begin{cases} x = \arcsin t\,, \\ y = ln\,t\,. \end{cases}$

5. а) $y = \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; г) $y = (tg\,x)^{\cos 2x}$;

б) $y = ln(\,e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$; д) $xy - 6 = \cos y$;

в) $y = arctgsin\,x - 5^{ln\,x}$; е) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

6. а) $y = ln\sqrt{\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}}$; г) $y = (x-2)^{\sin 2x}$;

б) $y = 3\,tg^2\,5\,x - log_3(\,x^2 - x)$; д) $ctg(x + y) = 5x$;

в) $y = arcsin\sqrt{1 - x^2}$; е) $\begin{cases} x = (t-1)^{\frac{2}{3}}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$

7. а) $y = 3\sqrt[3]{x^5 - 2/x}$; г) $y = (x^2 - x)^{\sqrt{x}}$;

б) $y = sin^2\,3\,x\,cos^3\,2\,x$; д) $3y = 7 + xy^3$;

в) $y = 5^{arcsin\,2x} - log_5(\,x^2 + 1)$; е) $\begin{cases} x = sin\,2\,t, \\ y = cos^2\,t\,. \end{cases}$

8. а) $y = log_3\sqrt{\frac{1 - sin\,x}{1 + cos\,x}}$; г) $y = (tg\,3\,x)^{sin\,x}$;

б) $y = 3^{ctg\,x} - arcsin\sqrt{x}$; д) $y^2 + x^2 = sin\,y$;

в) $y = e^{arctg\,\sqrt{1 + ln(x-1)}}$; е) $\begin{cases} x = (2t + 3)\,cos\,t\,, \\ y = 3t^3. \end{cases}$

9. а) $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1 + x^2}{5x - 3}}$; г) $y = (1 + 3x)^{arctg\,x}$;

б) $y = e^{sin\,x}tg^3 2x$; д) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$;

в) $y = lnarcsin\sqrt{x} + cos^3\,5\,x$; е) $\begin{cases} x = 6\,cos^3\,t\,, \\ y = 2\,sin^3\,t\,. \end{cases}$

10. а) $y = arctg\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$; г) $y = (x^2 + 1)^{arccos\,x}$;

б) $y = 3^{ctg\,x}\,cos\,\sqrt[3]{x}$; д) $ln\,y - \frac{y}{x} = 7$;

в) $y = lnarccos\,2\,x + tg\sqrt[3]{1 + x^2}$;е) $\begin{cases} x = e^t\,cos\,t\,, \\ y = e^t\,sin\,t\,. \end{cases}$

11. а) $y = 2\sqrt{4x + 3} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}$; г) $y = x^{1/x}$;

б) $y = (e^{cos\,x} + x)^2$; д) $y = x + arctgy$;

в) $y = lnsin(\,x^2 + 3x)$; е) $\begin{cases} x = ln^3\,t\,, \\ y = t + ln\,t\,. \end{cases}$

12. а) $y = \frac{sin\,x}{cos^2\,x}$; г) $y = x^{ln\,x}$;

б) $y = \frac{1}{tg^2 2x}$;

в) $y = arcsin(x^2 + 3)$;

д) $xy^2 - y^3 = 4x - 5$;

е) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+2}, \\ y = \frac{t}{t+2}. \end{cases}$

13. а) $y = x^2\sqrt{1 - x^2}$;

б) $y = ln\sqrt{\frac{1-sin\,x}{1+sin\,x}}$;

в) $y = 5^{\arccos 2x^2}$;

г) $y = (ctgx)^{ln\,x}$;

д) $y^2 = x + ln\frac{y}{x}$;

е) $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$

14. а) $y = \frac{2x+3}{\sqrt{5x^2-4x+1}}$;

б) $y = sin\,x - x\,cos\,x$;

в) $y = x^m\,ln\,x$;

г) $y = x^{-\,tg\,x}$;

д) $x^4 + x^2y^2 + y = 4$;

е) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \frac{1+t}{\sqrt{t^2-1}}. \end{cases}$

15. а) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

б) $y = \frac{sin^2 x}{3+2\,cos\,x}$;

в) $y = \frac{x\,ln\,x}{x-1}$;

г) $y = (arctg\,x)^{ln\,x}$;

д) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$;

е) $\begin{cases} x = te^t, \\ y = \frac{t}{e^t}. \end{cases}$

16. а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^3 + 1}$;

б) $y = \sqrt[3]{81 + x^3}$

в) $y = 3^{arctg\,x^2}$;

г) $y = (arctg\,x)^x$;

д) $sin^2(3x + y^2) = 5$;

е) $\begin{cases} x = 5\,cos^2\,t, \\ y = 3\,sin^2\,t. \end{cases}$

17. а) $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$;

