ISSN 2079–1836
2023, вип. 36

DOI 10.15421/4223108
УДК 539.3

А. В. Пожуєв[1]*, канд. фіз.-мат. наук, В. І. Пожуєв*[2]*, д-р фіз.-мат. наук,*
М. Жибігай, канд. техн. наук, *О. М. Міхайлуца*[1]*, канд. техн. наук*

ДВА ПІДХОДИ ДО АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ В СИСТЕМІ ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА – ПРУЖНЕ СЕРЕДОВИЩЕ

Розглядається плоска динамічна задача про нескінченно довгу циліндричну оболонку, оточену пружним інерційним середовищем, до якої у початковий момент часу прикладене внутрішнє нормальне навантаження. Запропоновано два підходи для аналізу нестаціонарного процесу у моменти часу близькі до початку навантаження, а саме перший, коли усі величини розкладаються у ряди Фур'є за кутовою координатою, а потім залежні від часу гармоніки знаходяться за методом Рунге – Кутта, і другий, коли для звільнення від часової змінної застосовується перетворення Лапласа з наступним його оберненням з використанням зміщених поліномів Лежандра. Проведене порівняння результатів за обома підходами у різні моменти часу і у різних точках оболонки.

Ключові слова: *циліндрична оболонка; пружне середовище; метод Рунге – Кутта; ряди Фур'є; зміщені поліноми Лежандра.*

Вступ. Зазначимо, що при розрахунку міцності підземних трубопроводів, як правило, основну увагу приділяють статичним задачам теорії пружності у плоскій постановці. У той же час вимоги більш ретельного міцністного розрахунку призводять до необхідності враховувати динамічний характер навантаження, особливо на початковому етапі прикладення зусиль.

В даній роботі з використанням для опису реакції середовища, яке оточує трубопровід, двопараметричної моделі Власова – Пастернака [1] в модифікації, запропонованої Львовським [5], коли більш точно враховуються інерційні властивості основи, розглянуті два підходи розв'язання динамічної задачі для циліндричної оболонки нескінченної довжини. У першому випадку усі задані і невідомі величини розкладаються в ряди Фур'є за кутовою координатою з наступним числовим інтегруванням диференціальних рівнянь для кожної гармоніки за методом Рунге – Кутта. Інший підхід полягає в тому, що для розв'язання диференціальних рівнянь для кожної гармоніки використовується інтегральне перетворення Лапласа, для обернення якого створено спеціальний алгоритм, що ґрунтується на використанні зміщених поліномів Лежандра. Проведено порівняння результатів, отриманих за двома запропонованими алгоритмами, яке показало добру відповідність між собою, що є

© А. В. Пожуєв, В. І. Пожуєв, М. Жибігай, О. М. Міхайлуца, 2023

свідченням достовірності, а також можливості використання кожного з цих підходів.

Викладення основного матеріалу дослідження. 1. Розглядається плоска нестаціонарна задача для нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка знаходиться в необмеженому пружному інерційному середовищі. У початковий момент часу до внутрішньої поверхні оболонки раптово прикладається нормальне навантаження. Метою дослідження є визначення напружень і переміщень оболонки в початкові моменти навантаження, а також порівняння отриманих результатів з відповідним статичним розв'язком і визначення коефіцієнту динамічності. Плоский рух трубопроводу описується рівняннями теорії оболонок, що ґрунтуються на гіпотезах Кірхгоффа – Лява [2]

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial W}{\partial \theta}=\rho\frac{1-\nu}{2G}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\,; \tag{1}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{h^2}{12R^4}\frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4}+\frac{W}{R^2}=-\rho\frac{1-\nu}{2G}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{1-\nu}{2Gh}\left(q_c-P\right),$$

де V, W – переміщення серединної поверхні оболонки відповідно у напрямку осей θ, z, R – радіус оболонки; h – товщина стінки; G, ρ, ν – модуль зсуву, густина і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; P – інтенсивність радіального навантаження; q_c – нормальна реакція з боку оточуючого середовища на коливання оболонки.

Згідно з [1, 5] у плоскому випадку реакція з боку ґрунту і прогини оболонки пов'язані такою залежністю

$$q_c\left(\theta,t\right)=-2c_0\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}+k_0W+m_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{2}$$

де k_0, c_0 – інтегральні характеристики роботи основи на стиск і зсув; m_o – приведена погонна маса одношарової і однорідної за товщиною основи; H – товщина динамічно активного шару ґрунту.

