УДК 517.9:621.382.323

Фасоляк А.В.[1], Онуфрієнко В.М.[2], Зіненко І.І.[3]
[1] канд. фіз.-мат. наук, старш. викл. НУ «Запорізька політехніка»
[2] д-р фіз.-мат. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»
[3] асист. НУ «Запорізька політехніка»

# РЕОЛОГІЯ ФРАКТАЛЬНИХ ТРАНСФОРМАТОРІВ КОЛИВАНЬ У ПРИСТРОЯХ З МЕТАМАТЕРІАЛЬНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Реологією вивчаються властивості матеріалу у взаємозв‘язку між напруженнями та деформаціями, які у свою чергу є фундаментальними поняттями механіки суцільних середовищ.

Концепцією суцільного середовища та математичними операціями, що використовуються в механіці чи електродинаміці, припускається, що існує неперервний перехід від однієї точки до іншої в середовищі. У цьому відношенні точка розуміється як математичний об'єкт нескінченно-малих розмірів. Однак завжди необхідно пам'ятати про існування протиріччя, оскільки «фізична» точка – це дещо інше, ніж математична точка.

При деяких практичних застосуваннях теорії ми стикаємося з дійсно нульовими розмірами. Це відбувається, при аналізі геометричних об'єктів, які мають гострі кромки та кути, в яких (формально) йдеться про нульові розміри. Екстраполяція результатів розрахунків до таких «нульових» розмірів іноді призводить до появи в результатах розрахунків нескінченно великих величин, що виходить за межі фізичного сенсу. Аналіз задач такого типу вимагає застосування спеціальних методів, які дозволяють уникнути фізично некоректних результатів.

Існують численні технологічні матеріали, які в принципі не можуть розглядатися як гомогенні, так що при аналізі їх властивостей необхідно враховувати їхню внутрішню структуру. Такими матеріалами є, наприклад, середовища, що складаються зі статистично розподілених або регулярно укладених елементів зі стрибкоподібним переходом від одного компонента до іншого.

Розглянемо далі клас реологічних задач механіки, пов‘язаних з визначенням коливань у трансформаторах з частинним заповненням у вигляді фрактально конфігурованої пластини.

Диферінтегральна модель фізичних фрактальних елементів розвивається на основі вводу хаусдорфової метрики та міри у вигляді диферінтегральної альфа-форми [1] амплітуд коливань в середовищі з фрактально конфігурованими пластинами, що вводяться у модель у вигляді дробового диференціала $d^{\alpha}x$, його зв’язку з дробовою похідною у співвідношеннях механіки суцільних середовищ, де дробова похідна $D_z^{\alpha}$ використовується у формі Рімана-Ліувілля [2].

Нехай пластина, знаходиться у метаматеріалі, що досліджується. Тоді коливання збуджуються в її власній площині вздовж осі $x$. Задаються амплітуда та частота коливань $x_0$ та $\omega$ відповідно. На деякій відстані $z$ від пластини, що коливається, в шарі товщиною $d^{\alpha}z$ зсув у матеріалі дорівнює, відповідно $x$ та $x+dx$. Тоді деформації і напруження мають вид

$$\gamma^{\alpha}(t,z)=\frac{\partial^{\alpha}x(t,z)}{\partial z};\ d\sigma(t,z)=\frac{\partial^{\alpha}\sigma(t,z)}{\partial z}. \qquad (1)$$

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^{\alpha}\sigma}{\partial z}, \qquad (2)$$

а напруження зсуву $\sigma$ записується у наступному вигляді

$$\sigma=G'\gamma+\frac{G''}{\omega}\frac{d\gamma}{dt}. \qquad (3)$$

Підставляючи вираз (3) в рівняння (2) приходимо до наступного рівняння відносно $\alpha$ -характеристики $x^{(\alpha)}$:

$$\rho\frac{\partial^2 x^{(\alpha)}}{\partial t^2}=G'\frac{\partial^2 x^{(\alpha)}}{\partial z^2}+\frac{G''}{\omega}\frac{\partial^3 x^{(\alpha)}}{\partial t\,\partial z^2},\ x^{(\alpha)}=D_z^{\alpha}x. \qquad (4)$$

