



Андрій Володимирович Пожуєв – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного університету «Запорізька політехніка».

Має більше 40 наукових публікацій із проблем динамічної взаємодії тонкостінних конструкцій із тривимірними інерційними середовищами, зокрема три монографії.

Підготував двох кандидатів наук.

Володимир Іванович Пожуєв – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри «Механіка» Національного університету «Запорізька політехніка», Заслужений працівник освіти України.

Має понад 330 наукових праць, серед яких шість монографій, вісім навчальних посібників, понад 260 статей. Підготував 16 кандидатів наук.

Основні напрямки дослідження: розповсюдження хвиль і динамічна взаємодія пластин й оболонок із пружними середовищами та рідиною, контактні задачі теорії пружності, чисельні й аналітичні методи в теорії пластин та оболонок.



Антон Володимирович Фасоляк – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Національного університету «Запорізька політехніка».

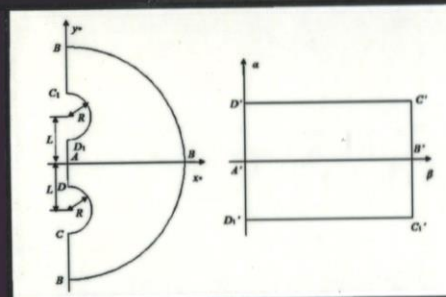
Має понад 25 наукових публікацій із проблем динамічної взаємодії тонкостінних конструкцій із тривимірними інерційними середовищами.



Національний університет
«Запорізька політехніка»

А. В. Пожуєв, В. І. Пожуєв, А. В. Фасоляк

Математичні моделі та методи розрахунку нестационарної динаміки циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі



Монографія

Запоріжжя

НАУКОВА КНИГА

Серію засновано у 2016 році

Національний університет «Запорізька політехніка»

А. В. Пожусь, В. І. Пожусь, А. В. Фасоляк

**Математичні моделі та методи розрахунку
нестационарної динаміки циліндричних оболонок
у тривимірному пружному середовищі**

Монографія



**Запоріжжя
СТАТУС
2019**

УДК 624.035.4:519.86(02.064)
ББК 38.78в631я91
П46

*Рекомендовано до друку вченою радою
Запорізького національного технічного університету
(протокол № 6 від 25 березня 2019 р.)*

Рецензенти:

- В. З. Гришак,**
доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України;
- А. П. Дзюба,**
доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України.

Пожуєв, А. В.
П46 **Математичні моделі та методи розрахунку нестационарної динаміки циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі** : монографія / А. В. Пожуєв, В. І. Пожуєв, А. В. Фасоляк. — Запоріжжя : СТАТУС, 2019. — 152 с. — (Наукова книга).
ISBN 978-617-7759-16-3

У монографії розглянуті нестационарні динамічні задачі для нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка оточена пружним інерційним середовищем. Так будуються математичні моделі для підземних споруд глибокого та неглибокого залягання (тунелі метро, трубопроводи, стволи шахт тощо). При цьому для розв'язання отриманих за такого підходу рівнянь у частинних похідних розроблені чисельно-аналітичні й розвинуті чисельні методи, зокрема показані можливості сумісного використання інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа, застосування біполярної системи координат, методів скінченних елементів і скінченних різниць. Значна увага приділена питанням урахування поверхні пружного півпростору, визначенню коефіцієнта динамічності, взаємовпливу двох оболонок у необмеженому й напівобмеженому просторі. Наведено велику кількість графіків, які ілюструють ефективність запропонованих підходів.

Для наукових співробітників й інженерів-механіків, а також як навчальний посібник для аспірантів, магістрів та студентів математиків і механіків.

Іл. 59, бібліогр. с. 141–154 (108 найменування).

УДК 624.035.4:519.86(02.064)
ББК 38.78в631я91

Зроблено в Запоріжжі © А. В. Пожуєв, В. І. Пожуєв, А. В. Фасоляк, текст, 2019
ISBN 978-617-7759-16-3 © Видавництво «СТАТУС», оформлення, 2019



Усі права захищені. Жодна частина цієї книги не може бути відтворена в будь-якій формі без письмового дозволу власників авторських прав. Правову підтримку видавництва забезпечує юридична компанія «ПРАВОВИЙ АЛЬЯНС»

SCIENTIFIC BOOK

The series was founded in 2016

National University “Zaporizhzhia Polytechnic”

A. V. Pozhuyev, V. I. Pozhuyev, A. V. Fasoliak

**Mathematical models and calculation methods
of cylindrical shells non-stationary dynamics
in three-dimensional elastic medium**

Monograph



Zaporizhzhia
STATUS
2019

UDC 624.035.4:519.86(02.064)
BBC 38.78В631Я91
П46

*Recommended for publication by the Academic Council
Zaporizhzhya National Technical University
(protocol number 6 of March 25, 2019)*

Reviewers:

V. Z. Grischak,
PhD, professor, Honored Worker of Science of Ukraine;

A. P. Dzyuba,
PhD, professor, Honored Worker of Science of Ukraine.

Pozhuyev, A. V.

П46 Mathematical models and calculation methods of cylindrical shells non-stationary dynamics in three-dimensional elastic medium: monograph / A. V. Pozhuyev, V. I. Pozhuyev, A. V. Fasoliak. — Zaporizhzhia : STATUS, 2019. — 152 p. — (Scientific book).
ISBN 978-617-7759-16-3

The monograph considers the problem of non-stationary dynamic infinitely long cylindrical shell, which is surrounded by an elastic inertial medium. So mathematical models for underground structures of deep and shallow locations (metro tunnels, pipelines, trenches of mines, etc.) are constructed. In this case, numerical analytics and numerical methods are developed for the solution of the partial differential equations, which have been obtained using this approach. In particular, the possibilities of the combined use of Fourier and Laplace integral transformations, the application of the bipolar coordinate system, finite element method, and finite differences are shown. Considerable attention is paid to the consideration of an elastic half-space surface, the determination of the coefficient of dynamism, the two shells mutual influence in an unbounded and semi-limited space. There are many graphs illustrating the effectiveness of the approaches proposed.

For researchers and mechanical engineers, as well as a textbook for graduate students, masters and students of mathematics and mechanics.

Fig. 59, Ref. p. 141–154 (108 names).

UDC 624.035.4:519.86(02.064)
BBC 38.78В631Я91

Made in Zaporizhzhia © A. V. Pozhuyev, V. I. Pozhuyev, A. V. Fasoliak, text, 2019
ISBN 978-617-7759-16-3 © Book publishing company "STATUS", design, 2019



All rights are protected. All parts of this book may be reproduced only by written permission of the copyright holders.
Legal Company "Legal Alliance" provides legal support for the publishing company.

ПЕРЕДМОВА

Починаючи з 70-х років попереднього століття задачі про динамічну поведінку циліндричних оболонок, заповнених або оточених пружним інерційним середовищем, стали об'єктом дослідження для багатьох вітчизняних та закордонних вчених. Це було викликано в першу чергу тим, що оболонки з заповнювачем або трьохшарові оболонки з більш м'яким внутрішнім шаром є важливим елементом в ракетній, авіаційній та суднобудівній галузях. Крім того зросли вимоги до точності розрахунку різного роду підземних конструкцій (трубопроводи, тунелі метро, вертикальні стволи шахт). Крім перерахованої практичної важливості задач подібного виду це також приводить до важливої проблеми механіки деформівного твердого тіла, а саме, до задач про математичний опис проблеми взаємодії пружних тіл, які описуються рівняннями різної просторової розмірності (двовимірні рівняння для оболонок і тривимірні – для пружного середовища).

Слід зазначити, що на початковій стадії розв'язання таких задач вони найчастіше розглядалися в статичній або стаціонарній динамічній постановці (це в першу чергу питання про стійкість оболонки і вплив на процес втрати стійкості наявності заповнювача, або оточуючого оболонку амортизуючого шару, а також багато уваги було приділено вільним і вимушеним коливанням системи оболонка – пружне середовище, розповсюдженням вільних хвиль в таких складених системах і достатньо детально вивчено дію навантаження, яке рухається зі сталою швидкістю вздовж оболонки).

При такій стаціонарній динамічній постановці задач змінна часу виключається із розгляду зрозумілим переходом або до амплітуд шуканих величин, або до рухомої системи координат і тоді частота коливань або швидкість руху навантаження входить в рівняння оболонки і середовища, як параметр. З практичної точки зору остання ситуація з рухомим

навантаженням може розглядатися як розв'язок задачі з початковими умовами (нестационарної) але для моментів часу, коли від початку руху навантаження вже досить далеко. Але щоб визначити динамічний ефект, зокрема коефіцієнт динамічності, потрібно розглядати нестационарну постановку і результати порівнювати з розв'язком відповідної стационарної або статичної, коли навантаження не рухається, задачі. Крім того, в задачах, коли циліндрична оболонка знаходиться в пружному середовищі до цього часу не розглядався вплив вільної поверхні, коли оболонка знаходиться на порівняно малій глибині, а також коли вісь оболонки перпендикулярна до поверхні півпростору, або коли в півпросторі (просторі) знаходяться дві коаксіальні циліндричні оболонки. Виникає також необхідність детального аналізу застосування різних підходів до опису руху оболонки в нестационарних задачах такого класу.

В даній монографії розглянуті математичні моделі, які можна запропонувати для опису нестационарної динаміки циліндричних оболонок нескінченної довжини, які знаходяться в необмеженому або напівнескінченному пружному середовищі, а також запропоновано кілька методів для розв'язання задач такого класу. При цьому для однієї оболонки, яка знаходиться в необмеженому пружному просторі розвинуто чисельно-аналітичний підхід, який полягає в сумісному застосуванні інтегральних перетворень Фур'є за осьовою координатою, Лапласа за змінною часу і рядів Фур'є за кутовою координатою, з наступним ефективним чисельним алгоритмом їх сумісного обернення. Для врахування впливу вільної поверхні або взаємовпливу двох оболонок запропоновано два підходи: напіваналітичний, коли за допомогою біполярної системи координат рівняння оболонки, які спочатку записані в циліндричній системі, і простору, які записані в декартовій системі, записуються в єдиній системі координат і інтегруються потім чисельно. Другий підхід ґрунтується на сумісному використанні методу скінчених елементів і ітераційному процесі за часом. В

монографії наведені лише результати, які отримані авторами і не використовуються дані інших вчених.

У вступі міститься короткий огляд публікацій за темою дослідження та аналіз сучасного стану проблеми, зокрема, основна увага приділена питанням розрахунку циліндричних оболонок, оточених пружним середовищем, рух якого описується тривимірними рівняннями теорії пружності. Відмічені ті небагаточисельні публікації, в яких враховується поверхня напівпростору, а також публікації, в яких запропоновано використання методу скінченних елементів.

Перший розділ, основні результати якого опубліковані в роботах [53, 54, 64, 66, 95], присвячено побудові математичних моделей для дослідження процесів у системі циліндрична оболонка – необмежене пружне середовище. При цьому основна увага була приділена порівняльному аналізу використання різних моделей (теорій) для опису руху оболонки (тривимірні рівняння теорії пружності, рівняння типу Тимошенко, рівняння теорії оболонок, що ґрунтуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява). У всіх випадках середовище, що оточує оболонку, моделювалось тривимірними динамічними рівняннями теорії пружності. З математичної точки зору задача зводиться до сумісного інтегрування рівнянь руху оболонки і середовища при виконанні умов контакту на сумісній поверхні і задоволення початкових умов руху. Методи розв'язання таких задач були чисельно-аналітичними, коли на першому етапі застосовувалися інтегральні перетворення Фур'є за просторовою (осьовою) координатою (при необхідності у випадку невісесиметричної задачі ще і ряди Фур'є за кутовою) і перетворення Лапласа за часовою змінною, в результаті напруження і переміщення довільної точки системи оболонка – середовище отримуються у вигляді рядів Фур'є від подвійних невластних інтегралів. Для обернення таких інтегралів розроблені ефективні чисельні алгоритми, що ґрунтуються на сумісному використанні методу Файлона і зміщених многочлені Лежандра, що дозволило у всіх розглянутих задачах побудувати графіки переміщень і

напружень у різні моменти часу. Зроблено висновок про межі застосування кожної з моделей для оболонки в задачах даного класу. Результати розповсюджені на оболонки, які підкріплені повздовжніми і поперечними ребрами жорсткості, при цьому враховується дискретність підкріплень шляхом запису для них відповідних рівнянь теорії балок і кілець.

У другому розділі, якому присвячені публікації [67, 68, 104] розроблені математичні моделі для розрахунку оболонок неглибокого залягання, тобто коли виникає необхідність врахування поверхні (вільної або навантаженої) на динамічний процес у системі оболонка – середовище. Крім того, значний практичний і теоретичний інтерес викликає дослідження взаємовпливу двох коаксіально розташованих оболонок у пружному середовищі при їх динамічному навантаженні. При цьому в даному розділі запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який ґрунтується на застосуванні біполярної системи координат як для врахування впливу поверхні півпростору, так і при аналізі взаємовпливу двох оболонок. Показано, як виходячи із динамічних рівнянь теорії пружності в довільній ортогональній системі координат вивести рівняння руху півпростору у біполярній системі, а із рівнянь теорії оболонок в довільній ортогональній системі перейти до рівнянь руху в тій же, що і для середовища, біполярній системі. Після цього отримана система рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами розв'язувалася чисельним методом, що ґрунтується на методі скінчених різниць за просторовими координатами і θ -методі Вільсона за часовою змінною, який дозволяє звести розв'язання нестационарної задачі до розв'язання ітераційної послідовності квазістатичних задач. З механічної точки зору основними результатами є знаходження залежності між відстанню до поверхні півпростору і радіусом оболонки, з якої видно, коли справедливе моделювання оболонки у необмеженому просторі. Аналогічні висновки зроблені про взаємовплив двох оболонок.

Третій розділ, основні результати якого були раніше висвітлені у публікаціях [56, 61-63, 65], присвячено розробці чисельних методів, які

побудовані на основі методу скінчених елементів (МСЕ) для просторових змінних і θ -методі Вільсона, для дослідження динаміки однієї або кількох циліндричних оболонок у пружному інерційному середовищі . Крім того, отримані таким шляхом результати, в окремих задачах порівнюються з результатами, отриманими у другому розділі за допомогою біполярної системи координат, що дозволяє говорити про достовірність обох підходів. Також отримані розв'язки задач, які не розглядалися іншими методами, зокрема, динаміка напівскінченної оболонки, вісь якої перпендикулярна до поверхні півпростору (вертикальний ствол шахти), а також динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок, які знаходяться на різній глибині у півпросторі. Усі задачі проілюстровані великою кількістю чисельних результатів.

Автори сподіваються, що приведені в монографії математичні моделі, розвинуті методи і отримані результати можуть бути корисними для розробки адекватних розрахункових схем спеціалістами, які, зокрема, займаються проектуванням підземних споруд і трубопроводів, що працюють в умовах значних динамічних навантажень, а також студентами та аспірантами математичних і механічних спеціальностей.

Задачі розповсюдження пружних хвиль в елементах механічних конструкцій, зокрема тонких оболонках і пластинах, почали розглядати порівняно давно. Наприклад, задачу про розповсюдження пружних хвиль в пластині було розглянуто Релеєм ще у 1889. Дослідження коливань оболонок із заповнювачем (як пружним, так і рідким) та аналіз розповсюдження вільних хвиль у системі оболонка – пружне середовище почалося у другій половині двадцятого сторіччя. Але в перших роботах у даному напрямку головним об'єктом дослідження виступала безпосередньо сама оболонка, а пружний заповнювач приймався неінерціальним та враховувався за допомогою наближеної моделі Вінклера-Цімермана [99]. Процес розповсюдження вісесиметричних хвиль в оболонках з використанням точної тривимірної моделі вперше був розглянутий К. Хошем у 1923 році [1], але правильна крива першої моди вісесиметричного переміщення приводиться в роботі Д. Германа та О. Мірського в 1956 році. Історія цього питання та відповідна бібліографія робіт до кінця 1970-х років наведена в огляді Л. Айноли та У. Нігула [1], а стан питання про динамічну взаємодію оболонок та пластин з суцільними середовищами розглянуто в роботах та монографіях А. Г. Горшкова, М. А. Ільгамова та В. І. Пожуєва [18-21, 29].

Слід зазначити, що в більшості робіт, які присвячені динамічній взаємодії тонкостінних конструкцій (зокрема оболонок та пластин) з інерційними основами задачі розглядалися в стаціонарній постановці (розповсюдження вільних хвиль, вимушені коливання, рух навантаження з постійною швидкістю вздовж необмеженої, принаймні, в одному напрямку конструкції). Але навіть в такій постановці, коли не враховуються початкові умови та виключається перехідний процес, виникають принципові труднощі, для вирішення яких запропоновано та розроблено різного роду спрощені підходи для описання процесу взаємодії, а також спеціальні чисельні методи

обчислення невластних інтегралів, які використовуються для обернення використаних інтегральних перетворень.

Значний вклад в розвиток методів розв'язку стаціонарних задач динамічної взаємодії внесли Бешенков С. Н., Голосков Є. Г., Ольшанський В. П. [8, 15-17], Гузь О. М. [24], Дубінін В. В. [25], Ільгамов М. А., Іванов В. А., Гулін Б. В. [28, 29], Корбут Б. А., Нагорний Ю. І., Мастиновский Ю. В. [34, 41], Пожуєв В. І. [71, 72], Селезов І. Т., Ткаченко В. А. [91], Цурпал І. А., Тамуров М. Г. [97], Шульга М. О. [98]. Більш детально фізична сторона процесу розповсюдження хвиль різної природи була розглянута в монографії Л. М. Бреховського [9], в якій досить детально проаналізовано розповсюдження хвиль в шарувато неоднорідному середовищі, зокрема досліджено випромінювання звукових хвиль в системі шарів. В роботі [8] досліджено розповсюдження вісесиметричних вільних хвиль в нескінченно довгій циліндричній оболонці, яка містить пружний заповнювач. Також отримано та проаналізовано дисперсійні співвідношення, які описують залежність між частотами та фазовими швидкостями. в даному випадку, рух оболонки описувався рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання, а для заповнювача використовувалась наближена модель, в якій осьові та дотичні переміщення припускаються рівними нулю. Таке припущення є прийнятними, оскільки дотичні переміщення є досить малими порівняно з нормальними переміщеннями в пологих оболонках. На основі описаного підходу були визначені фазові швидкості хвиль в оболонці із суцільним заповнювачем для різних значень його жорсткості та числа хвиль в радіальному напрямку.

Подальші дослідження проводились в напрямку розвитку та застосування уточнених моделей поведінки тонкостінних конструкцій (зокрема оболонок). Для цього застосовувались рівняння, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання, а також врахування анізотропії та неоднорідності основ. Зокрема в роботах Бабича С. Ю., Глухова Ю. П., Гузя О. М. [4, 14] для отримання розв'язку задачі про дію рухомого напруженнями на пластину, яка лежить на стискуваному або нестискуваному

півпросторі, застосовано лінеаризовану теорію пружних тіл з початковими навантаженнями. Основна увага приділена визначенню критичних швидкостей, а при дослідженні стаціонарного напружено-деформованого стану застосовано звичайний для таких випадків перехід до рухомої системи координат, яка рухається разом із навантаженням. Потім в такій системі координат застосовується комплексне інтегральне перетворення Фур'є.

Задача про розповсюдження вільних хвиль в шаруватому середовищі в точній постановці теорії пружності, в тому числі для анізотропних шарів, розглянуто в роботі Шульги М. О. [98]. Зокрема при дослідженні спектрів фазових та групових швидкостей повздовжніх хвиль в циліндричних оболонках з ортотропного матеріалу використано запропонований автором для подібного типу задач метод степеневих рядів.

Роботи, в яких розглядалася динаміка елементів конструкцій, які знаходяться під дією рухомих навантажень, детально проаналізовані в огляді Якушева Н. З. [100]. В цій роботі розглянуто дослідження, які присвячено динаміці півпростору, пластин та оболонок під дією рухомих навантажень. Відмічено достатньо загальний характер терміну «рухоме навантаження», причому як з математичної, так і з фізичної точок зору. Це визначає можливість дослідження закономірностей взаємодії рухомих навантажень без врахування реального фізичного процесу, в результаті якого ці навантаження і виникають.

Під час аналізу задач про дію рухомих навантажень на шаруваті середовища, в основному, були розглянуті дозвукові та докритичні швидкості руху навантажень. В роботах Пожуєва В. І. [69, 71, 72] запропоновано два методи, які дозволяють розглядати довільні за величиною, але постійні швидкості руху навантаження: метод деформування контуру інтегрування при обчисленні інтегралів обернення [69], за допомогою якого вивчено вплив величини швидкості руху навантаження на реакцію пластини, яка лежить на пружному шарі скінченної товщини; та метод демпфування в різних варіантах врахування дисипації як за рахунок середовища, яке оточує конструкцію [71], так і за рахунок в'язко-пружних властивостей самої конструкції [72].

Спроби отримати розв'язок задач навіть для необмежених тіл у нестационарній постановці приводять до досить складної проблеми, яка пов'язана з відсутністю ефективних методів обернення інтегрального перетворення Лапласа для випадків, коли підінтегральна функція є досить складною, більш того сама є інтегралом Фур'є. Це пов'язано з тим, що як правило, в таких задачах необхідно застосовувати двох, а іноді і трьохкратні інтегральні перетворення. Тому, досить раціональними виглядають спроби обернення таких кратних інтегральних перетворень чисельно із застосуванням ЕОМ. При цьому основою для такого роду алгоритмів виступають квадратурні формули, які отримані В. І. Криловим та його учнями [35, 36]. І. Т. Селезов, В. А. Ткаченко [91] вперше застосували один з можливих підходів такого типу в задачах механіки, де реалізували алгоритм обернення інтегрального перетворення Лапласа за допомогою зміщених поліномів Лежандра. Використовуючи запропонований алгоритм, авторами було побудовано графіки горизонтального та вертикального переміщень поверхні пружного півпростору, на який діє симетрично розподілений імпульс тиску.

В подальшому такого роду алгоритми сумісного обернення інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа, Ханкеля та Лапласа, підсумовування тригонометричних рядів Фур'є, коефіцієнтами яких є трансформанти Лапласа, були побудовані в роботах Пожуєва В. І., Полякової Н. П., Мохамеда Жибігає [73-84].

В роботах [78, 79] розроблено алгоритм розв'язання двовимірних (плоских) задач динаміки пластин типу Тимошенко на пружній основі скінченної (шар) та нескінченної (півплощина) глибини. Розв'язок задачі отримано за допомогою застосування інтегральних перетворень Фур'є за повздовжньою координатою та перетворення Лапласа за змінною часу. Чисельний алгоритм сумісного обернення двох інтегральних перетворень дозволив в задачах про дію рухомих та нерухомих навантажень врахувати нульові (тобто початкові) умови та обчислити час, за який процес стає таким, що встановився. Тобто час, починаючи з якого можна застосовувати стаціонарний розв'язок.

В роботі [82] побудовано аналогічний алгоритм для аналізу нестационарної динаміки трьохшарової пластини в двовимірній постановці, коли рух кожного шару описується рівняннями типу Тимошенко, а для заповнювача використовувалися динамічні рівняння теорії пружності. На основі аналізу плоского напружено-деформованого стану зроблено висновок про вплив умов контакту між шарами та заповнювачем, побудовано графіки, які можна використовувати для порівняння з розрахунками на основі наближених теорій трьохшарових пластин. Однак, в наведеній роботі розглянуто лише частковий випадок (як і в роботах [78, 81]), коли в напрямку однієї з просторових змінних картина не змінюється, тому можна застосувати інтегральне перетворення тільки по одній координаті та за змінною часу.

Нестационарна динаміка пластин необмежених в плані розмірів, які лежать на пружній основі під дією нормального навантаження досліджено в роботі [83]. Розв'язок отримано за допомогою використання інтегральних перетворень Ханкеля (за радіальною змінною) та Лапласа (за змінною часу) і спеціального алгоритму для сумісного обернення використаних інтегральних перетворень. Побудовано графіки зміни компонент напружено-деформованого стану розглянутої механічної системи за змінною часу.

В роботах [73-77] для аналізу динаміки підземних циліндричних споруд побудовано наближену модель для опису поведінки пружного масиву, яка ґрунтується на підході до пружного інерційного середовища, який запропоновано Власовим та Пастернаком. Такий спрощений підхід дозволив досить легко побудувати розв'язок задач динаміки для оболонок скінченної та нескінченної довжини, в тому числі в нестационарній постановці, врахувати явище відриву оболонки від масиву.

В роботі Пожуєва А. В. [51] розглянуто нестационарну динаміку нескінченно-довгої циліндричної оболонки з пружним заповнювачем. Для описання руху оболонки використовувалися рівняння типу Тимошенко, а рух заповнювача моделювався динамічними рівняннями теорії пружності. Для отримання розв'язку всі величини були розкладені у тригонометричні ряди

Фур'є, а потім для коефіцієнтів розкладання застосовані інтегральне перетворення Фур'є (за осью координат) та інтегральне перетворення Лапласа за змінною часу. Розроблено алгоритм сумісного підсумовування рядів та чисельного обернення інтегральних перетворень. Побудовано графіки залежності від часу компонент напружено-деформованого стану розглянутої механічної системи. В роботі Пожуєва А. В. [50] побудовано математичну модель циліндричної оболонки, яка дискретно підкріплена ребрами жорсткості та містить пружний заповнювач. На основі методу, який наведено в роботі [51], розроблено алгоритм розрахунку компонент напружено-деформованого стану такої механічної системи. Також в роботі проаналізовано вплив взаємної відстані між ребрами жорсткості на динамічний напружений стан системи ребриста оболонка – пружний заповнювач. В роботі Пожуєва А. В. [52] розглянута аналогічна задача для ребристої циліндричної оболонки скінченної довжини.

В роботі Пожуєва А. В. [49] розглянуто нестационарну динаміку дискретно-підкріпленої ребрами жорсткості пластини на пружній основі. Для описання руху пластини використовувались рівняння типу Тимошенко, а рух основи моделювався динамічними рівняннями теорії пружності. Для отримання розв'язку до всіх величин було застосовано двовимірне інтегральне перетворення Фур'є та інтегральне перетворення Лапласа за змінною часу. Розроблено алгоритм чисельного сумісного обернення інтегральних перетворень. Побудовано графіки залежності від часу компонент напружено-деформованого стану розглянутої механічної системи.

В роботах Мейш В. Ф., та Мейш Ю. А. [42, 43] розглянуто нестационарну динаміку тонкої циліндричної оболонки в ґрунтовому трьохкомпонентному нелінійному середовищі періодичної структури. Рух оболонки описується рівняннями типу Тимошенко, для ґрунту використовуються рівняння нелінійного трьохкомпонентного середовища, а рівняння стану кожної основи представлені згідно моделі нелінійного багатоконпонентного середовища В. М. Ляхова. Для розв'язання задачі було використано скінченно-різницеву схему Мак – Кормака. Отримані чисельні

результати дозволили проаналізувати хвильові процеси в системі в залежності від параметрів циліндричної оболонки та параметрів ґрунтового середовища періодичної структури.

Дослідженню динамічної поведінки елементів конструкцій під дією короткочасного навантаження, яке викликає нестационарне деформування, присвячені роботи [101-103, 105-108]. В якості конструктивних елементів розглядалися пластини і оболонки. Враховуючи особливості конкретних задач, авторами використовувалися ряд чисельних і чисельно-аналітичних методів.

В роботі [102] проведено аналіз задачі коливань двошарової пластини нескінченної довжини, яка знаходиться на стисливій рідині. При цьому шари пластини з'єднані пружним прошарком, а до пластини прикладене навантаження, яке рухається із постійною швидкістю. Для кожного із двох шарів застосовується рівняння пластин типу Тимошенко з врахуванням ефектів деформації зсуву і інерції обертання. В [101] досліджується динамічна реакція циліндричної оболонки з неідеальними в'язями, яка знаходиться у пружному просторі. Між оболонкою і простором знаходиться тонка пружна в'язь. Навантаження – вісесиметричне кільце тиску, яке рухається в осьовому напрямку вздовж внутрішньої поверхні оболонки. В стаціонарній постановці розв'язок отримано за допомогою перетворення Фур'є за осью змінною, при цьому приймається, що рух оболонки підпорядковується теорії товстих оболонок, а поведінка простору описується лінійною теорією пружності. Знайдена критична швидкість руху навантаження, як функція жорсткості в'язі, і показана залежність між радіальними переміщеннями від докритичної швидкості при певних значеннях жорсткості в'язі.

В роботах [107, 108] розглянута нескінченно довга циліндрична оболонка із ортотропного матеріалу, яка неідеально контактує з оточуючим її пружним простором і на яку діють або хвиля тиску, або падає хвиля зсуву. Тонкий шар між оболонкою і оточуючим середовищем розглядається з врахуванням його властивостей жорсткості і демпфування. Досліджено різний ступінь

недосконалості (неідеальності) в'язі шляхом зміни параметрів жорсткості і демпфування прошарку. Із аналізу моди руху для невісесиметричної реакції зроблено висновок, що припущення про ідеальність контакту, можливо, не завжди приводить до безпечної і точної оцінки переміщення оболонки і, відповідно, виникає необхідність розглядати неідеальні в'язі.

За допомогою метода хвильових функцій в роботі [106] досліджено розсіювання гармонічного плоского звукового поля, що падає під кутом на багат шаровий полий циліндр з неідеальними в'язями між шарами. Використовується лінійна модель стрибка для опису міжшарової клейкої в'язі між елементами циліндра. Наведені чисельні результати для двохшарової алюмінієвої циліндричної оболонки, яка знаходиться в рідині. Досліджено ефект неідеальної в'язі між шарами конструкції на резонанси, які пов'язані з різними видами хвиль, що розповсюджуються (симетричні, несиметричні, Лямда хвилі в рідині та інші). Також наведені чисельні результати для п'ятишарової оболонки, в якій жорсткість клейового прошарку різна. Розглянуті граничні переходи та встановлені задовільні погодження з результатами, раніше описаними в літературі.

Задачі динаміки для циліндричних оболонок у пружному середовищі із вільною поверхнею (тобто коли глибина залягання оболонки не перевищує п'яти її діаметрів) приводять до досить складних математичних проблем, які пов'язані із необхідністю враховувати вплив поверхні середовища. Складність таких задач веде до необхідності розробки та використання чисельних методів, та розробки відповідних алгоритмів для обчислення на ЕОМ, тому розглядати подібні задачі почали порівняно недавно.

І. С. Нікітін [45] розглянув у стаціонарній постановці задачу для пружного півпростору із циліндричною порожниною, причому вісь порожнини паралельна площині поверхні півпростору. Рухоме навантаження, яке рухається зі сталою швидкістю, прикладалося до поверхні півпростору. Також припускалося, що навантаження діє симетрично лінії, яка проходить через початок координат та центральну вісь порожнини. Це дало можливість зробити розріз вздовж лінії

симетрії, який було враховано за допомогою граничних умов. Для отримання розв'язку задачі була застосовано біполярна система координат, яка дала можливість відобразити півпростір з порожниною в прямокутник скінченних розмірів. Всі основні співвідношення теорії пружності у швидкостях були виписані у біполярній системі координат. Для розв'язку задачі застосовувалися метод скінченних різниць першого порядку точності (для просторових змінних) та ітераційний метод за змінною часу. Всі компоненти напружено-деформованого стану розглянутої системи проілюстровано графічно та, зокрема, проаналізовано їх залежність від швидкості руху навантаження.

В подальших дослідженнях Н. А. Попова, В. С. Проценко, Н. А. Українець [85-89] розглядали задачу для пружного півпростору з циліндричною порожниною в статичній постановці за допомогою методу перерозвинення базисних розв'язків рівняння Ламе (узагальненого методу Фур'є). Ці методи ґрунтуються на тому, що для рівняння Ламе виписуються базисні розв'язки в циліндричній та декартовій системі координат. За допомогою теорем підсумовування, які пов'язують базисні розв'язки в різних координатних системах, ці функції записуються в одній координатній системі та задовольняють граничним умовам. Зокрема в роботах [86, 88] доводяться теореми про оцінку точності та залежність кількості доданків в рядах Фур'є від наперед заданої точності.

В своєму дослідженні Л. О. Алексєєва, В. Н. Українець [2] розглянули динамічну задачу для циліндричної оболонки у пружному середовищі із поверхнею у стаціонарній постановці. Задача розв'язується у рухомій циліндричній системі координат, а для розв'язку використовується узагальнений метод Фур'є. В роботі розглянуто випадок, коли навантаження рівномірно рухається по внутрішній поверхні оболонки зі сталою швидкістю. Рух оболонки описувався класичними рівняннями теорії тонких оболонок, а рух середовища – динамічними рівняннями теорії пружності, для розв'язання яких використовуються потенціали Ламе. У процесі дослідження побудовано та проаналізовано дисперсійні криві для ковзного та жорсткого контактів оболонки

з пружним середовищем, що оточує оболонку. Вивчено вплив параметрів оболонки на напружено-деформований стан масиву. В роботі [3] розглянуто задачу для багатошарової оболонки у пружному півпросторі під дією періодичного навантаження, яке рухається з незмінною швидкістю. Для опису руху кожного шару оболонки використовуються класичні рівняння теорії тонких оболонок, а для півпростору – динамічні рівняння теорії пружності, розв’язання яких отримується за допомогою потенціальних функцій Ламе. Контакт між оболонками та між зовнішньою оболонкою і півпростором вважається жорстким. Проаналізовано напружено-деформований стан системи багатошарова оболонка – пружний півпростір для дозвукових швидкостей руху навантаження. Вивчено вплив кількості шарів оболонки на напружено-деформований стан півпростору.

Одним з основних методів дослідження напружено-деформованого стану складених конструкцій (зокрема оболонок у пружному середовищі) є метод скінченних елементів (МСЕ). Значний вклад в розвиток методики застосування МСЕ до розв’язання контактних задач теорії пружності внесли С. М. Гребенюк, К. С. Решевська, В. М. Тархова [22, 23, 90].

У своїх роботах О. С. Каїров, В. О. Каїров, В. П. Шевченко, С. О. Моргун [30-32] досліджували динаміку циліндричних оболонок за допомогою розробленого чисельного методу та алгоритмів розрахунку із використанням ізопараметричних СЕ. Зокрема в роботах робиться акцент на дискретному підкріпленні ребрами жорсткості, або дискретності приєднаних мас. Проведено аналіз величини приєднаних мас на НДС циліндричних оболонок.

В. Д. Петренко, Є. Ю. Кулаженко [48] на основі МСЕ побудували математичну модель для перевірки гіпотез про зменшення вібраційного впливу поїздів метрополітену на середовище, що оточує тунель (який моделюється оболонкою) за допомогою свердловин із різними типами пружних заповнювачів. Дослідження проводиться в рамках плоскої задачі теорії пружності. В роботі проведено порівняння напрямку та величини переміщень на основі статико-динамічного аналізу моделей для різних матеріалів заповнення свердловин відсічного екрану. На основі проведеного

аналізу зроблено висновок, що найбільш ефективним варіантом закріплення є варіант з заповнювачем із керамзиту. Також відмічено, що заповнювач з керамзиту є більш економічно ефективним, зокрема в порівнянні з використанням класичного цементно-піщаного розчину.

Г. Є. Габріелян, В. А. Баранов, Б. М. Лисов [11-13] досліджували статичний напружено-деформований стан замкнутої циліндричної оболонки у пружному середовищі з одностороннім зв'язком у плоскій постановці. Авторами розроблено алгоритми аналізу, які ґрунтуються на МСЕ.

Ч. С. Лінь [40] у своїй роботі провів дослідження впливу величини пружного масиву, який оточує оболонку, на НДС системи оболонка-пружний масив. Дослідження проведено за допомогою чисельних експериментів на основі просторового МСЕ, де середовище моделювалося тетраедрами, сітка яких робилася більш густою по мірі наближення до оболонки. В результаті встановлено, що для отримання достатньої точності можна обмежуватись розміром пружного масиву від трьох до п'яти діаметрів оболонки.

С. Б. Косіцин, Ч. С. Лінь [37, 38] провели дослідження просторового статичного напружено-деформованого стану циліндричних оболонок у пружному масиві, які ортогонально перетинаються. Дослідження проведено на основі МСЕ. Оболонки моделювалися плоскими СЕ з чотирма вузлами (по шість ступенів вільності в кожному), які побудовані на основі наближеної теорії Кірхгофа-Лява. Ґрунтове середовище моделювалося чотирьохвузловими тетраедрами (з трьома ступенями вільності в кожному вузлі). Сітка просторових елементів робилася більш густою по мірі наближення до оболонок. В роботі також врахована можливість відставання оболонки від ґрунтового масиву. Графічно приведені результати чисельного аналізу. На основі аналізу отриманих результатів зроблено висновок, що можливість односторонньої взаємодії оболонок з пружним масивом (ефект відставання) приводить до підвищення значень основних характеристик НДС системи в цілому у порівнянні з загальноприйнятою моделлю повного контакту оболонок та масиву ґрунту.

Проведений короткий огляд літератури показав, що в більшості робіт використовуються чисельно-аналітичні, або чисельні методи, що зумовлено складністю задач. При цьому більшість досліджень проведена для динамічних задач у стаціонарній постановці і для випадку, коли оболонка знаходиться у необмеженому середовищі.

Можна також зробити висновок, що при аналізі динамічних задач для тонких оболонок як у необмеженому середовищі, так і в середовищі із поверхнею, важливу роль почали відігравати чисельні алгоритми, зокрема МСЕ. Крім того, перспективними є напрямки застосування некласичних ортогональних систем координат (наприклад біполярної) у поєднанні із чисельними методами розв'язку систем диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Таким чином, розробка чисельно-аналітичних та чисельних підходів до розв'язання динамічних задач для тонких циліндричних оболонок у пружному середовищі у загальній постановці є актуальною з теоретичної та практичної точок зору. Дана монографія присвячена викладенню результатів, які отримані авторами у даному напрямку.

ДИНАМІКА ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У НЕОБМЕЖЕНОМУ ТРИВИМІРНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

1.1 Динаміка циліндричної оболонки у пружному середовищі при вісесиметричних навантаженнях

1.1.1 Опис руху оболонки за допомогою рівнянь теорії пружності

Розглянемо нескінченно довгу, тонку циліндричну оболонку, яка знаходиться у необмеженому, лінійно-пружному, однорідному та ізотропному середовищі. Нехай оболонка та середовище віднесені до нерухомої циліндричної системи координат $\{r, \theta, x\}$, причому вісь оболонки та вісь x – співпадають. Внутрішній радіус оболонки b , а зовнішній – a , $h = a - b$ – товщина оболонки. Середовище, що оточує оболонку, задається нерівністю $r \geq a$. В цьому підрозділі будемо розглядати вісесиметричну задачу, тобто усі компоненти напружено-деформованого стану не залежать від змінної θ .

Рух оболонки і середовища будемо описувати рівняннями теорії пружності у переміщеннях, які у векторній формі мають вигляд [46]:

$$(\lambda_k + 2\mu_k) \text{grad div}(\{u^{(k)}\}) - \mu_k \text{rot rot}(\{u^{(k)}\}) = \rho_k \frac{\partial^2 \{u^{(k)}\}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

де $\{u^{(k)}\} = \begin{pmatrix} u_r^{(k)} \\ u_x^{(k)} \end{pmatrix}$ – вектор переміщень, причому $k = 1$ відноситься до

оболонки, а $k = 2$ – до середовища;

λ_k, μ_k – параметри Ламе;

ρ_k – щільність.

Також припускаємо, що на внутрішню поверхню оболонки діє імпульсивне нормальне динамічне навантаження, а контакт між оболонкою і середовищем – ковзний, а зв'язок – двосторонній. В такому випадку граничні умови матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx}^{(1)}(b, x, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)}(b, x, t) = -f(x, t), \\ \sigma_{rx}^{(1)}(a, x, t) = \sigma_{rx}^{(2)}(a, x, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)}(a, x, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a, x, t), \quad u_r^{(1)}(a, x, t) = u_r^{(2)}(a, x, t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $f(x, t)$ – імпульсивне нормальне динамічне навантаження, яке діє на внутрішню поверхню оболонки.

Для інтегрування рівнянь (1.1) вводимо потенціальні функції $\Phi^{(k)}$, $\Psi^{(k)}$, які при відсутності масових сил задаються формулами [46]:

$$u_x^{(k)} = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\Psi^{(k)}}{r}, \quad u_r^{(k)} = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial r} - \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Підставляючи залежності (1.3) в рівняння (1.1) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c_{pk}^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial x^2} - \frac{\Psi^{(k)}}{r^2} = \frac{1}{c_{sk}^2} \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$c_{pk}^2 = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{\rho_k(1-2\nu_k)}, \quad c_{sk}^2 = \frac{G_k}{\rho_k}. \quad (1.5)$$

При цьому необхідні для задоволення граничним умовам напруження виражаються через переміщення згідно формул [46]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(k)} &= \frac{2G_k \nu_k}{1-2\nu_k} \left(\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{u_r^{(k)}}{r} \right) + \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}, \\ \sigma_{rx}^{(k)} &= G_k \left(\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Початкові умови у всіх випадках приймаються нульовими, тобто при $t = 0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Зауважимо, що для статичної задачі треба покласти рівними нулю похідні за часом, а всі величини не залежать від змінної t .

Для розв'язання задачі будемо використовувати інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \tag{1.7}$$

та комплексне інтегральне перетворення Фур'є за осью координат:

$$f_F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx. \tag{1.8}$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned}\left\{ \overline{\Phi}^{(k)}, \overline{\Psi}^{(k)} \right\} &= \frac{1}{a^2} \left\{ \Phi^{(k)}, \Psi^{(k)} \right\}; \left\{ \overline{U}_x^{(k)}, \overline{U}_r^{(k)} \right\} = \frac{1}{a} \left\{ u_x^{(k)}, u_r^{(k)} \right\}; \\ \left\{ \overline{\sigma}_{rr}^{(k)}, \overline{\sigma}_{rx}^{(k)} \right\} &= \frac{1}{G_2} \left\{ \sigma_{rr}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)} \right\}; \\ \left\{ x_*, r_* \right\} &= \frac{1}{a} \left\{ x, r \right\}; \tau = \frac{c_{s2}}{a} t; \kappa = \frac{h}{a}; \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; d_1 = 1 - \kappa.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною τ , та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (1.4). Будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d \bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{dr_*} - (s^2 + \eta_p^{(k)} p^2) \bar{\Phi}_{LF}^{(k)} &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d \bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{dr_*} - \left(s^2 + \eta_s^{(k)} p^2 + \frac{1}{r_*^2} \right) \bar{\Psi}_{LF}^{(k)} &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

де

$$\eta_p^{(1)} = \frac{c_{s2}^2}{c_{p1}^2} = \frac{(1-2\nu_1)\rho^*}{2(1-\nu_1)\gamma}, \quad \eta_s^{(1)} = \frac{c_{s2}^2}{c_{s1}^2} = \frac{\rho^*}{\gamma}, \quad \eta_p^{(2)} = \frac{c_{s2}^2}{c_{p2}^2} = \frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}, \quad \eta_s^{(2)} = \frac{c_{s2}^2}{c_{s2}^2} = 1.$$

Загальний розв'язок рівнянь (1.10) з урахуванням умов згасання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{LF}^{(1)}(r_*, s, p) &= C_1(s, p) K_0(m_p^{(1)} r_*) + C_2(s, p) I_0(m_p^{(1)} r_*), \\ \bar{\Psi}_{LF}^{(1)}(r_*, s, p) &= C_3(s, p) K_1(m_s^{(1)} r_*) + C_4(s, p) I_1(m_s^{(1)} r_*), \\ \bar{\Phi}_{LF}^{(2)}(r_*, s, p) &= C_5(s, p) K_0(m_p^{(2)} r_*), \\ \bar{\Psi}_{LF}^{(2)}(r_*, s, p) &= C_6(s, p) K_1(m_s^{(2)} r_*), \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\text{де} \quad m_p^{(1)} = \sqrt{s^2 + \eta_p^{(1)} p^2}, \quad m_s^{(1)} = \sqrt{s^2 + \eta_s^{(1)} p^2}, \quad m_p^{(2)} = \sqrt{s^2 + \eta_p^{(2)} p^2},$$

$$m_s^{(2)} = \sqrt{s^2 + \eta_s^{(2)} p^2};$$

K_0, I_0, K_1, I_1 – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ , та перетворення Фур'є за змінною x_* до співвідношень (1.3) та (1.6). Отримуємо вирази для переміщень та напружень у просторі зображень:

$$U_{xLF}^{(k)} = is \bar{\Phi}_{LF}^{(k)} + \frac{d \bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{dr_*} + \frac{\bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{r_*}, \quad U_{rLF}^{(k)} = \frac{d \bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{dr_*} - is \bar{\Psi}_{LF}^{(k)}. \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rrLF}^{-(1)} &= \frac{2\nu_1\gamma}{1-2\nu_1} \left(isU_{xLF}^{(1)} + \frac{U_{rLF}^{(1)}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_1)\gamma}{1-2\nu_1} \frac{dU_{rLF}^{(1)}}{\partial r_*}, \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{-(1)} &= \gamma \left(\frac{dU_{xLF}^{(1)}}{dr_*} + isU_{rLF}^{(1)} \right), \\
\bar{\sigma}_{rrLF}^{-(2)} &= \frac{2\nu_2}{(1-2\nu_2)} \left(isU_{xLF}^{(2)} + \frac{U_{rLF}^{(2)}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{(1-2\nu_2)} \frac{dU_{rLF}^{(2)}}{dr_*}, \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{-(2)} &= \frac{dU_{xLF}^{(2)}}{dr_*} + isU_{rLF}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

У просторі зображень граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rxLF}^{-(1)}(d_1, s, p) &= 0, \bar{\sigma}_{rrLF}^{-(1)}(d_1, s, p) = -\bar{f}_{LF}(s, p), \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{-(1)}(1, s, p) &= \bar{\sigma}_{rxLF}^{-(2)}(1, s, p) = 0, \bar{\sigma}_{rrLF}^{-(1)}(1, s, p) = \bar{\sigma}_{rrLF}^{-(2)}(1, s, p), \\
U_{rLF}^{(1)}(1, s, p) &= U_{rLF}^{(2)}(1, s, p).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Якщо підставити вирази (1.12), (1.13) в умови (1.14), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій $C_1(s, p) - C_6(s, p)$.