Згідно з [5] ці характеристики основи визначаються за формулами

$$k_0=\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\int\limits_R^{R+H}\psi'^2\left(r\right)dr\,;\; c_0=\frac{E_0}{4\left(1+\nu_0\right)}\int\limits_R^{R+H}\psi^2\left(r\right)dr;\; m_0=\bar{m}_0\int\limits_R^{R+H}\psi^2\left(r\right)dr, \tag{3}$$

де E_0 – постійний за глибиною модуль пружності ґрунту; $\bar{m}_0$ – постійна густина основи; v_0 – коефіцієнт Пуассона; $\psi\left(r\right)$ – функція, яка визначається в залежності від характеру дії заданого навантаження на основу.

Відповідно до [5] приймаємо наступне подання

$$\psi(r) = \cos\frac{\pi(r-R)}{2H}. \tag{4}$$

Початкові умови задачі приймаються нульовими

при $t = 0$
$$V = \frac{\partial V}{\partial t} = W = \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Граничні умови вважаються такими, що елемент основи, який прилягає до поверхні оболонки, деформується разом з нею, тобто відрив трубопроводу від ґрунту в даному дослідженні виключається.

Для переходу до безрозмірного вигляду введемо наступні позначення

$$\left\{V^*, W^*\right\} = \frac{1}{h}\{V, W\}; \quad \tau = \frac{c_S t}{R}; \quad c_S = \sqrt{G/\rho};$$

$$\aleph = \frac{h}{R}; \quad G' = G_0/G; \quad m_0' = \bar{m}_0/\rho; \quad H' = H/R. \tag{6}$$

Тоді рівняння (1) і (2) приймають такий вигляд

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial\theta^2} + \frac{\partial W'}{\partial\theta} = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 V'}{\partial\tau^2};$$

$$\frac{\partial V'}{\partial\theta} + \frac{\aleph^2}{12}\frac{\partial^4 V'}{\partial\theta^4} + W' = -\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial\tau^2} + \frac{1-\nu}{2G\aleph^2}\left(q_c - P\right); \tag{7}$$

$$q_c(\theta,\tau) = -\frac{G_0 H'\aleph}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial\theta^2} + \frac{\pi^2 G\aleph}{4H'(1-\nu_0)}W' + \frac{m_0 H'\aleph G}{2}\frac{\partial^2 W'}{\partial\tau^2}. \tag{8}$$

Вважаючи, що усі задані і шукані величини допускають розкладання в ряди Фур'є за кутовою координатою, будемо шукати розв'язок задачі в такому вигляді

$$V'(\theta,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\tau)\sin(n\theta);$$

$$\left\{W', P, q_c\right\}(\theta,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{W_n, P_n, q_{cn}\right\}(\tau)\cos(n\theta). \tag{9}$$

Підставляючи подання (9) в рівняння (7), (8), будемо мати для визначення коефіцієнтів Фур'є V_n, W_n систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2V_n}{d\tau^2}=-\frac{2n^2}{1-\nu}V_n-\frac{2n}{1-\nu}W_n\,;$$

$$\frac{d^2W_n}{d\tau^2}=-\frac{n}{\varepsilon}V_n-\frac{\phi(n)}{\varepsilon}W_n-\frac{P_n}{G\aleph^2\left(1-\frac{m_0'H'}{2\aleph}\right)}\,, \qquad (10)$$

де $\phi(n)=1+\frac{\aleph^2 n^4}{12}-\frac{(1-\nu)G_0'H'n^2}{4\aleph}-\frac{(1-\nu)\pi^2G_0'}{8H'\aleph(1-\nu_0)}\,;$

$\varepsilon=\frac{1-\nu}{2}\left(1-\frac{m_0'H'}{2\aleph}\right).$

Система (10) звичайним шляхом зводиться до системи чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку, яка більш зручна для числового інтегрування методом Рунге – Кутта. При цьому така система доповнюється нульовими початковими умовами, які випливають з урахуванням (9) з умов (5). При реалізації такого підходу на персональному комп’ютері отримані в результаті інтегрування масиви даних $V_n(\tau)$, $W_n(\tau)$ для різних значень часу запам’ятовуються, що дозволяє використовувати їх потім багатократно при підстановці в ряди виду (9) для різних значень кутової координати θ і будувати картину розподілу напружень і переміщень в оболонці по контуру. Зазначимо, що такий алгоритм дозволяє проводити розрахунки для довільних законів зміни заданого навантаження. При цьому буде змінюватися вид функції $P_n(T)$ в рівняннях (10).