Оскільки розв’язок рівняння (4) містить член $e^{it\omega}$, можна отримати:

$$\rho\,\omega^2 x^{(\alpha)} = G' \frac{\partial^2 x^{(\alpha)}}{\partial z^2} + iG'' \frac{\partial^2 x^{(\alpha)}}{\partial z^2} = G^* \frac{\partial^2 x^{(\alpha)}}{\partial z^2}, \text{ або } \frac{\partial^2 x^{(\alpha)}}{\partial z^2} = \Gamma^2 x^{(\alpha)} \qquad (5)$$

де $\Gamma = -\frac{\rho\omega^2}{G^*}$. Розв'язок рівняння (5) запишемо наступним чином:

$$D_z^{\alpha} x(z,t) = \left(k_1 e^{\Gamma z} + k_2 e^{-\Gamma z}\right)e^{i\omega t}, \qquad (6)$$

де $k_1$ та $k_2$ – константи інтегрування, які залежать від геометричної форми вимірювального пристрою. З одержаного виразу (6) відтворюється альфа-характеристика розв'язку поставленої задачі про коливання у пластині з урахування скейлінгового параметра $\alpha$.

Якщо пластина коливається на границі напівнескінченного середовища, тоді $k_1 = 0$ та рівняння (6) спрощується до наступного:

$$D_z^{\alpha} x(z,t) = x_0 e^{-\Gamma z} e^{i\omega t}. \qquad (7)$$

Зазвичай, величину $\Gamma$ в рівнянні (7) представляють у наступному вигляді:

$$\Gamma = 1/z_0 + i2\pi\lambda. \qquad (8)$$

Тоді рівняння (7) набуває вигляду

$$D_z^{\alpha} x(z,t) = x_0 e^{ш(\omega t - 2\pi z/\lambda) - 1/z_0}, \qquad (9)$$

де $\lambda$ – довжина хвилі.

Можна зауважити, що на деякій відстані від пластини, яка коливається ($z = z_0$), амплітуда хвиль у матеріалі зменшується в $e$ разів. Величина $1/z_0$ є поглинанням.

Розглянутий метод можна успішно застосувати в діапазоні частот від 4 Гц до 5000 Гц (при $\alpha = 1$). На більших частотах в діапазоні від 5 КГц до 3 ГГц використовується метод поширення хвиль у кварцовому кристалі, на поверхні якого наносять тонкий шар рідини, що досліджується.

В задачі про поширення коливань у хвилеводному електродинамічному трансформаторі з фрактальним матеріалом середовища реологічний підхід надає можливість записати скалярні компоненти поляризації $P^{(\alpha)}(E)$ та струму $J^{(\alpha)}(E)$ у вигляді розвинення в ряд електричної напруженості $E$ (індекс $(\alpha)$ позначає результат дробового диферінтегрування $D_E^k f(0)$, $\alpha$ - показник степеня). У розв'язку цієї задачі враховується вплив фрактальної конфігурації провідних поверхонь на електромагнітне поле в хвилеводному електродинамічному трансформаторі.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Онуфрієнко В. М. Диферінтегральні альфа-форми у хаусдорфовій метриці на фрактальних множинах / В. М. Онуфрієнко // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2002. – № 2 (8). – С. 31–35.

2. Онуфрієнко В.М. Диферінтегральна модель гістерезисних (у просторі) та ередитарних (у часі) процесів механіки й електродинаміки / В.М. Онуфрієнко // Тиждень науки-2020. Машинобудівний факультет: щоріч. наук.-практ. конф., 13-17 квітня 2020 р. : тези доп. / Редкол. : В.В. Наумик (відпов. ред.) Електрон. дані. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – С. 89–90. – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM). – назва з тит. екрана.