Розв'язок системи за методом Крамера приводить до таких виразів:

$$\bar{C}_j(s, p) = \frac{\det([A_j])}{\det([A])}, \quad j = \overline{1, 6}, \tag{1.15}$$

де $[A] = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, 6}$ – матриця системи, коефіцієнти якої записуються так:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{2i\gamma s (\nu_1 K_0(m_p^{(1)} d_1) - d_1 m_p^{(1)} K_1(m_p^{(1)} d_1))}{(1-2\nu_1)d_1}, \\
a_{12} &= \frac{2i\gamma s (\nu_1 I_0(m_p^{(1)} d_1) + d_1 m_p^{(1)} I_1(m_p^{(1)} d_1))}{(1-2\nu_1)d_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= -\frac{2\gamma\left(\nu_1 m_s^{(1)} K_0(m_s^{(1)} d_1) + d_1\left(\nu_1 s^2 - (m_s^{(1)})^2(1-\nu_1)\right) K_1(m_s^{(1)} d_1)\right)}{(1-2\nu_1)d_1}, \\
a_{14} &= \frac{2\gamma\left(\nu_1 m_s^{(1)} I_0(m_s^{(1)} d_1) - d_1\left(\nu_1 s^2 - (m_s^{(1)})^2(1-\nu_1)\right) I_1(m_s^{(1)} d_1)\right)}{(1-2\nu_1)d_1}, \\
a_{21} &= \gamma\left(\left((m_p^{(1)})^2 - s^2\right) K_0(m_p^{(1)} d_1) + \frac{m_p^{(1)} K_1(m_p^{(1)} d_1)}{d_1}\right); \\
a_{22} &= \gamma\left(\left((m_p^{(1)})^2 - s^2\right) I_0(m_p^{(1)} d_1) - \frac{m_p^{(1)} I_1(m_p^{(1)} d_1)}{d_1}\right); \\
a_{23} &= -is\gamma\left(2m_s^{(1)} K_0(m_s^{(1)} d_1) + \frac{K_1(m_s^{(1)} d_1)}{d_1}\right); \quad a_{24} = is\gamma\left(2m_s^{(1)} I_0(m_s^{(1)} d_1) - \frac{I_1(m_s^{(1)} d_1)}{d_1}\right); \\
a_{31} &= \frac{2i\gamma s\left(\nu_1 K_0(m_p^{(1)}) - m_p^{(1)} K_1(m_p^{(1)})\right)}{(1-2\nu_1)}; \quad a_{32} = \frac{2i\gamma s\left(\nu_1 I_0(m_p^{(1)}) + m_p^{(1)} I_1(m_p^{(1)})\right)}{(1-2\nu_1)}; \\
a_{33} &= -\frac{2\gamma\left(\nu_1 m_s^{(1)} K_0(m_s^{(1)}) + \left(\nu_1 s^2 - (m_s^{(1)})^2(1-\nu_1)\right) K_1(m_s^{(1)})\right)}{(1-2\nu_1)}; \\
a_{34} &= \frac{2\gamma\left(\nu_1 m_s^{(1)} I_0(m_s^{(1)}) - \left(\nu_1 s^2 - (m_s^{(1)})^2(1-\nu_1)\right) I_1(m_s^{(1)})\right)}{(1-2\nu_1)}; \\
a_{35} &= \frac{2is\left(m_p^{(2)} K_1(m_p^{(2)}) - \nu_2 K_0(m_p^{(2)})\right)}{(1-2\nu_2)}; \\
a_{36} &= \frac{2is\left(\nu_2 K_0(m_p^{(2)}) + \left(\nu_2 s^2 - (m_p^{(2)})^2(1-\nu_2)\right) K_1(m_p^{(2)})\right)}{(1-2\nu_2)}; \\
a_{41} &= \gamma\left(\left((m_p^{(1)})^2 - s^2\right) K_0(m_p^{(1)}) + m_p^{(1)} K_1(m_p^{(1)})\right); \quad a_{42} = \gamma\left(\left((m_p^{(1)})^2 - s^2\right) I_0(m_p^{(1)}) - m_p^{(1)} I_1(m_p^{(1)})\right); \\
a_{43} &= -is\gamma\left(2m_s^{(1)} K_0(m_s^{(1)}) + K_1(m_s^{(1)})\right); \quad a_{44} = is\gamma\left(2m_s^{(1)} I_0(m_s^{(1)}) - I_1(m_s^{(1)})\right); \\
a_{55} &= \left(\left(m_p^{(2)}\right)^2 - s^2\right) K_0(m_p^{(2)}) + m_p^{(2)} K_1(m_p^{(2)}); \quad a_{56} = -is\left(2m_s^{(2)} K_0(m_s^{(2)}) + K_1(m_s^{(2)})\right); \\
a_{61} &= isK_0(m_p^{(1)}); \quad a_{62} = isI_0(m_p^{(1)}); \quad a_{63} = -m_s^{(1)} K_0(m_s^{(1)}); \quad a_{64} = -m_s^{(1)} I_0(m_s^{(1)}); \\
a_{65} &= -isK_0(m_p^{(2)}); \quad a_{66} = m_s^{(2)} K_0(m_s^{(2)}); \\
a_{15} &= a_{16} = a_{25} = a_{26} = a_{45} = a_{46} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = 0.
\end{aligned}$$

Матриці $[A_j]$, $j = \overline{1,6}$ отримуються з матриці A заміною j -го стовпця вектором: $(-f_{LF}(s, p), 0, 0, 0, 0, 0)$.

В результаті отримуємо вирази для нормальних переміщень та нормальних напружень середовища у просторі зображень за Фур'є-Лапласом в такому вигляді:

$$U_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p) = T_U(r_*, s, p)f_{LF}(s, p), \quad (1.16)$$

$$\overline{\sigma}_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p) = T_\sigma(r_*, s, p)f_{LF}(s, p), \quad (1.17)$$

де

$$\begin{aligned} T_U(r_*, s, p) &= \overline{C}_5(s, p)isK_0(r_*m_p^{(2)}) - \overline{C}_6(s, p)m_s^{(2)}K_0(r_*m_s^{(2)}), \\ T_\sigma(r_*, s, p) &= \overline{C}_5(s, p)\frac{2is(\nu_2K_0(m_p^{(2)}) - m_p^{(2)}r_*K_1(m_p^{(2)}))}{(1 - 2\nu_2)r_*} - \\ &- \overline{C}_6(s, p)\frac{2is(\nu_2K_0(m_s^{(2)}) + r_*(\nu_2s^2 - (m_p^{(2)})^2(1 - \nu_2))K_1(m_s^{(2)}))}{(1 - 2\nu_2)r_*}. \end{aligned}$$

Для остаточного знаходження виразів для компонент напружено-деформованого стану у просторі зображень за Фур'є-Лапласом потрібно підставити вирази для навантажень у формули (1.16) та (1.17). Розглянемо два види імпульсивних динамічних нормальних навантажень:

а) навантаження, ділянка дії якого розширюється із постійною швидкістю c , симетрично відносно початку координат, а сумарний тиск однаковий у всі моменти часу та рівний F_0 (рис. 1.1):

$$f(x, t) = \frac{F_0 H(ct - |x|)}{4\pi ctb}, \quad (1.18)$$

де $H(x)$ – одинична функція Хевісайда;

б) навантаження, яке рівномірно розподілене по ділянці внутрішньої поверхні оболонки, довжина якої дорівнює $2d$ (рис. 1.2):

$$f(x,t) = F_0 H(d - |x|) H(t). \quad (1.19)$$

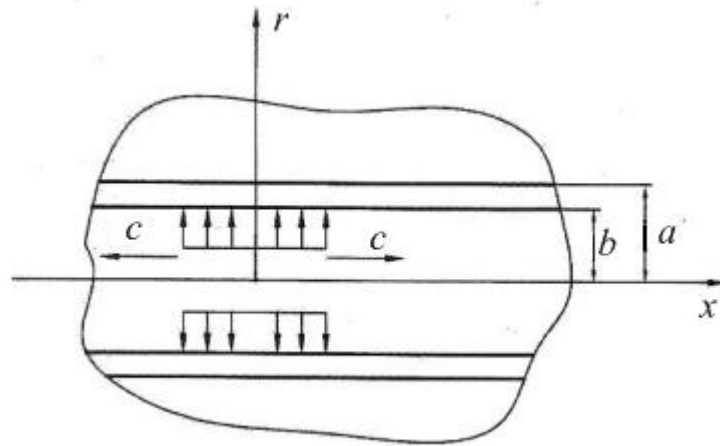


Рисунок 1.1 – Геометрична модель навантаження, заданого співвідношенням (1.18)

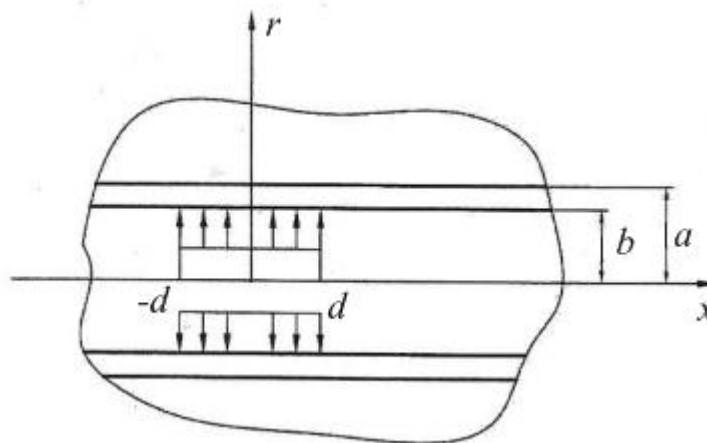


Рисунок 1.2 – Геометрична модель навантаження, заданого співвідношенням (1.19)

Тепер переходимо у виразах для навантажень до безрозмірних величин та застосовуємо інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа. В результаті будемо мати:

а) для навантаження (1.18):

$$f_{LF}(s, p) = \frac{\frac{F_0}{a^2}}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}d_1 sc^*} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right), \quad (1.20)$$

де $c^* = \frac{c}{c_{s2}}$;

б) для навантаження (1.19):

$$f_{LF}(s, p) = \frac{\sqrt{2}F_0 \sin(d^* s)}{\sqrt{\pi} sp}, \quad (1.21)$$

де $d^* = \frac{d}{a}$.

Подальші викладки приведемо для навантаження, що розширюється. Для іншого випадку ці викладки аналогічні.

Для остаточного розв'язку задачі, потрібно повернутись у простір оригіналів. Для цього, спочатку обернемо перетворення Фур'є. У просторі зображень за Лапласом будемо мати:

$$U_{rL}^{(2)}(r_*, x_*, p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F_0}{a^2} \int_0^\infty T_U(r_*, s, p) \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right)}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}d_1 sc^*} \cos(s x_*) ds, \quad (1.22)$$

$$\bar{\sigma}_{rrL}^{(2)}(r_*, x_*, p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F_0}{a^2} \int_0^\infty T_\sigma(r_*, s, p) \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right)}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}d_1 sc^*} \cos(s x_*) ds. \quad (1.23)$$

Для знаходження оригіналу за відомим зображення за Лапласом використаємо чисельний алгоритм, що ґрунтується на методі зміщених поліномів Лежандра [36]. Даний алгоритм дозволяє звести початкову задачу обернення інтегрального перетворення Лапласа до пошуку оригіналу за значеннями зображення функції в точках $p = k + 1$, ($k = 0, 1, 2, \dots$). Тобто, якщо відоме зображення $F(p)$ функції $f(t)$, тоді [36]:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_k P_k(2e^{-t} - 1), \quad a_k = \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} F(i+1), \quad (1.24)$$

де $a_i^{(k)}$ – коефіцієнти полінома Лежандра $P_k(t)$, який має вигляд [36]:

$$P_k(t) = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+k} C_k^i C_{k+i}^i t^i.$$

Для обчислення невластних інтегралів у виразах (1.22), (1.23) застосовувався метод Файлона [35]. Наведемо алгоритм цього метода. Нехай потрібно обчислити інтеграли:

$$C(x) = \int_0^{\infty} f(s) \cos(sx) ds; \quad S(x) = \int_0^{\infty} f(s) \sin(sx) ds. \quad (1.24)$$

Нехай, значення функції $f(s)$ відоме у системі рівновіддалених точок $s_k = kh$, ($k = 0, 1, 2, \dots, h > 0$). Тоді, у відповідності до методу Файлона [35] будемо мати:

$$C(x) = \mu(x, h) f(0) + 2\mu(x, h) \sum_{k=1}^{\infty} f(2kh) \cos(2kxh) + \\ + \lambda(x, h) \sum_{k=1}^{\infty} f((2k-1)h) \cos((2k-1)hx), \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
S(x) = & \nu(x, h)f(0) + 2\mu(x, h)\sum_{k=1}^{\infty} f(2kh)\sin(2kx) + \\
& + \lambda(x, h)\sum_{k=1}^{\infty} f((2k-1)h)\sin((2k-1)x),
\end{aligned} \tag{1.26}$$

де

$$\begin{aligned}
\nu(x, h) &= \begin{cases} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\sin(2hx)}{2hx} - \frac{2\sin^2(hx)}{h^2 x^2} \right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \\
\mu(x, h) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2 h} \left(1 + \cos^2(hx) - \frac{\sin(2hx)}{hx} \right), & x \neq 0; \\ \frac{h}{3}, & x = 0; \end{cases} \\
\lambda(x, h) &= \begin{cases} \frac{4}{x^2 h} \left(\frac{\sin(hx)}{hx} - \cos(hx) \right), & x \neq 0; \\ \frac{4h}{3}, & x = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Верхня границя та довжина відрізків розбиття за осьюою координатою підбиралась в результаті чисельних експериментів для забезпечення наперед заданої відносної точності. Аналогічно в результаті чисельних експериментів встановлено, що для обернення перетворення Лапласа досить брати вісім доданків у сумі (1.25).

Для порівняння результатів для навантаження, яке задано у вигляді (1.19) розглянемо відповідну статичну задачу. Розв'язок статичної задачі будемо шукати у формі Папковича-Нейбера [46] через дві гармонічні функції $\varphi_1^{(k)}(r, x)$ і $\varphi_2^{(k)}(r, x)$:

$$\begin{aligned}
u_r^{(k)}(r, x) &= \frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial r} x, \\
u_x^{(k)}(r, x) &= -\frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial x} - (3 - 4\nu_k)\varphi_2^{(k)} + x \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Відповідні напруження виражаються через переміщення за формулами (1.6).

Функції $\varphi_1^{(k)}(r, x)$ і $\varphi_2^{(k)}(r, x)$ задовольняють рівнянням:

$$\nabla^2 \varphi_j^{(k)} = \frac{d^2 \varphi_j^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_j^{(k)}}{dr} + \frac{d^2 \varphi_j^{(k)}}{dx^2} = 0, \quad j = 1, 2; k = 1, 2. \quad (1.28)$$

Після переходу до безрозмірних величин за співвідношеннями (1.9) та застосування перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (1.28), будемо мати:

$$r_*^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}_{Fj}^{(k)}}{dr_*^2} + r_* \frac{d\bar{\Phi}_{Fj}^{(k)}}{dr_*} - r_*^2 s^2 \bar{\Phi}_{Fj}^{(k)} = 0, \quad j = 1, 2; k = 1, 2. \quad (1.29)$$

Загальний розв'язок рівнянь (1.29) з урахуванням умов затухання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{F1}^{(1)}(r_*, s) &= C_1(s)K_0(sr_*) + C_2(s)I_0(sr_*), \\ \bar{\Phi}_{F2}^{(1)}(r_*, s) &= C_3(s)K_0(sr_*) + C_4(s)I_0(sr_*), \\ \bar{\Phi}_{F1}^{(2)}(r_*, s) &= C_5(s)K_0(sr_*), \\ \bar{\Phi}_{F2}^{(2)}(r_*, s) &= C_6(s)K_0(sr_*). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Застосувавши перетворення Фур'є за змінною x_* до співвідношень (1.26) і враховуючи (1.9) приходимо до таких виразів:

$$\begin{aligned} U_{rF}^{(k)}(r_*, s) &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{F1}^{(k)}}{\partial r_*} + i \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{F2}^{(k)}}{\partial s \partial r_*}, \\ U_{xF}^{(k)}(r_*, s) &= is \bar{\Phi}_{F1}^{(k)} - 4(1 - \nu_k) \bar{\Phi}_{F2}^{(k)} - s \frac{\partial \bar{\Phi}_{F2}^{(k)}}{\partial s}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Трансформанти відповідних напружень задаються формулами (1.13).

Підставляємо співвідношення (1.30) в (1.31), а потім співвідношення (1.31) в граничні умови (1.14), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_1(s) - C_6(s)$. Коефіцієнти системи мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2\gamma s \left(sK_0((1-\kappa)s) + \frac{K_1((1-\kappa)s)}{1-\kappa} \right), \\
a_{12} &= 2\gamma s \left(sI_0((1-\kappa)s) - \frac{I_1((1-\kappa)s)}{1-\kappa} \right), \\
a_{13} &= 2i\gamma s((1-2\nu_1)K_0((1-\kappa)s) - s(1-\kappa)K_1((1-\kappa)s)), \\
a_{14} &= 2i\gamma s((1-2\nu_1)I_0((1-\kappa)s) + s(1-\kappa)I_1((1-\kappa)s)), \\
a_{21} &= -2i\gamma s^2 K_1((1-\kappa)s), \quad a_{22} = 2i\gamma s^2 I_1((1-\kappa)s), \\
a_{23} &= 2\gamma s(2(1-\nu_1)K_1((1-\kappa)s) - s(1-\kappa)K_0((1-\kappa)s)), \\
a_{24} &= -2\gamma s(2(1-\nu_1)I_1((1-\kappa)s) + s(1-\kappa)I_0((1-\kappa)s)), \\
a_{31} &= 2\gamma s(sK_0(s) + K_1(s)), \quad a_{32} = 2\gamma s(sI_0(s) - I_1(s)), \\
a_{33} &= 2i\gamma s((1-2\nu_1)K_0(s) - sK_1(s)), \quad a_{33} = 2i\gamma s((1-2\nu_1)I_0(s) + sI_1(s)), \\
a_{35} &= -2s(sK_0(s) + K_1(s)), \quad a_{36} = -2is((1-2\nu_1)K_0(s) - sK_1(s)), \\
a_{41} &= -2i\gamma s^2 K_1(s), \quad a_{42} = 2i\gamma s^2 I_1(s), \quad a_{43} = 2\gamma s(2(1-\nu_1)K_1(s) - sK_0(s)), \\
a_{44} &= -2\gamma s(2(1-\nu_1)I_1(s) + sI_0(s)), \quad a_{55} = -2is^2 K_1(s), \\
a_{56} &= 2s(2(1-\nu_1)K_1(s) - sK_0(s)), \quad a_{61} = -sK_1(s), \quad a_{62} = sI_1(s), \\
a_{63} &= isK_0(s), \quad a_{64} = isI_0(s), \quad a_{65} = sK_1(s), \quad a_{63} = -isK_0(s), \\
a_{15} &= a_{16} = a_{25} = a_{26} = a_{45} = a_{46} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = 0,
\end{aligned}$$

де $[A_s] = (a_{ij}), i, j = \overline{1,6}$ – матриця системи.

Описана вище система розв'язується за формулами аналогічними (1.15). Вирази для нормальних переміщень та напружень для середовища можна записати аналогічно до виразів (1.16) та (1.17) відповідно.

Навантаження для статичної задачі має вигляд:

$$f(x) = F_0 H(d - |x|), \quad (1.32)$$

трансформанта Фур'є якого має вигляд:

$$f_F(s) = \frac{\sqrt{2} F_0 \sin(d^* s)}{\sqrt{\pi s}}. \quad (1.33)$$

Обернення інтегрального перетворення Фур'є здійснювалось чисельно, за допомогою метода Файлона.

При проведенні чисельних розрахунків приймалися такі значення безрозмірних величин: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\gamma = 30$, $\kappa = 0,02$, $d_1 = 1 - \kappa = 0,98$, $d^* = \frac{1}{2}$.

Величини r_* , x_* , τ , c^* – змінювалися.

На рис. 1.3 проілюстровано зміну нормальних переміщень та нормальних напружень за часом на границі контакту оболонки і пружного середовища при $r_* = 1$, $x_* = 0$ для різних значень безрозмірної швидкості руху навантаження (1.18). На рис. 1.4 для навантаження (1.19) проілюстровано нормальні переміщення та напруження в точці $r_* = 1$, $x_* = 0$ за змінною безрозмірного часу у порівнянні із статичним розв'язком (який зображено горизонтальною лінією).

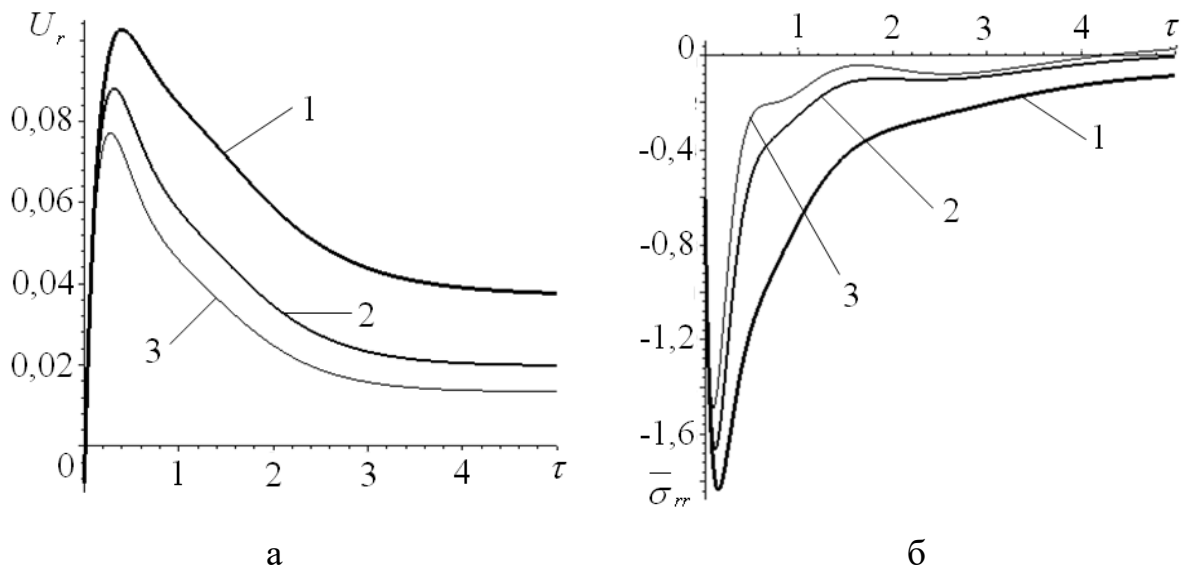


Рисунок 1.3 – Розподіл нормальних переміщень (а) та напружень (б) за змінною часу для навантаження (1.18):

$$1 - c^* = 0,1, 2 - c^* = 0,25, 3 - c^* = 0,4$$

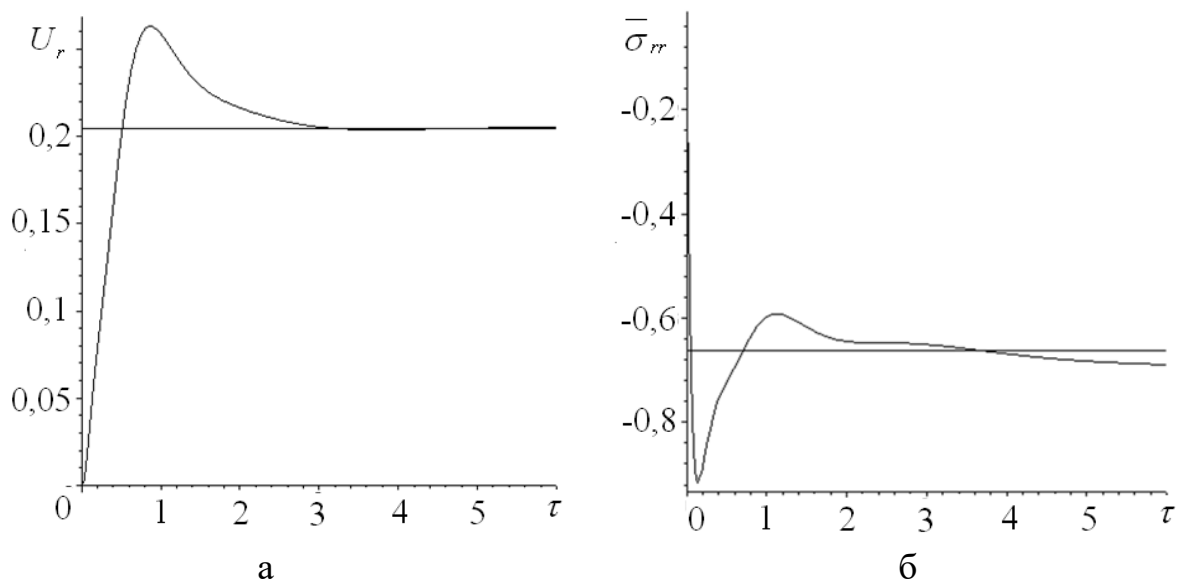


Рисунок 1.4 – Розподіл нормальних переміщень (а) та напружень (б) за змінною часу для навантаження (1.19)

На основі отриманих результатів обчислимо коефіцієнт динамічності k_d , тобто відношення максимального значення компонент напружено-деформованого стану за змінною часу до відповідного статичного значення при навантаженні, яке залежить від часу як функція Хевісайду. В даному випадку отримуємо: $k_d = 1,2844$.

На рис. 1.5 для навантаження (1.19) проілюстровано зміну за осьовою змінною нормальних переміщень і напружень на границі контакту оболонки і пружного середовища ($r_* = 1$), у порівнянні зі статичним розв'язком.

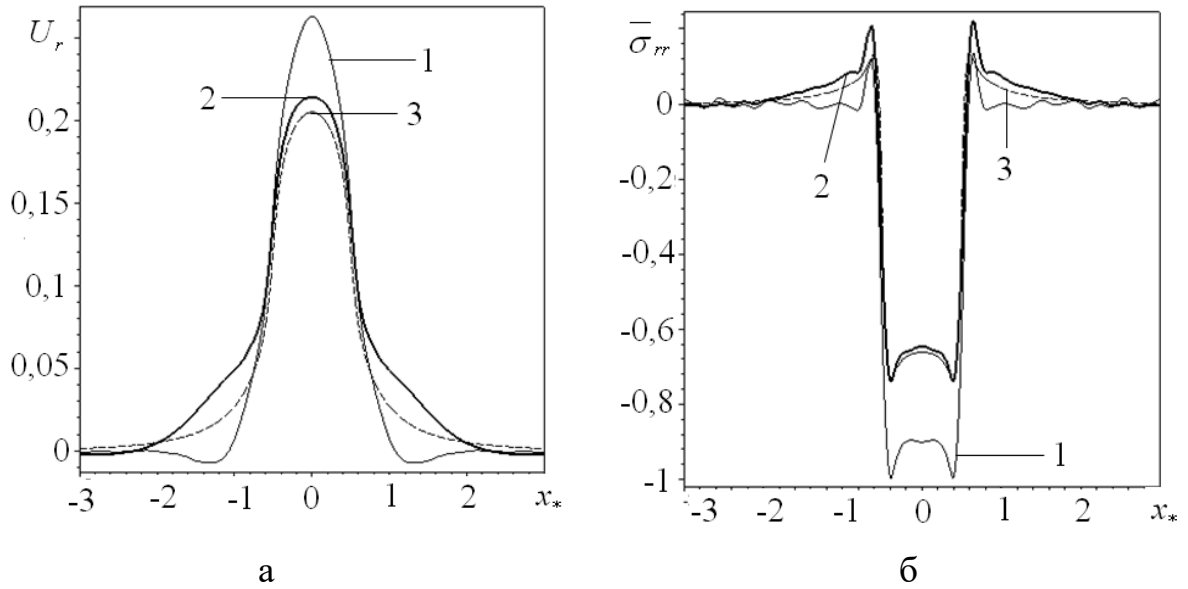


Рисунок 1.5 – Розподіл нормальних переміщень (а) та напружень (б) за безрозмірною осьовою змінною для навантаження (1.19):

1 (а) – $\tau = 1$, 1 (б) – $\tau = 0,2$, 2 – $\tau = 2$, 3 – статичний розв'язок

Рис. 1.6 ілюструють зміну нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою для навантаження (1.19) при $\tau = 1$ при різних значеннях радіальної координати, тобто у пружному середовищі при віддаленні від границі контакту з оболонкою.

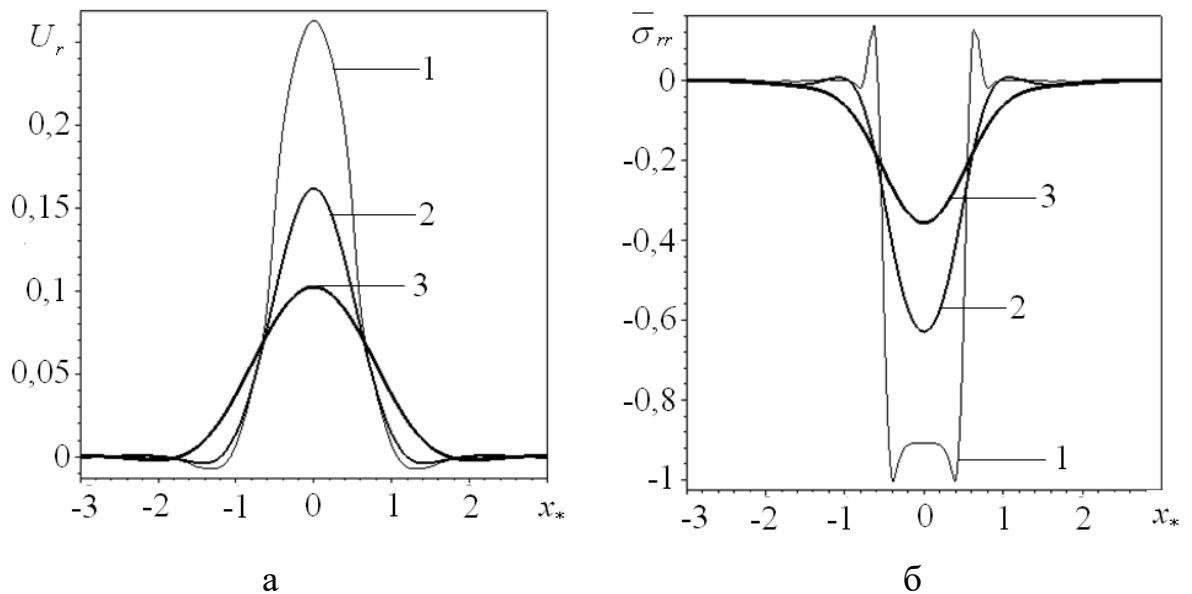


Рисунок 1.6 – Розподіл нормальних переміщень (а) та напружень (б) за безрозмірною осьюовою змінною для навантаження (1.19) на різній глибині:

$$1 - r_* = 1, 2 - r_* = 1,5, 3 - r_* = 2$$

На основі отриманих результатів можна зробити висновок, що із зростанням змінної часу, компоненти динамічного напружено-деформованого стану збігаються до нуля для навантаження (1.18), та до відповідного статичного розв’язку для навантаження (1.19).

1.1.2 Опис руху оболонки за допомогою рівнянь, що враховують поперечний зсув та інерцію обертання

У цьому пункті досліджується задача аналогічна до розглянутої в пункті 1.1.1, але рух оболонки будемо описувати рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко). У вісесиметричному випадку рівняння для оболонки запишуться так [10]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x, \\ \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \right) + \frac{w}{a^2} = -\rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (f - q_r), \\ \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \chi_x \right) = \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1.34)$$

де w, u – нормальне та осьове переміщення оболонки;

χ_x – кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки у осьовому напрямку;

$k^2 = \frac{2}{3}$ – числовий коефіцієнт;

f, q_r, q_x – нормальне навантаження, та реакція зі сторони середовища у радіальному та осьовому напрямках.

Граничні умови для середовища запишуться так:

$$\sigma_{rx}^{(2)}(a, x, t) = q_x(x, t) = 0, \sigma_{rr}^{(2)}(a, x, t) = -q_r(x, t), u_r^{(2)}(a, x, t) = w(x, t). \quad (1.35)$$

Перейдемо до безрозмірних величин аналогічно (1.9):

$$\{W, U\} = \frac{1}{a} \{w, u\}; \{\bar{q}_r, \bar{q}_x\} = \frac{1}{G_2} \{q_r, q_x\}. \quad (1.36)$$

Враховуючи (1.9) та (1.36), система (1.34) у просторі зображень за Фур'є-Лапласом матиме наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} -s^2 U_{LF} + v_1 i s W_{LF} = \rho^* \frac{1-v_1}{2\gamma} U_{LF} p^2 - \frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} \bar{q}_{xLF}, \\ v_1 i s U_{LF} - k^2 \frac{1-v_1}{2} (-s^2 W_{LF} + i s \chi_{xLF}) + W_{LF} \left(1 + \rho^* \frac{1-v_1}{2\gamma} p^2 \right) = \\ = -\frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} (f_{LF} - \bar{q}_{rLF}), \\ -s^2 \chi_{xLF} - 6k^2 \frac{1-v_1}{\kappa^2} (i s \kappa W_{LF} + \chi_{xLF}) = \rho^* \frac{1+v_1}{2\gamma} \chi_{xLF} p^2, \end{array} \right. \quad (1.37)$$

а граничні умови (1.35) запишуться так:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rxLF}^{(2)}(1, s, p) = \bar{q}_{xLF}(s, p) = 0, \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p) = -\bar{q}_{rLF}(s, p), \\ U_{rLF}^{(2)}(1, s, p) = W_{LF}(s, p), \end{aligned} \quad (1.38)$$

де $U_{rLF}^{(2)}(1, s, p)$, $\bar{\sigma}_{rxLF}^{(2)}(1, s, p)$, $\bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p)$ – беруться із (1.12) та (1.13) відповідно.

Враховуючи граничні умови (1.38) з першого та третього рівняння системи (1.37) знаходимо функції $U_{LF}(s, p)$, $\chi_{xLF}(s, p)$ відповідно:

$$U_{LF}(s, p) = \frac{2v_1 i s \gamma}{2s^2 \gamma + \rho^* (1-v_1) p^2} W_{LF}(s, p), \quad (1.39)$$

$$\chi_{xLF}(s, p) = \frac{-6k^2 \frac{1-v_1}{\kappa} i s}{s^2 + 6k^2 \frac{1-v_1}{\kappa^2} + \rho^* \frac{1+v_1}{2\gamma} p^2} W_{LF}(s, p). \quad (1.40)$$

Підставляючи (1.39) та (1.40) в друге рівняння системи (1.37), та враховуючи умови (1.38), отримуємо таку залежність:

$$A_T U_{rLF}^{(2)}(1, s, p) + \frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p) = \frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} f_{LF}(s, p), \quad (1.41)$$

де

$$A_T = \frac{-2\nu_1^2 s^2 \gamma}{2s^2 \gamma + \rho^* (1-\nu_1) p^2} + k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left(s^2 - \frac{6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa} s^2}{s^2 + 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} + \rho^* \frac{1+\nu_1}{2\gamma} p^2} \right) + 1 + \rho^* \frac{1-\nu_1}{2\gamma} p^2.$$

В результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка складається з рівняння (1.41) та першої умови (1.38), відносно змінних $C_5(s, p), C_6(s, p)$. Після розв'язання отриманої системи, отримаємо вирази для $C_5^T(s, p), C_6^T(s, p)$. Тоді трансформанти нормальних переміщень та напружень запишуться у вигляді:

$$U_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p) = T_U^T(r_*, s, p) f_{LF}(s, p), \quad (1.42)$$

$$\bar{\sigma}_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p) = T_\sigma^T(r_*, s, p) f_{LF}(s, p), \quad (1.43)$$

де

$$\begin{aligned} T_U^T(r_*, s, p) &= C_5^T(s, p) i s K_0(r_* m_p^{(2)}) - C_6^T(s, p) m_s^{(2)} K_0(r_* m_s^{(2)}), \\ T_\sigma^T(r_*, s, p) &= C_5^T(s, p) \frac{2is (\nu_2 K_0(m_p^{(2)}) - m_p^{(2)} r_* K_1(m_p^{(2)}))}{(1-2\nu_2) r_*} - \\ &- C_6^T(s, p) \frac{2is (\nu_2 K_0(m_s^{(2)}) + r_* (\nu_2 s^2 - (m_p^{(2)})^2 (1-\nu_2)) K_1(m_s^{(2)}))}{(1-2\nu_2) r_*}. \end{aligned}$$

Обернення інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа здійснюється за допомогою чисельного алгоритму, який описано у пункті 1.1.1. вирази для функції навантажень використовуються ті, що й вище.

Проведено порівняння результатів при опису руху оболонки рівняннями теорії пружності та рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання.

На рис. 1.7 проілюстровано порівняння розподілу нормальних переміщень та нормальних напружень за часом на границі контакту оболонки і пружного середовища при $r_* = 1$, $x_* = 0$ для різних значень безрозмірної швидкості руху навантаження (1.18), причому суцільними лініями позначено розв'язок при моделюванні руху оболонки рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання, а пунктирними лініями – рівняннями теорії пружності.

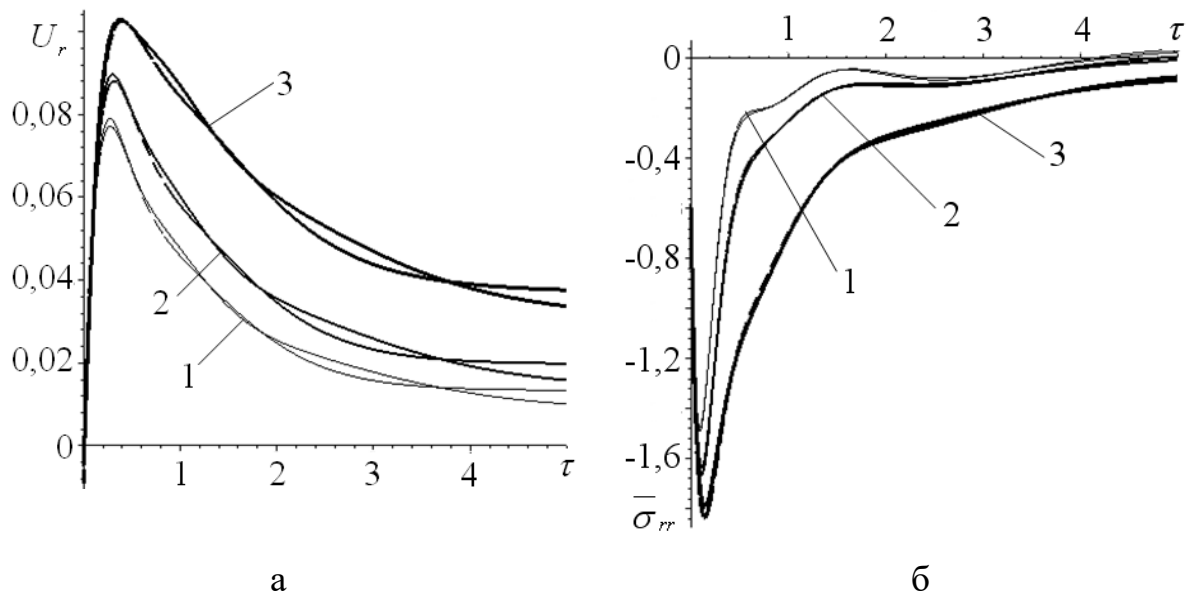


Рисунок 1.7 – Порівняння нормальних переміщень (а) та напружень (б) за змінною часу для навантаження (1.18):

$$1 - c^* = 0,4, 2 - c^* = 0,25, 3 - c^* = 0,1$$

На рис. 1.8 проілюстровано порівняння розподілу нормальних переміщень та нормальних напружень за часом в точці $r_* = 1$, $x_* = 0$ для навантаження (1.19), у порівнянні із статичним розв'язком. В даному випадку, також, суцільними лініями позначено розв'язок при моделюванні

руху оболонки рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання, а пунктирними лініями – рівняннями теорії пружності. Горизонтальні прямі – статичний розв’язок, отриманий у пункті 1.1.1.