В якості прикладу розглянемо систему із ℓ зосереджених вздовж кола сил

$$P(\theta,\tau)=P_0H(\tau)\sum_{k=1}^{\ell}\delta(\theta-\theta_k), \qquad (11)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; $H(x)$ – функція Хевісайда.

Під час проведення розрахунків використовувалося подання дельта-функції скінченним рядом Фур’є з покращеною збіжністю [4]

$$\delta(\theta)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{N}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)\cos(n\theta)\right]. \qquad (12)$$

З урахуванням подання (12) для коефіцієнтів Фур’є заданого навантаження можемо записати:

$$a_n = \begin{cases} \ell/2\pi & n = 0, \quad \ell = 2,4,6,8; \\ \dfrac{\ell N}{n\pi^2}\sin\left(\dfrac{n\pi}{N}\right) & n = \ell j, \quad j = 1,2,3, \quad \ell = 2,4,6,8; \\ 0, & n \neq \ell j, \quad j = 1,2,3, \quad \ell = 2,4,6,8, \end{cases}$$

$$P_n(\tau) = P_0 a_n H(\tau). \tag{13}$$

Переміщення точок оболонки визначаються з видозмінених виразів (9), а перерізна сила та згинальний момент тепер можуть бути знайденими за такими формулами

$$Q_y^* = \frac{Q_y}{P_0 h} = -\frac{\aleph}{6(1-\nu)} \sum_{n=1}^{N-1} n^3 W_n^* \sin(n\theta);$$

$$M_y^* = \frac{M_y}{P_0 h^2} = -\frac{1}{6(1-\nu)} \sum_{n=1}^{N-1} n^2 W_n^* \cos(n\theta), \tag{14}$$

де $W_n^* = \dfrac{G\aleph^2}{P_0} W_n$.

В якості прикладу результати отримані для таких значень безрозмірних параметрів $\aleph = 0,02;\ \nu = \nu_0 = 0,3;\ G_0' = 0,01;\ H' = 3;\ m_0' = 1.$ Збіжність рядів Фур'є визначалася шляхом числових експериментів, при цьому треба мати на увазі, що згідно з поданням (13) в рядах Фур'є для різного числа зосереджених сил бралися лише члени з *n* кратними ℓ. Як показали розрахунки для $\ell = 2$ треба брати N = 120 (тобто в рядах для переміщень і напружень достатньо було взяти 61 член, для $\ell = 4$, N = 120 (це відповідало 31 члену) і т.д. При числовому інтегруванні диференціальних рівнянь для кожної гармоніки для різних моментів часу для порівняння задавалися різною відносною точністю і проводилося порівняння результатів при фіксованому значенні N. Проведений аналіз показав, що у всіх випадках достатньо було обмежитися відносною точністю в 1%.

Для порівняння і кількісної оцінки динамічного ефекту прикладання навантаження отримано також статичний розв'язок задачі. При цьому в рівняннях (1) і (2) відкидалися члени з похідними за часом, а у формулі (11) був відсутнім множник $H(\tau)$. Крім того, в динамічній задачі проводилося порівняння за переміщеннями, згинальним моментом для оболонки в пружному середовищі і у вакуумі з метою оцінки впливу основи на характер напружено-деформованого стану трубопроводу. Частина із отриманих результатів наведена нижче у вигляді двох таблиць разом з результатами, отриманими іншим методом.

2. Розглянемо підхід, коли після розкладання усіх величин в ряди Фур'є за кутовою координатою для визначення залежних від часу коефіцієнтів застосовується інтегральне перетворення Лапласа, тобто замість метода Рунге – Кутта використовується підхід операційного числення. При цьому запропонована спеціальна програма для сумісного числового обернення перетворень Лапласа на основі зміщених поліномів Лежандра і підсумовування рядів Фур'є.