б) $y = lncos\,x + tg^2\,x$;

в) $y = arctg(\sqrt{x} + x)$;

г) $y = (x + x^2)^x$;

д) $y^2 = \frac{x-y}{x+y}$;

е) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = ln\,t. \end{cases}$

18. а) $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - 5/x}$;
б) $y = ln\sqrt{\frac{1-sin\,x}{1+sin\,x}}$;
в) $y = arctg(\,tg^2\,x)$;
г) $y = (sin\,x)^{ln\,x}$;
д) $x_3 + y^3 = 5x$;
е) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$

19. а) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$;
б) $y = x - tg\,x + 5\,tg^3\,x$;
в) $y = arctg\sqrt{\frac{1-x}{x-2}}$;
г) $y = (cos\,x)^x$;
д) $sin\,y = xy^2 + 5$;
е) $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = ln(\,1 + t^2). \end{cases}$

20. а) $y = 5\sqrt[5]{x^2 + 1/x}$;
б) $y = 2xe^{-x}$;
в) $y = \frac{arcsin\,x}{\sqrt{1-x^2}}$;
г) $y = (sin\,x)^x$;
д) $x^2y^2 + x = 5y$;
е) $\begin{cases} x = arccos\,t\,, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

21. а) $y = ln\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$;
б) $y = 2\,tg^3(\,1 + x^3)$;
в) $y = 3^{arctg\,x^2}$;
г) $y = (x + \sqrt{x})^{sin\,x}$;
д) $tgy = 3x + 5y$;
е) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

22. а) $y = arcsin\sqrt{\frac{x}{x-1}}$;
б) $y = e^{cos\,x} + ctg^3\,5\,x$;
в) $y = x\,lnarccos\left(\frac{1}{x}\right)$;
г) $y = (ctg\,x)^x$;
д) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$;
е) $\begin{cases} x = arcsin\,t\,, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

23. а) $y = \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;
б) $y = ln^2\,x + lncos\,x$;
в) $y = \frac{x\,ln\,x}{1-x}$;
г) $y = x^{sin\,x}$;
д) $4\,sin^2(\,x + y) = x$;
е) $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$

24. а) $y = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$;
б) $y = 2xe^{\sin x}$;
в) $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$;
г) $y = (\sin x)^{tg\, x}$;
д) $arctgy = 4x + 5y$;
е) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

25. а) $y = \ln \sqrt[5]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$;
б) $y = 3\, ctg^3\, x^2 + 1$;
в) $y = 2^{\arcsin x}$;
г) $y = x^{\arccos x}$;
д) $y^2 - x = \cos y$;
е) $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t\ln t. \end{cases}$

26. а) $y = (x^2 - 4)\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{3x-2}}$;
б) $y = \cos^3(\,x + 2)^2 - 4$;
в) $y = 5^{\arccos x^2}$;
г) $y = (tgx)^{2x}$;
д) $\sin y = 7x + 3y$;
е) $\begin{cases} x = t^5 - t, \\ y = t^3 - 2. \end{cases}$

27. а) $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$;
б) $y = xe^{-x^2+4x}$;
в) $y = \frac{arctg4x}{1-x^2}$;
г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;
д) $e^y = 4x - 7y$;
е) $\begin{cases} x = 5\sin^3 t, \\ y = 3\cos^3 t. \end{cases}$

28. а) $y = x \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3-1}{x^2+1}}$;
б) $y = arctg^3(4x^2 + 3) - 2x^3$;
в) $y = \frac{\ln(x+1)}{\cos x^4}$;
г) $y = (\arcsin 2\,x)^x$;
д) $tgy = 4y - 5x$;
е) $\begin{cases} x = e^{5t}, \\ y = e^{-4t}. \end{cases}$

29. а) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{1-x^2}}$;
б) $y = 2x\ln^3(\,3x^2 - 4x)$;
в) $y = 5^{arctg\frac{1}{x}}$;
г) $y = (x + 2)^{\ln x}$;
д) $y^3 = 25x^2 - 4$;
е) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \frac{t}{t+1}. \end{cases}$

30. а) $y=\sqrt[5]{\frac{x^2}{\cos x-\sin x}}$;

б) $y=3\sin^3(\cos x)+1$;

в) $y=3^{\arcsin x^2}$;

г) $y=(x^2-1)^{\arccos x}$;

д) $3x+\sin y=5y$;

е) $\begin{cases} x=\frac{\ln t}{t}, \\ y=t^2\ln t. \end{cases}$

ЗАВДАННЯ 3.14.

Обчислити границі, використовуючи правило Лопіталя.

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{tg^2 2x}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}-x}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^4\sin\left(\frac{a}{x}\right)$.

3. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$.

4. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2(\pi x/6)}{1-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$.

5. a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tgx^2$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

7. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x^4}{2\sin 4x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

8. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

9. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$.

10. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$.

11. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$.

12. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[7]{x-1}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$.

13. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(\cos x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{4x-\sin x}$.

14. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\,\sin\frac{b}{x}$.

15. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)ctg4x$.

16. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-1}{tgx-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi/x}{ctg(5x/2)}$.

17. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(e^{x^2}-1)}{\cos x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{6x}$.

18. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3tg4x-12tgx}{3\sin 4x-12\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(\cos ax)}{ln(\cos 6x)}$.

19. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$.

20. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-10x}$.

21. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+xe^x)}{ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)^4e^{-2x}$.

22. a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3x-1}-\frac{1}{ln\,3x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$.

23. a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-3x}$. ; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(e^{x^2}-1)}{2\cos x-2}$.

24. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-1}{tgx-x}$.

25. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$.

26. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln x}{ctgx^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ln(\sin x)}$.

27. a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx^2}{x^3}$.

28. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{c^x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-x-6}\right)$.

29. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} ctg3x\cdot arctg^2x$.

30. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x-\frac{x^2}{2}-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

ЗАВДАННЯ 3.15.

Дослідити функцію та побудувати її графік.

1.	$y = \frac{x}{x^2-1}$	**2.**	$y = x \ln x$
3.	$y = \frac{x^3-1}{4x^2}$	**4.**	$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
5.	$y = \frac{2x+1}{x+3}$	**6.**	$y = \frac{e^x}{x}$
7.	$y = \frac{x}{(x+2)^2}$	**8.**	$y = \frac{x^2}{x^2-4}$
9.	$y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$	**10.**	$y = xe^x$
11.	$y = \frac{x^2}{x^2-16}$	**12.**	$y = \frac{x^2}{x^2+9}$
13.	$y = \frac{x}{x^2-4}$	**14.**	$y = \frac{\ln x}{x}$
15.	$y = \frac{5x}{4-x^2}$	**16.**	$y = \frac{2+x}{(x+1)^2}$
17.	$y = (x+2)e^{1-x}$	**18.**	$y = x + \frac{\ln x}{x}$
19.	$y = \frac{x}{9-x}$	**20.**	$y = e^{\frac{1}{5+x}}$
21.	$y = x^2 - 2\ln x$	**22.**	$y = \ln\left(x^2+1\right)$
23.	$y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$	**24.**	$y = \frac{e^{2x}+1}{e^x}$
25.	$y = \frac{x^2+6}{x^2+1}$	**26.**	$y = \frac{x^5}{x^4-1}$
27.	$y = \frac{x^2}{(x+2)^2}$	**28.**	$y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$
29.	$y = \frac{x^4}{x^3-1}$	**30.**	$y = \frac{x^3+4}{x^2}$

ЗАВДАННЯ 3.16.

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні S у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

1. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0,$ $M_0(2,1,-1).$
2. $S: x^2 + 4y^2 + z^2 = -2xy,$ $M_0(-2,1,2).$
3. $S: x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7,$ $M_0(1,2,1).$
4. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8,$ $M_0(-1,1,2)$
5. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13,$ $M_0(2,1,-1).$
6. $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0,$ $M_0(2,1,-1).$
7. $S: x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46,$ $M_0(1,2,-3).$
8. $S: x^2 + y^2 - xz - yz = 0,$ $M_0(0,2,2).$
9. $S: x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2,$ $M_o(1;1;1).$
10. $S: x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x = z,$ $M_0(1,1,1).$
11. $S: z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y = 46,$ $M_0(-1,-1,-1).$
12. $S: z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y,$ $M_0(1,-1,1).$
13. $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y,$ $M_0(-1,1,1).$
14. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0,$ $M_0(3,1,2).$
15. $S: 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9,$ $M_0(1,-2,1).$
16. $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2,$ $M_0(2,1,0).$
17. $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3,$ $M_0(1,2,1).$
18. $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,$ $M_0(3,1,4).$
19. $S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4,$ $M_0(1,1,2).$
20. $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5,$ $M_0(-2,1,0).$
21. $S: x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11,$ $M_0(1,4,-1).$
22. $S: x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8,$ $M_0(0,2,0).$
23. $S: x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0,$ $M_0(-1,-1,1).$
24. $S: x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z,$ $M_0(1,0,1).$
25. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0,$ $M_0(1,-1,1).$
26. $S: x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = -8,$ $M_0(1,1,0)$
27. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10,$ $M_0(-1,1,3).$
28. $z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15,$ $M_0(-1,3,4).$
29. $S: z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10,$ $M_0(-7,1,8).$
30. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1,$ $M_0(1,-1,2).$

ЗАВДАННЯ 3.17.