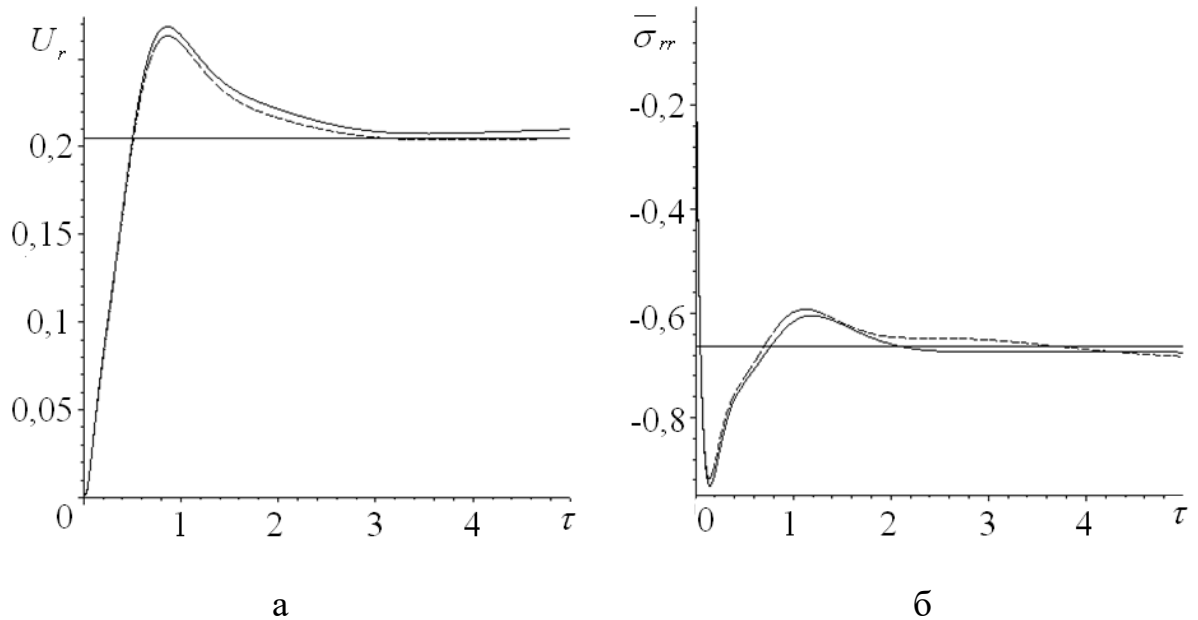


Рисунок 1.8 – Порівняння нормальних переміщень (а) та напружень (б) за змінною часу для навантаження (1.19):

На основі отриманих результатів можна зробити висновок, що величина максимального відхилення при описанні руху оболонки наближеними рівняннями (оболонка типу Тимошенко) від результатів отриманих на основі описання руху оболонки динамічними рівняннями теорії пружності не перевищує двох відсотків для переміщень, та трьох для напружень. Таким чином, можна зробити висновок, що при розв’язанні аналогічних, але більш складних задач, для зменшення об’єму розрахунків, можна застосовувати наближену теорію опису руху оболонки.

1.1.3 Опис руху оболонки за допомогою класичних рівнянь теорії тонких оболонок, що задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява

Будемо описувати рух оболонки класичними рівняннями теорії тонких оболонок, які задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява. У вісесиметричному випадку рівняння для оболонки запишуться в такому вигляді [10]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x, \\ \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{w}{a^2} = -\rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (f - q_r). \end{cases} \quad (1.44)$$

Зрозуміло, що в цьому випадку залишаються справедливими граничні умови (1.37).

Враховуючи (1.9) та (1.36), система (1.44) у просторі зображень за Фур'є-Лапласом матиме наступний вид:

$$\begin{cases} -s^2 U_{LF} + \nu_1 i s W_{LF} = \rho^* \frac{1-\nu_1}{2\gamma} U_{LF} p^2 - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} q_x, \\ \nu_1 i s U_{LF} + \frac{\kappa^2}{12} s^4 W_{LF} + W_{LF} = -\rho^* \frac{1-\nu_1}{2\gamma} W_{LF} p^2 - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} (f_{LF} - \bar{q}_{rLF}). \end{cases} \quad (1.45)$$

Враховуючи граничні умови (1.37) з першого рівняння системи (1.45) виражаємо функцію $U_{LF}(s, p)$ через $W_{LF}(s, p)$:

$$U_{LF}(s, p) = \frac{2\nu_1 i s \gamma}{2s^2 \gamma + \rho^* (1-\nu_1) p^2} W_{LF}(s, p). \quad (1.46)$$

Підставляючи (1.46) в друге рівняння системи (1.45), та враховуючи умови (1.38), отримуємо:

$$A_{KL}U_{rLF}^{(2)}(1, s, p) + \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma}\bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p) = \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma}f_{LF}(s, p), \quad (1.47)$$

де

$$A_{KL} = \frac{-2\nu_1^2 s^2 \gamma}{2s^2 \gamma + \rho^*(1-\nu_1)p^2} + \frac{\kappa^2}{12}s^4 + 1 + \rho^* \frac{1-\nu_1}{2\gamma} p^2,$$

де $U_{rLF}^{(2)}(1, s, p), \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p)$ – беруться із (1.12) та (1.13) відповідно.

В результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка складається з рівняння (1.47) та першої умови (1.38), відносно змінних $C_5(s, p), C_6(s, p)$. Після розв'язання отриманої системи, отримаємо розв'язки $C_5^{KL}(s, p), C_6^{KL}(s, p)$. Тоді вирази для нормальних переміщень та напружень запишуться у вигляді:

$$U_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p) = T_U^{KL}(r_*, s, p)f_{LF}(s, p), \quad (1.48)$$

$$\bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(r_*, s, p) = T_\sigma^{KL}(r_*, s, p)f_{LF}(s, p), \quad (1.49)$$

де

$$\begin{aligned} T_U^{KL}(r_*, s, p) &= C_5^{KL}(s, p)isK_0(r_*m_p^{(2)}) - C_6^{KL}(s, p)m_s^{(2)}K_0(r_*m_s^{(2)}), \\ T_\sigma^{KL}(r_*, s, p) &= C_5^{KL}(s, p)\frac{2is(\nu_2 K_0(m_p^{(2)}) - m_p^{(2)}r_*K_1(m_p^{(2)}))}{(1-2\nu_2)r_*} - \\ &- C_6^{KL}(s, p)\frac{2is(\nu_2 K_0(m_s^{(2)}) + r_*(\nu_2 s^2 - (m_p^{(2)})^2(1-\nu_2))K_1(m_s^{(2)}))}{(1-2\nu_2)r_*}. \end{aligned}$$

Обернення інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа здійснюється за допомогою чисельного алгоритму, який описано в пункті 1.1.1. вирази для функції навантажень використовуються ті, що і раніше.

Розподіл величини максимального відхилення при описанні руху оболонки наближеними рівняннями (рівняння Кірхгофа-Лява) від результатів отриманих на основі описання руху оболонки динамічними рівняннями теорії пружності аналогічний до результатів, які отримано в пункті 1.1.2 (тобто не перевищує двох відсотків для переміщень, та трьох для напружень). Тому, можна зробити висновок, що при розв'язанні аналогічних, але більш складних задач, для зменшення об'єму розрахунків, можна застосовувати наближену теорію опису руху оболонки.

2.2 Динаміка циліндричної оболонки у пружному середовищі при невісесиметричних навантаженнях

В даному підрозділі розглядається тривимірна задача в загальній динамічній постановці для механічної системи оболонка – пружне інерційне середовище, яка розглядалась в підрозділі 1.1.

Рух середовища будемо описувати динамічними рівняннями теорії пружності (1.1)

Оскільки у пункті 1.1.2 було показано, що описання руху оболонки рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання має досить високу точність у порівнянні з динамічними рівняннями теорії пружності, тому рух оболонки будемо описувати рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), що в загальному випадку мають такий вигляд [10]:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x, \\
& \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
& + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2a} \chi_\theta - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_\theta, \\
& \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{w}{a^2} + \\
& + \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (-f + q_r), \\
& -6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_x + \frac{1-\nu_1}{2a^2} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \theta^2} - \\
& - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial t^2} = -\frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_x, \\
& -6k^2 \frac{1-\nu_1}{ah^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_\theta + \\
& + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \theta^2} - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial t^2} = -\frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_\theta,
\end{aligned} \right. \quad (1.50)$$

де u, v, w – осьове, кільцеве та нормальне переміщення точок серединної поверхні оболонки відповідно;

χ_x, χ_θ – кути повороту нормалі до серединної поверхні в осьовому і кільцевому напрямках;

q_r, q_x, q_θ – нормальна, осьова та кільцева реакція з боку простору на границі контакту між простором та оболонкою.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції ϕ, φ, χ за формулами [46]:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\
u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \\
u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Підставивши залежності (1.51) в рівняння (1.1), будемо мати:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi &= 0, \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \{\phi, \chi\} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.52}$$

$$c_1^2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{\rho_2(1-2\nu_2)}, \quad c_2^2 = \frac{G_2}{\rho_2}. \tag{1.53}$$

Граничні умови нашої задачі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
q_r(x, t, \theta) = -\sigma_{rr}(a, x, t, \theta), \quad q_x(x, t, \theta) = q_\theta(x, t, \theta) = 0, \\
w(x, t, \theta) = u_r(a, x, t, \theta), \quad \sigma_{rx}(a, x, t, \theta) = \sigma_{r\theta}(a, x, t, \theta) = 0.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Напруження, необхідні для задоволення граничних умов, виражаються через переміщення згідно формул:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{2G_2\nu_2}{1-2\nu_2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
\sigma_{rx} &= G_2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right), \\
\sigma_{r\theta} &= G_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right).
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Початкові умови приймаються нульовими, тобто при $t = 0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Для розв'язання задачі будемо використовувати інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною (1.7), та комплексне інтегральне перетворення Фур'є (1.8).

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{\Phi, X\} &= \frac{1}{a^2} \{\phi, \chi\}; \{\Psi\} = \frac{1}{a^3} \{\varphi\}; \{U_x, U_\theta, U_r, U, V, W\} = \frac{1}{a} \{u_x, u_\theta, u_r, u, v, w\}, \\ \{\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rx}, \bar{\sigma}_{r\theta}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{rr}, \sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}\}; \{\bar{q}_r, \bar{q}_x, \bar{q}_\theta\} = \frac{1}{G_2} \{q_r, q_x, q_\theta\}, \\ \{x_*, r_*\} &= \frac{1}{a} \{x, r\}; \tau = \frac{c_s}{a} t; \kappa = \frac{h}{a}; \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; c_s = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (1.52), та розкладаємо зображення потенціальних функцій в ряд Фур'є за формулами:

$$\{\Phi_{LF}, \Psi_{LF}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\Phi_{LF,n}, \Psi_{LF,n}\} \cos(n\theta), X_{LF} = \sum_{n=1}^{\infty} X_{LF,n} \sin(n\theta). \quad (1.57)$$

Рівняння (1.52) приймають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - \eta_p^2 p^2 - s^2 \right) \Phi_{LF,n} &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - p^2 - s^2 \right) \{\Psi_{LF,n}, X_{LF,n}\} &= 0, \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\text{де } \eta_p^2 = \frac{1 - 2\nu_2}{2(1 - \nu_2)}.$$

Загальний розв'язок рівнянь (1.58) з урахуванням умов згасання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned}\Phi_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{1n}(s, p)K_n(m_r r_*), \\ \Psi_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{2n}(s, p)K_n(m_s r_*), \\ X_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{3n}(s, p)K_n(m_s r_*),\end{aligned}\tag{1.59}$$

де $m_r = \sqrt{s^2 + \eta_p^2 p^2}$, $m_s = \sqrt{s^2 + p^2}$;

K_n – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до компонент переміщень і напружень, та розкладаємо їх в ряд Фур'є за формулами:

$$\begin{aligned}\{U_{rLF}, U_{xLF}, \bar{\sigma}_{rrLF}, \bar{\sigma}_{rxLF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{rLF,n}, U_{xLF,n}, \bar{\sigma}_{rrLF,n}, \bar{\sigma}_{rxLF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{U_{\theta LF}, \bar{\sigma}_{r\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{\theta LF,n}, \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}\} \sin(n\theta).\end{aligned}\tag{1.60}$$

Рівності (1.51) та (1.55) приводяться до такого виду:

$$U_{xLF,n} = is\Phi_{LF,n} + \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} - \frac{n^2}{r_*^2} \right) \Psi_{LF,n},\tag{1.61}$$

$$U_{rLF,n} = \frac{d\Phi_{LF,n}}{dr_*} - is \frac{d\Psi_{LF,n}}{dr_*} + \frac{n}{r_*} X_{LF,n}, U_{\theta LF,n} = -\frac{n}{r_*} \Phi_{LF,n} + \frac{isn}{r_*} \Psi_{LF,n} - \frac{dX_{LF,n}}{dr_*}.$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rrLF,n} &= \frac{2\nu_2}{(1-2\nu_2)\gamma} \left(isU_{xLF,n} + \frac{n}{r_*} U_{\theta LF,n} + \frac{U_{rLF,n}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{(1-2\nu_2)\gamma} \frac{dU_{rLF,n}}{dr_*}, \\ \bar{\sigma}_{rxLF,n} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{dU_{xLF,n}}{dr_*} + isU_{rLF,n} \right), \bar{\sigma}_{r\theta LF,n} = \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{n}{r_*} U_{rLF,n} + \frac{d}{dr_*} \left(\frac{U_{\theta LF,n}}{r_*} \right) \right).\end{aligned}\tag{1.62}$$

Розкладаємо зображення шуканих величин у ряд Фур'є наступним

чином:

$$\begin{aligned} & \{U_{LF}, W_{LF}, \bar{q}_{rLF}, \bar{q}_{xLF}, \chi_{xLF}, f_{LF}\} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{LF,n}, W_{LF,n}, \bar{q}_{rLF,n}, \bar{q}_{xLF,n}, \chi_{xLF,n}, f_{LF,n}\} \cos(n\theta), \\ & \{V_{LF}, \bar{q}_{\theta LF}, \chi_{\theta LF}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{LF,n}, \bar{q}_{\theta LF,n}, \chi_{\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (1.63)$$

У просторі зображень за Фур'є-Лапласом система (1.50) матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} & -\left(\frac{1-v_1}{2}\left(n^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2\right) + s^2\right) U_{LF,n} + isn \frac{1+v_1}{2} V_{LF,n} + v_1 is W_{LF,n} = -\frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} \bar{q}_{xLF,n}, \\ & -isn \frac{1+v_1}{2} U_{LF,n} - \left(\frac{1-v_1}{2}\left(s^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2\right) + n^2\right) V_{LF,n} - n\left(1 + \frac{(1-v_1)k^2}{2}\right) W_{LF,n} + \\ & + \frac{(1-v_1)k^2}{2} \chi_{\theta LF,n} = -\frac{1-v_1}{2\kappa^2\gamma} \bar{q}_{\theta LF,n}, \\ & isv_1 U_{LF,n} + nV_{LF,n} - k^2 \frac{1-v_1}{2} (is\chi_{xLF,n} + n\chi_{\theta LF,n}) + \\ & + \left(\frac{1-v_1}{2}\left((s^2 + n^2)k^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2\right) + 1\right) W_{LF,n} = -\frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} (\bar{q}_{rLF,n} - f_{LF,n}), \\ & -6k^2 is \frac{1-v_1}{\kappa^2} W_{LF,n} + isn \frac{1+v_1}{2} \chi_{\theta LF,n} - \left(s^2 + \frac{1-v_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2\right)\right) \chi_{xLF,n} = \\ & = -\frac{3(1-v_1)}{\kappa^2\gamma} \bar{q}_{xLF,n}, \\ & 6k^2 n \frac{1-v_1}{\kappa^2} W_{LF,n} - isn \frac{1+v_1}{2} \chi_{xLF,n} - \left(n^2 + \frac{1-v_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2\right)\right) \chi_{\theta LF,n} = \\ & = -\frac{3(1-v_1)}{\kappa^2\gamma} \bar{q}_{\theta LF,n}. \end{aligned} \right. \quad (1.64)$$

Граничні умови (1.54) приводяться до таких:

$$\begin{aligned} & \bar{q}_{rLF,n}(s, p) = -\bar{\sigma}_{rLF,n}(1, s, p), \bar{q}_{xLF,n}(s, p) = \bar{q}_{\theta LF,n}(s, p) = 0, \\ & W_{LF,n}(s, p) = U_{rLF,n}(1, s, p), \bar{\sigma}_{rxLF,n}(1, s, p) = \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}(1, s, p) = 0. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Враховуючи граничні умови (1.65), в системі (1.64) з четвертого та п'ятого рівнянь знаходимо невідомі функції $\chi_{xLF,n}, \chi_{\theta LF,n}$, а потім з першого та другого рівнянь виражаємо функції $U_{LF,n}, V_{LF,n}$ через $W_{LF,n}(s, p)$:

$$\begin{aligned}\chi_{xLF,n}(s, p) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} W_{LF,n}(s, p), \quad \chi_{\theta LF,n}(s, p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} W_{LF,n}(s, p), \\ U_{LF,n}(s, p) &= \frac{\Delta_4}{\Delta_3} W_{LF,n}(s, p), \quad V_{LF,n}(s, p) = \frac{\Delta_5}{\Delta_3} W_{LF,n}(s, p),\end{aligned}\tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}\text{де } \Delta &= A_1 A_2 - A_3^2; \quad \Delta_1 = iA_4(sA_2 - nA_3); \quad \Delta_2 = A_4(-sA_3 + nA_1); \quad \Delta_3 = B_1 B_2 - B_3^2; \\ \Delta_4 &= -i(v_1 s B_2 + n B_4 B_3); \quad \Delta_5 = v_1 s B_3 - B_4 B_1; \quad A_1 = s^2 + \frac{1-v_1}{2} \left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2 \right); \\ A_2 &= n^2 + \frac{1-v_1}{2} \left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2 \right); \quad A_3 = sn \frac{1+v_1}{2}; \quad A_4 = 6k^2 \frac{1-v_1}{\kappa^2}; \\ B_1 &= \frac{1-v_1}{2} \left(n^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2 \right) + s^2; \quad B_2 = \frac{1-v_1}{2} \left(s^2 + \frac{\rho_*}{\gamma} p^2 \right) + n^2; \quad B_3 = sn \frac{1+v_1}{2}; \\ B_4 &= -k^2 \frac{(1-v_1)\Delta_2}{2\Delta} + n \left(1 + \frac{(1-v_1)k^2}{2} \right).\end{aligned}$$

В результаті третє рівняння системи (1.64) прийме такий вигляд:

$$A_{T1} U_{rLF,n}(1, s, p) - \frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} \bar{\sigma}_{rLF,n}(1, s, p) = -\frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} f_{LF,n}(s, p),\tag{1.67}$$

де

$$A_{T1} = \left(is v_1 \frac{\Delta_4}{\Delta_3} + n \frac{\Delta_5}{\Delta_3} - k^2 \frac{1-v_1}{2\Delta} (is \Delta_1 + n \Delta_2) + \left(\frac{1-v_1}{2} ((s^2 + n^2)k^2 + p^2) + 1 \right) \right).$$

Доповнимо рівняння (1.67) двома останніми рівностями граничних умов (1.65), та отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_{1n}(s, p), C_{2n}(s, p), C_{3n}(s, p)$. Нехай $\bar{C}_{1n}(s, p), \bar{C}_{2n}(s, p), \bar{C}_{3n}(s, p)$ – розв'язок отриманої системи, який знайдено методом Гауса. Тоді вирази для нормальних переміщень та напружень у просторі зображень для коефіцієнтів рядів Фур'є мають такий вигляд:

$$U_{rLF,n}(r_*, s, p) = T_n^U(r_*, s, p) f_{LF,n}(s, p), \quad (1.68)$$

$$\bar{\sigma}_{rrLF,n}(r_*, s, p) = T_n^\sigma(r_*, s, p) f_{LF,n}(s, p), \quad (1.69)$$

де

$$\begin{aligned} T_n^U(r_*, s, p) &= \bar{C}_{1n}(s, p) \left(\frac{n K_n(m_p r_*)}{r_*} - m_p K_{n+1}(m_p r_*) \right) - \\ &- is \bar{C}_{2n}(s, p) \left(\frac{n K_n(m_s r_*)}{r_*} - m_s K_{n+1}(m_s r_*) \right) + \bar{C}_{3n}(s, p) \frac{n K_n(m_s r_*)}{r_*}, \\ T_n^\sigma(r_*, s, p) &= -\frac{\bar{C}_{1n}(s, p)}{(1-2\nu_2)r_*^2} \left(K_n(m_p r_*) \left(2n^2 - 2n + r_*^2 (m_p^2 + s^2) \right) - (m_p r_*)^2 + n - n^2 \right) - \\ &- (1-2\nu_2) m_p r_* K_{n+1}(m_p r_*) - \frac{2is \bar{C}_{2n}(s, p)}{r_*^2} \left(K_n(m_s r_*) \left((m_s r_*)^2 - n + n^2 \right) + \right. \\ &\left. + m_s r_* K_n(m_s r_*) \right) + \frac{2n \bar{C}_{3n}(s, p)}{r_*^2} \left(K_n(m_s r_*) (n-1) - m_s r_* K_{n+1}(m_s r_*) \right). \end{aligned}$$

Для того, щоб отримати остаточні вирази коефіцієнтів рядів Фур'є в просторі зображень за Фур'є-Лапласом для нормальних переміщень (1.68) та напружень (1.69) потрібно підставити вирази для нормальних поверхневих навантажень. Розглянемо два типи навантажень:

а) навантаження, ділянка дії якого розширюється із сталою швидкістю c , симетрично відносно початку координат, а сумарний тиск однаковий у всі моменти часу та рівний F_0 :

$$f(x, t) = \frac{F_0 H(ct - |x|)}{4\pi c t b} \left(H(\theta - \theta_1) H(\theta - \theta_2) - H(-\theta - \theta_1) H(-\theta - \theta_2) \right), \quad (1.70)$$

де $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$;

б) навантаження, яке рівномірно розподілене по ділянці внутрішньої поверхні оболонки:

$$f(x, t) = F_0 H(|x| - d) H(t) (H(\theta - \theta_1) H(\theta - \theta_2) - H(-\theta - \theta_1) H(-\theta - \theta_2)). \quad (1.71)$$

Перейдемо у виразах для навантажень до безрозмірних величин, застосуємо інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа та розкладемо трансформанти у тригонометричні ряди Фур'є. В результаті будемо мати:

а) для навантаження (1.70):

$$f_{LF,n}(s, p) = \frac{\frac{F_0}{a^2}}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}d_1 sc^*} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right) \xi_n, \quad (1.72)$$

де $c^* = \frac{c}{c_s}$, а

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\pi}, n = 0, \\ \frac{2(\sin(n\theta_2) - \sin(n\theta_1))\sigma_n}{\pi n}, n > 0. \end{cases} \quad (1.73)$$

Тут $\sigma_n = 1, n = 0, \sigma_n = \frac{NF + 1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{NF + 1}\right), n > 0$ – множники для прискорення

збіжності тригонометричних рядів Фур'є [39], сума яких наближується скінченним рядом з NF доданків;

б) для навантаження (1.71):

$$f_{LF,n}(s, p) = \frac{\sqrt{2}F_0 \sin(d^* s)}{\sqrt{\pi s p}} \xi_n, \quad (1.74)$$

де $d^* = \frac{d}{a}$.

Для отримання оригіналів формул (1.68) та (1.69), необхідно підставити відповідний вираз для функції навантаження, обернути інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа та підсумувати тригонометричні ряди Фур'є.

Якщо підсумувати тригонометричні ряди Фур'є та застосувати обернене перетворення Фур'є, то для трансформант Лапласа будемо мати:

$$U_{rL}(r_*, x_*, p, \theta) = \int_0^{\infty} T_0^U(r_*, s, p) F_{LF,0}(s, p) \cos(s x_*) ds + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) f_{LF,n}(s, p) \cos(s x_*) ds, \quad (1.75)$$

$$\bar{\sigma}_{rL}(r_*, x_*, p, \theta) = \int_0^{\infty} T_0^{\sigma}(r_*, s, p) F_{LF,0}(s, p) \cos(s x_*) ds + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} T_n^{\sigma}(r_*, s, p) f_{LF,n}(s, p) \cos(s x_*) ds. \quad (1.76)$$

Невласні інтеграли у виразах (1.75) та (1.76) обчислюються за допомогою метода Файлона, який описано в пункті 1.1.1. Кількість доданків в рядах Фур'є підбиралася за допомогою чисельних експериментів для забезпечення заданої відносної похибки. Перетворення Лапласа обертається за допомогою метода, описаного в пункті 1.1.1.

При проведенні чисельних розрахунків приймалися такі значення безрозмірних величин: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\gamma = 30$, $\rho^* = 4$, $\kappa = 0,02$, $d^* = \frac{1}{2}$, $x_* = 0$, $r_* = 1$, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$. Величини θ , τ , c^* – змінювались.

Рис. 1.9 ілюструє зміну нормальних переміщень та напружень, для навантаження (1.72), за кутовою координатою на границі контакту оболонки і пружного середовища ($r_* = 1, x_* = 0, c_* = 0,1$), для різних значень безрозмірного часу.

На рис. 1.10 наведені аналогічні рис. 1.9 результати, але для більш високого значення швидкості $c_* = 0,4$.

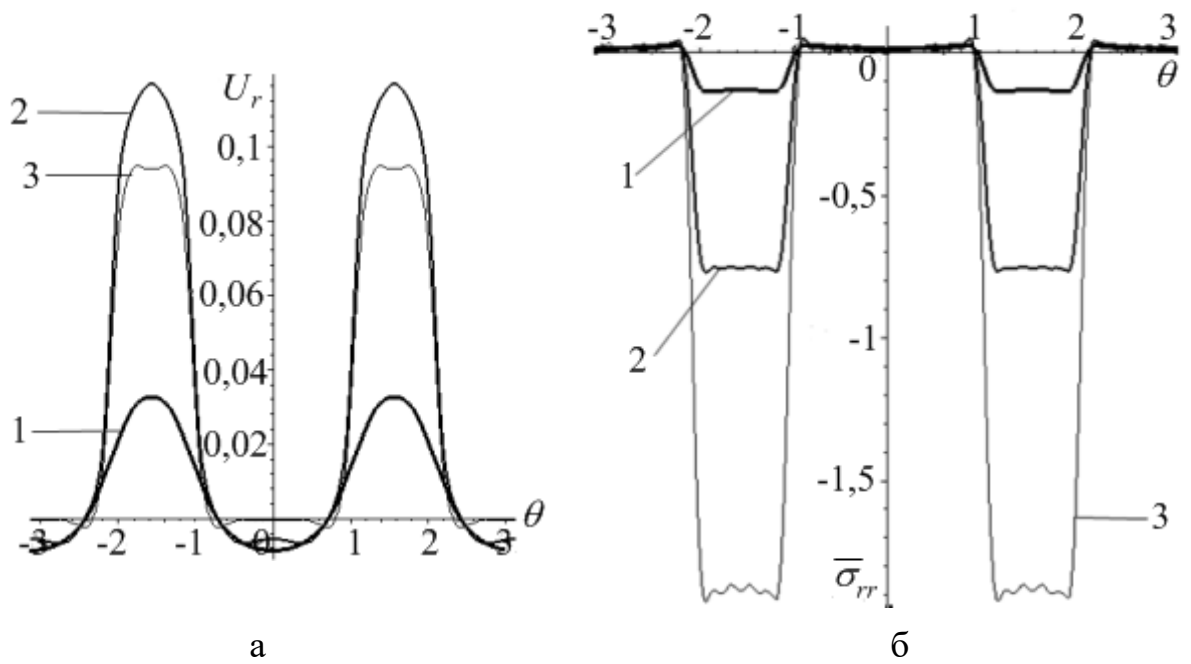


Рисунок 1.9 – Порівняння нормальних переміщень (а) та напружень (б) за кутовою координатою для навантаження (1.72) при $c^* = 0,1$:

3 (а) – $\tau = 0,25$, 3 (б) – $\tau = 0,2$, 2 – $\tau = 1$, 1 – $\tau = 4$

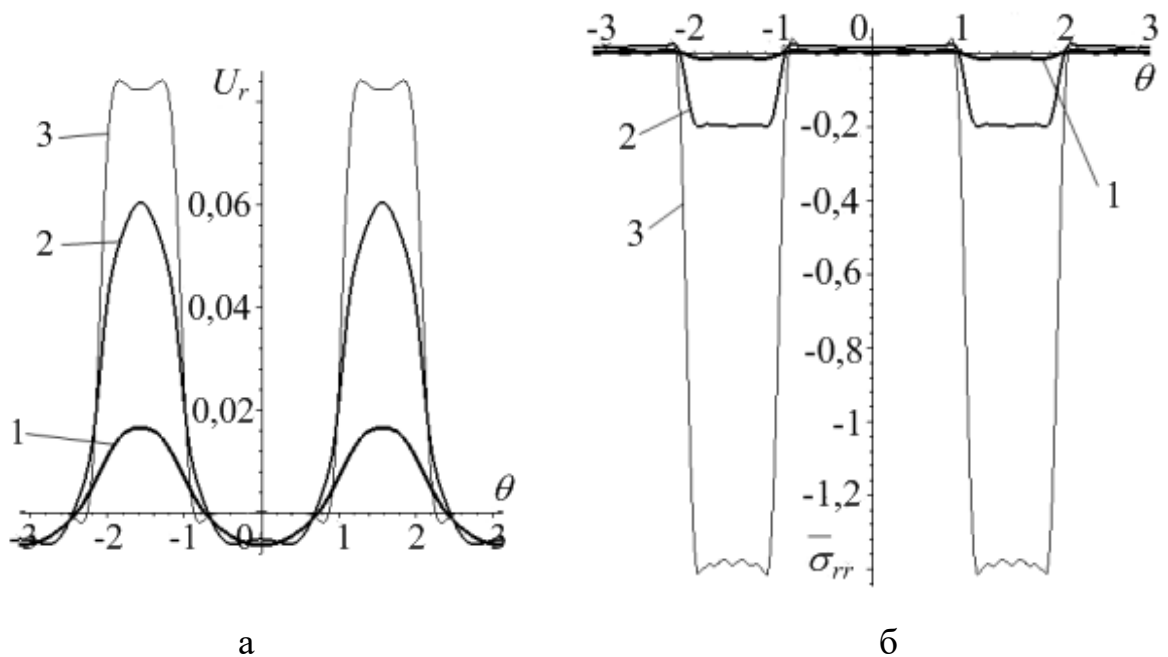


Рисунок 1.10 – Порівняння нормальних переміщень (а) та напружень (б) за кутовою координатою для навантаження (1.72) при $c^* = 0,4$:

3 (а) – $\tau = 0,25$, 3 (б) – $\tau = 0,2$, 2 – $\tau = 1$, 1 – $\tau = 4$

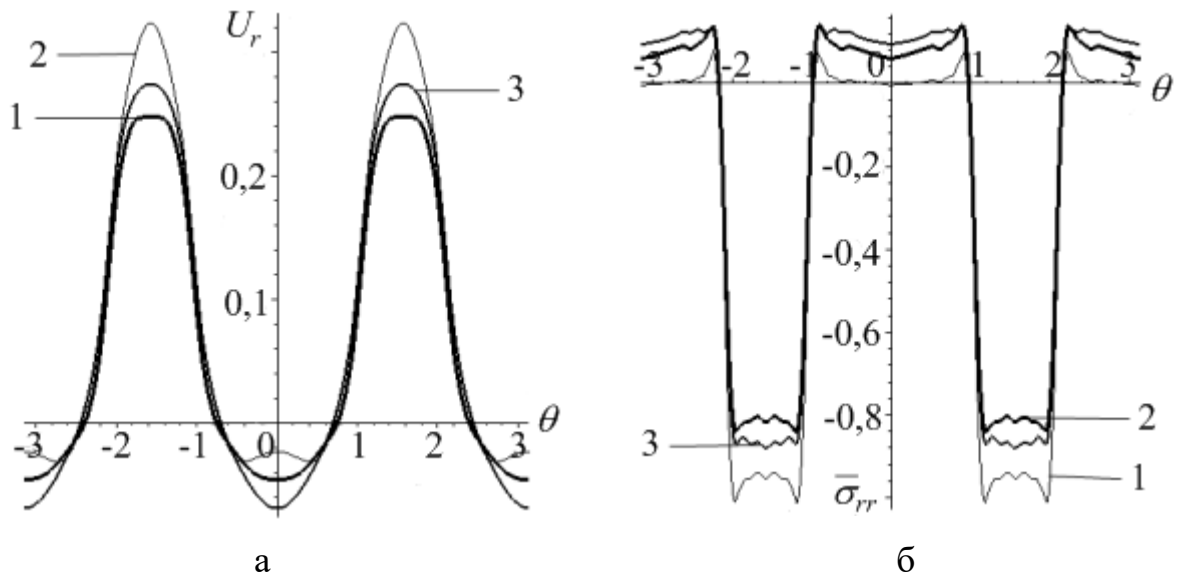


Рисунок 1.11 – Порівняння нормальних переміщень (а) та напружень (б) за кутовою координатою для навантаження (1.73) при $c^* = 0,4$:

1 (а) – $\tau = 1$, 1 (б) – $\tau = 0,2$, 2 – $\tau = 3$, 3 – $\tau = 6$

На рис. 1.11 показано зміну нормальних переміщень та нормальних напружень за кутовою координатою на границі контакту оболонки і пружного середовища ($r_* = 1, x_* = 0$) у різні моменти безрозмірного часу.

1.3 Динаміка підкріпленої повздовжніми ребрами жорсткості циліндричної оболонки у пружному середовищі

У даному підрозділі будемо розглядати механічну систему оболонка – пружне інерційне середовище, яка описана у пункті 1.1.1, але з припущенням, що внутрішня поверхня оболонки дискретно підкріплена N повздовжніми ребрами жорсткості. Положення кожного ребра жорсткості на внутрішній поверхні оболонки задається рівнянням $\theta = \theta_j, j = \overline{1, N}$. Також припускається, що динамічне навантаження прикладене по нормалі до ділянки кожного ребра жорсткості.

Для середовища будемо використовувати динамічні рівняння теорії пружності (1.1). Рух оболонки описується рівняннями, які враховують

поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко) (1.50).

Для опису руху кожного ребра використовуємо рівняння теорії балок [96]:

$$E_{\delta j} I_j \frac{\partial^4 y_{\delta j}}{\partial x^4} + \rho_{\delta j} F_j \frac{\partial^2 y_{\delta j}}{\partial t^2} = p_{\delta j}(x, t) - q_{c j}(x, t); \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.77)$$

де $p_{\delta j}(x, t)$ – інтенсивність заданого навантаження на j -е ребро;

$q_{c j}(x, t)$ – невідома реакція з боку оболонки на j -е ребро;

$E_{\delta j}, \rho_{\delta j}$ – модуль Юнга і щільність j -го ребра;

$y_{\delta j}$ – прогин j -го ребра;

I_j, F_j – момент інерції і площа поперечного перерізу ребра.

Граничні умови між оболонкою і середовищем задаються у формі (1.53).

Умови контакту ребер і оболонки запишемо так:

а) в місцях контакту $\theta = \theta_j$ нормальне переміщення ребра рівне нормальному переміщенню оболонки:

$$w(x, t, \theta_j) = y_{\delta j}(x, t); \quad (1.78)$$

б) внутрішнє навантаження на оболонку дорівнює сумі тисків, які передаються через кожне ребро:

$$p(x, \theta, t) = \sum_{j=1}^N q_{c j}(x, t) \delta(\theta - \theta_j), \quad (1.79)$$

де N – кількість ребер, а $\delta(\theta)$ – дельта-функція Дірака.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто при $t = 0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Для розв'язання задачі будемо використовувати інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною (1.7) та комплексне інтегральне перетворення Фур'є за осью координатою (1.8), а також тригонометричні ряди Фур'є.

Перейдемо до безрозмірних величин (1.56) та додатково введемо нові параметри:

$$Y_j = \frac{1}{a} y_j; \bar{q}_{cj} = \frac{1}{G_2} q_{cj}; \gamma_j = \frac{G_{\delta j}}{G_2}; \rho_j^* = \frac{\rho_{\delta j}}{\rho_2}; I_j^* = \frac{I_j}{a^4}; F_j^* = \frac{F_j}{a^2}. \quad (1.80)$$

Вирази для нормальних переміщень та напружень у довільній точці середовища у просторі зображень за Фур'є-Лапласом для коефіцієнтів тригонометричних рядів Фур'є можна записати у вигляді (1.68) та (1.69) відповідно. Далі всі викладки будемо проводити для нормальних переміщень. Вирази для трансформант інших компонент динамічного напружено-деформованого стану обчислюються аналогічно.

Тепер для знаходження остаточного вигляду виразів (1.68) та (1.69) потрібно знайти навантаження, яке передається на оболонку з боку ребер жорсткості. Для цього застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівняння (1.77):

$$2\gamma_j(1 + \nu_{\delta j})I_j^* s^4 Y_{jLF} + \rho_j^* F_j^* p^2 Y_{jLF} = p_{\delta jLF}(s, p) - \bar{q}_{cjLF}(s, p). \quad (1.81)$$

Введемо позначення:

$$A_j = 2\gamma_j(1 + \nu_{\delta j})I_j^* s^4 + \rho_j^* F_j^* p^2.$$

Тоді:

$$Y_{\delta_{jLF}}(s, p) = \frac{p_{\delta_{jLF}}(s, p) - \bar{q}_{c_{jLF}}(s, p)}{A_j}. \quad (1.82)$$

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до співвідношень (1.79), будемо мати:

$$p_{LF,n}(s, p) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{c_{jLF}}(s, p) D_n^j, \quad (1.83)$$

де $\delta(\theta - \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j \cos(n\theta)$, а коефіцієнти D_n^j обчислюються наступним

чином:

$$D_n^j = \frac{\sigma_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta - \theta_j) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \cos(n\theta_j) \sigma_n, \quad (1.84)$$

а σ_n – множники для прискорення збіжності рядів Фур'є [39], вирази для яких наведено в (1.73).

Підставляємо (1.82) в (1.67). Будемо мати:

$$U_{rLF,n}(r_*, s, p) = T_n^U(r_*, s, p) \sum_{j=1}^N \bar{q}_{c_{jLF}}(s, p) D_n^j. \quad (1.85)$$

Підсумуємо в (1.84) тригонометричний ряд Фур'є:

$$U_{rLF}(r_*, x_*, p, \theta) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{c_{jLF}}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta). \quad (1.86)$$

У виразі (1.86) замість θ підставляємо θ_k , ($k = \overline{1, N}$), та отримаємо N рівностей:

$$U_{rLF}(r_*, x_*, p, \theta_k) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{c j LF}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}). \quad (1.87)$$

Використаємо тепер граничну умову (1.78). З урахуванням (1.82) будемо мати:

$$\frac{p_{ckLF}(s, p) - \bar{q}_{\delta k LF}(s, p)}{A_k} = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{c j LF}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}), \quad (1.88)$$

або

$$p_{ckLF}(s, p) = \left(1 + A_k \sum_{n=0}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) D_n^k \cos(n\theta_k) \right) \bar{q}_{ckLF}(s, p) + A_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \bar{q}_{c j LF}(s, p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}). \quad (1.89)$$

Якщо розв'язати систему (1.89) відносно невідомих $\bar{q}_{c1LF}(s, p), \dots, \bar{q}_{cNLF}(s, p)$ і підставити отримані результати у вираз (1.87), то будемо мати вираз для нормальних переміщень у просторі зображень за Фур'є-Лапласом.

Проілюструємо описаний алгоритм для випадку двох, чотирьох та шести ребер жорсткості. Для спрощення розрахунків припустимо, що всі ребра мають однакові механічні та геометричні характеристики, та прикладемо до них однакові навантаження. Також будемо припускати, що всі ребра знаходяться у вершинах правильного N -кутника, який вписано в коло, що описує поперечний переріз оболонки. В такому випадку для всіх ребер реакції зі сторони оболонки будуть однакові.

$$\text{Позначимо: } p_{\delta LF}(s, p) = p_{\delta 1 LF}(s, p) = \dots = p_{\delta N LF}(s, p), \quad A = A_1 = \dots = A_N,$$

$$\bar{q}_{cLF}(s, p) = \bar{q}_{c1LF}(s, p) = \dots = \bar{q}_{cNLF}(s, p).$$

В такому випадку будемо мати:

$$\bar{q}_{cLF}(s, p) = \frac{p_{\delta LF}(s, p)}{1 + A f_1(r_*, s, p)}, \quad (1.90)$$

$$U_{rLF,n}(r_*, s, p) = \frac{T_n^U(r_*, s, p) p_{\delta LF}(s, p)}{1 + A f_1(r_*, s, p)} \sum_{j=1}^N D_n^j, \quad (1.91)$$

$$\text{де } f_1(r_*, s, p) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sum_{j=1}^N D_n^j \cos(n\theta_1).$$

В силу властивостей кутів вписаного в коло правильного N -кутника, будемо мати:

$$\sum_{j=1}^N D_n^j \cos(n\theta_1) = \begin{cases} N \sigma_n, & n = Nk, k \in Z, \\ 0, & n \neq Nk, k \in Z, \end{cases} \quad (1.92)$$

$$\sum_{j=1}^N D_n^j = \begin{cases} N \sigma_n, & n = Nk, k \in Z, \\ 0, & n \neq Nk, k \in Z. \end{cases} \quad (1.93)$$

Іншими словами співвідношення (1.92) та (1.93) означають, що у формулах (1.90) та (1.91) при підсумовуванні тригонометричних рядів Фур'є потрібно враховувати лише ті доданки, номер яких кратний N .

Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент часу $t = 0$ в області $\theta = \theta_k$ ($k = \overline{1, N}$), $r = b$, $-d \leq x \leq d$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження (1.19), яке постійно діє на даній ділянці, та має трансформанту (1.21)

Після обернення перетворення Фур'є та підсумовування рядів Фур'є отримаємо вирази для трансформанти Лапласа функції нормальних переміщень:

$$\frac{U_{rL}(r_*, x_*, p, \theta) G_2}{F_0 / a} = \frac{N}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{Nn}}{p} \left[\int_0^{\infty} \frac{T_{Nn}^U(r_*, s, p) \sin(s d^*)}{s(1 + A f_1(r_*, s, p))} \cos(s x_*) ds \right] \cos(n\theta). \quad (1.94)$$

Обчислення невластних інтегралів у виразі (1.94) здійснювалось наближено з використанням метода Файлона, обернення перетворення Лапласа здійснювалось чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра.

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_\delta = 0,3$, $\gamma = 30$, $\gamma_\delta = 300$, $\rho^* = 4$, $\rho_\delta^* = 8$, $F_\delta^* = 7 \cdot 10^{-4}$, $I_\delta^* = 10^{-6}$, $\kappa = 0,02$, $r_* = 1$, $d_* = \frac{1}{2}$. Величини θ , τ , x_* – змінювались.

На рис. 1.12 (а) проілюстровано зміну нормальних переміщень (1.94) середовища за кутовою координатою в різні моменти безрозмірного часу на границі контакту з оболонкою, підкріпленою двома ребрами, у характерній точці ($x_* = 0$). На рис. 1.12 (б) приводиться аналогічні результати за осьовою координатою (при $\theta = 0$) у різні моменти безрозмірного часу.

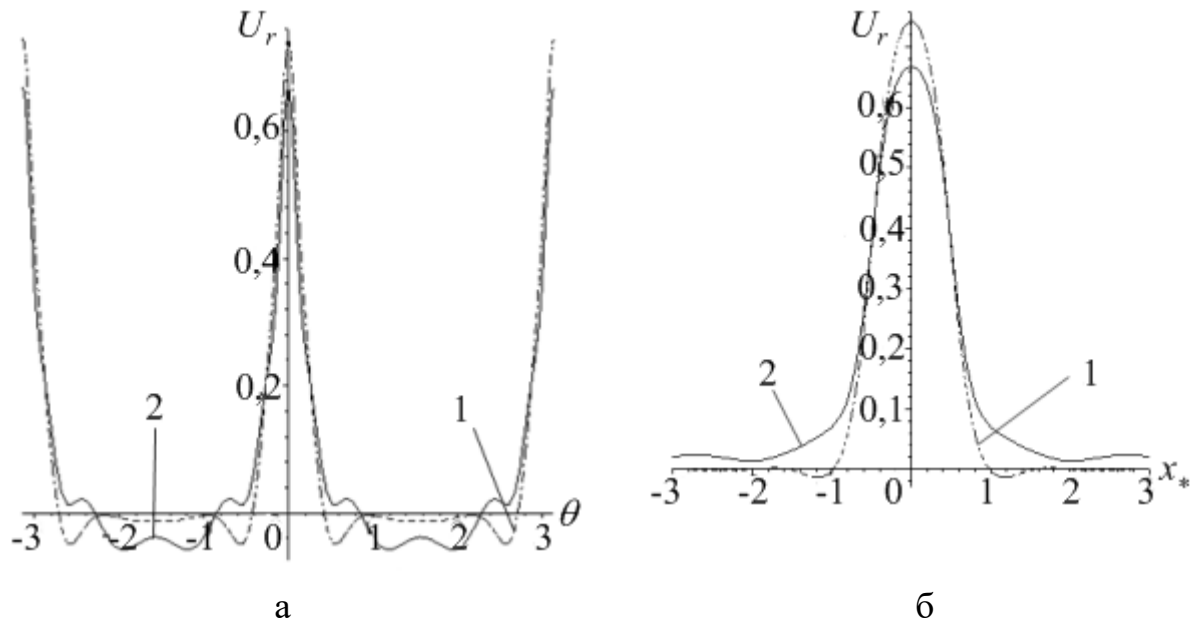


Рисунок 1.12 – Розподіл нормальних переміщень за кутовою (а) та осьовою (б) координатами для двох ребер жорсткості:

1 – $\tau = 0,6$, 2 – $\tau = 6$

На рис. 1.13 та рис. 1.14 приведені аналогічні до рис. 1.12 результати для оболонок, підкріплених чотирма та шістьма ребрами відповідно.