Застосуємо до рівнянь (7) і (8) інтегральне перетворення Лапласа за змінною τ, тоді у просторі зображень прийдемо до таких звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 V'^L}{\partial\theta^2}+\frac{\partial W'^L}{\partial\theta}=\frac{1-\nu}{2}p^2V'^L;$$

$$\frac{\partial V'^L}{\partial\theta}+\frac{\aleph^2}{12}\frac{\partial^4 V'^L}{\partial\theta^4}+W'^L=-\frac{1-\nu}{2}p^2W'^L+\frac{1-\nu}{2G\aleph^2}\left(q_c^L-P^L\right); \tag{15}$$

$$q_c^L=-\frac{G_0H'\aleph}{2}\frac{\partial^2 W'^L}{\partial\theta^2}+\frac{\pi^2 G\aleph}{4H'\left(1-\nu_0\right)}W'^L+\frac{m_0H'\aleph G}{2}p^2W'^L. \tag{16}$$

Тут p – параметр перетворення Лапласа, а буква L у ступенях означає трансформанту відповідної величини у просторі зображень.

У просторі зображень розв'язок задачі шукаємо у вигляді рядів за кутовою координатою θ, припускаючи, що трансформанти заданого навантаження і реакції з боку оточуючого пружного середовища розкладаються у вказані ряди, тоді можемо записати

$$\left\{W'^L,P^L,q_c^L\right\}(\theta,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{W_n^L,P_n^L,q_{cn}^L\right\}(p)\cos(n\theta);$$

$$V'^L(\theta,p)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n^L(p)\sin(n\theta). \tag{17}$$

Якщо підставити (17) в (16) і (15), будемо мати у просторі зображень систему двох алгебраїчних рівнянь відносно V_n^L і W_n^L, загальний розв'язок якої можна записати у такій формі:

$$\left\{V_n^L,W_n^L\right\}=\frac{\left\{\Delta_1,\Delta_2\right\}}{\det\left\|a_{ij}\right\|},\ (i,j=1,2);$$

$$a_{11}=-n^2-\frac{1-\nu}{2}p^2;\qquad a_{12}=-n;\qquad a_{21}=-a_{12}; \tag{18}$$

$$a_{22}=1+\frac{\aleph^2n^4}{12}+\frac{1-\nu}{2}p^2-\frac{(1-\nu)G'H'n^2}{4\aleph}-\frac{(1-\nu)\pi^2G'}{8H'\aleph(1-\nu)}-\frac{(1-\nu)m_0'H'p^2}{4\aleph}.$$

Визначники Δ_k $(k=1,2)$ отримуються із $\det\|a_{ij}\|$ шляхом заміни k-го стовпчика стовпчиком з елементами $\left(0,\quad -\dfrac{1-\nu}{2G\aleph^2}P_n^L\right)$.

Гармоніки трансформант згинального моменту і перерізної сили в оболонці знаходяться за такими формулами

$$M_{yn}^L=\frac{P_0h^2n^2}{6(1-\nu)}W_n^L\,;\quad Q_{yn}^L=\frac{P_0hn^3\aleph}{6(1-\nu)}W_n^L\,. \tag{19}$$

Для отримання остаточного розв’язку необхідно підставити (18), (19) в ряди Фур’є і застосувати обернене перетворення Лапласа.

В якості прикладу, як і у попередньому підході, розглянутий випадок, коли в початковий момент часу до оболонки прикладається навантаження, що описується формулою (11), тобто система із ℓ зосереджених вздовж коло сил. Тоді у просторі зображень для поперечного переміщення оболонки отримуємо такий вираз

$$W_*^L=\frac{G\aleph^2}{P_0}W^L=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\nu)a_{11}}{2\left(a_{12}a_{22}+a_{12}^2\right)}a_n\cos(n\theta)\,, \tag{20}$$

де a_n – коефіцієнти Фур’є функції $\sum\limits_{k=1}^{\ell}\delta(\theta-\theta_k)$, які, як і раніше, знаходяться за формулами (13).

Для побудови оригіналів застосовувався метод чисельного обернення перетворення Лапласа за допомогою зміщених поліномів Лежандра [3]. Згідно з даним методом оригінали шуканих величин обчислюються за такими формулами

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\alpha_kP_k^*\left(e^{-t}\right); \tag{21}$$

$$\alpha_k=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i^{(k)}F(i+1)\,;\qquad \alpha_i^{(k)}=(-1)^{k+i}\binom{k}{i}\frac{(k+i)!}{k!i!}\,, \tag{22}$$

де $P_k^*\left(e^{-t}\right)$ – зміщений поліном Лежандра.