Для функції $z = f(x,y)$:
а) знайти частині похідні І-го порядку;
б) знайти градієнт у точці M_o та у загальному вигляді.

1. $z = ln(y^2 - e^{-x}),\ M_o(2{,}0).$

2. $z = \arcsin\sqrt{xy},\ M_o\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$

3. $z = arctg(x^2 + y^2),\ M_o(0{,}1).$

4. $z = \cos\left(x^3 - 2xy\right),\ M_o(3{,}-1).$

5. $z = sin\sqrt{\frac{y}{x^3}},\ M_o(1{,}1).$

6. $z = tg(x^3 + y^2),\ M_o(-1{,}2).$

7. $z = ctg\sqrt{xy^3},\ M_o(2{,}1).$

8. $z = e^{-x^2+y^2},\ M_o(2{,}1).$

9. $z = ln(3x^2 - y^4),\ M_o(1{,}1).$

10. $z = arccos\left(\frac{y}{x}\right),\ M_o(4{,}2).$

11. $z = arcctg(xy^2), M_o(1{,}2).$

12. $z = cos\sqrt{x^2 + y^2}, M_o(-2{,}2).$

13. $z = sin\sqrt{x - y^3}, M_o(2{,}1).$

14. $z = tg\left(x^3y^4\right),\ M_o(3,-1).$

15. $z = ctg(3x - 2y), M_o(1{,}3).$

16. $z = e^{2x^2-y^5}, M_O(1,-2).$

17. $z = ln\left(\sqrt{xy} - 1\right), M_o(1{,}4).$

18. $z = arcsin(2x^3y), M_o\left(\frac{1}{2}, 1\right).$

19. $z = arctg\left(\frac{x^2}{y^3}\right), M_o(2{,}3).$

20. $z = cos\left(x - \sqrt{xy^3}\right), M_O(1{,}2).$

21. $z = sin\frac{x+y}{x-y}, M_o(3{,}2).$

22. $z = tg\frac{2x-y^2}{x}, M_o(3{,}2).$

23. $z = ctg\sqrt{\frac{x}{x-y}}, M_o(4{,}2).$

24. $z = e^{-\sqrt{x^2-y^2}}, M_o(1,-1).$

25. $z = ln(3x^2 - y^2), M_o(2{,}1).$

26. $z = arccos(x - y^2), M_o\left(1,\frac{1}{2}\right).$

27. $z = arcctg\frac{x^2}{y}, M_o(1{,}3).$

28. $z = cos\frac{x-y}{x^2+y^2},\ M_O(1{,}2).$

29. $z = sin\sqrt{\frac{y}{x+y}}, M_o(4{,}2).$

30. $z = e^{-(x^3+y^3)}, M_o(-2{,}3).$

ЗАВДАННЯ 3.18

Дослідити на екстремум функцію:

1. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

3. $z = x^3 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8.$

4. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8.$

5. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

6. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$

7. $z = x^3y^2(6 - x - y).$

8. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, (x > 0, y > 0).$

9. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$

10. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

11. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$

12. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$

13. $z = x^2y^3(6 - x - y).$

14. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

15. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, (x > 0; y > 0).$

16. $z = y\sqrt{x} - x^2 - y + 6x + 3.$

17. $z = x^3 + y^3 + 9xy.$

18. $z = x^3 + 3xy^2 - 18x^2 - 18xy - 18y^2 + 57x + 138y + 290.$

19. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$

20. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$

21. $z = x^3 + y^3 - 6xy.$

22. $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12.$

23. $z = xy^2(1 - x - y).$

24. $z = x^3 + y^3 - 15xy.$

25. $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}.$

26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

27. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

28. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.
29. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
30. $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Антоненко В. Ф. Вища математика: Навч. посібник. Модуль 1. Лінійна алгебра / В. Ф. Антоненко, Т. І. Олешко, Ю. А. Паламарчук ; За заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 140 с.
2. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников [та ін.] – К. : Техніка, 2003. – 600 с.
3. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навчальний посібник для студ. технічних і технологічних спец. вищих навч. закладів : затв. МОНУ / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 577 с.
4. Коновалюк В. С. Вища математика: Навч. посібник. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу / В. С. Коновалюк, Т. І. Олешко, В. П. Петрусенко ; За заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 140 с.
5. Кравченко В. В. Вища математика: Навч. посібник. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія / В. В. Кравченко, Т. В. Лубенська, Т. І. Олешко ; За заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 144с.
6. Мазур К. І. Вища математика: навчальний посібник. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних / К. І. Мазур, Т. І. Олешко, В. І. Трофименко ; за заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 104 с.