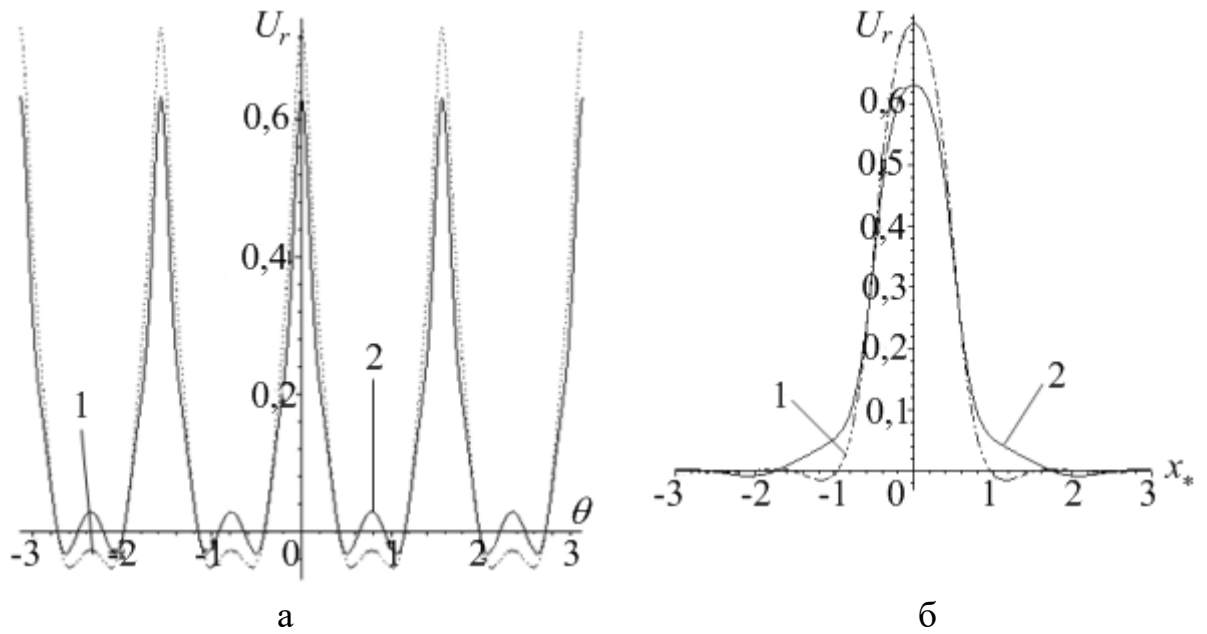


Рисунок 1.13 – Розподіл нормальних переміщень за кутовою (а) та осьовою (б) координатами для чотирьох ребер жорсткості:

$$1 - \tau = 0,6, 2 - \tau = 6$$

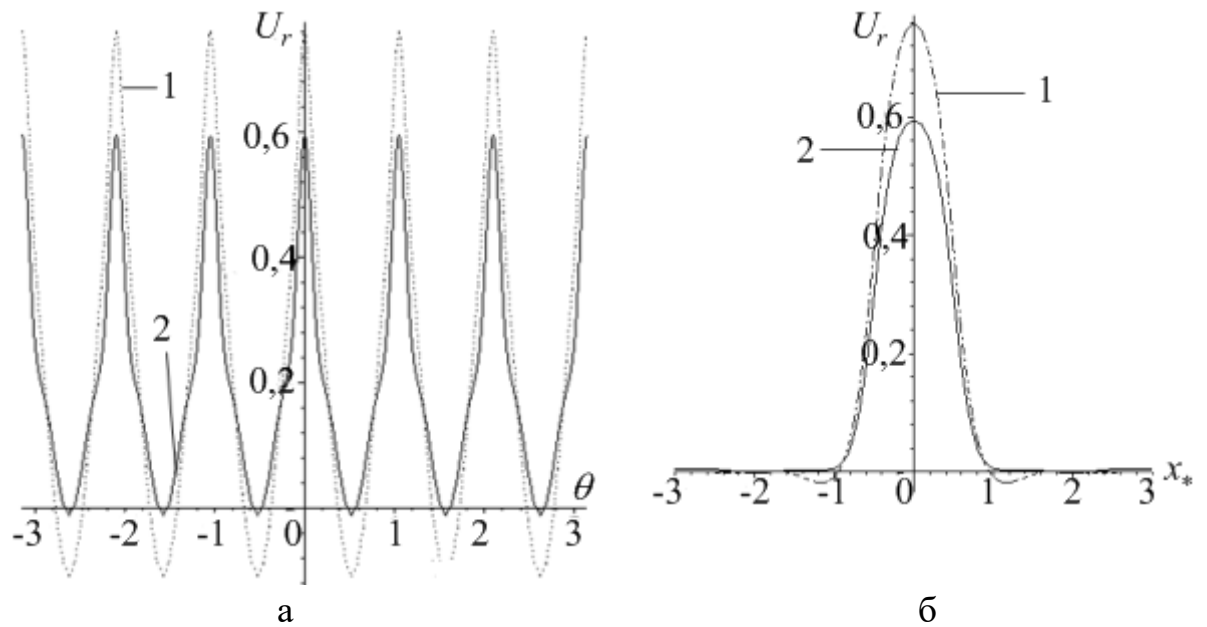


Рисунок 1.14 – Розподіл нормальних переміщень за кутовою (а) та осьовою (б) координатами для шести ребер жорсткості:

$$1 - \tau = 0,6, 2 - \tau = 6$$

1.4 Динаміка підкріпленої поперечними ребрами жорсткості циліндричної оболонки у пружному середовищі

В даному підрозділі будемо розглядати механічну систему оболонка – пружне інерційне середовище, яка описана у пункті 1.1.1, але з припущенням, що на внутрішній поверхні оболонка дискретно підкріплена поперечними ребрами жорсткості (шпангоутами). В даному пункті буде розглянуто три випадки. В першому випадку будемо припускати, що при $x_1 = 0$ розташоване одне кільцеве ребро жорсткості. В другому, що два ребра розташовані симетрично відносно нуля на відстані d один від одного (тобто при $x_1 = -\frac{d}{2}$, $x_2 = \frac{d}{2}$). І в третьому випадку розглянемо три ребра жорсткості. Перше розташовано в початку координат ($x_2 = 0$), а два інші симетрично відносно першого на відстані d (тобто при $x_1 = -d$, $x_3 = d$).

Рух середовища будемо описувати за допомогою динамічних рівнянь теорії пружності (1.1). Для оболонки використовуються рівняння, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко) (1.50). Рух кожного ребра описується рівняннями динаміки кілець [92]:

$$\begin{cases} \frac{E_{\delta k} F_k}{r} \left(\frac{\partial^2 v_{\delta k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_{\delta k}}{\partial \theta} \right) + \frac{E_{\delta k} I_k}{r^3} \left(\frac{\partial^2 v_{\delta k}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w_{\delta k}}{\partial \theta^3} \right) - r \rho_{\delta k} F_k \frac{\partial^2 v_{\delta k}}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{E_{\delta k} F_k}{r} \left(\frac{\partial v_{\delta k}}{\partial \theta} + w_{\delta k} \right) - \frac{E_{\delta k} I_k}{r^3} \left(\frac{\partial^3 v_{\delta k}}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^4 w_{\delta k}}{\partial \theta^4} \right) + r \rho_{\delta k} F_k \frac{\partial^2 w_{\delta k}}{\partial t^2} = q_{ck} - p_{\delta k}, \end{cases} \quad (1.95)$$

де $p_{\delta k}(\theta, t)$ – інтенсивність заданого навантаження на k -е ребро;

$q_{ck}(\theta, t)$ – невідома реакція з боку оболонки на k -е ребро;

$E_{\delta k}$, $\rho_{\delta k}$ – модуль Юнга і щільність k -го ребра;

$w_{\delta k}$, $v_{\delta k}$ – нормальне і дотичне переміщення k -го ребра;

I_k, F_k – момент інерції і площа поперечного перерізу кільцевого ребра жорсткості.

Граничні умови між оболонкою і середовищем задаються у формі (1.54).

Умови контакту ребер жорсткості та оболонки запишемо так:

а) в місцях контакту $x = x_k$ нормальне переміщення ребра рівне нормальному переміщенню оболонки, взятому з протилежним знаком:

$$w(x_k, t, \theta) = -w_{\delta k}(t, \theta); \quad (1.96)$$

б) внутрішнє навантаження на оболонку дорівнює сумі тисків, які передаються через кожне ребро:

$$p(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^{NK} q_{ck}(\theta, t) \delta(x - x_k), \quad (1.97)$$

де NK – кількість ребер.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто при $t = 0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Для розв'язання задачі будемо використовувати інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною (1.7) та комплексне інтегральне перетворення Фур'є за осью координатою (1.8), а також тригонометричні ряди Фур'є.

Перейдемо до безрозмірних величин (1.56) та введемо нові:

$$\begin{aligned} \{V_{\delta k}, W_{\delta k}\} &= \frac{1}{a} \{v_{\delta k}, w_{\delta k}\}; \bar{q}_{ck} = \frac{1}{G_2} q_{ck}; \\ \gamma_k &= \frac{G_{\delta k}}{G_2}; \rho_k^* = \frac{\rho_{\delta k}}{\rho_2}; I_k^* = \frac{I_k}{a^4}; F_k^* = \frac{F_k}{a^2}; d^* = \frac{d}{a}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Вирази для нормальних переміщень та напружень для середовища у просторі зображень за Фур'є-Лапласом для коефіцієнтів тригонометричних

рядів Фур'є можна записати у вигляді (1.67) та (1.68) відповідно. Далі всі викладки будемо проводити для нормальних переміщень. Вирази для трансформант інших компонент динамічного напружено-деформованого стану обчислюються аналогічно.

Тепер для знаходження остаточного вигляду виразів (1.68) та (1.69) потрібно знайти навантаження, яке передається на оболонку з боку ребер жорсткості. Для цього застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (1.95). Розкладемо спочатку усі величини системи (1.95) в тригонометричний ряд Фур'є:

$$\left\{ W_{\delta k L}, P_{\delta k L}, \bar{q}_{ckL} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ W_{\delta k L, n}, P_{\delta k L, n}, \bar{q}_{ckL, n} \right\} \cos(n\theta), \quad (1.99)$$

$$V_{\delta k L} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{\delta k L, n} \sin(n\theta).$$

Рівняння (1.95) приймуть такий вигляд:

$$\begin{cases} (2\gamma_k(1+\nu_{\delta k})n^2(F_k^* + I_k^*) + \rho_k^* F_k^* p^2)V_{\delta k L} + \\ + 2\gamma_k(1+\nu_{\delta k})n(F_k^* + I_k^* n^2)W_{\delta k L, n} = 0, \\ 2\gamma_k(1+\nu_{\delta k})n(F_k^* + I_k^* n^2)V_{\delta k L} + \\ + (2\gamma_k(1+\nu_{\delta k})(F_k^* + I_k^* n^4) + \rho_k^* F_k^* p^2)W_{\delta k L, n} = \bar{q}_{ckL, n} - P_{\delta k L, n}. \end{cases} \quad (1.100)$$

Введемо позначення:

$$A_{11k} = (2\gamma_k(1+\nu_{\delta k})n^2(F_k^* + I_k^*) + \rho_k^* F_k^* p^2), \quad A_{12k} = 2\gamma_k(1+\nu_{\delta k})n(F_k^* + I_k^* n^2),$$

$$A_{22k} = (2\gamma_k(1+\nu_{\delta k})(F_k^* + I_k^* n^4) + \rho_k^* F_k^* p^2), \quad A_{33k} = \frac{A_{12}^2}{A_{11}} + A_{22}.$$

Тоді із системи (1.100) знаходимо:

$$V_{\delta k_L} = \frac{A_{12k}}{A_{11k}} W_{\delta k_L, n}, \quad (1.101)$$

$$W_{\delta k_{LF, n}} = \frac{\bar{q}_{ckL, n} - P_{\delta k_L, n}}{A_{33k}}. \quad (1.102)$$

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до співвідношень (1.97):

$$p_{LF, n}(s, p) = \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{ckL, n}(p) e^{isx_* k}. \quad (1.103)$$

Якщо підставити вираз (1.103) у залежності (1.68), то прийдемо до такого співвідношення:

$$U_{rLF, n}(r_*, s, p) = T_n^U(r_*, s, p) \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{ckL, n}(p) e^{isx_* k}. \quad (1.104)$$

Позначимо $f_{kn}(r_*, x_*, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(r_*, s, p) e^{-isx_* k} e^{isx_*} ds$ і перепишемо

(1.104) в такому вигляді:

$$U_{rLF, n}(r_*, x_*, p) = \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{ckL, n}(p) f_{kn}(r_*, x_*, p). \quad (1.105)$$

У виразі (1.105) замість x_* підставляємо по черзі значення x_j , ($j = \overline{1, NK}$), отримуємо такі NK рівностей:

$$U_{rLF, n}(r_*, x_j, p) = \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{ckL, n}(p) f_{kn}(r_*, x_j, p), \quad (j = \overline{1, NK}). \quad (1.106)$$

Використаємо тепер умову контакту (1.96). З урахуванням виразу (1.102) будемо мати:

$$-\frac{\bar{q}_{c j L, n}(p) - p_{\delta j L, n}(p)}{A_{33j}} = \sum_{k=1}^{NK} \bar{q}_{c k L, n}(p) f_{kn}(r_*, x_j, p), \quad (j = \overline{1, NK}), \quad (1.107)$$

або

$$p_{\delta j LF, n}(p) = (1 + A_{33j} f_{jn}(r_*, x_j, p)) \bar{q}_{c j L, n}(p) + A_{33j} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{NK} \bar{q}_{c k L, n}(p) f_{kn}(r_*, x_j, p), \quad (j = \overline{1, NK}). \quad (1.108)$$

Якщо розв'язати систему (1.108) відносно невідомих $\bar{q}_{c 1 L, n}(p), \dots, \bar{q}_{c NK L, n}(p)$ і підставити отримані результати у вираз (1.106) та отримаємо остаточний вираз для нормальних переміщень у просторі зображень за Фур'є-Лапласом.

Проілюструємо описаний алгоритм для випадку одного, двох та трьох ребер жорсткості. Для спрощення розрахунків припустимо, що усі ребра мають однакові механічні та геометричні характеристики, та прикладемо до них однакові навантаження.

Позначимо: $p_{\delta L, n}(p) = p_{\delta 1 L, n}(p) = \dots = p_{\delta NK L, n}(p)$, $A_{33} = A_{331} = \dots = A_{33NK}$.

У випадку одного ребра будемо мати ($x_1 = 0$):

$$\bar{q}_{c L, n}(p) = \frac{p_{\delta L, n}(p)}{1 + A_{33} f_{1n}(r_*, 0, p)}, \quad (1.109)$$

$$U_{r LF, n}(r_*, s, p) = \frac{T_n^U(r_*, s, p) p_{\delta L, n}(p)}{1 + A_{33} f_{1n}(r_*, 0, p)}, \quad (1.110)$$

де

$$f_{1n}(r_*, 0, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(r_*, s, p) e^{-is0} e^{is0} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(r_*, s, p) ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(r_*, s, p) ds.$$

Тепер розглянемо випадок, коли оболонка підкріплена двома ребрами жорсткості $\left(x_1 = -\frac{d^*}{2}, x_2 = \frac{d^*}{2}\right)$. Тоді система (1.108) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} p_{\delta L,n}(p) = (1 + A_{33} f_{1n}(r_*, x_1, p)) \bar{q}_{c1L,n}(p) + A_{33} \bar{q}_{c2L,n}(p) f_{2n}(r_*, x_1, p), \\ p_{\delta L,n}(p) = A_{33} \bar{q}_{c1L,n}(p) f_{2n}(r_*, x_1, p) + (1 + A_{33} f_{2n}(r_*, x_2, p)) \bar{q}_{c2L,n}(p). \end{cases} \quad (1.111)$$

Якщо від першого рівняння цієї системи відняти друге то прийдемо до наступного ланцюжка формул:

$$\begin{aligned} & \bar{q}_{c1L,n}(p) (1 + A_{33} (f_{1n}(r_*, x_1, p) - f_{1n}(r_*, x_2, p))) = \\ & = \bar{q}_{c2L,n}(p) (1 + A_{33} (f_{2n}(r_*, x_2, p) - f_{2n}(r_*, x_1, p))). \end{aligned} \quad (1.112)$$

$$\begin{aligned} f_{1n}(r_*, x_1, p) - f_{1n}(r_*, x_2, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) e^{-isx_1} (e^{isx_1} - e^{isx_2}) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) e^{-isx_1} (e^{isx_1} - e^{-isx_1}) ds = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) (i \cos(sx_1) \sin(sx_1) + \sin^2(sx_1)) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) e^{-isx_1} (\cos(sx_1) + i \sin(sx_1) - \cos(sx_1) + i \sin(sx_1)) ds = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin(2sx_1) ds + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin^2(sx_1) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) e^{-isx_1} 2i \sin(sx_1) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin^2\left(-\frac{sd^*}{2}\right) ds = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin^2\left(\frac{sd^*}{2}\right) ds; \\
f_{2n}(r_*, x_2, p) - f_{2n}(r_*, x_1, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) e^{-isx_2} (e^{isx_2} - e^{isx_1}) ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) e^{isx_1} (e^{-isx_1} - e^{isx_1}) ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) e^{isx_1} (\cos(sx_1) - i \sin(sx_1) - \cos(sx_1) - i \sin(sx_1)) ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) e^{isx_1} (-2i) \sin(sx_1) ds = \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) (i \cos(sx_1) \sin(sx_1) + \sin^2(sx_1)) ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin(2sx_1) ds + \\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin^2(sx_1) ds = 0 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin^2\left(-\frac{sd^*}{2}\right) ds = \\
&= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin^2\left(\frac{sd^*}{2}\right) ds = f_{1n}(r_*, x_1, p) - f_{1n}(r_*, x_2, p).
\end{aligned}$$

Підставивши отримані результати у вираз (1.111), приходимо до наступної залежності:

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{c1L,n}(p) (1 + A_{33} (f_{1n}(r_*, x_1, p) - f_{1n}(r_*, x_2, p))) &= \\
= \bar{q}_{c2L,n}(p) (1 + A_{33} (f_{1n}(r_*, x_1, p) - f_{1n}(r_*, x_2, p))), & \\
\bar{q}_{c1LF,n}(p) = \bar{q}_{c2LF,n}(p). &
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що симетрично розташовані відносно початку координат ребра, мають однакову реакцію зі сторони оболонки, і тоді будемо мати:

$$\bar{q}_{cL,n}(p) = \frac{p_{\delta L,n}(p)}{1 + A_{33} (f_{n1}(r_*, x_1, p) + f_{2n}(r_*, x_1, p))}, \quad (1.113)$$

$$U_{rLF,n}(r_*, s, p) = \frac{T_n^U(r_*, s, p) p_{\delta L,n}(p)}{1 + A_{33}(f_{n1}(r_*, x_1, p) + f_{2n}(r_*, x_1, p))}, \quad (1.114)$$

$$\begin{aligned} \text{де } f_{n1}(r_*, x_1, p) + f_{2n}(r_*, x_1, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) (e^{-isx_1} e^{isx_1} + e^{-isx_2} e^{isx_1}) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) (1 + e^{isx_1} e^{isx_1}) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) (1 + \cos(2s x_1) + i \sin(2s x_1)) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) (1 + \cos(2s x_1)) ds + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \sin(2s x_1) ds = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) (1 + \cos(2s x_1)) ds + 0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) \left(1 + \cos\left(-\frac{2s d^*}{2}\right) \right) ds = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) (1 + \cos(s d^*)) ds. \end{aligned}$$

Тепер розглянемо випадок, коли оболонка підкріплена трьома кільцевими ребрами жорсткості ($x_1 = -d^*$, $x_2 = 0$, $x_3 = d^*$). Також будемо враховувати отриманий раніше результат для двох симетрично розташованих ребер, а саме $\bar{q}_{c1LF,n}(p) = \bar{q}_{c3LF,n}(p)$. З урахуванням вищеприписаної система (1.108) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} p_{\delta L,n}(p) = \left(1 + A_{33}(f_{1n}(r_*, x_1, p) + f_{3n}(r_*, x_1, p)) \right) \bar{q}_{c1L,n}(p) + \\ \quad + A_{33} \bar{q}_{c2L,n}(p) f_{2n}(r_*, x_1, p), \\ p_{\delta L,n}(p) = A_{33} \bar{q}_{c1L,n}(p) (f_{1n}(r_*, x_2, p) + f_{3n}(r_*, x_2, p)) + \\ \quad + \left(1 + A_{33} f_{2n}(r_*, x_2, p) \right) \bar{q}_{c2L,n}(p). \end{cases} \quad (1.115)$$

Позначимо:

$$\Omega_{11} = 1 + A_{33}(f_{1n}(r_*, x_1, p) + f_{3n}(r_*, x_1, p)) = 1 + A_{33} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_n(r_*, s, p) (1 + \cos(2s d^*)) ds;$$

$$\Omega_{12} = A_{33} f_{2n}(r_*, x_1, p) = A_{33} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_n(r_*, s, p) \cos(s d^*) ds;$$

$$\Omega_{21} = A_{33}(f_{1n}(r_*, x_2, p) + f_{3n}(r_*, x_2, p)) = 2A_{33} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_n(r_*, s, p) \cos(s d^*) ds = 2\Omega_{12};$$

$$\Omega_{22} = 1 + A_{33} f_{2n}(r_*, x_2, p) = 1 + A_{33} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_n(r_*, s, p) ds.$$

Розв'язуючи систему (1.115) відносно невідомих $\bar{q}_{c1LF,n}(p)$, $\bar{q}_{c2LF,n}(p)$, будемо мати:

$$\bar{q}_{c1L,n}(p) = \frac{\Omega_{22} - \Omega_{12}}{\Omega_{11}\Omega_{22} - 2\Omega_{12}^2} p_{\delta L,n}(p), \quad (1.116)$$

$$\bar{q}_{c2L,n}(p) = \frac{\Omega_{11} - 2\Omega_{12}}{\Omega_{11}\Omega_{22} - 2\Omega_{12}^2} p_{\delta L,n}(p), \quad (1.117)$$

$$U_{rLF,n}(r_*, s, p) = \frac{T_n^U(r_*, s, p)(\Omega_{11} + \Omega_{22} - 3\Omega_{12})}{\Omega_{11}\Omega_{22} - 2\Omega_{12}^2} p_{\delta L,n}(p). \quad (1.118)$$

Усі невласні інтеграли, які виникають у співвідношеннях (1.110), (1.114) та (1.118) обчислюються наближено за допомогою методу Файлона.

Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент часу $t = 0$ в області $x = x_k$ ($k = \overline{1, NK}$), $r = b$, $0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \pi$, $-\theta_2 \leq \theta \leq -\theta_1$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке постійно діє на даній ділянці.

Функція навантаження має такий вигляд:

$$p_\delta(\theta, t) = F_0 H(t) (H(\theta - \theta_1) H(-\theta + \theta_2) + H(-\theta - \theta_1) H(\theta + \theta_2)). \quad (1.119)$$

Трансформанта навантаження (1.119) має вигляд:

$$p_{\delta L,n}(p) = \begin{cases} \frac{(\theta_1 + \pi - \theta_2)F_0}{\pi p a G_2}, & n = 0. \\ \frac{4F_0}{\pi p n a G_2} (\sin(n\theta_1) - \sin(n\theta_2))\sigma_n, & n > 0, \end{cases} \quad (1.120)$$

де $\sigma_n = \frac{N+1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$ – множники, для прискорення збіжності тригонометричних рядів Фур'є [39];

N – кількість доданків в ряді Фур'є.

Після обернення перетворення Фур'є та підсумовування рядів Фур'є, отримаємо вирази для трансформанти Лапласа функції нормальних переміщень. У випадку одного ребра жорсткості будемо мати:

$$\frac{U_{rL}(r_*, x_*, p, \theta)G_2}{F_0/a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^5}i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{p_{\delta L,n}(p)}{(1+A_{33})f_{1n}(r_*, 0, p)} \cdot \left(\int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) ds \right) \right] \cos(n\theta). \quad (1.121)$$

У випадку двох ребер жорсткості оригінал матиме вигляд:

$$\frac{U_r(r_*, x_*, t, \theta)G_2}{F_0/a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^5}i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{p_{\delta L,n}(p)}{1+A_{33}(f_{n1}(r_*, x_1, p) + f_{2n}(r_*, x_1, p))} \cdot \left(\int_0^{\infty} T_n^U(r_*, s, p) ds \right) \right] \cos(n\theta). \quad (1.122)$$

У випадку трьох ребер для оригіналу можемо записати:

$$\frac{U_r(r_*, x_*, t, \theta) G_2}{F_0 / a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^5 i}} \sum_{n=0}^N \left[\frac{P_{\delta L, n}(p)(\Omega_{11} + \Omega_{22} - 3\Omega_{12})}{\Omega_{11}\Omega_{22} - 2\Omega_{12}^2} \cdot \left(\int_0^\infty T_n^U(r_*, s, p) ds \right) \right] \cos(n\theta). \quad (1.123)$$

Обчислення невластних інтегралів у виразах (1.121)-(2.123) здійснювалось наближено з використанням метода Файлона, обернення перетворення Лапласа здійснювалось чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра.

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_\delta = 0,3$, $\gamma = 30$, $\gamma_\delta = 300$, $\rho^* = 4$, $\rho_\delta^* = 8$, $F_\delta^* = 7 \cdot 10^{-4}$, $I_\delta^* = 10^{-6}$, $\kappa = 0,02$, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$. Величини θ , τ , x_* , d_* – змінювались.

Для порівняння результатів для випадку одного кільцевого ребра жорсткості було розв'язано задачу для непідкріпленої оболонки з навантаженням, яке діє на ділянці, де розташоване ребро за аналогічним законом. Розв'язок отримано методами, описаними в підпункті 2.2.

На рис. 1.15 проілюстровано зміну нормальних переміщень (1.121) середовища за змінною безрозмірного часу на границі контакту з оболонкою у характерній точці $\left(\theta = \frac{\pi}{2}, x_* = 0 \right)$. На рис. 1.16 приводиться аналогічне порівняння за кутовою координатою (при $x_* = 0$) у різні моменти часу, а на рис. 1.17 – за осьовою (при $\tau = 5$, $\theta = \frac{\pi}{2}$). З результатів зрозуміло, що наявність ребра жорсткості зменшує нормальні переміщення оболонки на 57%.

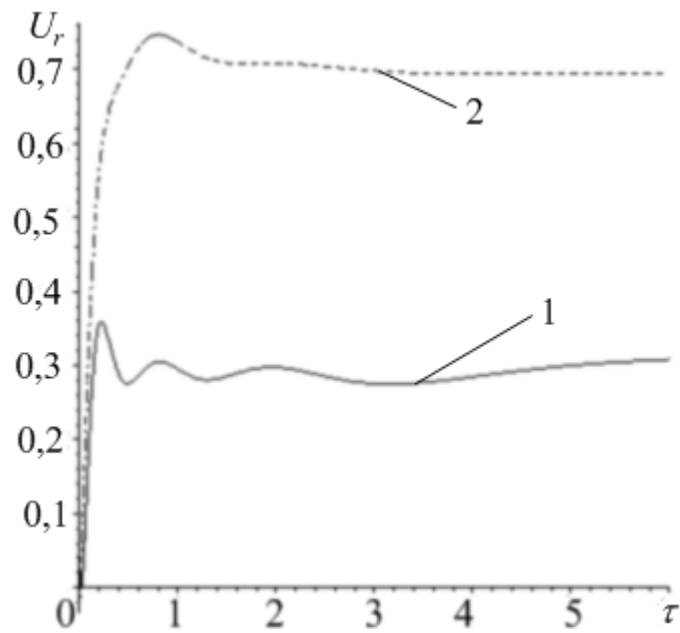


Рисунок 1.15 Порівняння нормальних переміщень оболонки за змінною безрозмірного часу:

1 – підкріплена оболонка; 2 – не підкріплена оболонка.

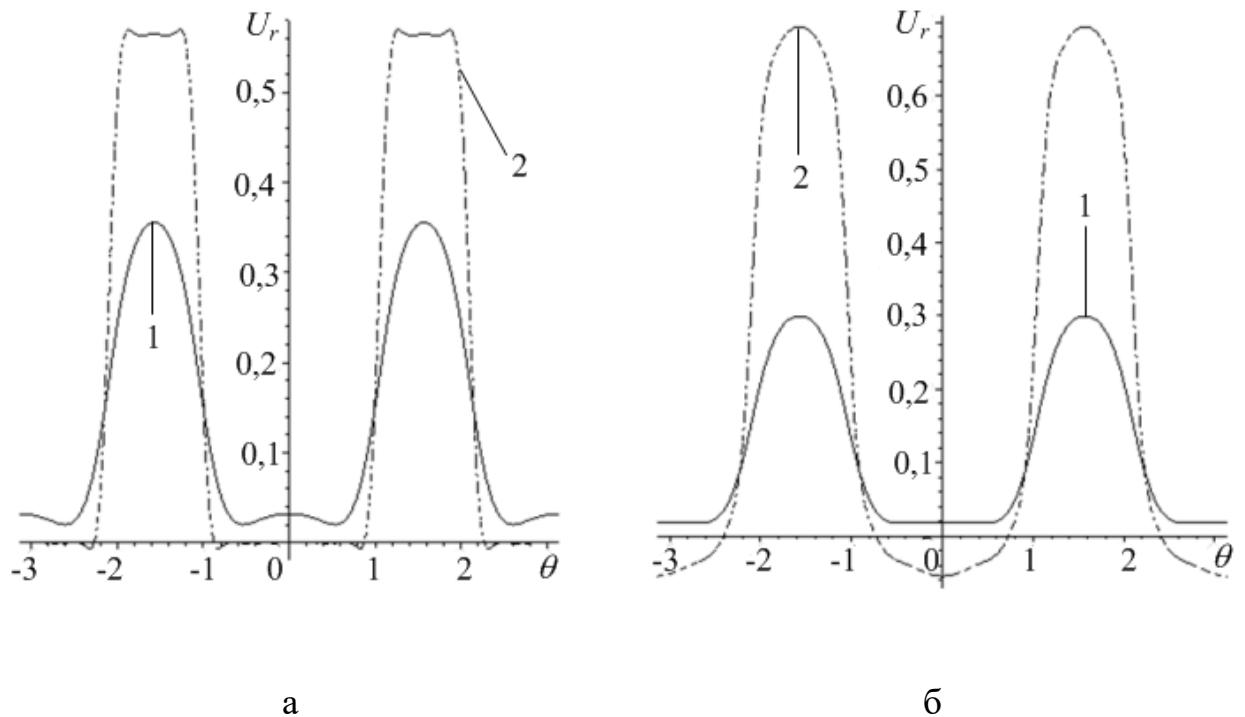


Рисунок 1.16 – Порівняння нормальних переміщень оболонки за кутовою координатою у моменти часу $\tau = 0,2$, (а) та $\tau = 5$ (б):

1 – підкріплена оболонка; 2 – не підкріплена оболонка.

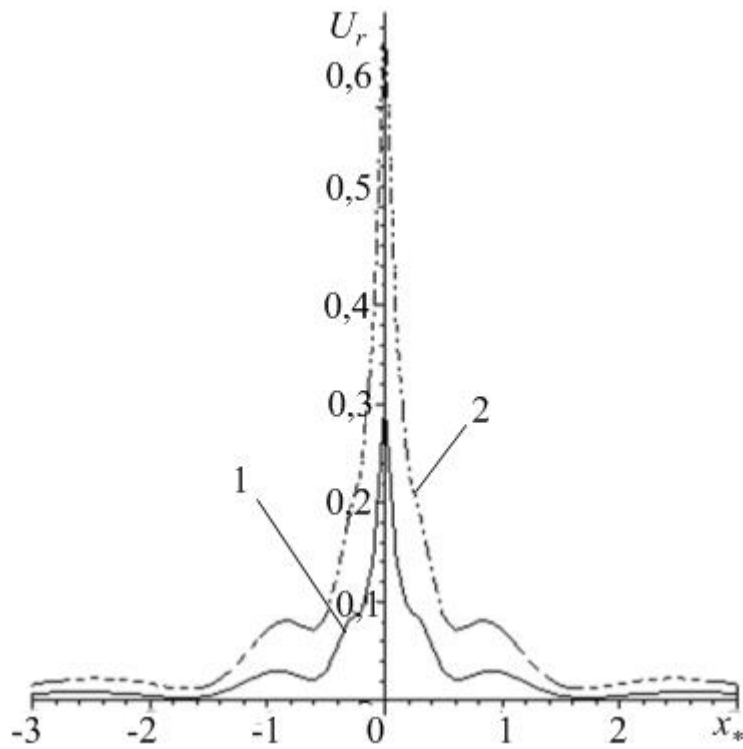


Рисунок 1.17 Порівняння нормальних переміщень за осьовою координатою:
1 – підкріплена оболонка; 2 – не підкріплена оболонка.

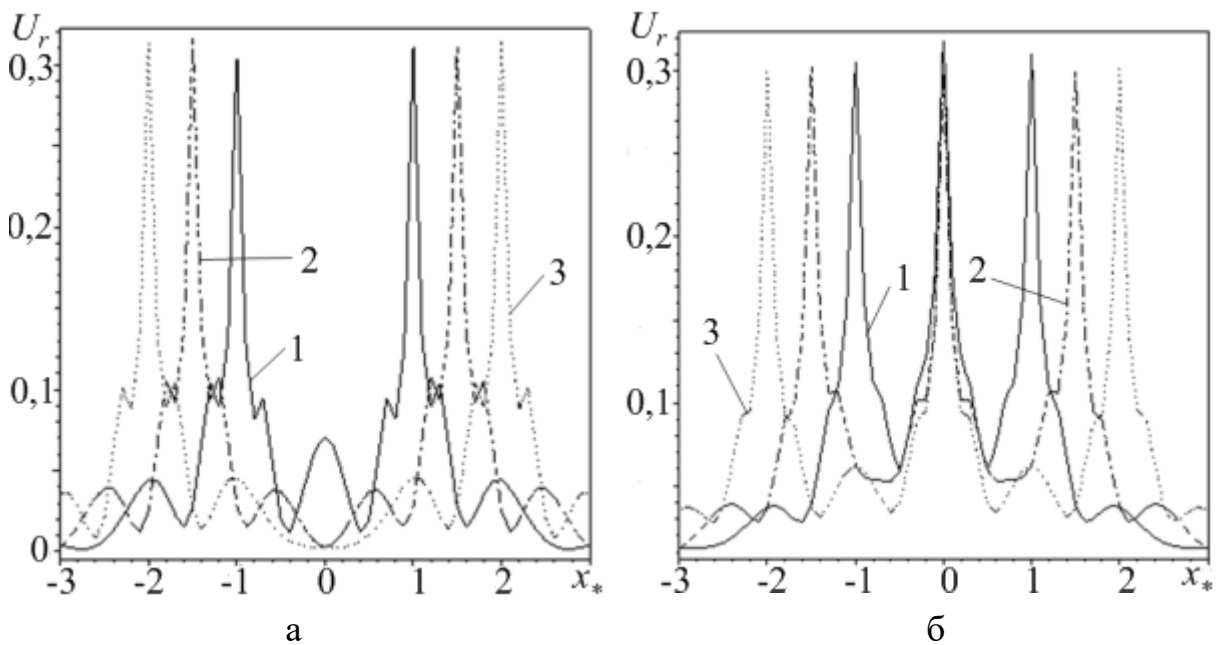


Рисунок 1.18 – Нормальні переміщення оболонки за осьовою координатою, підкріпленої двома (а) та трьома (б) ребрами жорсткості:

1 (а) – $d_* = 2$, 2 (а) – $d_* = 3$, 3 (а) – $d_* = 4$;

1 (б) – $d_* = 1$, 2 (б) – $d_* = 1,5$, 3 (б) – $d_* = 2$

На рис. 1.18 проілюстровано прогин оболонки по довжині для різних відстаней між двома та трьома ребрами жорсткості для $\tau = 5$.

Із рисунків видно, що для двох (рис. 1.18 (а)) та трьох (рис. 1.18 (б)) ребер жорсткості при відстані $d_* > 3$ їх взаємний вплив незначний, тому для вказаних відстаней можна розглядати нескінченну циліндричну оболонку з одним кільцевим ребром жорсткості.

ЗАСТОСУВАННЯ БІПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

2.1 Рівняння руху середовища та оболонки у біполярній системі координат

2.1.1 Біполярна система координат, та її основні геометричні характеристики

Якщо геометрична область, яка моделює задачу являється півплощиною з круговим отвором (рис 2.1 (а)), або необмеженою площиною, яка містить два кругові отвори (рис 2.1 (б)), тоді для розв'язання такої задачі доцільно використовувати біполярну систему координат.

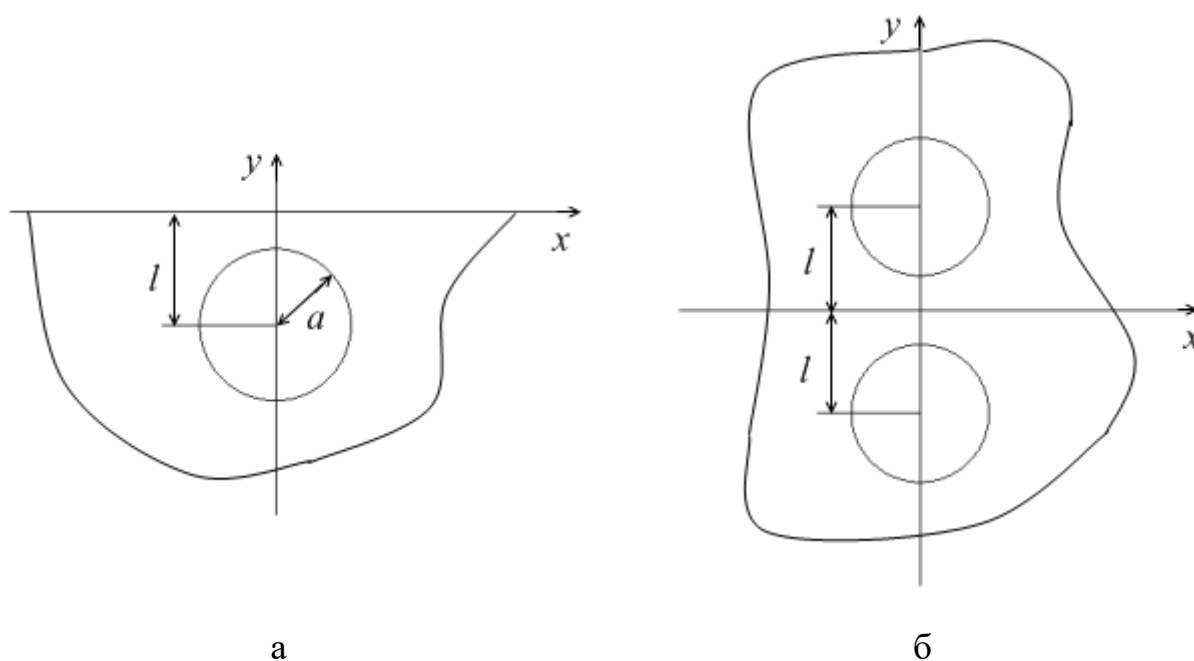


Рисунок 2.1 – Геометрична модель областей, що розглядаються

Біполярна система координат $\{\alpha, \beta\}$ задається за допомогою двох точок $O_1(0, \alpha_0)$ та $O_2(0, -\alpha_0)$ які називають полюсами (рис. 2.2). Координата α довільної точки площини є логарифмом відношенням відстаней від цієї точки до полюсів, тобто $\alpha = \ln \frac{r_1}{r_2}$, а β – кут між відрізками r_1 та продовженням r_2 (рис. 2.2).

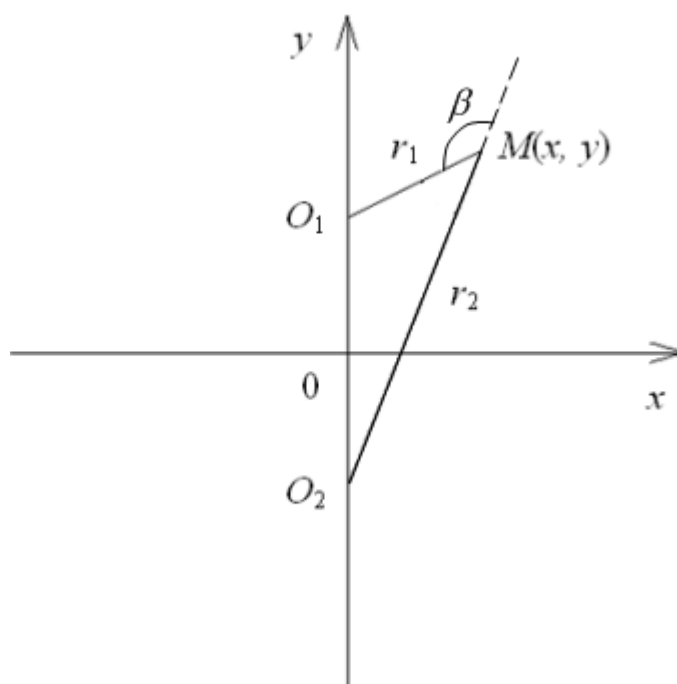


Рисунок 2.2 – Біполярна система координат

Зв'язок між декартовою системою координат та біполярною системою координат задається співвідношеннями [94]:

$$x = \frac{a_0 \sin \beta}{ch \alpha + \cos \beta}, \quad y = -\frac{a_0 sh \alpha}{ch \alpha + \cos \beta}, \quad a_0 = \sqrt{l^2 - a^2}, \quad (2.1)$$

де $\{x, y\}$ – декартові координати;

$\{\alpha, \beta\}$ – біполярні координат;

l – відстань від початку декартової системи координат до центру кругового отвору (рис 2.1);

a – радіус кругового отвору (рис 2.1).

Біполярна система координат, задана співвідношеннями (2.1) є ортогональною [94], та має наступні геометричні характеристики:

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{a_0}{ch\alpha + \cos\beta}, \quad g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = h_\alpha^2, \quad (2.2)$$

де h_α, h_β – коефіцієнти Ламе;

$g_{\alpha\alpha}, g_{\beta\beta}$ – компоненти метричного тензора.

Довільне векторне поле в декартовій системі координат $\{A_x, A_y\}$ виражається через відповідні компоненти векторного поля в довільній ортогональній системі координат $\{A_{x_1}, A_{x_2}\}$ за наступними співвідношеннями [26]:

$$A_x = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_{x_i}} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} A_{x_i}, \quad A_y = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_{x_i}} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} A_{x_i}, \quad (2.3)$$

де $x = \psi_1(x_1, x_2), y = \psi_2(x_1, x_2)$ – формули зв'язку між декартовою та довільною ортогональною системами координат. Для випадку біполярної системи координати, яка задається співвідношеннями (2.1), формула (2.3) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{-A_\alpha sh\alpha \sin\beta + A_\beta(1 + ch\alpha \cos\beta)}{ch\alpha + \cos\beta}, \\ A_y &= \frac{-A_\alpha(1 + ch\alpha \cos\beta) - A_\beta sh\alpha \sin\beta}{ch\alpha + \cos\beta}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де A_x, A_y – компоненти векторного поля в декартовій системі координат, а A_α, A_β – відповідні компоненти векторного поля в біполярній системі координат.