Щоб отримати переміщення і напруження в оболонці необхідно в формули (21) і (22) замість $F(i+1)$ підставляти відповідні зображення із формули виду (20). Зазначимо тут, що при такому підході до проблеми обернення перетворення Лапласа задача зводиться до знаходження функції за її «зваженими моментами» [3] або до знаходження функції за значеннями зображення деякої функції в цілочисельних точках $p=k$ (k =0, 1, 2, …), а не до обчислення власне інтеграла обернення. В теоретичному плані питання про збіжність подання виду (21) і про оцінку залишкового члену в загальному випадку не доведене [3] і тому необхідні кожного разу числові експерименти, які і були проведені. Раніше [6] вже відзначалося, що коли в заданому навантаженні закони зміни за часом і за просторовими координатами не пов'язані один з одним, тоді обчислення на основі зміщених поліномів Лежандра достатньо ефективні. Зокрема, в даному прикладі на основі проведених експериментів встановлено, що задана точність завжди досягалась у всьому розглянутому часовому діапазоні, коли у формулах виду (21) бралося порядку десяти членів. Розрахунки були проведені для тих же значень параметрів, що і у першому підході. В табл. 1 і табл. 2 наведені безрозмірні значення нормальних прогинів і згинальних моментів для двох значень часу $\tau = 0{,}1$ і $\tau = 0{,}3$ для числа самоврівноважених навантажень $\ell = 8$. В силу періодичності прикладення зосереджених навантажень по колу значення наведені від місця прикладення першої сили ($\theta = 0$) до середини відстані до другої $(\theta = \pi/8)$. В клітинках таблиць у чисельниках стоять значення прогинів і згинальних моментів, які отримані за другим підходом, а в знаменниках – згідно з першим підходом.

Таблиця 1 – **Розподіл нормальних прогинів за кутовою координатою**

θ	$\tau = 0{,}1$	$\tau = 0{,}3$
0	0,89145/0,89490	7,6747/7,6688
π/80	0,31371/0,31366	3,0732/2,8500
π/40	-0,14756/-0,14912	-0,97081/-1,1496
3 π/80	-0,050543/-0,050252	-0,56931/-0,49107
π/20	-0,10405/-0,10427	-0,95672/-0,91956
π/16	-0,074895/-0,07487	-0,73982/-0,68260
3 π/40	-0,085665/-0,085707	-0,82340/-0,77065
7 π/80	-0,089962/-0,09006	-0,85094/-0,80429
π/10	-0,073738/-0,07369	-0,73498/-0,67491
9 π/80	-0,098314/-0,098478	-0,91317/-0,087207
π/8	-0,069421/-0,069341	-0,70292/-0,63936

Таблиця 2 – **Розподіл згинальних моментів за кутовою координатою**

θ	$\tau = 0{,}1$	$\tau = 0{,}3$
0	2,371/2,3862	18,653/19,681
π/80	-0,42634/-0,4317	-2,6324/-3,2418
π/40	1,0707/1,0772	-8,5183/-8,9308
3 π/80	0,49143/0,49735	3,0784/3,7554
π/20	-0,28152/-0,28420	-1,9933/-2,2417
π/16	0,14388/0,14508	1,0552/1,1600
3 π/40	-0,035594/-0,035809	-0,27779/-0,29124
7 π/80	-0,051494/-0,052001	-0,35947/-0,40895
π/10	0,11672/0,11774	0,84063/0,93454
9 π/80	-0,15738/-0,15873	-1,1417/-1,2647
π/8	0,17122/0,17268	1,2442/1,3778

Висновки. Як видно з таблиць, шляхом числових експериментів та варіацією такими параметрами, як відносна точність інтегрування системи рівнянь за методом Рунге – Кутта та кількість членів в поліномах Лежандра, результати за обома методами практично співпадають, що з одного боку є підставою вважати їх достовірними, а з іншого дозволяє використовувати для розв'язання подібних задач обидва запропонованих підходи.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Власов В.З**., Леонтьев Н.Н*. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1969. 492 с.
2. ***Вольмир А.С***. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. ***Крылов В.И.**, Скобля Н.С*. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 223 с.
4. ***Ланцош К.*** Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
5. ***Львовский В.М.*** К определению приведенной массы и упругих характеристик однослойных и многослойных обобщенных оснований с постоянными и переменными модулями упругости // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. 1971. № 3. С. 38–46.
6. ***Пожуев В.И.**, Полякова Н.П*. Нестационарная реакция пластины на упругом полупространстве на действие подвижной нагрузки.// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 5. С. 175–182.

UDC 539.3

A.V. Pozhuyev[1], PhD (Phys.-Math.),
ORCID ID: 0000-0002-4083-5139

V.I. Pozhuev[2], Dr. Sci. (Phys.-Math.),
ORCID ID: 0000-0002-9163-7888

M. Zhibigai, PhD (Tech.),

O. M. Mikhailutsa[1], PhD (Tech.)
ORCID ID: 0000-0003-2935-7997

TWO APPROACHES TO THE ANALYSIS OF A NON-STATIONARY PROCESS IN THE SYSTEM CYLINDRICAL SHELL – ELASTIC MEDIUM

A plane dynamic problem of an infinitely long cylindrical shell surrounded by an elastic inertial medium is considered. At the initial moment of time, an internal normal load is applied to the shell. Two approaches are proposed for the analysis of a non-stationary process at times close to the beginning of loading. In the first one, all quantities are expanded into Fourier series in terms of the angular coordinate, and then the time-dependent harmonics are found using the Runge – Kutta method. In the second, the Laplace transformation is used to get rid of the time variable, followed by its inversion using the shifted Legendre polynomials. The results of both approaches are compared at different times and at different points of the shell.

Keywords: *cylindrical shell; elastic medium; Runge – Kutta method; Fourier series; shifted Legendre polynomials.*

When calculating underground pipelines, as a rule, a technique is used that is based on the methods of elastic body statics. At the same time, at times close to the start of loading, dynamic effects can occur that significantly affect the results of calculations. In this regard, it is necessary to develop more accurate methods, as well as take into account the inertial properties of the environment surrounding the pipeline. In this paper, two approaches are proposed for the analysis of a non-stationary process at the initial moments of time. In them, the pipeline is considered as a cylindrical shell of infinite length. Soil behavior is described by the refined two-parameter Vlasov-Pasternak model, which takes into account the inertial properties of the environment. According to the first approach, all given and unknown quantities are expanded into Fourier series in terms of the angular coordinate to jointly solve the equations of shell motion and reaction from the medium. After that, a system of ordinary differential equations is obtained for finding the time-dependent Fourier coefficients for displacements and stresses in the shell, which is proposed to be solved by the Runge – Kutta method. Numerous experiments have been carried out both to achieve the required accuracy of numerical integration and to determine the number of terms in the Fourier series. In the second approach, the Laplace integral transform is first applied to eliminate the time variable from the equations. After that, in the space of images, the displacement transformants are expanded into Fourier series in terms of the angular coordinate, and an algebraic system of equations for the harmonics of the transformants is obtained. A special algorithm has been developed for joint inversion of Laplace transforms based on shifted Legendre polynomials and summation of Fourier series. Numerous experiments made it possible to determine the required number for each moment of time of both the Legendre polynomials and the number of terms in the Fourier series. The results of displacements and stresses obtained by each of the two approaches are compared. It showed a practical match, which indicates the reliability of the results. In addition, this means that any of these approaches can be used in practical calculations.

REFERENCES

1. ***Vlasov V.Z.***, *Leontiev N.N.* Beams, slabs and shells on an elastic foundation. Moscow: Fizmatgiz, 1969. 492 p. (in Russian).
2. ***Volmir A.S.*** Nonlinear dynamics of plates and shells. Moscow: Nauka, 1972. 432 p. (in Russian).
3. ***Krylov V.I.***, *Skoblya N.S.* Approximate Fourier transform methods and inversion of the Laplace transform. M.: Nauka, 1974. 223 p.(in Russian).
4. ***Lancosh K.*** Practical methods of applied analysis. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 524 p. (in Russian).
5. ***Lvovsky V.M.*** On the determination of the reduced mass and elastic characteristics of single-layer and multilayer generalized bases with constant and variable moduli of elasticity.// Izv. universities. Construction and architecture. 1971. No. 3. P. 38–46. (in Russian).
6. ***Pozhuev V.I.***, *Polyakova N.P.* Non-stationary response of a plate on an elastic half-space to the action of a moving load. // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of a rigid body. 1990. No. 5. P. 175–182. (in Russian).

[1]Запорізький національний університет,
Запоріжжя, Україна

[2]Національний університет «Запорізька політехніка»,
Запоріжжя, Україна

Надійшла до редколегії 06.07.2023