Зауважимо, що біполярна система координат може бути узагальнена до біциліндричної системи координат, яка також є ортогональною та її геометричні характеристики по осьовій координаті співпадають з відповідними характеристиками для осьової координати в циліндричній системі координат. Тобто $h_z = 1, g_{zz} = 1$.

2.1.2 Співвідношення теорії пружності у біполярній системі координат

Оскільки біполярна система координат (БСК) є ортогональною [94], тому в ній справедливі рівняння руху, які в довільній ортогональній системі координат (при відсутності масових сил) мають такий вигляд [46]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (g\sigma_{ii}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{g\sigma_{kk}}{h_{x_k}^2} \frac{\partial h_{x_k}^2}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g\sigma_{ik} h_{x_i}}{h_{x_k}} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.5)$$

де $h_{x_i}, (i = 1, 2, 3)$ – коефіцієнти Ламе;

$$g = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = h_{x_1} h_{x_2} h_{x_3}.$$

Оскільки, для БСК $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = z, h_{x_1} = h_\alpha, h_{x_2} = h_\beta, h_{x_3} = 1,$

$g_{11} = g_{22} = g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2, g_{33} = 1, g = g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2,$ тоді рівняння (2.5) запишуться так:

$$\begin{cases} \frac{\partial(g_{\alpha\alpha}\sigma_{\alpha\alpha})}{\partial\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} \sigma_{\beta\beta} + \frac{\partial(g_{\alpha\alpha}\sigma_{\alpha\beta})}{\partial\beta} = \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial(g_{\alpha\alpha}\sigma_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} + \frac{\partial(g_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta})}{\partial\beta} = \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (2.6)$$

або після спрощення в такому вигляді:

$$\begin{cases} g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) + h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} (2\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}) + 2h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \\ g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} \right) + h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} (2\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}) + 2h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (2.7)$$

де $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}$ – нормальні напруження в БСК;

$\sigma_{\alpha\beta}$ – дотичні напруження;

u_α, u_β – переміщення у напрямку осей α та β відповідно;

t – змінна часу.

Також, в довільній ортогональній системі координат справедливі співвідношення Коші, які мають вигляд [46]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + \frac{1}{2h_i^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_i^2}{\partial x_k} \frac{u_k}{h_k}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2h_i h_j} \left(h_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + h_j^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В БСК вирази (2.8) приймають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \alpha} \frac{u_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} u_\beta \right), \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \alpha} \frac{u_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} u_\beta \right), \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тепер отримаємо вирази для напружень через переміщення у БСК. Для цього використаємо закон Гука [46]:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \lambda \mathcal{G} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta} = \lambda \mathcal{G} + 2\mu \varepsilon_{\beta\beta}, \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (2.10)$$

де $\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$, $\mu = G$, ν – параметри Ламе та коефіцієнт Пуасона;

$$\mathcal{G} = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}.$$

Якщо підставити вирази (2.9) у співвідношення (2.10), то будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{2\nu G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{2G}{1-2\nu} \left(u_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + u_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right), \\ \sigma_{\beta\beta} &= \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{2\nu G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{2G}{1-2\nu} \left(u_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + u_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right), \\ \sigma_{\alpha\beta} &= G \left(\frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Після спрощення ці співвідношення запишуться так:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{G}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} \right) + \frac{G}{g_{\alpha\alpha}} \left(u_\alpha \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + u_\beta \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right), \\ \sigma_{\beta\beta} &= \frac{G}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} \right) + \frac{G}{g_{\alpha\alpha}} \left(u_\alpha \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + u_\beta \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right), \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{G}{h_\alpha} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha} \right) - \frac{G}{g_{\alpha\alpha}} \left(u_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} + u_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Щоб отримати рівняння руху середовища у переміщеннях в БСК, підставляємо (2.12) у (2.7) і приходимо до таких рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned}
& h_\alpha \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \beta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \\
& + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 \right) u_\alpha + \\
& + \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) u_\beta = \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \\
& h_\alpha \left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \alpha^2} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \beta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + \\
& + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) u_\alpha + \\
& + \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 \right) u_\beta = \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}.
\end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

2.1.3 Рівняння руху оболонки у біполярній системі координат

Згідно з результатами отриманими у підрозділі 1.1 рух оболонки можна, з досить високою точністю, описувати наближеними рівняннями. Тому в цьому розділі для описання руху оболонки використаємо класичні рівняння теорії тонких оболонок, що задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява, та в довільній ортогональній системі координат мають такий вигляд [96]:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(N_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_{12} g_1)}{\partial x_2} + N_{23} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - N_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - \frac{Q_1}{R_1} = \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_1 - f_1), \\
& \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(N_{12} g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_2 g_1)}{\partial x_2} + N_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - N_{12} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - \frac{Q_2}{R_2} = \rho_1 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_2 - f_2), \\
& \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(Q_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Q_2 g_1)}{\partial x_2} + \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) = \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_3 - f_3), \\
& \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(M_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_2 g_1)}{\partial x_2} + M_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + M_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + Q_2 = 0, \\
& \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(M_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_{12} g_1)}{\partial x_2} - M_{12} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - M_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - Q_1 = 0,
\end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

де u, v, w – компоненти переміщень середньої поверхні оболонки у напрямках осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 відповідно;

(f_1, f_2, f_3) – відповідні компоненти навантаження;

(q_1, q_2, q_3) – відповідні реакції з боку середовища;

R_1, R_2 – радіуси кривизни ліній $x_1 = const, x_2 = const$ відповідно;

ρ_1, h, G_1, ν_1 – густина, товщина, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона оболонки;

g_1, g_2 – відповідні компоненти першої квадратичної форми середньої поверхні оболонки. Величини системи (2.14), враховуючи технічну моментну теорію оболонок, запишуться так:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{g_1 g_2} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{w}{R_1}; \quad \eta_2 = \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{u}{g_1 g_2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{w}{R_2}; \\ \zeta &= \frac{g_2}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v}{g_2} \right) + \frac{g_1}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u}{g_1} \right); \\ N_1 &= \frac{2hG_1}{1-\nu_1} (\eta_1 + \nu_1 \eta_2); \quad N_2 = \frac{2hG_1}{1-\nu_1} (\eta_2 + \nu_1 \eta_1); \quad N_{12} = hG_1 \zeta; \\ M_1 &= M_2 = M_{12} = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Як буде показано далі, при введенні БСК виразами (2.1), середня поверхня оболонки буде задаватись рівняннями $\alpha = \alpha_1$, тому у виразах (2.14), (2.15) потрібно прийняти, що $Ox_1 = Oz, Ox_2 = O\beta, Ox_3 = O\alpha$. Тоді

$g_1 = 1, g_2 = h_\alpha, \frac{1}{R_1} = 0, \frac{1}{R_2} = 1$. Також, будемо припускати, що навантаження

рівномірно діє вздовж осьової координати, тому потрібно зазначити, що $u = 0, q_1 = 0, f_1 = 0$ та похідні від всіх величин за змінною z дорівнюють нулю. Тоді вирази (2.15) приймуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0; \eta_2 = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{r}; \xi = 0; \\ N_1 &= \frac{2hG_1\nu_1}{1-\nu_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); N_2 = \frac{2hG_1}{1-\nu_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); N_{12} = 0; \\ M_1 &= M_2 = M_{12} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

З урахуванням (2.16) перше рівняння системи (2.14) перетвориться у тотожність $0 = 0$, а четверте та п'яте у вирази:

$$Q_1 = 0; Q_2 = 0. \quad (2.17)$$

Враховуючи (2.16) та (2.17) система (2.14) в БСК запишеться так:

$$\begin{cases} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{r} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{\rho_1}{G_1} \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (-f_\beta + q_\beta), \\ \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{h_\alpha} = -\frac{\rho_1}{G_1} \frac{1-\nu_1}{2} \frac{d^2 w}{d\tau^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (-f_\alpha + q_\alpha). \end{cases} \quad (2.18)$$

де v, w – переміщення серединної поверхні оболонки у напрямку осей $O\beta$ та $O\alpha$;

ν_1 – коефіцієнт Пуассона оболонки. Зауважимо, що в системі (2.18) величини h_α та $g_{\alpha\alpha}$ беруться при $\alpha = \alpha_1$, тобто залежать лише від змінної β .

2.2 Динаміка циліндричної оболонки у пружному середовищі із вільною поверхнею

У даному підрозділі будемо розглядати динаміку тонкої циліндричної оболонки у лінійно-пружному, однорідному та ізотропному середовищі, яке має вільну поверхню (рис. 2.1 (а)), причому глибина залягання оболонки не

перевищує п'яти її діаметрів. Розглядаються два випадки: коли нормальні самоврівноважені поверхневі навантаження діють на ділянку внутрішньої поверхні оболонки, а поверхня середовища вільна від напружень і коли нормальні навантаження діють на ділянку поверхні середовища, а поверхня оболонки вільна від напружень.

Нехай оболонка та середовище віднесені до нерухомої декартової системи координат $\{x, y, z\}$. Внутрішня поверхня оболонки задається рівнянням $x^2 + (y + l)^2 = b^2$, а поверхня контакту між півпростором та оболонкою – $x^2 + (y + l)^2 = a^2$ ($h = a - b$ – товщина оболонки). Поверхня середовища задається рівнянням $y = 0$. Контакт між оболонкою та середовищем вважаємо ковзним. Нехай вісь оболонки та вісь z паралельні. Також, слід зазначити, що в даній роботі приймається, що навантаження рівномірно розподілене за осьовою координатою, тобто не залежить від змінної z , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності. Також будемо припускати, що навантаження прикладені симетрично відносно осі y .

Для розв'язання задачі одразу перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{x_*, y_*\} &= \frac{1}{a} \{x_*, y_*\}; \{U_x, U_y, V, W, U_\alpha, U_\beta\} = \frac{1}{a} \{u_x, u_y, v, w, u_\alpha, u_\beta\}; \\ \{\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}, \bar{\sigma}_{\beta\beta}, \bar{\sigma}_{\alpha\beta}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\alpha\beta}\}; \quad (2.19) \\ \gamma &= \frac{G_1}{G_2}; \rho_* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \kappa = \frac{h}{a}; R = \frac{a}{a} = 1; L = \frac{l}{a}; \tau = \frac{c_s}{a} t; c_s = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}, \end{aligned}$$

де ρ_2, G_2 – густина та модуль зсуву півпростору;

ρ_1, G_1 – густина та модуль зсуву оболонки.

Введемо БСК, яка задається виразами (2.1). Оскільки припускається, що задані навантаження діють симетрично відносно y_* , тому можна зробити

розріз по осі Oy_* , який буде враховано за допомогою граничних умов. Введена біполярна система координат дозволяє перевести нескінченну область $ABCD$ в скінченну область $0 \leq \alpha \leq \alpha_1; 0 \leq \beta \leq \beta_0$; ($A'B'C'D'$), де

$$\alpha_1 = \ln\left(\frac{R+L+a_0}{R+L-a_0}\right), \beta_0 = \pi \quad (\text{рис 2.3}).$$

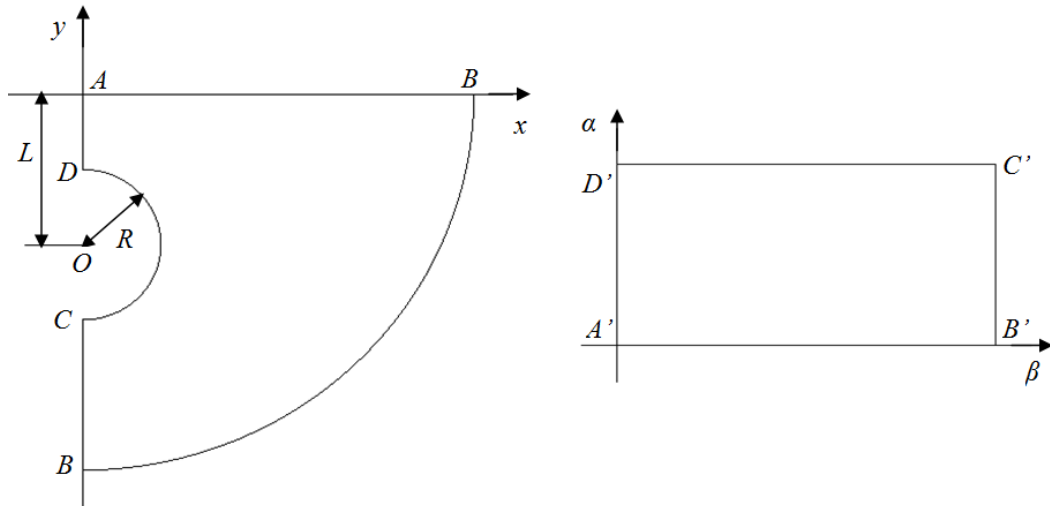


Рисунок 2.3 – Перетворення області

Запишемо вирази для безрозмірних напружень, які виражені через переміщення у БСК (2.12):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right), \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right), \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для отримання рівнянь руху середовища, підставимо в систему (2.13) відповідні сталі теорії пружності та перейдемо до безрозмірних величин :

$$\left\{ \begin{aligned}
& h_\alpha \left(\frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \beta^2} + \frac{1}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \\
& + \frac{3-4\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial \alpha} - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \left(\frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \right) \cdot \\
& \cdot \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 U_\alpha + \left(\frac{1}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) U_\beta = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}, \\
& h_\alpha \left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \alpha^2} + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \beta^2} + \frac{1}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{3-4\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \beta} + \\
& + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) U_\alpha + \\
& + \left(\frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 \right) U_\beta = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2}.
\end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

Для опису руху оболонки у БСК використаємо систему (2.18), яка у безрозмірних величинах матиме такий вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial V}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{\rho_*}{\gamma} \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 V^k}{\partial \tau^2} - \frac{1-\nu_1}{2\gamma\kappa} (-f_\beta + q_\beta), \\
& \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{W}{h_\alpha} = -\frac{\rho_*}{\gamma} \frac{1-\nu_1}{2} \frac{d^2 W}{d\tau^2} - \frac{1-\nu_1}{2\gamma\kappa} (-f_\alpha + q_\alpha),
\end{aligned} \right. \quad (2.22)$$

де V, W – безрозмірні переміщення оболонки у напрямку осей $O\beta$ та $O\alpha$;
 ν_1 – коефіцієнт Пуассона оболонки.

Як видно з рис. 2.2, у БСК серединна поверхня оболонка задається рівнянням $\alpha = \alpha_1$, тому в системі (2.22) величини h_α та $g_{\alpha\alpha}$ беруться при $\alpha = \alpha_1$.

Розглянемо випадок, коли поверхневе нормальне навантаження діє на ділянку внутрішньої поверхні оболонки, а поверхня середовища – вільна від напружень. Тоді граничні умови запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
U_\alpha(\alpha_1, \beta, \tau) &= W(\beta, \tau); \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(\alpha_1, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha(\beta, \tau); \\
\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta, \tau) &= \bar{q}_\beta(\beta, \tau) = f_\beta(\beta, \tau) = 0, f_\alpha(\beta, \tau) = F(\beta)H(\tau); \\
\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(0, \beta, \tau) &= \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(0, \beta, \tau) = 0.
\end{aligned} \quad (2.23)$$

А у випадку, коли навантаження прикладено до ділянки поверхні середовища, а оболонка вільна від напружень, граничні умови запишуться так:

$$\begin{aligned}
U_\alpha(\alpha_1, \beta, \tau) &= W(\beta, \tau); \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(\alpha_1, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha(\beta, \tau); \\
\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta, \tau) &= \bar{q}_\beta(\beta, \tau) = f_\alpha(\beta, \tau) = f_\beta(\beta, \tau) = 0; \\
\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(0, \beta, \tau) &= F(\beta)H(\tau); \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(0, \beta, \tau) = 0.
\end{aligned} \quad (2.24)$$

Розріз, який було зроблено вздовж осі y_* , враховується наступними граничними умовами:

$$U_\beta(\alpha, 0, \tau) = U_\beta(\alpha, \beta_0, \tau) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha, 0, \tau) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta_0, \tau) = 0. \quad (2.25)$$

Також припускаємо, що усі невідомі величини на нескінченності обертаються в нуль, тому у точці $(0, \pi)$ всі величини дорівнюють нулю. Початкові умови приймаємо нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні при $\tau = 0$ дорівнюють нулю.

Оскільки рівняння (2.20)-(2.22) мають достатньо складні коефіцієнти, які залежать від просторових змінних, тому для розв'язання задачі за просторовими змінними застосуємо метод скінченних різниць. Для цього розіб'ємо область $0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_0$ (рис. 2.3) на сітку таким чином, що за змінною α на N_α частин, а за змінною β на N_β частин відповідно. Нехай

$$h_1 = \frac{\alpha_1}{N_\alpha} \text{ – довжина відрізка розбиття за змінною } \alpha, \text{ а } h_2 = \frac{\pi}{N_\beta} \text{ – за змінною } \beta.$$

Отже ми отримали сітку з точок (α_i, β_j) , де $\alpha_i = \frac{ih_1}{N_\alpha} (i = \overline{0, N_\alpha})$,

$\beta_j = \frac{jh_2}{N_\beta} (j = \overline{0, N_\beta})$. Потім апроксимуємо похідні скінченними різницями

другого порядку точності.

Далі у внутрішніх точках області $(\alpha_i, \beta_j), i = \overline{1, N_\alpha - 1}, j = \overline{1, N_\beta - 1}$ записуємо різницеві рівняння для системи (2.21). У відповідності до граничних умов:

$$U_{\beta i, 0} = U_{\beta i, N_\beta} = 0 (i = \overline{0, N_\alpha}); U_{\alpha 0, N_\beta} = 0; V_0 = V_{N_\beta} = 0.$$

На границях $\alpha = 0, \beta = 0, \beta = \pi$ записуємо різницеві рівняння для (2.20) для величин, які входять до відповідних граничних умов.

На границі $\alpha = \alpha_1$ записуємо різницеві рівняння для системи (2.22) з урахуванням відповідних граничних умов.

В результаті отримаємо систему з $N_\beta(2N_\alpha + 3) - 2$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних $U_{\beta i, j} (i = \overline{0, N_\alpha}, j = \overline{1, N_\beta - 1})$, $U_{\alpha i, j} (i = \overline{0, N_\alpha}, j = \overline{0, N_\beta})$, $V_j (j = \overline{1, N_\beta - 1})$.

Після розв'язання, описаної вище СЛАР, отримаємо розв'язок задачі в біполярній системі координат. У декартовій системі координат поле переміщень буде вражатись через поле переміщень у БСК за формулами (2.4):

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{-U_\alpha sh\alpha \sin \beta + U_\beta (1 + ch\alpha \cos \beta)}{ch\alpha + \cos \beta}, \\ U_y &= \frac{-U_\alpha (1 + ch\alpha \cos \beta) - U_\beta sh\alpha \sin \beta}{ch\alpha + \cos \beta}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Відповідні компоненти тензора напружень знаходяться за отриманими у формулах (2.26) переміщеннями згідно з виразами (2.10), які записані у декартовій системі координат.

Тепер розглянемо динамічну задачу. Після застосування скінченно-різницевої схеми за біполярними координатами до рівнянь (2.20)-(2.22), за методом, описаним вище, отримаємо динамічне матричне рівняння, яке можна записати у вигляді:

$$[A]\{U\} + [B]\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \{U\} = \{F\}H(\tau), \quad (2.27)$$

де $\{U\}$ – вектор невідомих вузлових переміщень;

$[A], [B]$ – матриці коефіцієнтів скінченно-різницевої схеми та коефіцієнтів при других похідних за змінною безрозмірного часу відповідно;

$\{F\}$ – вектор вузлових навантажень;

$H(\tau)$ – одинична сходячка функція Хевісайду.

Отримане динамічне матричне рівняння (2.27) розв'язується за допомогою θ -метода Вільсона [7]. Наведемо алгоритм цього методу.

Основна ідея полягає у припущенні, що зміна прискорення на розширеному проміжку безрозмірного часу від τ до $\tau + \theta \Delta \tau$ відбувається за лінійним законом [7]:

$$\left\{ \ddot{U}_{\tau+\phi} \right\} = \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} + \frac{\phi}{\theta \Delta \tau} \left(\left\{ \ddot{U}_{\tau+\theta \Delta \tau} \right\} - \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} \right), \quad (2.28)$$

де $0 \leq \tau \leq \theta \Delta \tau$; $\theta \geq 1,37$.

Після інтегрування виразу (2.28) можна отримати рівняння зміни швидкості та переміщення:

$$\left\{ \dot{U}_{\tau+\phi} \right\} = \left\{ \dot{U}_{\tau} \right\} + \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} \phi + \frac{\phi^2}{2\theta\Delta\tau} \left(\left\{ \ddot{U}_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} - \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} \right), \quad (2.29)$$

$$\left\{ U_{\tau+\phi} \right\} = \left\{ U_{\tau} \right\} + \left\{ \dot{U}_{\tau} \right\} \phi + \frac{1}{2} \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} \phi^2 + \frac{\phi^3}{6\theta\Delta\tau} \left(\left\{ \ddot{U}_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} - \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} \right). \quad (2.30)$$

Співвідношення (2.29) і (2.30) для моменту часу $\tau + \theta\Delta\tau$ можна переписати у вигляді:

$$\left\{ \dot{U}_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} = \left\{ \dot{U}_{\tau} \right\} + \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} \tau + \frac{\theta\Delta\tau}{2} \left(\left\{ \ddot{U}_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} + \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} \right),$$

$$\left\{ U_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} = \left\{ U_{\tau} \right\} + \left\{ \dot{U}_{\tau} \right\} \theta\Delta\tau + \frac{\theta\Delta\tau^2}{6} \left(\left\{ \ddot{U}_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} + 2\left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\} \right).$$

Далі, беремо в якості незалежної змінної стовпець вузлових переміщень $\left\{ U_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\}$ і будемо мати:

$$\left\{ \ddot{U}_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} = \frac{6}{\theta^2(\Delta\tau)^2} \left(\left\{ U_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} - \left\{ U_{\tau} \right\} \right) - \frac{6}{\theta\Delta\tau} \left\{ \dot{U}_{\tau} \right\} - 2\left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\}, \quad (2.31)$$

$$\left\{ \dot{U}_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} = \frac{3}{\theta\Delta\tau} \left(\left\{ U_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} - \left\{ U_{\tau} \right\} \right) - 2\left\{ \dot{U}_{\tau} \right\} - \frac{\theta\Delta\tau}{2} \left\{ \ddot{U}_{\tau} \right\}. \quad (2.32)$$

Оскільки, прискорення на відріжку часу $[\tau, \tau + \theta\Delta\tau]$ змінюється лінійно, тоді можна припустити, що і вектор навантаження так само може змінюватись на ньому лінійно. Тоді:

$$\left\{ F_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} = \left\{ F_{\tau} \right\} + \theta \left(\left\{ F_{\tau+\theta\Delta\tau} \right\} - \left\{ F_{\tau} \right\} \right). \quad (2.33)$$

Після підстановки виразів (2.31)-(2.33) в (2.27) можна отримати рівняння квазістатичної рівноваги [7]:

$$[\bar{A}]\{U_{\tau+\theta\Delta\tau}\} = \{\bar{F}_{\tau+\theta\Delta\tau}\}, \quad (2.34)$$

де

$$[\bar{A}] = [A] + \frac{6}{\theta^2(\Delta\tau)^2}[B],$$

$$\{\bar{F}_{\tau+\theta\Delta\tau}\} = \{F_{\tau+\theta\Delta\tau}\} + \{B\} \left(\frac{6}{\theta^2(\Delta\tau)^2} \{U_{\tau}\} + \frac{6}{\theta\Delta\tau} \{\dot{U}_{\tau}\} + 2\{\ddot{U}_{\tau}\} \right).$$

Отже, застосування θ -методу Вільсона дозволило звести розв'язок нестационарної задачі (2.27) до розв'язку ітераційної послідовності квазістатичних задач (2.34), які є СЛАР та розв'язуються методом Гауса.

Наведемо результати чисельного аналізу вищеописаного алгоритму. При розрахунках використовувались наступні значення безрозмірних величин: $\gamma = 30$; $\rho = 4$; $\kappa = 0,02$. Величини L, τ – змінювались.

У випадку, коли навантажена внутрішня поверхня оболонки, виконуються граничні умови (2.23), а функція $F(\beta)$ задається у вигляді:

$$F(\beta) = \begin{cases} -\frac{1}{g_{\alpha\alpha}(\alpha_1, \beta)}, & x_*(\alpha_1, \beta) \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & x_*(\alpha_1, \beta) > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2.35)$$

а у випадку, коли навантажена поверхня середовища:

$$F(\beta) = \begin{cases} -\frac{1}{g_{\alpha\alpha}(\alpha_1, \beta)}, x_*(0, \beta) \leq \frac{1}{2}, \\ 0, x_*(\alpha_1, \beta) > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.36)$$

На рисунках 2.4 зображено переміщення границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу у порівнянні із статичним розв'язком, при $L=2$, причому на рис. 2.4 (а) ілюструє результати при навантаженні внутрішньої поверхні оболонки, а на рис 2.4 (б) – при навантаженні поверхні середовища. Точковим пунктиром позначено положення границі контакту до прикладення навантаження.

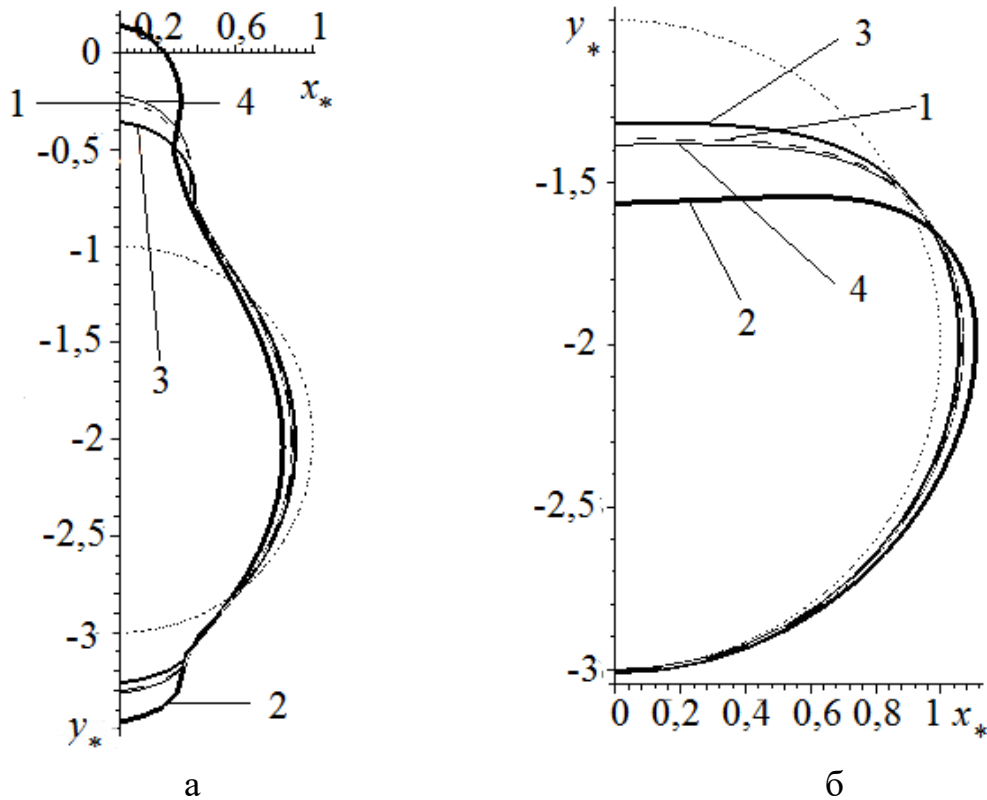


Рисунок 2.4 – Переміщення границі контакту оболонки і середовища для навантажень (2.35) (а) та (2.36) (б) при $L = 2$:

1 – статичний розв'язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 3 – $\tau = 6$

На рис. 2.5 наведено переміщення U_y поверхні середовища у різні моменти часу. Причому на рис. 2.5 (а) – навантаження діє на внутрішню поверхню оболонки, а на рис 2.5 (б) – на поверхню середовища.

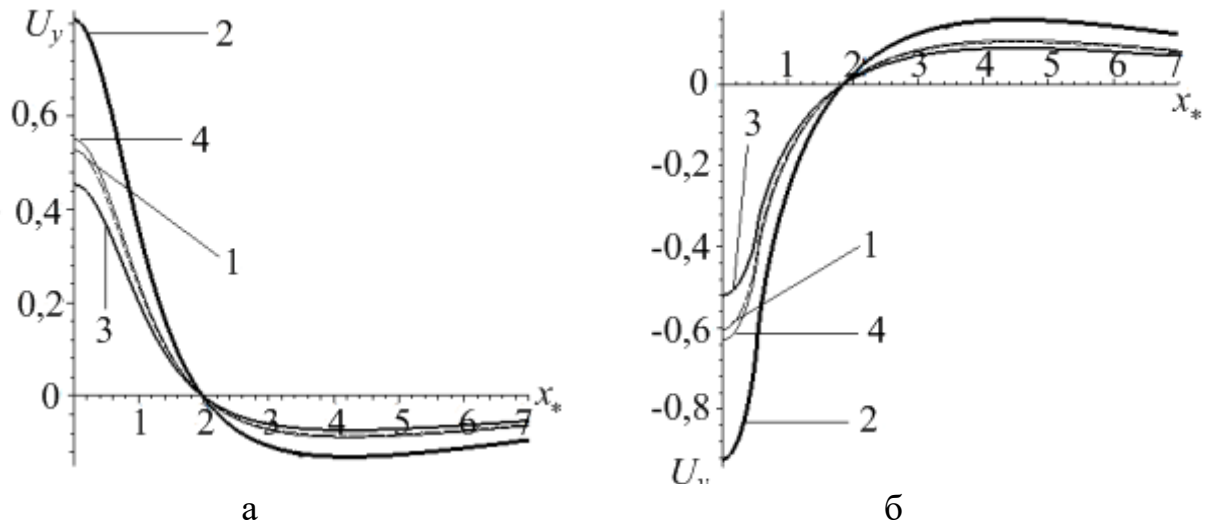


Рисунок 2.5 – Переміщення поверхні середовища для навантажень (2.35) (а) та (2.36) (б) при $L = 2$:

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 4 – $\tau = 6$

На рис. 2.6 наведені переміщення U_y середовища вздовж лінії $x_* = 0$ від оболонки до поверхні середовища у різні моменти часу для навантаження, яке прикладено до внутрішньої поверхні оболонки. Причому на рис. 2.6 (а) глибина розташування оболонки – $L = 4$, а на рис. 2.6 (б) – $L = 6$.

На рис. 2.7 проілюстровані величини ті ж, що і на рис. 2.6 відповідно, але для навантаження, яке діє на поверхню середовища.

На рис. 2.8 наведені напруження на границі контакту оболонки та середовища у різні моменти часу для навантаження яке діє на внутрішню поверхню середовища. Причому на рис. 2.8 (а) наведено криві для $\bar{\sigma}_{xx}$, а на рис. 2.8 (б) – $\bar{\sigma}_{yy}$. На рис. 2.8 проілюстровані аналогічні величини, але для навантаження, яке прикладено до поверхні середовища.

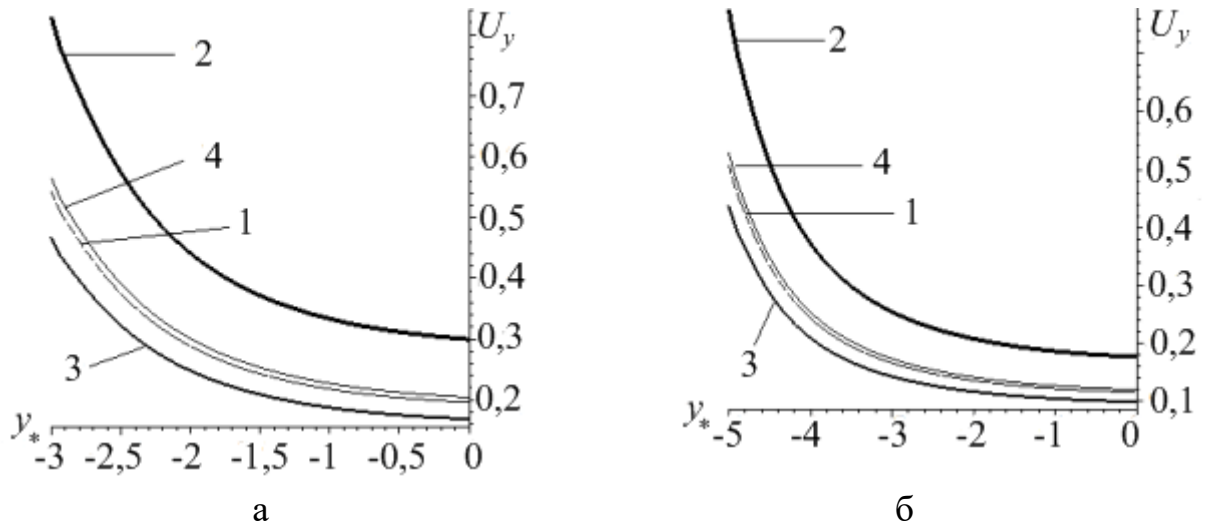


Рисунок 2.6 – Переміщення U_y середовища при $x_* = 0$ для навантажень

(2.35) при $L = 4$ (а) та $L = 6$ (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 3 – $\tau = 6$

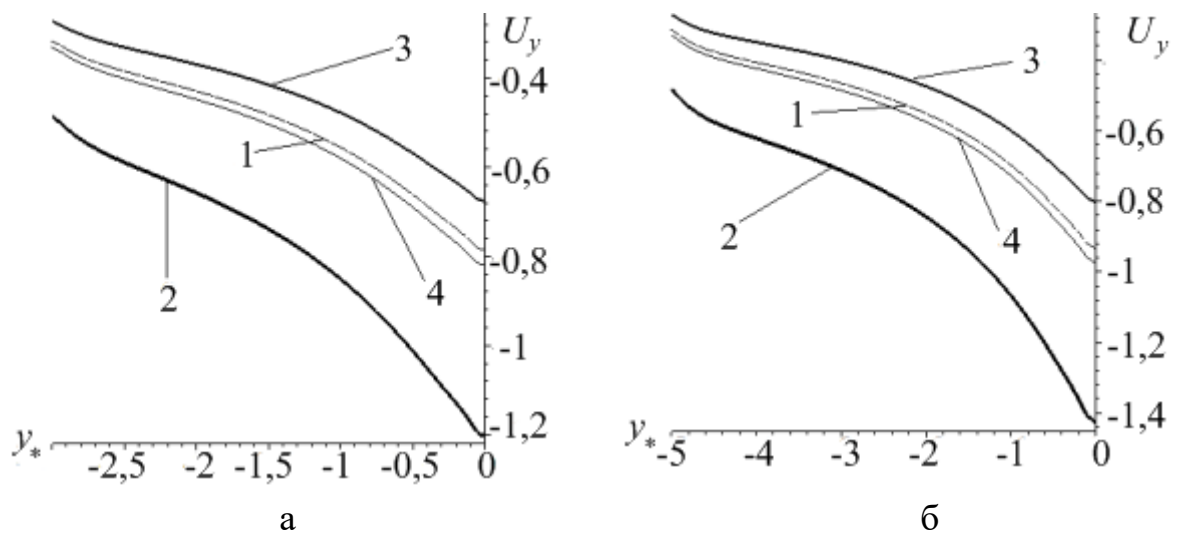


Рисунок 2.7 – Переміщення U_y середовища при $x_* = 0$ для навантажень

(2.36) при $L = 4$ (а) та $L = 6$ (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 3 – $\tau = 6$

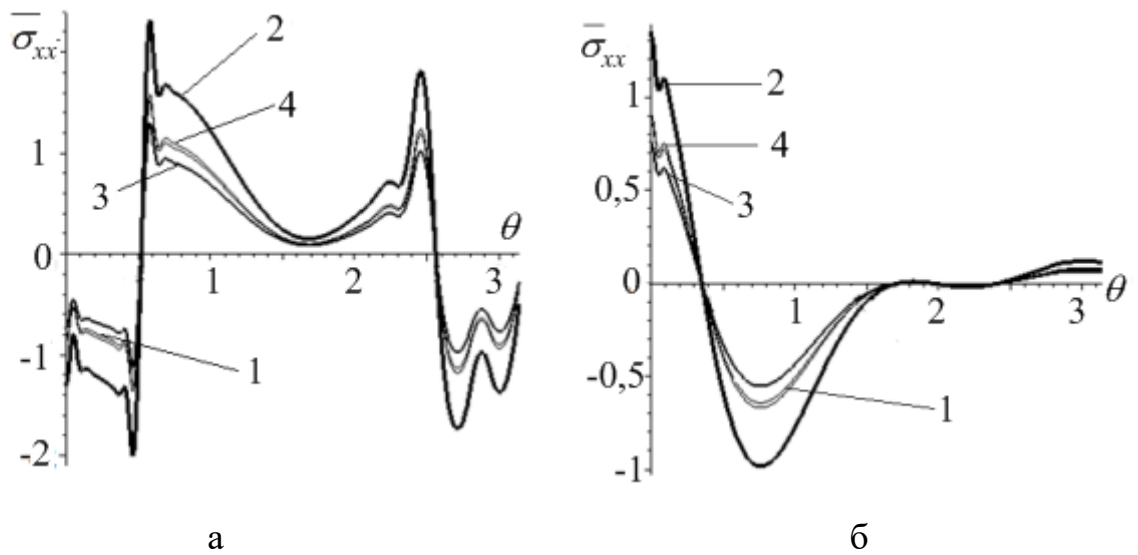


Рисунок 2.8 – напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ на границі контакту оболонки та середовища для навантажень (2.35) (а) та (2.36) (б) при $L = 2$:

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 3 – $\tau = 6$

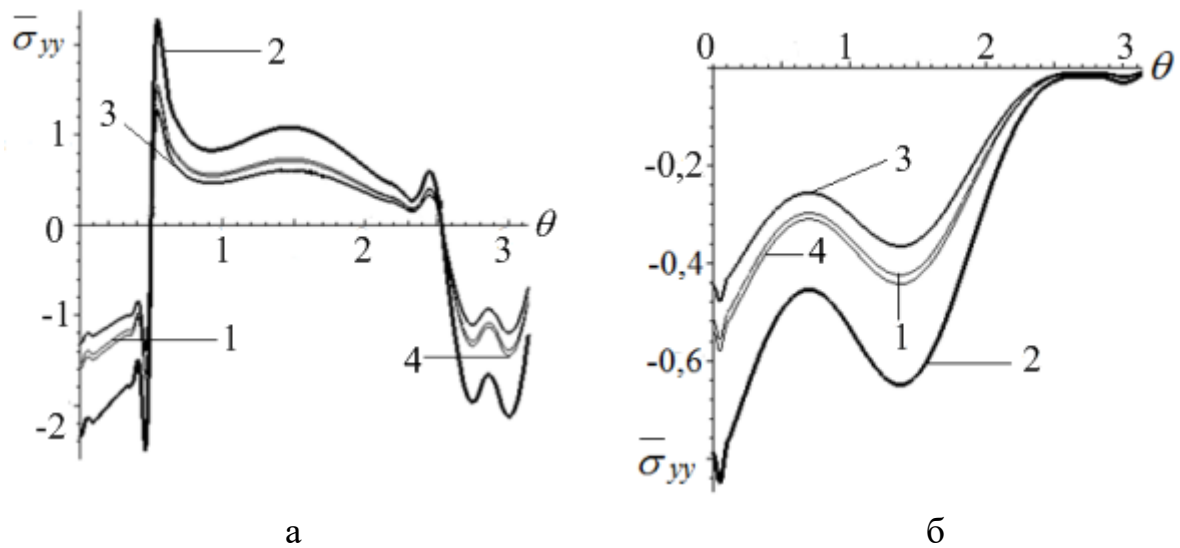


Рисунок 2.9 – напруження $\bar{\sigma}_{yy}$ на границі контакту оболонки та середовища для навантажень (2.35) (а) та (2.36) (б) при $L = 2$:

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 3 – $\tau = 6$

На основі отриманих результатів, можна зробити висновок, що для оболонок, які розташовані на відстані понад п’ять їх діаметрів від поверхні півпростору можна, без суттєвої втрати точності, розглядати динамічну

задачу для необмеженого середовища з однією порожниною, що підкріплена оболонкою.

2.3 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у пружному середовищі

У цьому підрозділі будемо розглядати динаміку лінійно-пружного, однорідного та ізотропного середовища, що містить дві коаксіальні циліндричні порожнини, які підкріплені тонкими пружними оболонками (рис. 2.1 (б)). Будемо припускати, що самоврівноважені навантаження, що діють по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок залежать від часу, як одинична функція Хевісайда. Інша оболонка вільна від напружень.

Нехай оболонки та середовище віднесені до нерухомої декартової системи координат $\{x, y, z\}$. Внутрішня поверхня однієї з оболонок задається рівнянням $x^2 + (y + l)^2 = b^2$, а іншої – $x^2 + (y - l)^2 = b^2$. Поверхні контакту між середовищем та оболонками – $x^2 + (y + l)^2 = a^2$ та $x^2 + (y - l)^2 = a^2$ відповідно ($h = a - b$ – товщина оболонок). Осі оболонок та вісь z паралельні. Контакт між оболонками та середовищем вважаємо ковзним, а зв'язок – двостороннім. Слід зазначити, що в даному підрозділі приймається, що навантаження рівномірно розподілене за осьовою координатою, тобто не залежить від змінної z , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності. Також будемо припускати, що навантаження прикладені симетрично відносно осі y .

Для розв'язання задачі одразу перейдемо до безрозмірних величин за співвідношеннями (2.19). Потім вводимо БСК, задану співвідношеннями (2.1).

Оскільки припускається, що задані навантаження діють симетрично відносно y_* , тому можна зробити розріз по осі $O y_*$, який буде враховано за допомогою граничних умов.

Введена біполярна система координат дозволяє перевести нескінченну область AD_1C_1BCD , що геометрично моделює задачу, в скінченну область $-a_1 \leq \alpha \leq a_1; 0 \leq \beta \leq \beta_0$; $(A'D_1'C_1'B'C'D')$, де $a_1 = \ln\left(\frac{R+L+a_0}{R+L-a_0}\right)$, $\beta_0 = \pi$ (рис 2.10).

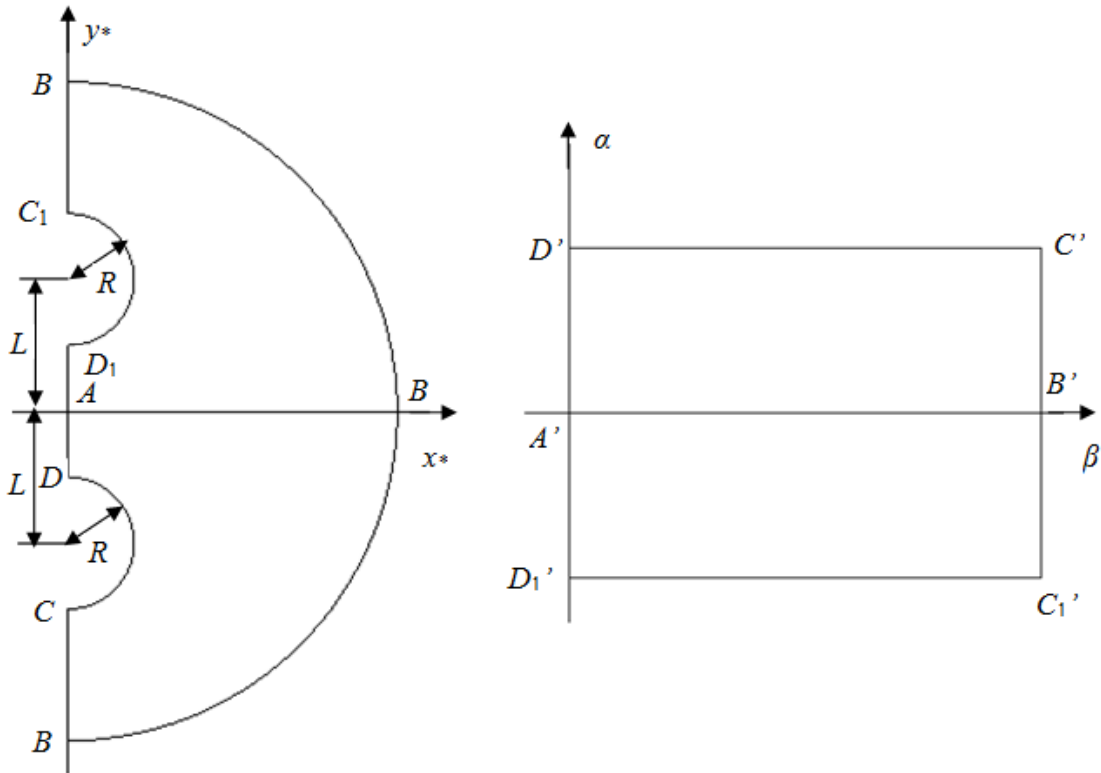


Рис. 2.10 – Перетворення області

Рух середовища будемо описувати рівняннями (2.21), а рух оболонок – рівняннями (2.22). Причому в рівняннях (2.22) для навантаженої оболонки всі величини беруться при $\alpha = a_1$, а для оболонки, яка вільна від напружень – $\alpha = -a_1$.

Граничні умови для навантаженої оболонки мають вигляд:

$$\begin{aligned} U_\alpha(a_1, \beta, \tau) &= W(\beta, \tau), \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(a_1, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha(\beta, \tau), \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(a_1, \beta, \tau) &= \bar{q}_\beta(\beta, \tau) = f_\beta(\beta, \tau) = 0, f_\alpha(\beta, \tau) = F(\beta)H(\tau), \end{aligned} \quad (2.37)$$

де функція $F(\beta)$ задається формулою (2.35).

Граничні умови для оболонки, яка вільна від напружень, мають вигляд:

$$\begin{aligned} U_\alpha(-a_1, \beta, \tau) &= W(\beta, \tau), \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(-a_1, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha(\beta, \tau), \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(-a_1, \beta, \tau) &= \bar{q}_\beta(\beta, \tau) = f_\alpha(\beta, \tau) = f_\beta(\beta, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Напруження, необхідні для задоволення граничних умов (2.37)-(2.38) обчислюються за допомогою виразів (2.20). Розріз, який було зроблено вздовж осі y_* , враховується граничними умовами (2.25).

Далі до розв'язання задачі застосовується алгоритм який ґрунтується на скінченно-різницевій схемі для просторових змінних та ітераційному θ -методі Вільсона за змінною безрозмірного часу. Алгоритм описано в підрозділі 2.2.

На рис. 2.11 наведено переміщення середовища вздовж осі $O y_*$ між оболонками, причому на рис. 2.11 (а) – $L=1$, а на рис. 2.11 (б) – $L=1,5$.

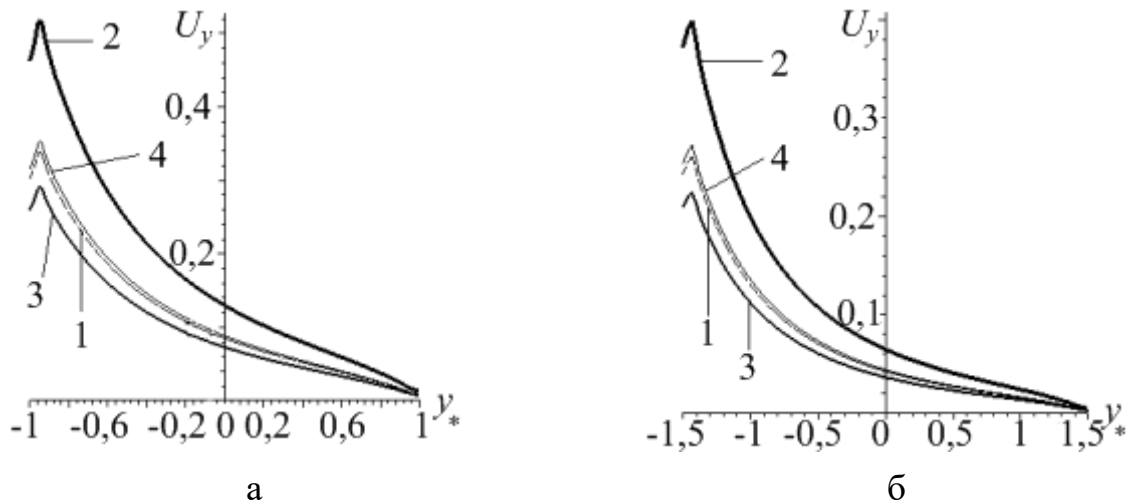


Рисунок 2.11 – Переміщення U_y середовища по лінії $x_* = 0$ при $L=1$ (а) та $L=1,5$ (б):

1 – статичний розв'язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 3 – $\tau = 6$

На рис. 2.12 зображено переміщення границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу у порівнянні із статичним розв'язком, причому на рис. 2.12 (а) $L=1$, а на рис. 2.12 (б) – $L=1,5$. Точковим пунктиром позначено положення границі контакту до прикладення навантаження. На обох рисунках зліва показані переміщення для оболонки, яка вільна від напружень, а справа – навантажена оболонка.

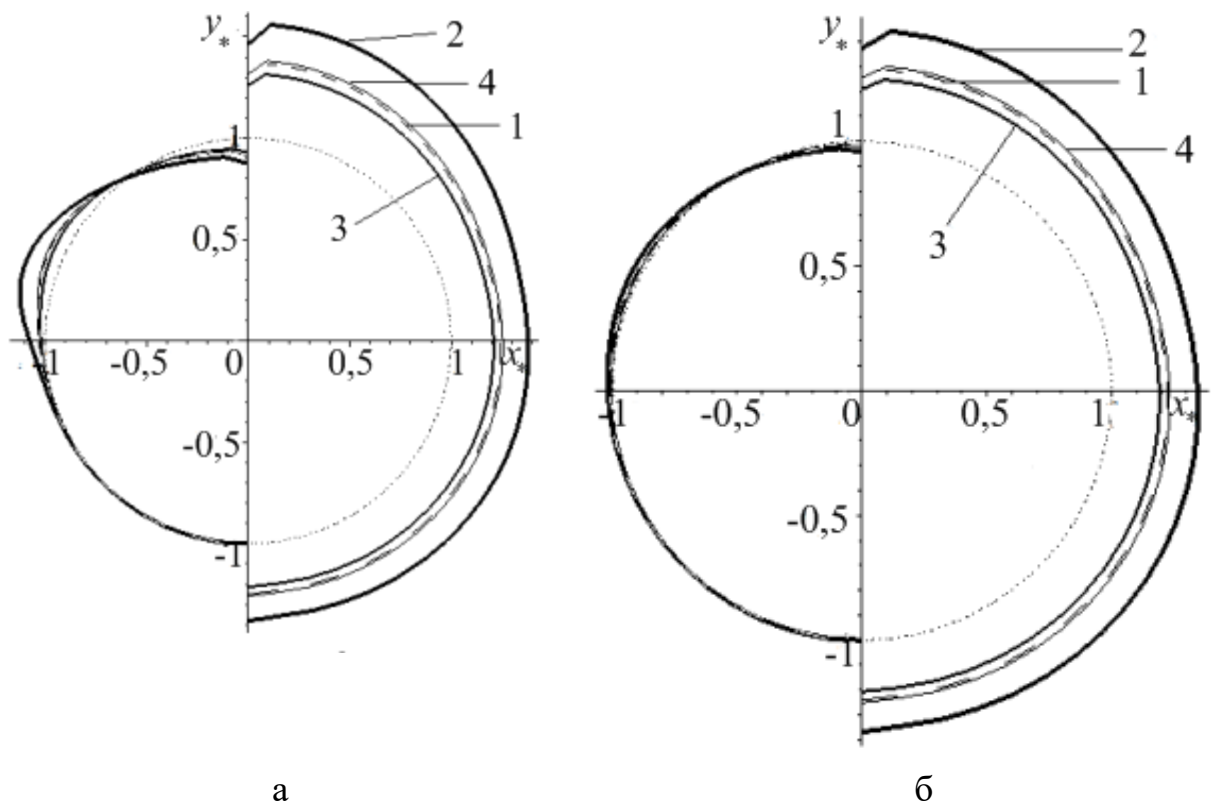


Рисунок 2.12 – Переміщення границі контакту оболонки і середовища при $L=1$ (а) та $L=1,5$ (б):

1 – статичний розв'язок, 2 – $\tau=2$, 3 – $\tau=4$, 3 – $\tau=6$

На рис. 2.13–2.14 наведені напруження на границі контакту навантаженої оболонки та середовища у різні моменти часу. Причому на рис. 2.13 (а) та 2.14 (а) $L=1$, а на рис. 2.13 (б) та 2.14 (б) – $L=1,5$.

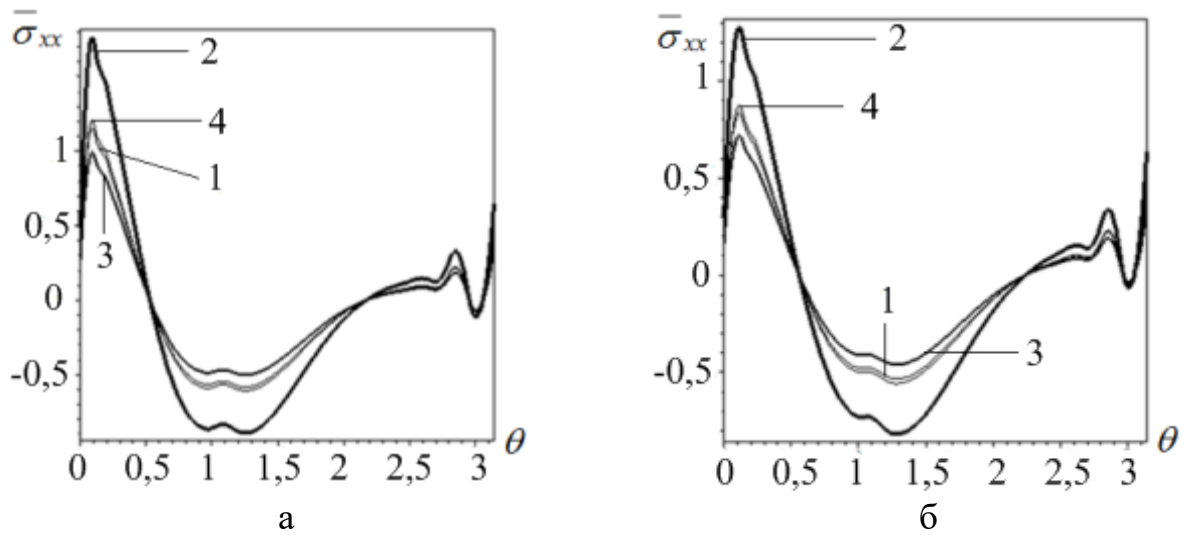


Рисунок 2.13 – Напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ на границі контакту оболонки та середовища при $L=1$ (а) та $L=1,5$ (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau=2$, 3 – $\tau=4$, 3 – $\tau=6$

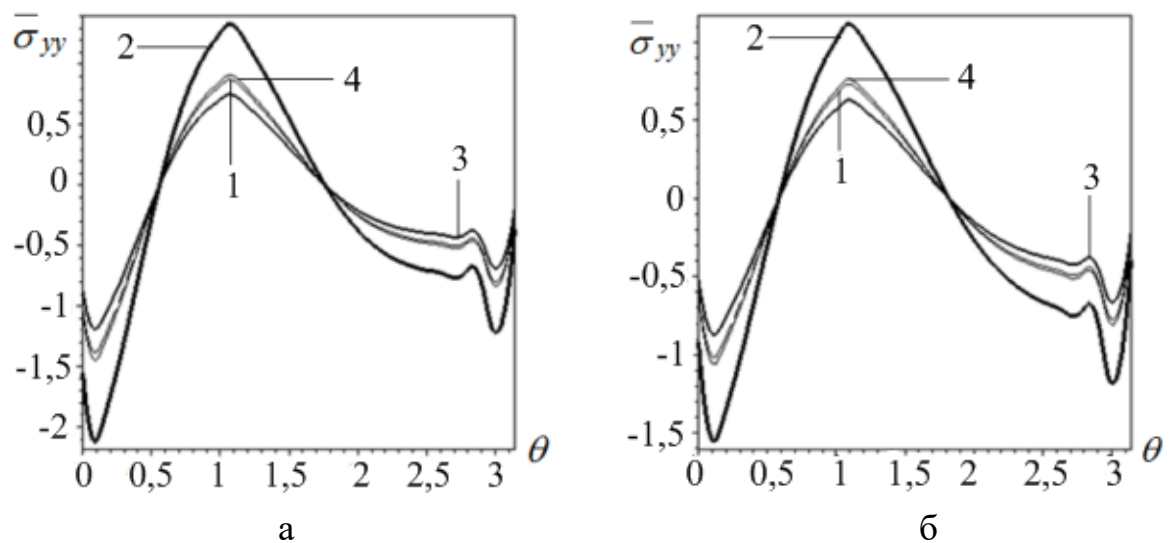


Рисунок 2.14 – Напруження $\bar{\sigma}_{yy}$ на границі контакту оболонки та середовища при $L=1$ (а) та $L=1,5$ (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau=2$, 3 – $\tau=4$, 3 – $\tau=6$

На основі отриманих результатів, можна встановити, що для оболонок, які розташовані на відстані понад п’ять їх радіусів можна, без суттєвої втрати точності, розглядати задачу для середовища з однією порожниною, що підкріплена оболонкою.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМНОГО ВПЛИВУ ОБОЛОНКИ ТА ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ СЕРЕДОВИЩА ПРИ ПОВЕРХНЕВИХ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

3.1 Основи методу скінченних елементів в задачах динаміки

Метод скінченних елементів (МСЕ), як і більшість інших чисельних методів, ґрунтується на представленні неперервного суцільного об'єкта дискретною моделлю. Це дозволяє звести складні диференціальні рівняння, що описують стан суцільного об'єкта, до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні розрахункові схеми МСЕ ґрунтуються на розбитті тіла на скінченну кількість елементів простої геометричної структури та подальшому використанні варіаційних принципів [27, 47]. При цьому інтерпретація фізичних характеристик тіла стає досить простою та зрозумілою.

Розглянемо алгоритм побудови схеми розв'язку задачі механіки деформівного твердого тіла на основі МСЕ [27]. Будемо розглядати двовимірний випадок, тобто плоску задачу. Для цього запишемо рівняння плоскої теорії пружності в матричній формі.

Введемо наступні безрозмірні вектори:

$$\{U\} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix}, \{\bar{\varepsilon}\} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx} \\ \bar{\varepsilon}_{yy} \\ \bar{\varepsilon}_{xy} \end{pmatrix}, \{\bar{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{pmatrix}, \{\bar{f}\} = \begin{pmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

де $\{U\}$, $\{\bar{\varepsilon}\}$, $\{\bar{\sigma}\}$, $\{\bar{f}\}$ – вектори безрозмірних переміщень, деформацій, напружень та поверхневих навантажень відповідно.

Також введемо наступні безрозмірні матриці:

$$[D] = \begin{pmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [B] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_*} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_*} \\ \frac{\partial}{\partial y_*} & \frac{\partial}{\partial x_*} \end{pmatrix}, [A] = \begin{pmatrix} i & 0 & j \\ 0 & j & i \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

де $[D]$, $[B]$, $[A]$ – безрозмірні матриці пружних коефіцієнтів, диференціювання та направляючих косинусів нормалі до лінії, яка є границею тіла відповідно.

Тепер, використовуючи (3.1) та (3.2) співвідношення теорії пружності можна записати у матричній формі:

1) рівняння рівноваги:

$$[B]^T \{\bar{\sigma}\} = 0; \quad (3.3)$$

2) співвідношення Коші

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [B]\{U\}; \quad (3.4)$$

3) закон Гука:

$$\{\bar{\sigma}\} = [D]\{\bar{\varepsilon}\}; \quad (3.5)$$

4) граничні умови:

$$[A]\{\bar{\sigma}\} = \{\bar{f}\}. \quad (3.6)$$

При відсутності масових сил, повна безрозмірна потенціальна енергія системи має вигляд [47]:

$$\Pi = W + A, \quad (3.7)$$

де $W = \iint_{\Omega} ([B]\{U\})^T [D][B]\{U\} d\Omega$ – безрозмірна потенціальна енергія

деформації;

$$A = - \int_{\varpi} \{\bar{f}\}^T \{U\} d\varpi$$
 – робота зовнішніх сил;

Ω – область, яку займає тіло;

ϖ – лінія, що обмежує область Ω .

Тепер наведемо алгоритм, за допомогою якого можна отримати з рівняння (3.7) систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього проводимо дискретизацію тіла на скінченну кількість елементів скінченного розміру. В кожному елементі обираються вузлові точки. Дискретизація проводиться таким чином, що сусідні елементи стикаються за ребрами без розривів, а вузлові точки на цих ребрах збігаються. Потім, в межах кожного елемента вводяться апроксимуючі функції (функції форми) [27], за допомогою яких невідомі функції переміщень описуються апроксимуючими функціями, які залежать від значень переміщень у вузлових точках. В якості невідомих приймаємо значення функцій переміщення у вузлових точках.

Дискретизацію тіла проводимо трикутниками таким чином, щоб оболонка та середовище моделювалися різними елементами, причому максимально густа сітка була на границі контакту оболонки та середовища, а при віддаленні від неї сітка розріджується. В якості вузлових точок беремо вершини трикутників, а в якості функцій форми – лінійні функції [27].

Апроксимуючі функції переміщень всередині кожного елемента (для випадку плоскої задачі теорії пружності) мають вигляд [27]:

$$U_x(x_*, y_*) = \sum_{k=1}^{k_0} N_{u_x k}(x_*, y_*) u_{xk}, \quad U_y(x_*, y_*) = \sum_{k=1}^{k_0} N_{u_y k}(x_*, y_*) u_{yk}, \quad (3.8)$$

де u_{xk}, u_{yk} – переміщення k -го вузла у напрямку осей x_* та y_* відповідно;

$N_{u_x k}(x_*, y_*)$, $N_{u_y k}(x_*, y_*)$ – функції форми;

k_0 – кількість вузлів у елементі.

Введемо вектор безрозмірних вузлових переміщень $\{U\}$ та матрицю функцій форми $[N]$ для елемента m :

$$\{U_m\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{k_0} \end{pmatrix}, \quad [N^m] = ([N_1] \quad [N_2] \quad \dots \quad [N_{k_0}]), \quad (3.9)$$

де $\{U_k\} = \begin{pmatrix} u_{xk} \\ u_{yk} \end{pmatrix}$ – вектор вузлових переміщень k -го вузла;

$[N_k] = \begin{pmatrix} N_{u_x k} & 0 \\ 0 & N_{u_y k} \end{pmatrix}$ – матриця функцій форми k -го вузла m -го

скінченного елемента.

В результаті, для елемента m будемо мати:

$$\{V_m\} = [N^m] \{U_m\}. \quad (3.10)$$

Використовуючи (3.10) перепишемо вирази (3.4) та (3.5):

$$\{\bar{\varepsilon}_m\} = [B] \{V_m\} = [B] [N^m] \{U_m\}, \quad (3.11)$$

$$\{\bar{\sigma}_m\} = [D] \{\bar{\varepsilon}_m\} = [D] [B] [N^m] \{U_m\}. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.7) можна переписати у вигляді скінченної суми інтегралів по площах та границях окремих елементів [47]:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{m=1}^{kn} \Pi_m = \sum_{m=1}^{kn} W_m + \sum_{k=1}^{kn} A_m = \sum_{m=1}^{kn} \iint_{\Omega_m} ([B]\{V_m\})^T [D]([B]\{V_m\}) d\Omega_m - \\ - \sum_{m=1}^{kn} \int_{\varpi_m} \{\bar{f}\}^T \{V_m\} d\varpi_m, \end{aligned} \quad (3.13)$$

де kn – загальна кількість елементів.

Підставивши (3.10), (3.11) та (3.12) у вираз (3.13), будемо мати [47]:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{m=1}^{kn} \iint_{\Omega_m} ([B][N^m]\{U_m\})^T [D]([B][N^m]\{U_m\}) d\Omega_m - \\ - \sum_{k=1}^{kn} \int_{\varpi_k} f^T [N^m]\{U_m\} d\varpi_m = \sum_{m=1}^{kn} \{U_m\}^T \iint_{\Omega_m} ([B][N^m])^T [D]([B][N^m]) d\Omega_m U_m - \\ - \sum_{k=1}^{kn} \int_{\varpi_k} \{\bar{f}\}^T [N^m] d\varpi_m U_m. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Введемо позначення:

$$[K] = \sum_{m=1}^{kn} \iint_{\Omega_m} ([B][N^m])^T [D]([B][N^m]) d\Omega_m, \quad (3.15)$$

$$\{F\} = \sum_{m=1}^{kn} \int_{\varpi_m} \{\bar{f}\}^T [N^m] d\varpi_m, \quad (3.16)$$

$$\{U\} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_{m_0} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

де $\{U\}$ – вектор безрозмірних вузлових переміщень всієї області;

m_0 – загальна кількість вузлів.

Мінімізація енергії Π приводить до рівняння [47]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \sum_{m=1}^{kn} \frac{\partial \Pi_m}{\partial \{U\}} = 0, \quad (3.18)$$

яке з урахування (3.15), (3.16) та (3.17) матиме наступний вигляд [27]:

$$[K]\{U\} = \{F\}, \quad (3.19)$$

де $[K]$ – безрозмірна матриця жорсткості системи;

$\{F\}$ – вектор безрозмірних еквівалентних вузлових навантажень

Вираз (3.19) і є шуканою системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши систему (3.19) відносно $\{U\}$, отримаємо вузлові переміщення. Після підстановки знайдених вузлових переміщень $\{U\}$ у вирази (3.10) та (3.12) знаходимо розподіл переміщень $\{V\}$ та напружень $\{\bar{\sigma}\}$ всередині розглянутого тіла.

Наведемо матрицю жорсткості для плоского трикутного скінченного елемента у випадку, коли в якості функцій форми обираються лінійні функції [27]. Нехай вузли елемента задані координатами: (x_{*i}, y_{*i}) , (x_{*j}, y_{*j}) , (x_{*m}, y_{*m}) . Тепер перепишемо співвідношення (3.10) в такому вигляді:

$$\{V_e\} = [N^e]\{U_e\} = \begin{bmatrix} [N_i] & [N_j] & [N_m] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Зауважимо, що у виразі (3.20) та у подальшому в підрозділі індекс e буде означати, що позначена таким чином величина розглядається для довільного трикутного скінченного елемента.

Для отримання матриці $[N^e]$, будемо вважати, що переміщення V_x та V_y всередині трикутного елемента змінюються за лінійним законом:

$$V_x = l_1 + l_2 x_* + l_3 y_*, \quad V_y = l_4 + l_5 x_* + l_6 y_*,$$

де l_i – деякі сталі ($i = \overline{1,6}$).

У вершинах трикутника V_x та V_y повинні співпадати з вузловими переміщеннями, тому для знаходження невідомих l_i отримуємо систему з шести лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} V_x(x_{*r}, y_{*r}) &= u_{xr}, \quad V_y(x_{*r}, y_{*r}) = u_{yr}, \\ (r &= i, j, m). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отримана система буде мати дві незалежні групи рівнянь. Перша система відносно невідомих l_1, l_2, l_3 , а друга група відносно l_4, l_5, l_6 . Розв'язавши першу групу рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2S} (\alpha_i u_{xi} + \alpha_j u_{xj} + \alpha_m u_{xm}); \\ l_2 &= \frac{1}{2S} (z_i u_{xi} + z_j u_{xj} + z_m u_{xm}); \\ l_3 &= \frac{1}{2S} (c_i u_{xi} + c_j u_{xj} + c_m u_{xm}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

де $\alpha_i = x_{*j} y_{*m} - x_{*m} y_{*j}$, $z_i = y_{*j} - y_{*m}$, $c_i = x_{*m} - x_{*j}$;

S – площа відповідного трикутника.

Коефіцієнти $\alpha_j, z_j, c_j, \alpha_m, z_m, c_m$ отримуються за допомогою циклічної перестановки індексів. Коефіцієнти l_4, l_5, l_6 отримуються аналогічно до співвідношень (3.22).

Отже переміщення можна записати у вигляді:

$$\{V_e\} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = [N^e] \{U_e\} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$\text{де } \psi_r = \alpha_r + z_r x_* + c_r y_*, \quad (r = i, j, m).$$

Враховуючи (3.22), співвідношення Коші (3.11) для елемента, що розглядається запишуться у наступному вигляді:

$$\{\bar{\varepsilon}_e\} = [B_e] \{V_e\} = \begin{pmatrix} [B_i] & [B_j] & [B_m] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

де типова під матриця $[B_r]$ обчислюється наступним чином:

$$[B_r] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_*} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y_*} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y_*} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x_*} \end{pmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} z_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & z_r \end{pmatrix}.$$

Використовуючи співвідношення (3.23), напруження (3.12) можна записати у вигляді:

$$\{\bar{\sigma}_e\} = [D] \{\bar{\varepsilon}_e\} = [D][B_e] \{U_m\}. \quad (3.24)$$

Скориставшись співвідношенням (3.15) знаходимо матрицю жорсткості скінченного елемента:

$$[K_e] = \iint_{\Omega_e} [B_e]^T [D] [B_e] d\Omega_e = [B_e]^T [D] [B_e] \iint_{\Omega_e} d\Omega_e = Sq[B_e]^T [D] [B_e], \quad (3.25)$$

де q – товщина скінченного елемента.

Оскільки розглядається плоский випадок задачі теорії пружності, тому далі будемо вважати, що $q = 1$. Отримуємо остаточний вираз для матриці жорсткості скінченного трикутного елемента:

$$[K_e] = S \begin{pmatrix} [B_i] \\ [B_j] \\ [B_m] \end{pmatrix} [D] \begin{pmatrix} [B_i] & [B_j] & [B_m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [K_{ii}^e] & [K_{ij}^e] & [K_{im}^e] \\ [K_{ji}^e] & [K_{jj}^e] & [K_{jm}^e] \\ [K_{mi}^e] & [K_{mj}^e] & [K_{mm}^e] \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

де

$$[K_{rn}^e] = S [B_r] [D] [B_m] = \frac{1}{4S} \begin{pmatrix} c_r c_n & c_r z_n \\ z_r c_n & z_r z_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2(1-2\nu)S} \begin{pmatrix} (1-\nu)z_r z_n & \nu z_r c_n \\ \nu c_r z_n & (1-\nu)c_r c_n \end{pmatrix}, (r, n = i, j, m).$$

Глобальна матриця жорсткості формується шляхом додавання відповідних блоків матриць жорсткості для окремих елементів згідно з глобальною нумерацією вузлів. Також слід зазначити, що для елементів, які моделюють оболонку, потрібно всі компоненти безрозмірної матриці жорсткості помножити на γ – відношення модулів зсуву оболонки та середовища.

Вираз для еквівалентних вузлових навантажень отримується шляхом підстановки (3.22) у (3.16):

$$\{F_e\} = \int_{\varpi_e} \{\bar{f}\}^T [N^e] d\varpi_e. \quad (3.27)$$

Глобальний вектор правих частин формується аналогічно до формування глобальної матриці жорсткості. В результаті отримуємо глобальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь статичної рівноваги тіла, відносно вузлових переміщень, яка записується у вигляді (3.19).

Для отримання диференціального матричного рівняння для моделювання динамічних задач за допомогою МСЕ, вектор $\{\bar{f}\}$ в кожен момент часу замінюється еквівалентом (при відсутності демпфування) [27]:

$$\{f_d\} - \rho^* \frac{\partial^2 \{U\}}{\partial \tau^2}, \quad (3.28)$$

де ρ^* – безрозмірний коефіцієнт, причому $\rho^* = 4$ для оболонки, та $\rho^* = 1$ для середовища;

$\{f_d\}$ – динамічне навантаження, яке діє на тіло, що розглядається;

τ – безрозмірна змінна часу.

Підставивши (3.28) у вираз (3.14), з урахуванням (3.9) будемо мати [27]:

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{m=1}^{kn} \{U_m\}^T \iint_{\Omega_m} ([B][N^m])^T [D]([B][N^m]) d\Omega_m \{U_m\} - \\ &- \sum_{k=1}^{kn} \int_{\varpi_k} \left(\{f_d\} - \rho^* \frac{\partial^2 [N^m] \{U_m\}}{\partial \tau^2} \right)^T [N^m] d\varpi_m \{U_m\} = \\ &= \sum_{m=1}^{kn} \{U_m\}^T \iint_{\Omega_m} ([B][N^m])^T [D]([B][N^m]) d\Omega_m \{U_m\} - \\ &- \sum_{k=1}^{kn} \int_{\varpi_k} \{f_d\}^T [N^m] d\varpi_m \{U_m\} + \rho^* \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_{k=1}^{kn} \{U_m\}^T \int_{\varpi_k} [N^m]^T [N^m] d\varpi_m \{U_m\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Введемо позначення:

$$[M] = \rho^* \sum_{k=1}^{kn} \iint_{\Omega_m} [N^m]^T [N^m] d\Omega_m, \quad (3.30)$$

$$\{F_d\} = \sum_{m=1}^{kn} \int \{f_d\}^T [N^m] d\varpi_m, \quad (3.31)$$

де $[M]$ – безрозмірна матриця мас;

$\{F_d\}$ – безрозмірний вектор еквівалентних динамічних навантажень.

Якщо функції матриця функцій форми є лінійною, тоді використовуючи (3.22) вираз для матриці мас (3.30) можна переписати у вигляді:

$$[M^e] = \iint_{\Omega_e} [N^e] \rho^* [N^e]^T d\Omega_e = \frac{\rho^* S}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Глобальна матриця мас формується аналогічно до глобальної матриці жорсткості.

В результаті отримуємо диференціальне матричне рівняння, яке моделює динамічну задачу на основі МСЕ [27]:

$$[K]\{U\} + [M] \frac{d^2}{d\tau^2} \{U\} = \{F_d\}. \quad (3.33)$$

Диференціальне рівняння (3.33) розв'язується за допомогою θ -методу Вільсона [7], який дозволяє звести початкову задачу до ітераційної послідовності квазістатичних задач, які є звичайними системами лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Алгоритм методу наведено в розділі 2 (2.28)-(2.34).

Оскільки, СЛАР (3.19) для статичної задачі та СЛАР, яку отримуємо під час застосування θ -методу Вільсона є симетричними [27], тому ці системи розв'язуємо за допомогою методу спряжених градієнтів [6]. Наведемо алгоритм цього методу на основі системи (3.19).

Обираємо початкове наближення розв'язку $\{U_0\}$, та похибку ε . На попередньому етапі обчислюються наступні величини:

$$\begin{aligned}\{R_0\} &= \{F\} - [K]\{U_0\}, \\ \{P_0\} &= \{R_0\}.\end{aligned}$$

Далі для $j = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned}\xi_j &= \frac{(\{R_j\}, \{R_j\})}{([K]\{P_j\}, \{P_j\})}, \\ \{U_{j+1}\} &= \{U_j\} + \xi_j \{P_j\}, \\ \{R_{j+1}\} &= \{R_j\} - \xi_j [K]\{P_j\}, \\ \varsigma_j &= \frac{(\{R_{j+1}\}, \{R_{j+1}\})}{(\{R_j\}, \{R_j\})}.\end{aligned}$$

Якщо $\|\{R_{j+1}\}\| = \sqrt{(\{R_{j+1}\}, \{R_{j+1}\})} < \varepsilon$, тоді отримано розв'язок, в іншому випадку $\{P_{j+1}\} = \{R_{j+1}\} + \varsigma_j \{P_j\}$, та збільшити j .

Зауважимо, що позначення (\cdot) означає скалярний добуток двох векторів у n -вимірному евклідовому просторі (n – розмірність вектора $\{U\}$ у системі (3.19)).

3.2 Динаміка циліндричної оболонки у пружному півпросторі

Оскільки в підрозділі 2.2 було припущено, що динамічні навантаження, які прикладені до тіла, симетричні відносно осі u_* , тому при розв’язанні цієї задачі МСЕ, по цій осі робимо розріз та враховуємо його умовою рівності нулю вузлових переміщень в напрямку осі x_* .

Тепер наведемо результати чисельних експериментів, проведених на основі вищеописаного алгоритму та порівняємо із результатами отриманими в підрозділі 2.2. Зазначимо, що значення безрозмірних величин взяті такі самі, як і в підрозділі 2.2.

Проведемо порівняння результатів для випадку, коли навантажена ділянка внутрішньої поверхні оболонки, а поверхня середовища – вільна від напружень. Порівняння проводилось для двох значень глибини залягання оболонки $L = 2$ та $L = 6$.

На рис. 3.1 наведено порівняння для переміщень границі контакту оболонки та середовища при $L = 2$ (рис 3.1 (а)) та $L = 6$ (рис. 3.1(б)). Причому, ліва частина зображення відповідає результатам, отриманим за допомогою МСЕ, а з права – за допомогою біполярних координат. Суцільними кривими зображено максимальні динамічні переміщення, пунктиром – статичний розв’язок, а точковим пунктиром – початкове положення границі контакту.

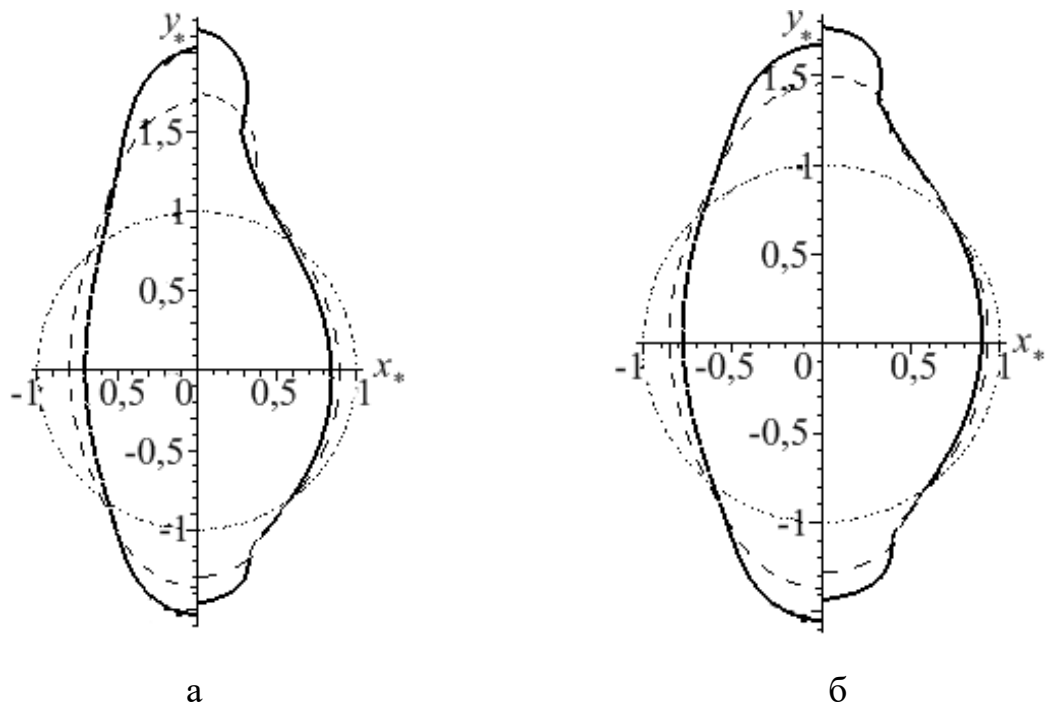


Рисунок 3.1 – Порівняння переміщень на границі контакту оболонки і середовища при $L = 2$ (а) та $L = 6$ (б)

На рис. 3.2 наведено аналогічні результати для переміщення U_y поверхні середовища. Причому суцільні криві відповідають результатам, отриманим за допомогою біполярних координат (1, 3), а пунктирні (2, 4) – МСЕ. Криві 3 та 4 – максимальні динамічні переміщення, а криві 1 та 2 – статичні розв'язки.

Проілюстровані криві показують, що результати отримані за допомогою використання підходу, на основі БСК та МСЕ добре узгоджуються.

Розрахунки для випадків, коли навантажена ділянка поверхні середовища, показують аналогічні співвідношення результатів, отриманих за допомогою використання БСК та МСЕ.

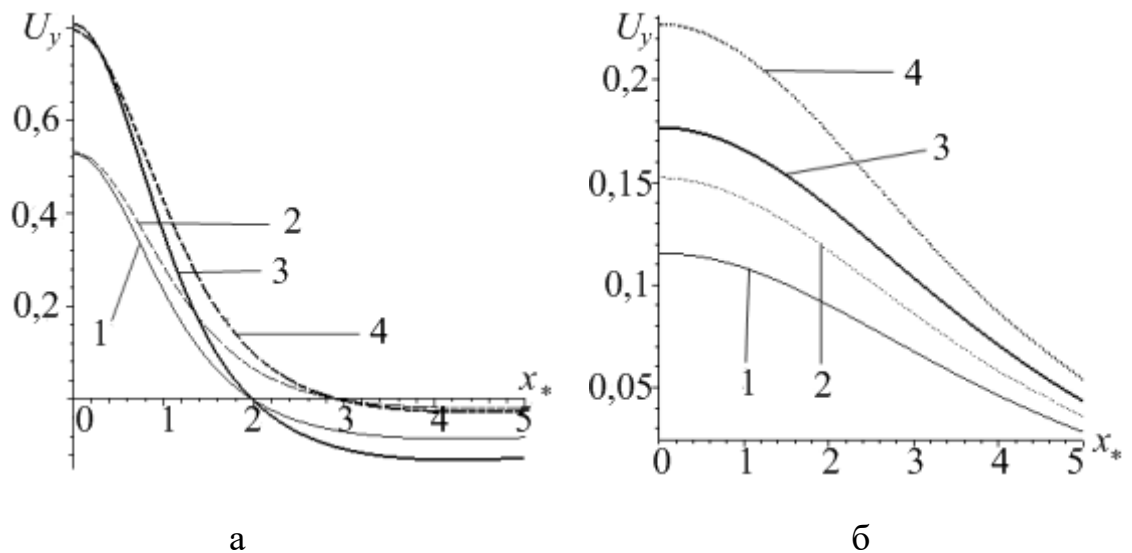


Рисунок 3.2 – Порівняння переміщень U_y на поверхні середовища при $L = 2$ (а) та $L = 6$ (б):

1, 2 – статичний розв’язок, 3, 4 – максимальні динамічні переміщення

3.3 Динаміка циліндричної оболонки, вісь якої перпендикулярна поверхні пружного середовища

Розглянемо тепер динамічну задачу для однорідного, лінійно-пружного середовища, яке містить циліндричну порожнину, яка підкріплена тонкою оболонкою. Середовище та оболонка обмежені площиною, яка перпендикулярна осі оболонки. Розглядаються випадки, коли динамічне навантаження прикладено до ділянки внутрішньої поверхні оболонки, а поверхня середовища – вільна від навантажень (рис. 3.3) та випадок, коли навантажена ділянка поверхні середовища, а внутрішня поверхня оболонки – вільна від навантажень. Також будемо припускати, що навантаження діє симетрично відносно осі оболонки та залежить від часу як одинична функція Хевісайда.

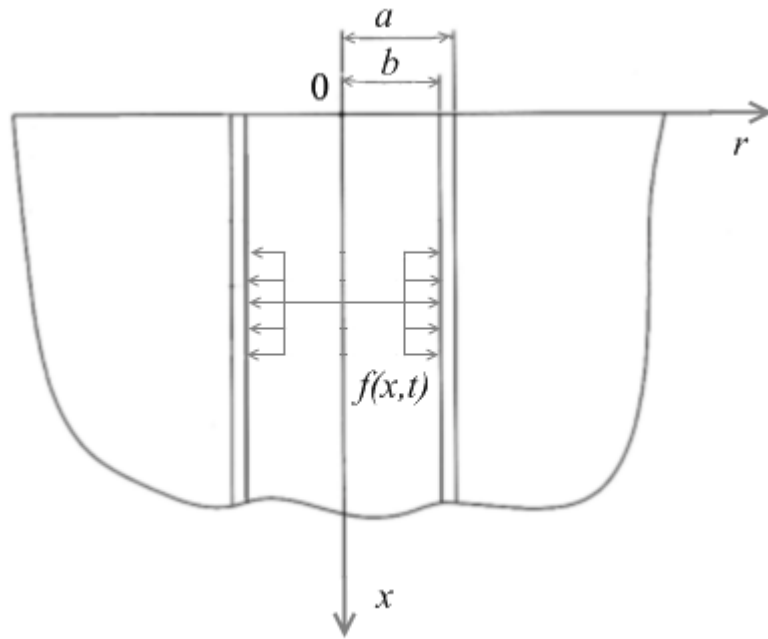


Рисунок 3.3 – Циліндрична оболонка у середовищі із поверхнею у випадку, коли вісь оболонки перепендикулярна до площини цієї поверхні

Задачу будемо розв’язувати МСЕ для вісесиметричних задач [27]. Для цього віднесемо середовище та оболонку до безрозмірної циліндричної системи координат $\{r_*, \theta, x_*\}$ та перейдемо до безрозмірних величин за співвідношеннями (1.9). Оскільки навантаження прикладені симетрично відносно осі оболонки, тоді задача зводиться до вісесиметричної задачі теорії пружності, тобто всі величини не залежать від змінної θ .

При застосуванні МСЕ до вісесиметричної задачі теорії пружності, співвідношення (3.1) та (3.2) приймуть такий вигляд [27]:

$$\{U\} = \begin{pmatrix} U_r \\ U_x \end{pmatrix}, \quad \{\bar{\varepsilon}\} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{rr} \\ \bar{\varepsilon}_{xx} \\ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\varepsilon}_{rx} \end{pmatrix}, \quad \{\bar{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{rr} \\ \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} \\ \bar{\sigma}_{rx} \end{pmatrix}, \quad \{\bar{f}\} = \begin{pmatrix} \bar{f}_r \\ \bar{f}_x \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

$$[D] = \begin{pmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [B] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r_*} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_*} \\ \frac{1}{r_*} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_*} & \frac{\partial}{\partial r_*} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Всі інші співвідношення залишаються без змін. Далі проводимо дискретизацію області трикутниками, причому оболонка та середовище моделюється різними елементами. Тоді, аналогічно до підрозділу 3.1, отримуються безрозмірний вектор еквівалентних вузлових навантажень, безрозмірні матриці жорсткості та мас, остаточні вирази для яких мають вигляд:

$$[K] = 2\pi \sum_{m=1}^{kn} \iint_{\Omega_m} ([B][N^m])^T [D][B][N^m] d\Omega_m, \quad (3.36)$$

$$[M] = 2\pi \rho^* \sum_{k=1}^{kn} \iint_{\Omega_m} [N^m]^T [N^m] d\Omega_m, \quad (3.37)$$

$$\{F_d\} = 2\pi \sum_{m=1}^{kn} \iint_{\varpi_m} \{f_d\}^T [N^m] d\varpi_m. \quad (3.38)$$

Зауважимо, що у виразах (3.36)-(3.38) інтеграли обчислювались чисельно за допомогою квадратур Гауса.

Слід зазначити, що при застосуванні в якості функцій форми лінійних функцій, вираз для кожного блоку матриці жорсткості трикутного елемента в співвідношенні (3.26) з урахуванням (3.34), (3.35) та (3.36) приймуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
[K_{nk}^e] = 2\pi \int \int_{\Omega_m} & \left(\left(k_1 \frac{\partial \psi_n}{\partial r_*} + k_2 \frac{\psi_n}{r_*} \right) \frac{\partial \psi_k}{\partial r_*} + \left(k_2 \frac{\partial \psi_n}{\partial r_*} + k_1 \frac{\psi_n}{r_*} \right) \frac{\partial \psi_k}{r_*} + \frac{\partial \psi_n}{\partial x_*} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_*} \right. \\
& \left. k_2 \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial r_*} + \frac{\psi_k}{r_*} \right) \frac{\partial \psi_n}{\partial x_*} + \frac{\partial \psi_n}{\partial r_*} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_*} \right. \\
& \left. k_2 \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial r_*} + \frac{\psi_k}{r_*} \right) \frac{\partial \psi_n}{\partial x_*} + \frac{\partial \psi_n}{\partial x_*} \frac{\partial \psi_k}{\partial r_*} \right. \\
& \left. k_1 \frac{\partial \psi_n}{\partial x_*} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_*} + \frac{\partial \psi_n}{\partial r_*} \frac{\partial \psi_k}{\partial r_*} \right) d\Omega_m, (n, k = i, j, m),
\end{aligned}$$

$$\text{де } k_1 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad k_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}.$$

Для того, щоб отримати вираз для матриці мас вісесиметричного елемента потрібно в (3.32) помножити праву частину на 2π . Після формування глобальних матриць жорсткості та мас і вектора еквівалентних вузлових навантажень отримуємо рівняння (3.19) для статичної задачі, та (3.33) – для динамічної. Методи розв'язання отриманих систем такі ж самі, що і в попередньому підрозділі.

Тепер перейдемо до результатів чисельних експериментів. Спочатку розглянемо випадок, коли навантажена ділянка внутрішньої поверхні оболонки дорівнює одному її радіусу, а глибина прикладання (від поверхні середовища) п'ять радіусів та півтора радіуса оболонки.

На рис. 3.4 проілюстровано радіальні переміщення поверхні контакту оболонки та пружного середовища при глибині прикладання навантаження рівній п'яти радіусам (рис 3.4 (а)) та півтора (рис 3.4 (б)) радіуса оболонки відповідно.

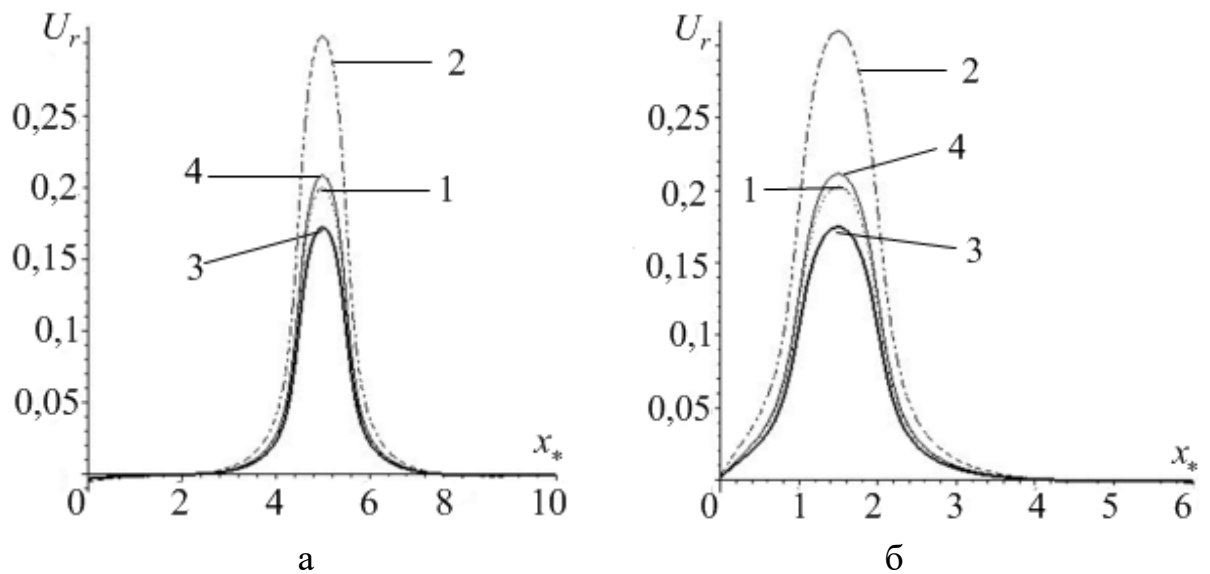


Рисунок 3.4 – Переміщення U_r границі контакту оболонки і середовища для навантаження прикладеного на глибині 5 радіусів (а) та 1,5 радіуси (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 4 – $\tau = 6$

На рис. 3.5 проілюстровані радіальні, а на 3.6 – осьові переміщення поверхні середовища при відповідних глибинах прикладання навантаження.

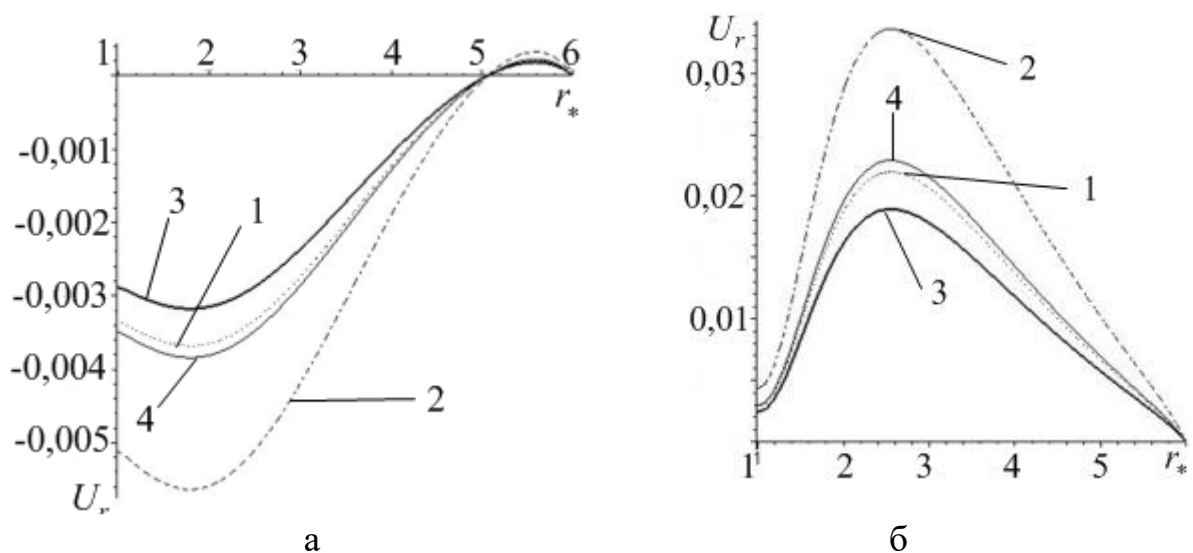


Рисунок 3.5 – Переміщення U_r поверхні середовища для навантаження прикладеного на глибині 5 радіусів (а) та 1,5 радіуси (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 4 – $\tau = 6$

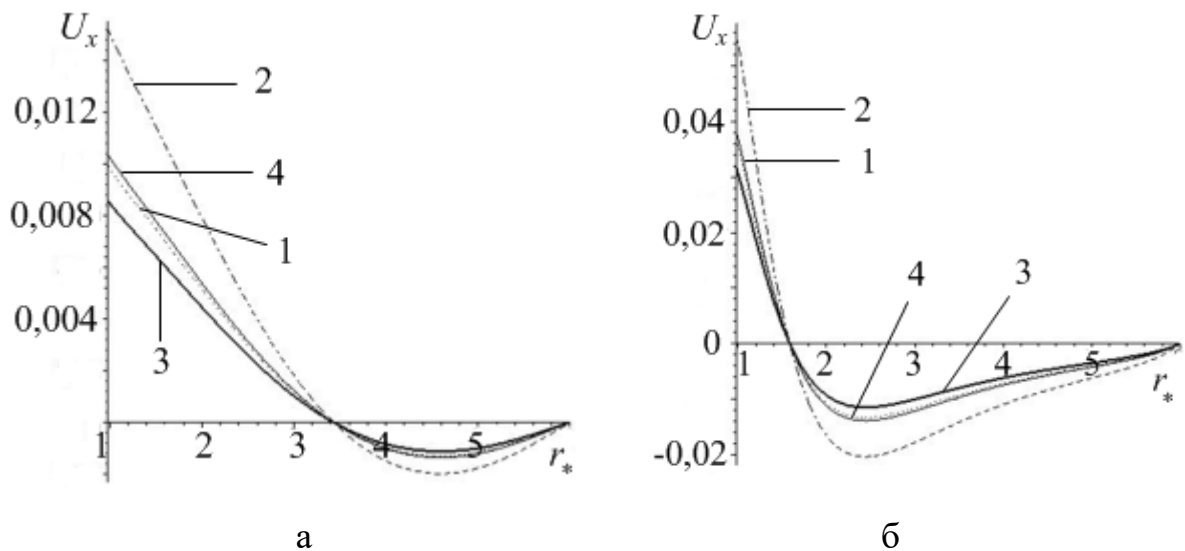


Рисунок 3.6 – Переміщення U_x поверхні середовища для навантаження прикладеного на глибині 5 радіусів (а) та 1,5 радіуси (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 4 – $\tau = 6$

Порівнюючи отримані результати для глибини прикладання навантаження п’ять радіусів із результатами отриманими в пункті 1.1.1 без врахування вільної поверхні півпростору, можна зробити висновок, що максимальна похибка результатів для статичної задачі не перевищує 1,5 %, а динамічної – 12 %. Аналогічні результати спостерігаються і для глибини дії навантаження у півтора радіуси. Тому можна зробити висновок, що вплив поверхні середовища на НДС системи оболонка – середовище є незначним, а тому без суттєвої втрати точності, для таких випадків (коли глибина прикладання навантаження понад півтора радіуса) можна розглядати оболонку у необмеженому середовищі та застосовувати методи, розглянуті у пункті 1.1.1.

Тепер перейдемо до випадку, коли навантажена поверхня середовища. Зроблено припущення, що навантажена ділянка довжиною один радіус оболонки, а прикладено навантаження на відстані півтора радіуси оболонки від границі контакту оболонки та середовища.

На рис. 3.7 проілюстровано радіальні та осьові переміщення поверхні контакту оболонки та пружного середовища при навантаженні, яке

прикладено до поверхні середовища. На рис. 3.8 проілюстровано аналогічні криві для поверхні півпростору.

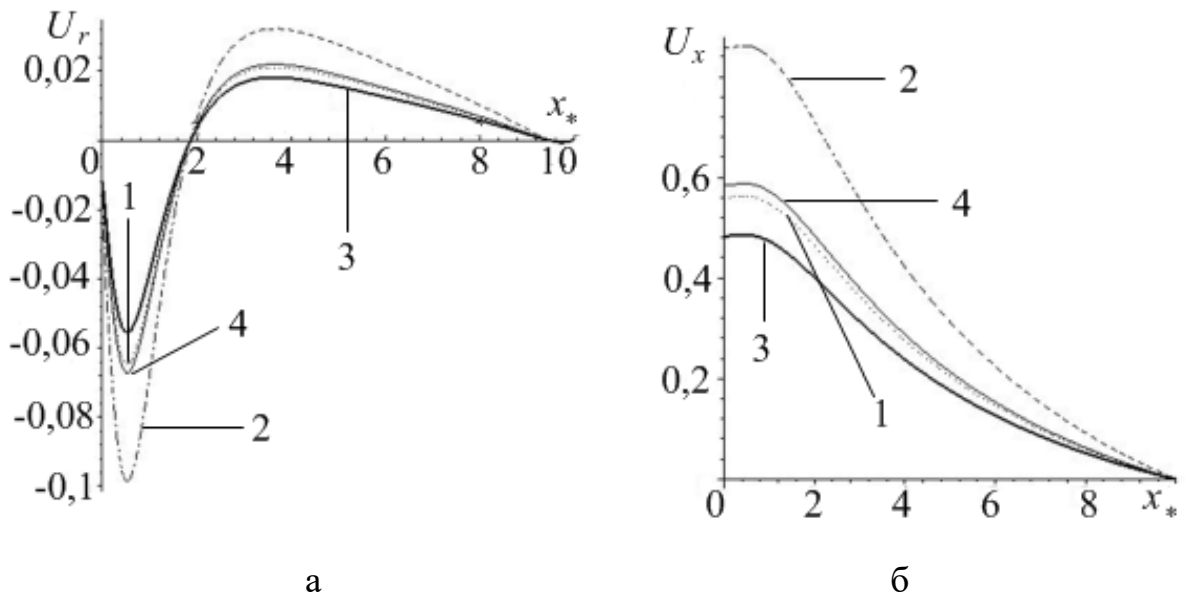


Рисунок 3.7 – Переміщення U_r (а) та U_x (б) границі контакту оболонки та середовища при навантаженні, яке прикладене до його поверхні:

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 4 – $\tau = 6$

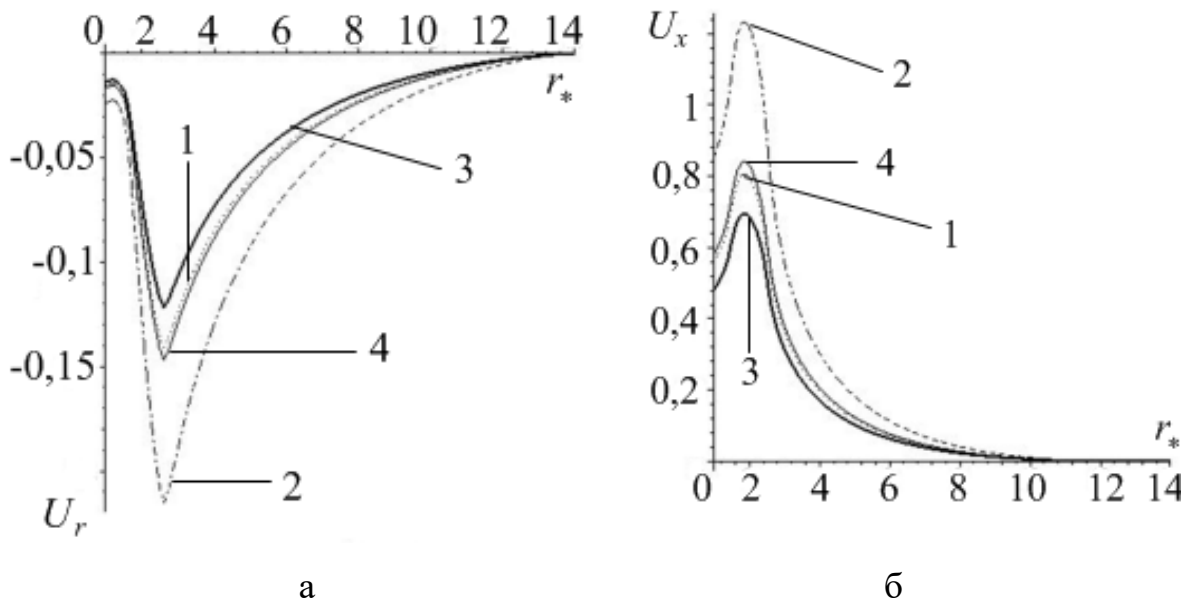


Рисунок 3.8 – Переміщення U_r (а) та U_x (б) поверхні середовища при навантаженні, яке прикладене до цієї поверхні:

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 2$, 3 – $\tau = 4$, 4 – $\tau = 6$

3.4 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі

3.4.1 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у необмеженому середовищі

В даному пункті розглянемо задачу, описану в підрозділі 2.3 (рис 2.1 (б)). Для розв'язання задачі використаємо МСЕ та порівняємо отримані результати з результатами отриманими за допомогою застосування біполярної системи координат (підрозділ 2.3).

Дискретизуємо тіло шляхом розбиття його на трикутники, причому при наближення до границі контакту оболонки та середовища проводимо згущення сітки. Також оболонку та середовище моделюємо різними елементами. Після проведення дискретизації застосовуємо алгоритм скінченно-елементної схеми, наведеної у підрозділі 3.1.

Порівняємо результати для відстані між оболонками три радіуси ($L = 3$).

На рис. 3.9 наведено порівняння для переміщень границі контакту оболонки та середовища при $L = 3$. Зазначимо, що на рис. 3.9 (а) проілюстровано результати для навантаженої оболонки, а на рис. 3.9 (б) – оболонки вільної від навантажень. При чому ліва частина зображення відповідає результатам, отриманим за допомогою МСЕ, а права – за допомогою біполярних координат. Суцільними кривими зображено максимальні динамічні переміщення, пунктиром – статичний розв'язок, а точковим пунктиром – початкове положення границі контакту.

На рис. 3.10 проілюстровані переміщення U_x вздовж осі y_* . Тут суцільні криві відповідають результатам, отриманим за допомогою біполярних координат, а пунктирні – МСЕ. Криві 2 та 4 – максимальні динамічні переміщення, а криві 1 та 3 – статичні розв'язки.

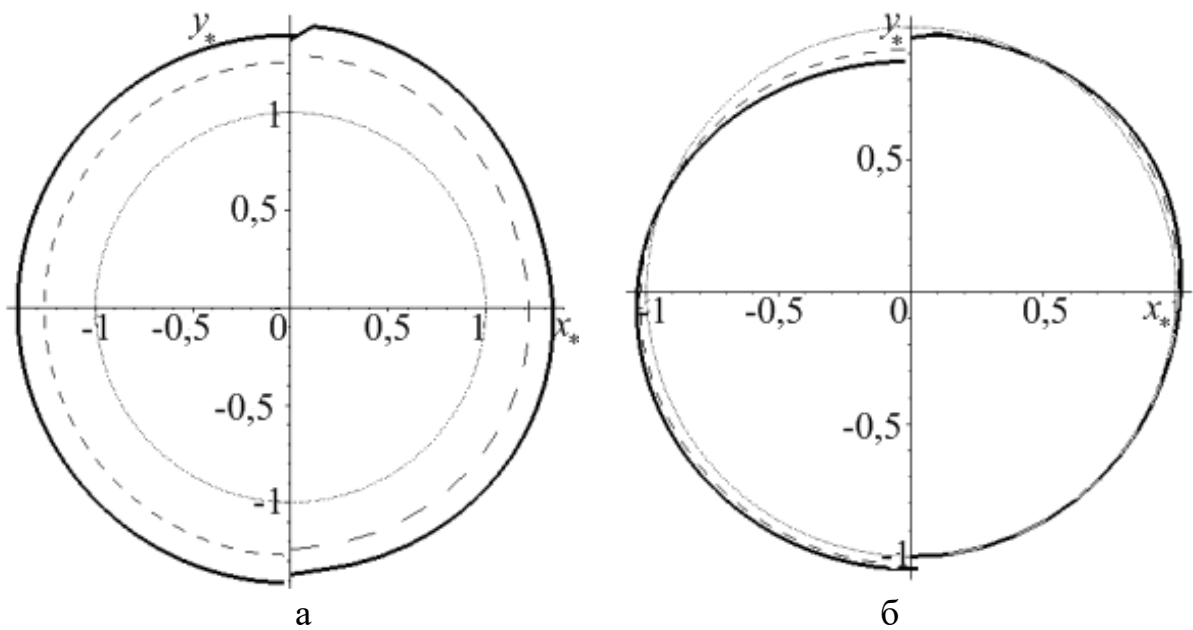


Рисунок 3.9 – Порівняння переміщення на границі контакту оболонки і середовища для навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від навантажень (б) при $L = 3$

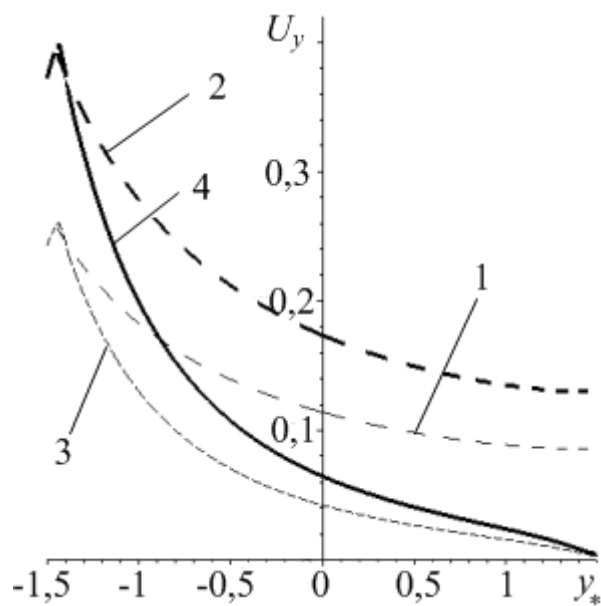


Рисунок 3.10 – Порівняння переміщення U_x середовища між оболонками вздовж осі y_*

Як видно з отриманих результатів, результати, отримані методом, який ґрунтуються на БСК, добре узгоджуються з результатами, отриманими МСЕ.

3.4.2 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у середовищі із вільною поверхнею, при однаковій глибині залягання

У цьому пункті розглянемо динаміку двох коаксіальних циліндричних оболонок у пружному середовищі із вільною поверхнею, площина якої паралельна осям оболонок (рис 3.11). Імпульсивне динамічне навантаження рівномірно діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок, а внутрішня поверхня іншої оболонки та поверхня середовища – вільні від напружень.

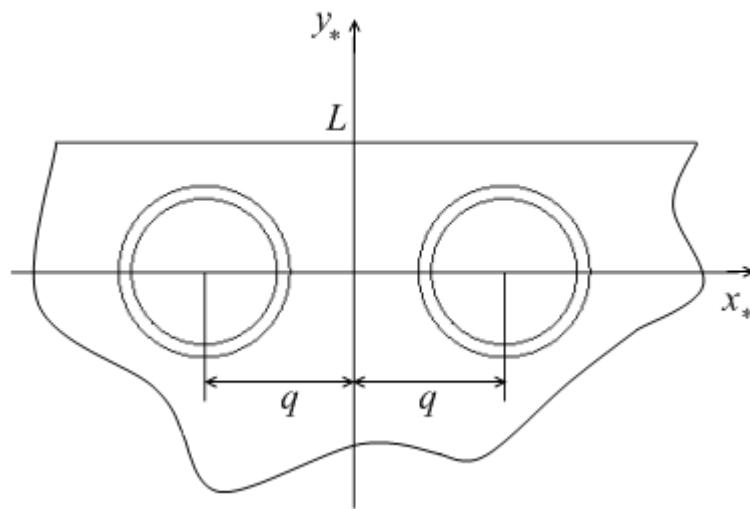


Рисунок 3.11 – Дві коаксіальні оболонки у півпросторі при однаковій глибині залягання

Нехай оболонки та середовище віднесені до нерухомої безрозмірної декартової системи координат $\{x_*, y_*, z_*\}$; q – відстань по осі від початку декартової системи координат до центрів кіл, які описують оболонки. Тобто координати центрів цих кіл мають вигляд $(-q, 0)$ та $(q, 0)$ (рис 3.11). Внутрішня поверхня першої оболонки задається рівнянням $(x + q)^2 + y^2 = (1 - \kappa)^2$, а другої – $(x_* - q)^2 + y_*^2 = (1 - \kappa)^2$. Аналогічно поверхні контакту між середовищем та оболонками – $(x_* + q)^2 + y_*^2 = 1$ та $(x_* - q)^2 + y_*^2 = 1$ (κ – відношення товщини оболонок до радіусів циліндричних порожнин середовища, які підкріплені оболонками). Контакт

між оболонкою та середовищем вважаємо жорстким, а зв'язок двостороннім. Площина, що обмежує середовище, задається рівнянням $y_* = L (L > 1)$.

Будемо вважати, що навантаження, яке діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок, рівномірно розподілене по її довжині, тобто не залежить від змінної z_* , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності.

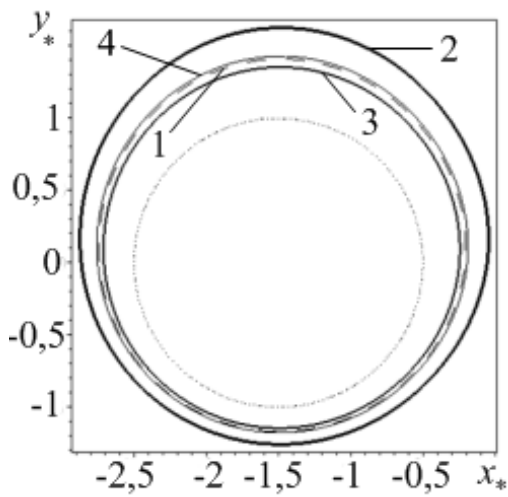
Початкові умови приймаються нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні за змінною часу при $\tau = 0$ дорівнюють нулю.

Для розв'язання задачі будемо використовувати МСЕ, алгоритм якого наведено в підрозділі 3.1. Дискретизація тіла проводиться аналогічно до попереднього пункту з урахуванням того, що середовище обмежено лінією $y_* = L$.

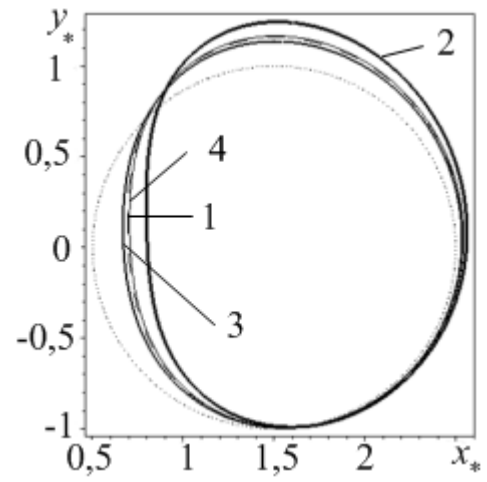
Тепер перейдемо до результатів чисельних експериментів. Відстань між оболонками припускалась рівною одному радіусу (тобто $q = 1,5$). Було розглянуто два випадки: глибина залягання дорівнює два радіуси ($L = 2$), та чотири радіуси ($L = 4$).

На рис. 3.12 наведені переміщення границі контакту оболонок та середовища у різні моменти часу, причому на рис 3.12 (а) – навантажена оболонка, а на 3.12 (б) – оболонка вільна від напружень. В обох випадках $L = 2$.

На рис. 3.13 та рис. 3.14 проілюстровано переміщення U_y та U_x відповідно для поверхні середовища, причому на рис 3.13 (а) та рис. 3.14 (а) – $L = 2$, а на рис 3.13 (б) та рис. 3.14 (б) – $L = 4$.



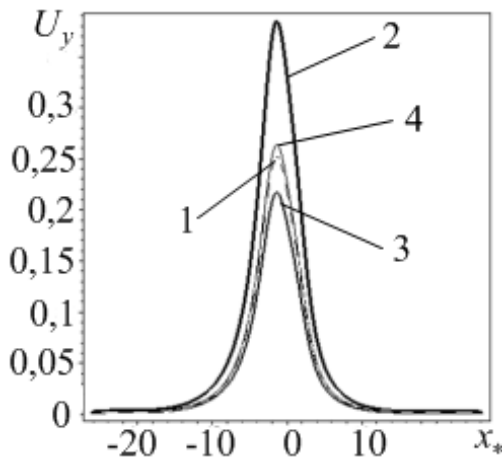
а



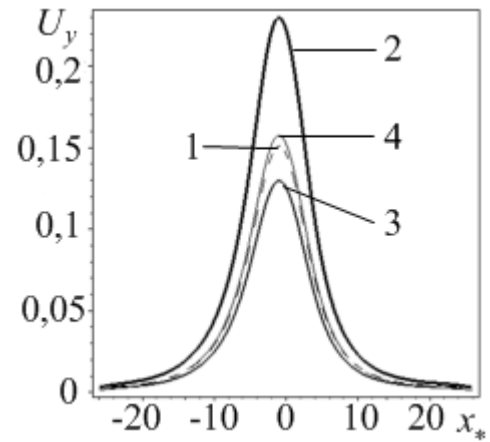
б

Рисунок 3.12 – Переміщення на границі контакту оболонки і середовища для навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від напружень (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$



а



б

Рисунок 3.13 – Переміщення U_y поверхні середовища при $L = 2$ (а) та при $L = 4$ (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

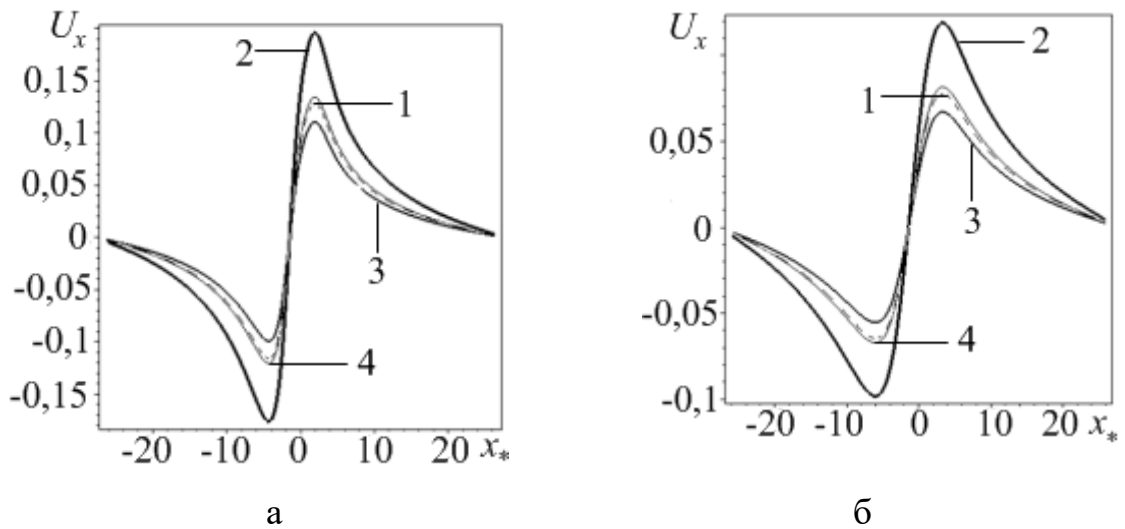


Рисунок 3.14 – Переміщення U_x поверхні середовища при $L = 2$ (а) та при $L = 4$ (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

3.4.3 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у середовищі із вільною поверхнею, при різній глибині залягання

Тут розглянемо динаміку двох коаксіальних циліндричних оболонок у пружному середовищі із вільною поверхнею, площина якої паралельна осям оболонок, причому глибина залягання оболонок різна (рис. 3.15). Імпульсивне самоврівноважене динамічне навантаження рівномірно діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок, а внутрішня поверхня іншої оболонки та поверхня середовища – вільні від навантажень.

Нехай оболонки та середовище віднесені до нерухомої безрозмірної декартової системи координат $\{x_*, y_*, z_*\}$. Внутрішня поверхня першої оболонки задається рівнянням $x_*^2 + y_*^2 = (1 - \kappa)^2$, а другої – $(x_* - q_1)^2 + (y_* - q_2)^2 = (1 - \kappa)^2$. Аналогічно поверхні контакту між середовищем та оболонками – $x_*^2 + y_*^2 = 1$ та $(x_* - q_1)^2 + (y_* - q_2)^2 = 1$ (κ – відношення товщини оболонок до радіуса циліндричних порожнин середовища, які підкріплені оболонками). Контакт між оболонками та

середовищем вважаємо жорстким, а зв'язок двостороннім. Площина, що обмежує середовище, задається рівнянням $y_* = L (L > 1)$. Будемо припускати, що навантаження діє на оболонку, центр якої знаходиться у початку системи координат (рис. 3.15).

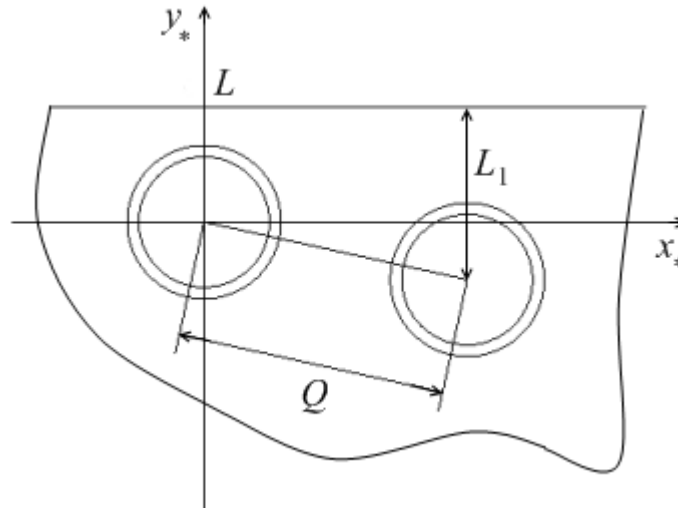


Рисунок 3.15 – Дві коаксіальні оболонки у півпросторі при різній глибині залягання

Будемо вважати, що навантаження, яке діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок, рівномірно розподілене по її довжині, тобто не залежить від змінної z_* , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні за змінною часу при $\tau = 0$ дорівнюють нулю.

Для розв'язання задачі будемо використовувати МСЕ, алгоритм якого наведено в підрозділі 3.1. Дискретизація тіла проводиться наступним чином: спочатку проводиться дискретизація для однієї оболонки, центр якої співпадає з початком системи координат, з обмеженням по осі $x_* \leq Q/2$, де Q – відстань між центрами оболонок. Потім отримана дискретизація дзеркально відображується відносно прямої $x_* = Q/2$, та виконується поворот за годинниковою стрілкою отриманого розбиття на кут

$\alpha = \arcsin \frac{L_1 - L}{Q}$ відносно початку координат, де L, L_1 – глибина залягання першої та другої оболонок відповідно (рис. 3.15).

Тепер перейдемо до результатів чисельних експериментів. Відстань між оболонками припускалась рівною двом радіусам, а глибина залягання однієї оболонки один радіус, а іншої – два (тобто $L = 2, L_1 = 3, q_1 = 3,873, q_2 = 1$).

На рис. 3.16 наведено переміщення границі контакту оболонок та середовища у різні моменти часу, причому на рис 3.16 (а) – показана навантажена оболонка, а на 3.16 (б) – оболонка вільна від напружень. В подальшому в пункті точками зображено початкове положення межі контакту (тобто до навантаження).

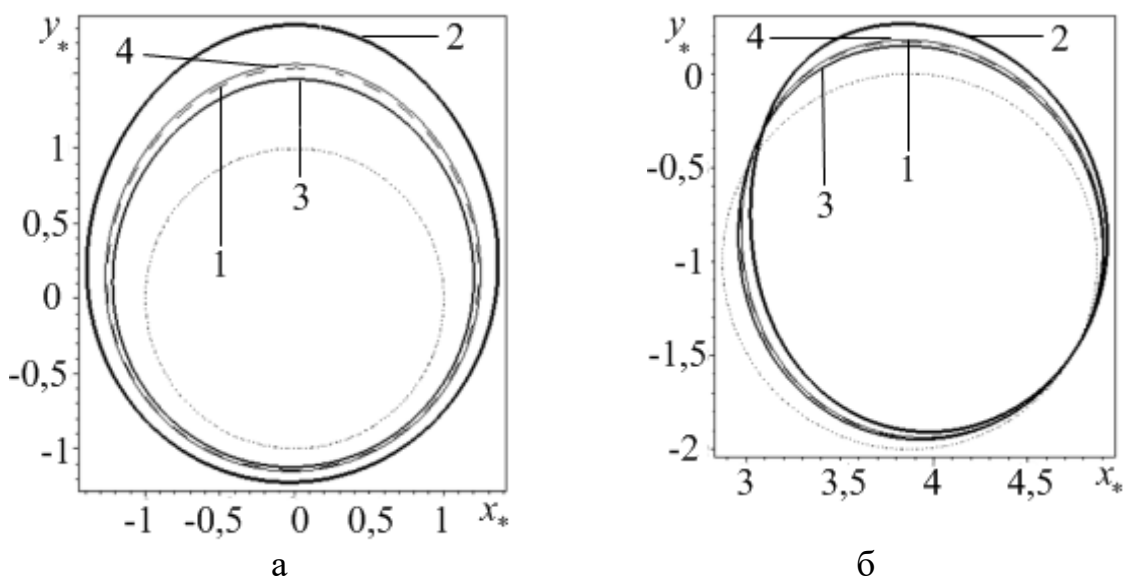
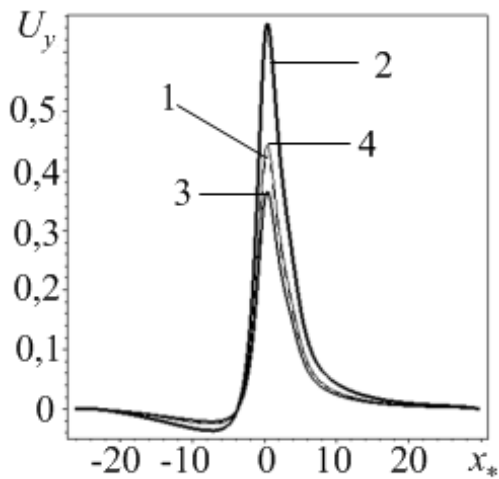


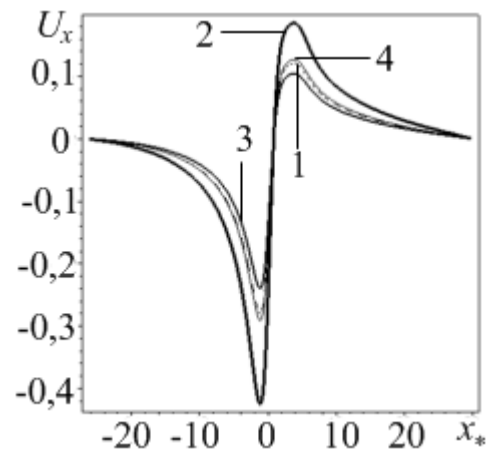
Рисунок 3.16 – Переміщення границі контакту оболонки і середовища для навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від напружень (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

На рис. 3.17 наведено криві переміщень U_y (рис 3.17 (а)) та U_x (рис 3.17 (б)) поверхні середовища відповідно.



а

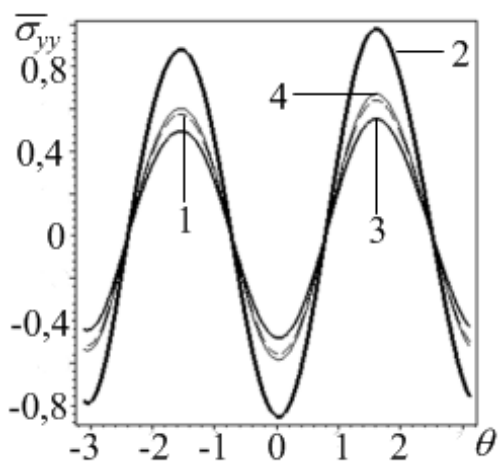


б

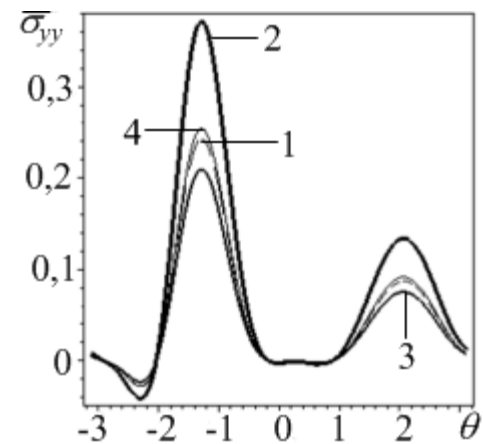
Рисунок 3.17 – Переміщення U_y (а) та U_x (б) поверхні середовища:

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

На рис. 3.18 (а) та рис 3.19 (а) проілюстровано розподіл напружень $\bar{\sigma}_{yy}$ та $\bar{\sigma}_{xx}$ за кутовою координатою на границі контакту оболонки та середовища для навантаженої оболонки. На рис. 3.18 (б) та рис 3.19 (б) наведено аналогічні криві для оболонки, яка вільна від навантажень.



а



б

Рисунок 3.18 – Напруження $\bar{\sigma}_{yy}$ навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від навантажень (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

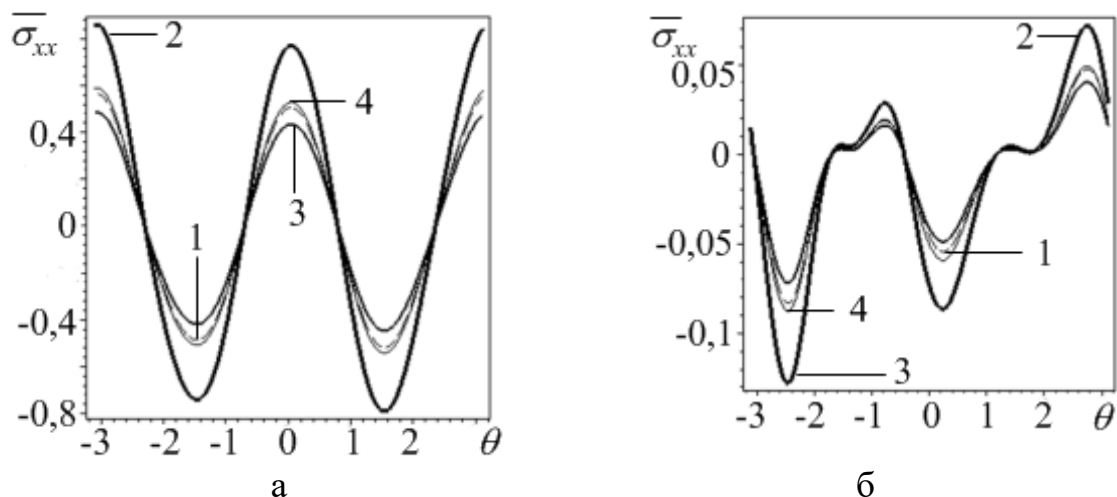


Рисунок 3.19 – Напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від навантажень (б):

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

Тепер розглянемо випадок, коли $L = 2, q_1 = 3,464, q_2 = 2$, тобто оболонка, внутрішня поверхня якої навантажена, знаходиться на глибині один радіус, інша оболонка – три радіуса. Відстань між оболонками дорівнює двом радіусам.

На рис 3.20 зображені переміщення границі контакту оболонок із середовищем для навантаженої оболонки (Рис. 3.20 (а)), та оболонки, вільної від навантажень (Рис. 3.20 (б)).

На рис 3.21 наведено криві для переміщень поверхні середовища, причому на рис. 3.21 (а) – U_y , а на рис. 3.21 (б) – U_x .

На рис 3.22-3.23 проілюстровано розподіл напружень в середовищі за кутовою координатою на границі контакту оболонок із середовищем, причому випадок а) відповідає навантаженій оболонці, випадок б) – оболонці, вільної від навантажень.

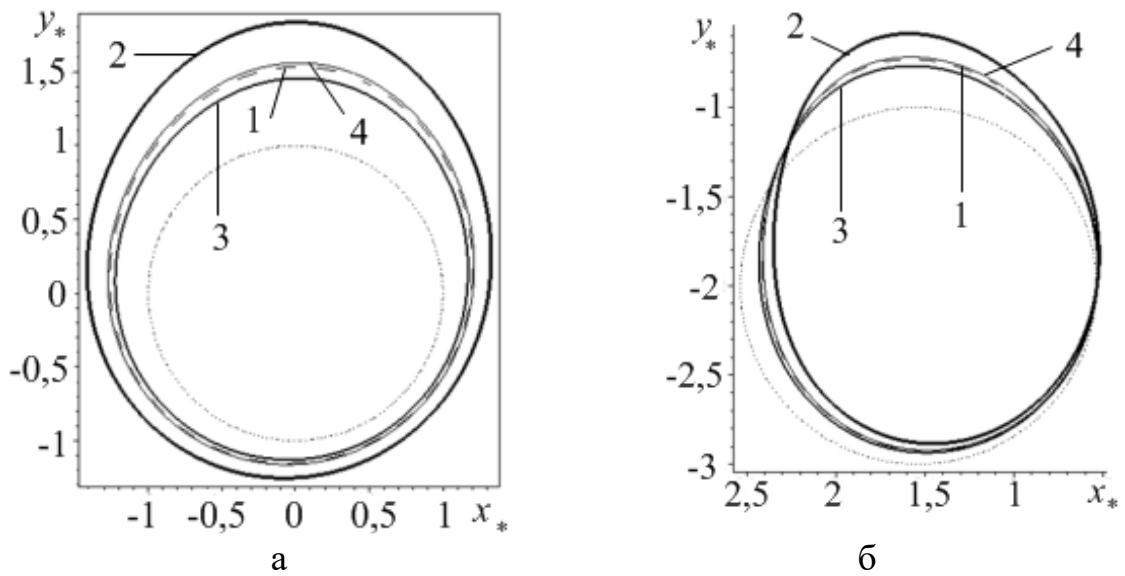


Рисунок 3.20 – Переміщення границі контакту оболонки і середовища для навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від напружень (б) при

$$L = 2, q_1 = 3,464, q_2 = 2:$$

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

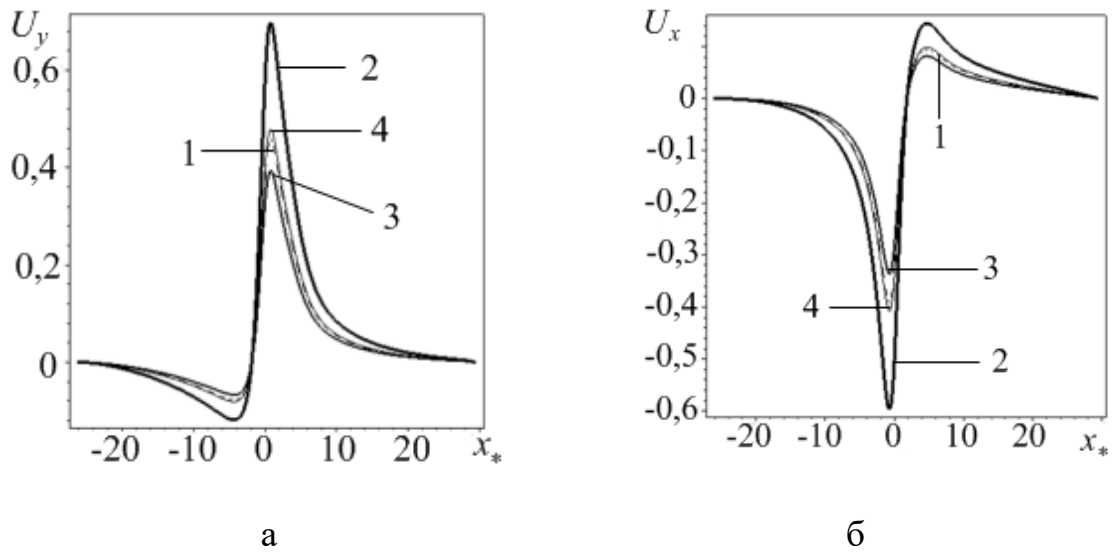


Рисунок 3.21 – Переміщення U_y (а) та U_x (б) поверхні середовища при

$$L = 2, q_1 = 3,464, q_2 = 2:$$

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

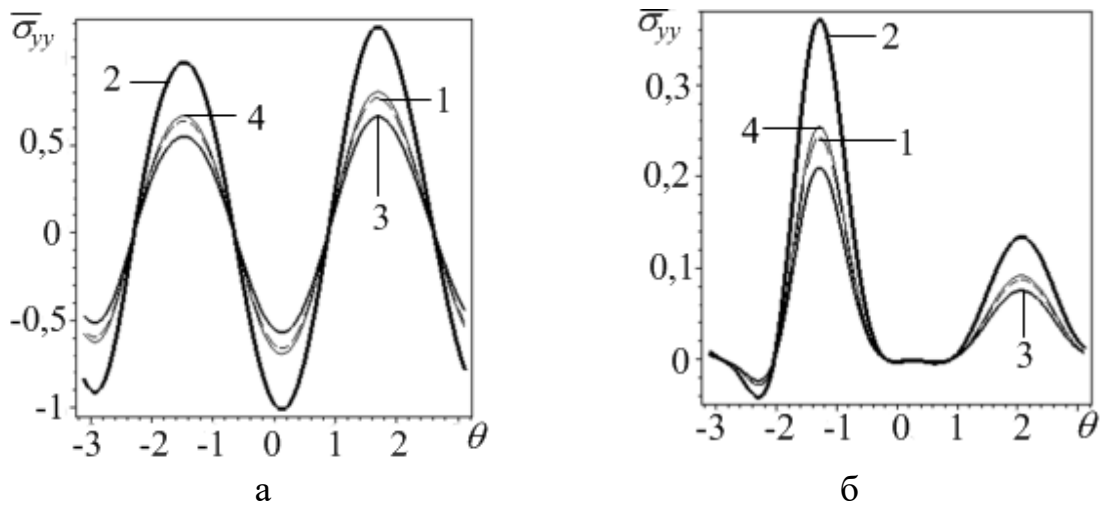


Рисунок 3.22 – Напруження $\bar{\sigma}_{yy}$ навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від навантажень (б) при $L = 2, q_1 = 3,464, q_2 = 2$:

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

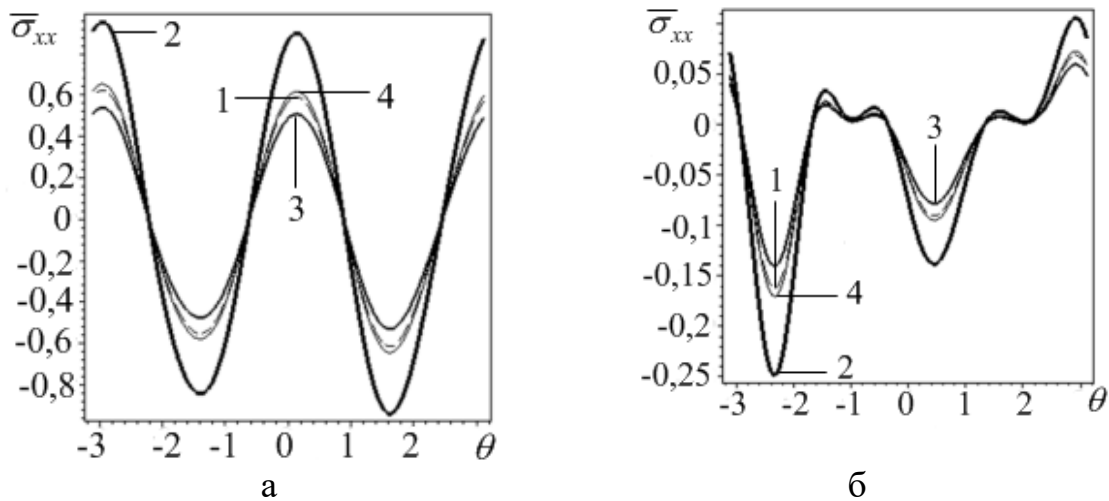


Рисунок 3.23 – Напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від навантажень (б) при $L = 2, q_1 = 3,464, q_2 = 2$:

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

Тепер розглянемо випадок, коли $L = 4, q_1 = 3,873, q_2 = 1$, тобто оболонка, внутрішня поверхня якої навантажена, знаходиться на глибині три радіуси, інша оболонка – чотири радіуса. Відстань між оболонками дорівнює двом радіусам.

На рис 3.24 зображені переміщення границі контакту оболонок із середовищем для навантаженої оболонки (рис. 3.24 (а)), та оболонки вільної від навантажень (рис. 3.24 (б)).

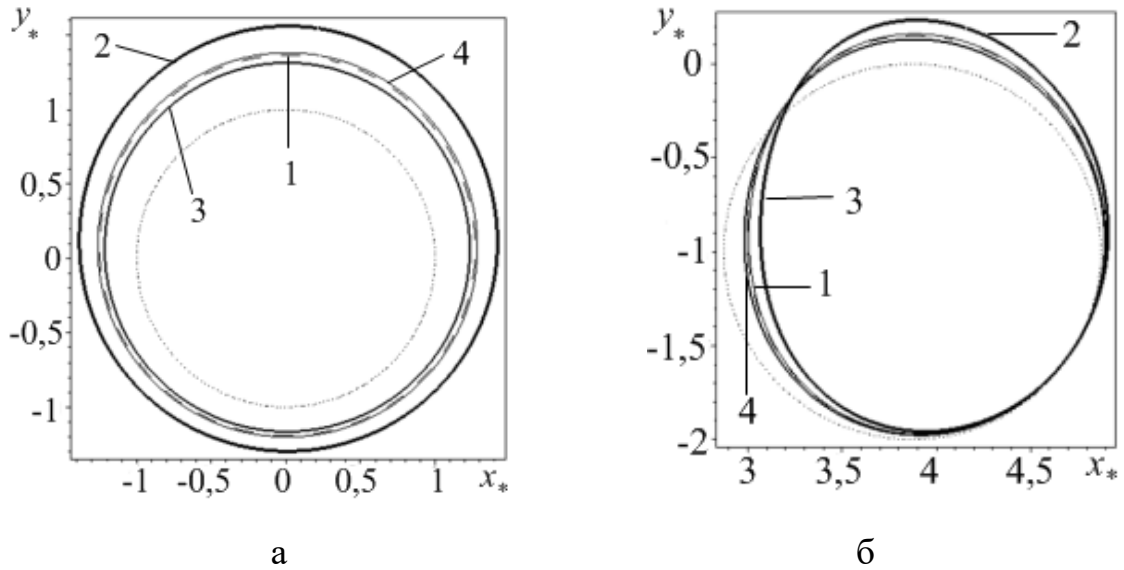


Рисунок 3.24 – Переміщення границі контакту оболонки і середовища для навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від напружень (б) при

$$L_* = 4, q_{*1} = 3,873, q_{*2} = 1:$$

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

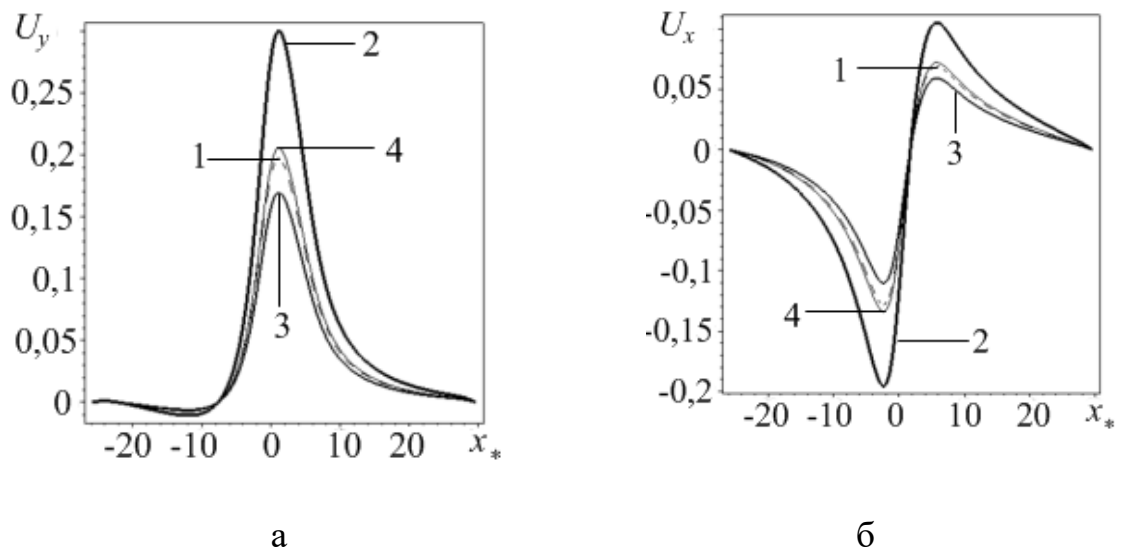


Рисунок 3.25 – Переміщення U_y (а) та U_x (б) поверхні середовища при

$$L = 4, q_1 = 3,873, q_2 = 1:$$

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

На рис 3.25 проілюстровані переміщення поверхні середовища, причому на рис 3.25 (а) – U_y , а рис. 3.25 (б) – U_x .

Тепер розглянемо випадок, коли $L = 4, q_1 = 3,464, q_2 = 2$, тобто оболонка, внутрішня поверхня якої навантажена, знаходиться на глибині три радіуси, інша оболонка – чотири радіуса. Відстань між оболонками дорівнює двом радіусам.

На рис 3.26 зображені переміщення границі контакту оболонок із середовищем для навантаженої оболонки (рис. 3.26 (а)), та оболонки вільної від навантажень (рис. 3.26 (б)).

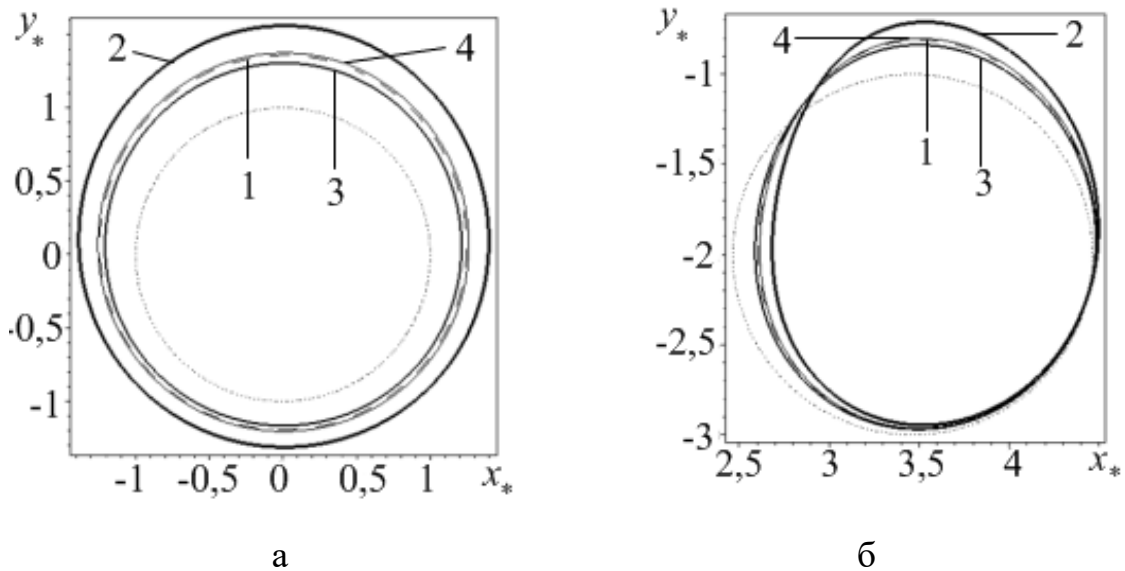
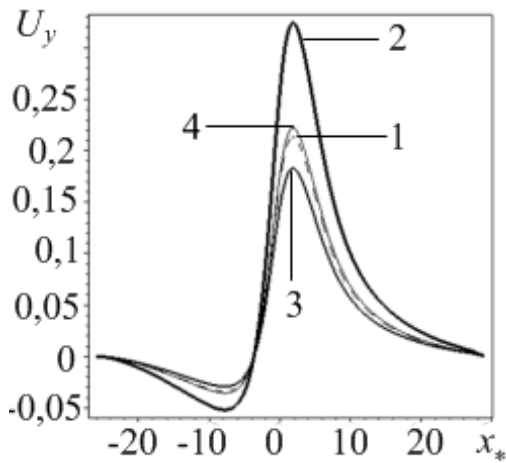


Рисунок 3.26 – Переміщення границі контакту оболонки і середовища для навантаженої оболонки (а) та оболонки вільної від напружень (б) при

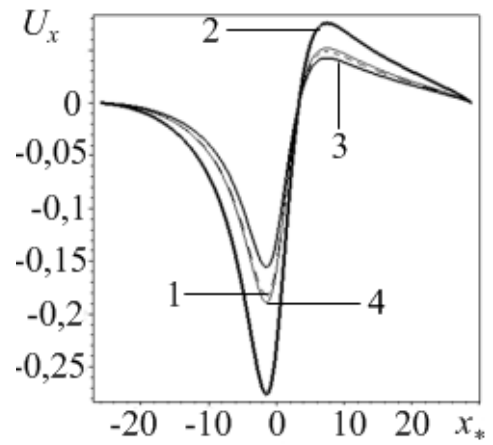
$$L = 4, q_1 = 3,464, q_2 = 2:$$

1 – статичний розв’язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

На рис 3.27 наведені криві переміщень поверхні середовища, причому на рис. 3.27 (а) – U_y , а на рис. 3.27 (б) – U_x .



а



б

Рисунок 3.27 – Переміщення U_y (а) та U_x (б) поверхні середовища при

$$L = 4, q_1 = 3,464, q_2 = 2 :$$

1 – статичний розв'язок, 2 – $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$

На основі проведених розрахунків проаналізовано взаємний вплив двох оболонок в залежності від відстані між ними. На основі цього аналізу можна сказати, що величина взаємного впливу має такий самий характер, як і у випадку двох коаксіальних оболонок у необмеженому середовищі. Що стосується глибини залягання оболонок, то при збільшенні глибини залягання оболонки, вільної від навантажень, спостерігається збільшення напружень вздовж границі контакту між оболонками та середовищем. При аналізі впливу поверхні середовища від глибини залягання навантаженої оболонки, можна зробити висновок, що характер величини цього впливу такий самий, як і у випадку однієї оболонки у середовищі із поверхнею.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Айнола Л.* Волновые процессы деформаций упругих плит и оболочек / *Л. Айнола У. Нигул* // Изв. АН ЭстССР. Серия физ.-мат. и техн. н. – 1965. – 14. – № 1. – С. 3–62.
2. *Алексеева Л. А.,* Динамика упругого полупространства с подкрепленной цилиндрической полостью при подвижных нагрузках / *Л. А. Алексеева, В. Н. Украинец* // Прикл. механ. – 2009. № – 9. – С. 75–85.
3. *Алексеева Л. А.* Задача о действии подвижной переодической нагрузки на многослойную тонкостенную оболочку в упругом полупространстве / *Л. А. Алексеева, М. К. Бейсембаев, С. Р. Гирнис, В. Н. Украинец* // Изв. Нац. академии наук респуб. Казахстан. Серия Физико-математическая. – 2010. – № 4. – С. 3–10.
4. *Бабич С. Ю.* Динамика слоистого сжимаемого предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки / *С. Ю. Бабич., Ю. П. Глухов, А. Н. Гузь* // Прикл. механ. – 1986. – 22. – № 9. – С. 8–15.
5. *Баженов В. А.* Теория и расчет трехслойных конструкций с расслоениями / *В. А. Баженов, А. И. Оглобля, А. В. Черниченко* – К.: Наук. думка, 1997. – 247 с.
6. *Баладин М. Ю.* Методы решения СЛАУ большой размерности / *М. Ю. Баладин, Э. П. Шурина* – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
7. *Бате К.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / *К. Бате., Е. Вилсон* – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. *Бешенков С. Н.* Гидроупругие колебания трехслойной цилиндрической оболочки / *С. Н. Бешенков, А. И. Оглобля, А. В. Геращенко* – К.: Наук. думка, 1997. – 247 с.
9. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах / *Л. М. Бреховских* – М.: Наука, 1973. – 343 с.

10. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек / *А. С. Вольмир* – М.: Наука, 1972. – 432 с.
11. *Габриелян Г. Е.* Расчет кольца в упругой среде с односторонними связями / *Г. Е. Габриелян, В. А. Баранов, Б. М. Лисов* // *Методы и алгоритмы расчета сооружений и конструкций.* – Воронеж, – 1990. – С. 55–60.
12. *Габриелян Г. Е.* Упрощенные решения задачи о расчете кольца в упругой среде при больших значениях коэффициента относительной жесткости / *Г. Е. Габриелян, В. А. Баранов* // *Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций.* – Воронеж, – 1992. – Вып. 1. – С. 74–77.
13. *Габриелян Г. Е.* Расчет кольца в упругой среде с учетом изменчивости коэффициента сопротивления по периметру / *Г. Е. Габриелян, Б. М. Лисов* // *Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций.* – Воронеж. – 1993. – Вып. 2. – С. 78–81.
14. *Глухов Ю. П.* К определению критических скоростей движения нагрузки по пластине, лежащей на несжимаемом предварительно деформированном полупространстве / *Ю. П. Глухов* // *Прикл. механ.* – 1986. – 22. – № 10. – С. 57–62.
15. *Голоскоков Е. Г.* Упруго-акустические задачи динамики трехслойных конструкций / *Е. Г. Голоскоков, С. Н. Бешенков* – Харьков: Вища школа, 1980. – 120 с.
16. *Голоскоков Е. Г.* Колебания несимметричных трехслойных пластин при действии локальных подвижных импульсов / *Е. Г. Голоскоков, В. П. Ольшанский* // *Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела.* – 1974. – №1. – С. 126–132.
17. *Голоскоков Е. Г.* О свободных волнах в трехслойных пластинах / *Е. Г. Голоскоков, В. П. Ольшанский, С. Н. Бешенков* // *Динамика и прочность машин.* – Харьков, – 1975. – № 22. – С. 20–23.

18. *Горшков А. Г.* Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами / *А. Г. Горшков* // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1981. – № 4. – С. 177–189.
19. *Горшков А. Г.* Стационарные задачи динамики для пластин и оболочек, взаимодействующих с инерционными средами / *А. Г. Горшков, В. И. Пожуев* // Итоги науки и техники. Серия: Механика деформируемого твердого тела. – 1989. – Т. 20. – С. 3–83.
20. *Горшков А. Г.* Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / *А. Г. Горшков, В. И. Пожуев* – М.: Машиностроение, 1992. – 224 с.
21. *Горшков А. Г.* Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок / *А. Г. Горшков, В. И. Пожуев* – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 136 с.
22. *Гребенюк С. Н.* Применение метода конечных элементов к задаче о винклеровском основании конструкций / *С. Н. Гребенюк, О. Н. Тимошина* // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 1. – С. 48–53.
23. *Гребенюк С. Н.* Моделирование контактного взаимодействия эластомерных элементов конструкций / *С. Н. Гребенюк, Е. С. Решевская, В. М. Тархова* // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. – Вып. 3 (42). – С. 163–167.
24. *Гузь А. Н.* Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью / *А. Н. Гузь* // Прикл. мех. – 1980. – № 10. – С. 10–20.
25. *Дубинин В. В.* Смешанная динамическая стационарная задача для полого толстостенного цилиндра / *В. В. Дубинин* // Изв. вузов. Машиностроение. – 1981. – № 4. – С. 5–10.
26. *Ерофеев В. Т.* Теоремы сложения / *В. Т. Ерофеев* – Минск: Наука и техника, 1989. – 256 с.

27. *Зинкевич О.* Метод конечных элементов в технике / *О. Зинкевич* – М.: Мир, 1975. – 543 с.
28. *Ильгамов М. А.* Обзор исследований по взаимодействию акустической среды и упругих оболочек / *М. А. Ильгамов* // В сб.: Исслед. по вибрац. горению и смежн вопр. – Казань, – 1974. – С. 3–18.
29. *Ильгамов М. А.* Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем / *М. А. Ильгамов В. А. Иванов, Б. В. Гулин* // М.: Наука, 1977. – 331 с.
30. *Каиров А. С.* Численное исследование свободных колебаний конструктивно неоднородных подкрепленных оболочек с присоединенными твердыми телами / *А. С. Каиров, В. А. Каиров* // Вісник Донецького ун-ту: Науковий журнал. Серія А. – 2008. – Вип. 1. – С. 170–174.
31. *Каиров В. А.* Влияние подкрепляющих ребер на собственные колебания цилиндрических оболочек / *В. А. Каиров* // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, – 2015. – Вип. 24. – С. 114–122.
32. *Каиров В. А.* Напряженно-деформированное состояние подкрепленных оболочек с присоединенными твердыми телами при вынужденных колебаниях / *В. А. Каиров В. П. Шевченко, С. А. Моргун* // Вісник Дніпропетровського ун-ту: Науковий журнал. Серія: Механіка. – 2015. – Вип. 19, – т. 2. – С. 56–64.
33. *Кобелев В. Н.* Расчет трехслойных конструкций / *В. Н. Кобелев, Л. М. Коварский, С. И. Тимофеев* – М.: Машиностроение, 1984. – 303 с.
34. *Корбут Б. А.* Реакция цилиндрической оболочки с наполнителем на действие движущейся нагрузки / *Б. А. Корбут, Ю. И. Нагорный* // Изв. АН УССР. Мех. тверд. тела. – 1973. – № 3. – С. 111–119.
35. *Крылов В. И.* Справочная книга по численному интегрированию / *В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина* – М.: Наука, 1966. – 370 с.

36. *Крылов В. И.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / *В. И. Крылов, Н. С. Скобля* – М.: Наука, 1974. – 223 с.
37. *Косицын С. Б.* Анализ напряженно-деформированного состояния пересекающихся цилиндрических оболочек при упругопластических деформациях с учетом геометрической нелинейности / *С. Б. Косицын, Ч. С. Линь* // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. Обзорно-аналитический и научно-технический журнал. – 2013. – № 1. – С. 3–9.
38. *Косицын С. Б.* Численный анализ напряженно-деформированного состояния ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек без учета и с учетом их одностороннего взаимодействия с окружающим массивом грунта / *С. Б. Косицын, Ч. С. Линь* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – Volume 10. – Issue 1. – P. 72–78.
39. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа / *К. Ланцош* – М.: Гос. изд-во. физ.-мат. лит., 1961. – 524 с.
40. *Линь Ч. С.* Оценка размеров массива грунта, задаваемого при пространственных расчетах подземных сооружений, исходя из условий затухания его напряженно-деформированного состояния / *Ч. С. Линь* // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. Обзорно-аналитический и научно-технический журнал. – 2013. – № 4. – С. 41–43.
41. *Масиновский Ю. В.* Стационарные неосесимметричные волны в цилиндрической оболочке, содержащей заполнитель / *Ю. В. Масиновский, Ю. И. Нагорный* // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1976. – № 3 – С. 140–144.
42. *Мейли В. Ф.* Волновые процессы в системе цилиндрическая оболочка – грунтовая среда периодической структуры при импульсивных нагрузках

- / В. Ф. Мейш // Вісник НТУУ «КПІ». Серія: Гірництво. – 2015. – Вип. 27. – С. 15–21.
43. Мейш В. Ф. К решению задач о взаимодействии цилиндрической оболочки с грунтовой трехкомпонентной нелинейной средой периодической структуры при нестационарной нагрузке / В. Ф. Мейш, Ю. А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 238–244.
44. Нигул У. К. Волновые процессы деформации оболочек и пластин / У. К. Нигул // Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. – М. – 1970. – С. 846–883.
45. Никитин И. С. Задача о подвижной нагрузке на границе упругого полупространства с цилиндрической полостью / И. С. Никитин // Мех. тверд. тела. – 1984. – № 3. – С. 93–99.
46. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий – М.: Мир, 1975. – 872 с.
47. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов – М.: Высшая школа, 1985. – 393 с.
48. Петренко В. Д. Визначення ефективних параметрів методів зниження динамічного впливу об'єктів підземної інфраструктури / В. Д. Петренко, Є. Ю. Кулаженко // Матеріали конференції “Перспективи розвитку будівельних технологій”. (21 – 22 квітня 2016. м. Дніпро). – Дніпро. – 2016. – С. 114–118.
49. Пожуев А. В. Нестационарная динамика ребристой пластины на упругом слое / А. В. Пожуев // Изв. ВУЗов. Строительство. – 1998. – № 10. – С. 29–34.
50. Пожуев А. В. Нестационарная динамика ребристой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / А. В. Пожуев // Тр. Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань, – 1998. – С. 130–132.

51. *Пожуев А. В.* Нестационарная динамика цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / *А. В. Пожуев* // *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні.* – 1998. – № 2. – С. 119–121.
52. *Пожуев А. В.* Нестационарная динамика ребристой цилиндрической оболочки конечной длины / *А. В. Пожуев* // *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки.* – 1999. – № 1. – С. 82–85.
53. *Пожуев А. В.* Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень / *А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк* // *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні.* – 2015. – № 2. – С. 108–114.
54. *Пожуев А. В.* Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються / *А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк* // *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* – 2016. – № 1. – С. 200–213.
55. *Пожуев А. В.* Динамика ребристой пластины на упругом слое при действии подвижной нагрузки / *А. В. Пожуев, Н. П. Полякова* // *Прикл. механ.* – 1998. – 34. – № 4. – С. 75–80.
56. *Пожуев В. И.* Динамика упругого полупространства с цилиндрической полостью, подкрепленной оболочкой, при осесимметричных нагрузках / *В. И. Пожуев, А. В. Фасоляк* // *Техническая механика.* – 2017. – № 1. – С. 91–99.
57. *Пожуев В. И.* Нестационарная задача для цилиндрической оболочки в упругой среде / *В. И. Пожуев* // *Сопротивление материалов и теория сооружений.* – К., – 1983. – Вып. 43. – С. 95–98.
58. *Пожуев В. И.* Исследование динамических процессов в системе пластина – направленно-армированный слой / *В. И. Пожуев, И. С. Баранова* // *Изв. ВУЗов. Строительство.* – 1998. – № 9. – С. 24–28.

59. *Пожуев В. И.* Нестационарное деформирование бесконечных пластин на направленно-армированном слое / *В. И. Пожуев, И. С. Баранова* // Динамика и прочность машин. – Харьков, – 1998. – № 56. – С. 19–25.
60. *Пожуев В. И.* Нестационарное деформирование композита под действием подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев, И. С. Баранова* // В сб. Актуальные проблемы механики оболочек. – Казань, – 1998. – С. 172–177.
61. *Пожуєв В. І.* Динаміка пружного півпростору з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою, при поверхневих навантаженнях / *В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк* // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2017. – Вип. 26. – С. 142–152.
62. *Пожуєв В. І.* Динаміка коаксіальних циліндричних оболонок у пружному середовищі з вільною поверхнею / *В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк* // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2017. – № 1. – С. 84–91.
63. *Пожуєв В. І.* Динаміка коаксіальних циліндричних оболонок у пружному інерційному середовищі / *В. І. Пожуєв, А. В. Фасоляк* // Техническая механика. – 2017. – № 3. – С. 90–99.
64. *Пожуєв В. І.* Динаміка, підкріпленої кільцевими ребрами жорсткості, циліндричної оболонки у тривимірному пружному середовищі / *В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк* // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка неоднорідних структур. – 2017. – Вип. 2 (21). – С. 148–165.
65. *Пожуєв В. І.* Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею / *В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк* // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2016. – № 1. – С. 119–126.
66. *Пожуєв В. І.* Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі під дією нормальних поверхневих навантажень / *В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк* // Вісник Запорізького

- національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 201–213.
67. *Пожуєв В. І.* Моделювання динаміки циліндричної оболонки у пружному півпросторі за допомогою біполярної системи координат / *В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк* // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2018. – Вип. 28. – С. 168–182.
68. *Пожуєв В. І.* Застосування біполярної системи координат до моделювання динаміки двох коаксіальних оболонок у пружному середовищі / *В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк* // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2018. – № 1. – С. 97–108.
69. *Пожуєв В. І.* Влияние величины постоянной скорости движения нагрузки на реакцию пластины, лежащей на упругом основании / *В. И. Пожуев* // Изв. АН СССР Механ. тверд. тела. – 1981. – № 6. – С. 112–118
70. *Пожуєв В. І.* Реакция трехслойной цилиндрической оболочки на действие неосесимметричной подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев* // Изв. АН. СССР Механ. тверд. тела. – 1982. – № 5. – С. 161–168.
71. *Пожуєв В. І.* Действие волны давления на трехслойную цилиндрическую оболочку, погруженную в сжимаемую жидкость / *В. И. Пожуев* // Изв. АН СССР Механ. тверд. тела. – 1983. – № 3. – С. 157–165.
72. *Пожуєв В. І.* Стационарная реакция системы цилиндрическая оболочка – вязкоупругий наполнитель на действие подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев* // Прикл. механ. – 1986. – № 5. – С. 27–34.
73. *Пожуєв В. І.* Нестационарное деформирование подземного трубопровода конечной длины при осесимметричном нормальном нагружении / *В. И. Пожуев, Мохаммед Жибигай* // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 2. – С. 18-22.
74. *Пожуєв В. І.* Нестационарная реакция подземного трубопровода конечной длины на действие подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев,*

- Мохаммед Жибигай* // Изв. ВУЗов. Горный журнал. – 1991. – № 4. – С. 105–108.
75. *Пожуев В. И.* Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосесимметричной подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев, Мохаммед Жибигай* // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 8. – С. 33–37.
76. *Пожуев В. И.* Динамика подземной цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами жесткости, под действием подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев, Мохаммед Жибигай* // Изв. ВУЗов. Горный журнал. – 1992. – № 3. – С. 56–61.
77. *Пожуев В. И.* Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой / *В. И. Пожуев, Мохаммед Жибигай* // Изв. ВУЗов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 48–50.
78. *Пожуев В. И.* Нестационарная реакция пластины на упругом полупространстве на действие подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев, Н. П. Полякова* // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1990. – № 5. – С. 175–182.
79. *Пожуев В. И.* Нестационарное деформирование пластины на упругом слое при действии подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев, Н. П. Полякова* // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1990. – № 5. – С. 40–43.
80. *Пожуев В. И.* Нестационарное деформирование трехслойной пластины конечной длины при действии подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев, Н. П. Полякова* // Труды XV Всес. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань, – 1990. – Т. 1. – С. 214–219.
81. *Пожуев В. И.* Нестационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на ледяной покров / *В. И. Пожуев, Н. П. Полякова* // Строит. мех. и расчет сооружений. – 1990. – № 6. – С. 46–50.

82. *Пожуев В. И.* Нестационарная реакция трехслойной пластины на действие подвижной нагрузки / *В. И. Пожуев, Н. П. Полякова* // Прикл. мех. – 1991. – Т. 27. – № 9. – С. 71–77.
83. *Пожуев В. И.* Нестационарное деформирование двухслойного полупространства под действием расширяющихся поверхностных нагрузок / *В. И. Пожуев, Н. П. Полякова* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1993. – № 5. – С. 68–74.
84. *Пожуев В. И.* Нестационарная задача для трехслойной пластины с жидким наполнителем / *В. И. Пожуев, Н. П. Полякова* // Динам. и прочн. машин. – 1993. – № 54. – С. 34–41.
85. *Попова Н. А.* Исследование напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / *Н. А. Попова* // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2004. – № 645. – С. 102–107.
86. *Проценко В. С.* Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью / *В. С. Проценко Н. А. Попова* // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 52–58.
87. *Проценко В. С.* Применение обобщенного метода Фурье для решения задач теории потенциала и теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / *В. С. Проценко Н. А. Украинец* // Современные проблемы математики, механики и информатики: сборник статей [под ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолткевича]. – Харьков, – 2011. – С. 189–200.
88. *Проценко В. С.* Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи и теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / *В. С. Проценко Н. А. Украинец* // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 2. – С. 193–201.

89. *Проценко В. С.* Смешанная задача для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / *В. С. Проценко Н. А. Украинец* // Теоретическая и прикладная механика. – Донецк, – 2006. – № 42. – С. 17–22.
90. *Решевская Е. С.* Моделирование напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций на основе метода конечных элементов с интерполирующим полиномом Эрмита / *Е. С. Решевская, С. Н. Гребенюк* // *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління.* – 2008. – № 1 (19). – С. 85–91.
91. *Селезов И. Т.* Исследование численным методом обращения неустановившихся движений упругого пространства / *И. Т. Селезов, В. А. Ткаченко* // Докл. АН УССР. – 1977. – № 3. – С. 239–242.
92. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны / *Л. И. Слепян* – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.
93. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / *И. Снеддон* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. – 668 с.
94. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости / *Я. С. Уфлянд* – Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. – 232 с.
95. *Фасоляк А. В.* Динаміка нескінченно довгої, підкріпленої повздожніми ребрами жорсткості, циліндричної оболонки у тривимірному пружному середовищі / *А. В. Фасоляк* // *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* – 2017. – № 2. – С. 277–289.
96. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем / *А. П. Филиппов* – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
97. *Цурнал И. А.* Расчет многосвязных слоистых и нелинейно-упругих пластин и оболочек / *И. А. Цурнал, Н. Г. Тамуров* – К.: Вища школа. 1977. – 224 с.
98. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры / *Н. А. Шульга* – К.: Наукова думка, 1981. – 198 с.

99. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости / *И. Я. Штаерман* – М., Л.: Гостехиздат, 1949. 182 с.
100. *Якушев Н. З.* Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок / *Н. З. Якушев* – М.: Наука, 2001. – 396 с.
101. *Chonan S.* Dynamic response of a cylindrical imperfectly bonded to a surrounding continuum of infinite extent / *S. Chonan* // *Journal of Sound and Vibration.* – 1981. – Vol. 78. – Issue 2. – P. 257–267.
102. *Chonan S.* Moving load on a two-layered cylindrical shell with imperfect bounding / *S. Chonan* // *Journal of the Acoustical Society of America.* – 1981. – Vol. 69. – Issue 4. – P. 1015–1020.
103. *Chonan S.* Moving load on a two-layered plate with imperfect bounding, resting on a half-space / *S. Chonan* // *Archive J. App. Mech.* – 1982. – November 2. – Vol. 49. – P. 97–106.
104. *Fasoliak A. V.* Application of the Bipolar Coordinate System to Modeling of the Cylindrical Shell Dynamic in Elastic Medium with Free Surface / *A. V. Fasoliak, V. I. Pozhuev* // *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology.* – 2018. – Vol. 06. – Issue 06. – P. 1820–1825.
105. *Jones J. P.* Dynamics of a flexibly bounded two-layered Timoshenko-type cylindrical shell / *J. P. Jones, J. S. Whittier* // *AIAA Journal.* – 1969. – Vol. 7. – № 2. – P. 244–250.
106. *Rajabi M.* Acoustic resonance scattering from a multilayered cylindrical shell with imperfect bonding / *M. Rajabi, Seyyed M. Hasheminejad* // *Ultrasonics.* – 2009. – Vol. 49. – Issue 8. – P. 682–695.
107. *Rajput Rakesh Singh* Non-Axisymmetric dynamic response of imperfectly bonded buried orthotropic thin empty cylindrical shell due to incident compressional wave / *Rajput Rakesh Singh, Sunil Kumar, Alok Choube, J. P. Dwivedi* // *European Journal of Scientific research.* – ISSN 1450-216X. – 2010. – Vol. 46. – № 3. – P. 443–464.

108. *Rajput Rakesh Singh* Non-Axisymmetric dynamic response of imperfectly bonded buried orthotropic thin empty cylindrical shell due to incident shear wave (SV wave) / *Rajput Rakesh Singh, Sunil Kumar, Alok Choube, J. P. Dwivedi* // *International Journal of Engineering Science and Technology*. – 2010. – Vol. 2 (12). – P. 7797–7811.

ЗМІСТ

Передмова.....	5
Вступ.....	10

РОЗДІЛ 1

Динаміка циліндричних оболонок у необмеженому тривимірному пружному середовищі.....	22
1.1. Динаміка циліндричної оболонки у пружному середовищі при вісесиметричних навантаженнях.....	22
1.1.1 Опис руху оболонки за допомогою рівнянь теорії пружності....	22
1.1.2 Опис руху оболонки за допомогою рівнянь, що враховують поперечний зсув та інерцію обертання.....	38
1.1.3 Опис руху оболонки за допомогою класичних рівнянь теорії тонких оболонок, які задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява....	44
1.2. Динаміка циліндричної оболонки у пружному середовищі при невісесиметричних навантаженнях.....	46
1.3. Динаміка підкріпленої повздовжніми ребрами жорсткості циліндричної оболонки у пружному середовищі.....	57
1.4. Динаміка підкріпленої поперечними ребрами жорсткості циліндричної оболонки у пружному середовищі.....	65

РОЗДІЛ 2

Застосування біполярних координат до розв'язання динамічних задач для циліндричних оболонок у пружному середовищі.....	79
2.1. Рівняння руху середовища та оболонки у біполярній системі координат.....	79
2.1.1 Біполярна система координат та її основні геометричні характеристики.....	79

2.1.2 Співвідношення теорії пружності у біполярній системі координат.....	82
2.1.3 Рівняння руху оболонок у біполярній системі координат.....	85
2.2 Динаміка циліндричної оболонки у пружному середовищі із вільною поверхнею.....	87
2.3 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у пружному середовищі.....	100

РОЗДІЛ 3

Дослідження взаємного впливу оболонки та вільної поверхні середовища при поверхневих динамічних навантаженнях

методом скінченних елементів.....	105
3.1. Основи методу скінченних елементів в задачах динаміки.....	105
3.2. Динаміка циліндричної оболонки у пружному півпросторі.....	117
3.3. Динаміка циліндричної оболонки, вісь якої перпендикулярна поверхні пружного середовища.....	119
3.4. Динаміка двох, коаксіально розташованих, циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі.....	126
3.4.1 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у необмеженому середовищі.....	126
3.4.2 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у середовищі із вільною поверхнею, при однаковій глибині залягання.....	128
3.4.2 Динаміка двох коаксіальних циліндричних оболонок у середовищі із вільною поверхнею, при різній глибині залягання...	131
Список використаних джерел.....	141

Наукове видання

СЕРІЯ «НАУКОВА КНИГА»

Андрій Володимирович ПОЖУЄВ
Володимир Іванович ПОЖУЄВ
Антон Володимирович ФАСОЛЯК

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ДИНАМІКИ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У ТРИВИМІРНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Монографія

Текст публікується за авторською редакцією.

Верстка Антон Володимирович Фасоляк
Відповідальний за видання Володимир Миколайович Систерова
Дизайн обкладинки Видавництво «СТАТУС»

Ілюстрації для обкладинки взяті з відкритих джерел із вільним доступом.
Відповідальним за достовірність фактів, цитат, власних імен та інших даних є автор.
Думки, положення та висновки, висловлені автором, не обов'язково відображають позицію редакції.



Видавець:

ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»

Адреса редакції: Україна, 69005, м. Запоріжжя,
Соборний просп., буд. 158, оф. 249.

моб. +38 (068) 448-11-28, mail@status.zp.ua
http://status.zp.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК № 5316 від 03.04.2017

Чому автори обирають «СТАТУС»

ПРОФЕСІЙНО. ЯКІСНО. СТАТУСНО.

Креативний дизайн Індивідуальний підхід до кожної книги	Якісна верстка Сансові стандарти наукового оформлення	Чудовий друк Konica Minolta bizhub PRO 1200, Xerox WorkCentre 5775	Книжковий папір Holmen Book Cream береже зір, подовжує вік книги	Різноманітна палітурка Тверда, м'яка, клейова (втачку), на скобу та пружину

status.zp.ua

Здано в набір 01-III-2019. Підписано до друку 15-V-2019. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний № 1.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 8,84. Обл.-вид. арк. 2,93. Друк. арк. відбиток 4417,5. Наклад 500 прим.
Замовлення № 9127/03.2018-А. Ціна договірна.

Гарнітури PT Serif, PT Sans використовується відповідно до Відкритої ліцензії компанії «ParaType Ltd».
© 2009, ParaType Ltd. All Rights Reserved.

Макет розроблений та віддрукований:

Фізична особа-підприємець Наталія Олександрівна Систерова, тел.: +38 (066) 541-41-01

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК № 5315 від 03.04.2017

ISBN 978-617-7759-16-3