

РЕДУЦИРОВАННОЕ ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СКОРОСТЬЮ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

Предложен редуцированный закон терминального управления скоростью вращения вала электродвигателя, использующий усеченное асимптотическое приближение динамики двигателя и существенно упрощающий алгоритм управления. Моделирование динамики вала с предложенным законом управления показало его эффективность.

Ключевые слова: разномасштабная система, терминальное управление, редуцированная асимптотика закона управления.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих электромеханических систем часто необходимо осуществлять перевод электродвигателя (ЭД) в заданный режим работы по скорости за нужное время. Подобная задача относится к задаче терминального управления. Ее особенность состоит в наличии разномасштабных по времени процессов в объекте управления – ЭД – быстрых электрических и медленных механических. Одним из средств решения такой задачи являются асимптотические методы [1]. Они позволяют осуществить декомпозицию закона управления на «быструю» и «медленную» части, соединяя которые затем в единую комбинацию, можно найти асимптотическое приближение исходного закона. Если пренебречь быстрой частью закона управления, заменив ее условиями квазистатики, можно прийти к усеченному и, одновременно, упрощенному (редуцированному) управлению.

Указанный метод применяется в статье для формирования редуцированного терминального управления электродвигателем постоянного тока. На основании сравнения с полным законом делается вывод о достаточной точности редуцированного закона при одновременном выигрыше в простоте алгоритма управления.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данного исследования является проверка эффективности предлагаемого асимптотического метода и

применение его для построения простого и вместе с тем достаточно точного алгоритма управления типовым динамическим объектом, каким является электродвигатель.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача терминального управления угловой скоростью вращения вала электродвигателя постоянного тока, управляемого входным напряжением U . Процессы в ЭД описываются уравнениями

$$U - E_a - L \frac{dI}{dt} = RI,$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_m - C_{fr} \Omega - M_{load},$$

где U – управляющее напряжение, приложенное к якорной цепи электродвигателя; I – ток в якорной цепи; R и L – ее активное сопротивление и индуктивность; Ω – угловая скорость вращения вала ЭД; $E_a = C_e \Omega$ – эдс реакции якоря, пропорциональная скорости Ω (при условии постоянства потока возбуждения); $M_m = C_m I$ – вращающий магнитный момент, пропорциональный току I (при том же условии); C_{fr} – коэффициент вязкого трения; M_{load} – момент сопротивления (нагрузки) на валу.

Для моделирования выберем микродвигатель постоянного тока с параметрами из работы [2]: $R = 7,9$ Ом, $L =$

$=0,0136$ Гн, $J = 1,32 \cdot 10^{-6}$ кг·м², $C_e = C_m = 0,0246$ В·с/рад, $C_{fr} \approx 0$. Номинальные значения переменных также известны: $\Omega_{nom} = 400$ рад/с, $U_{nom} = 11,8$ В, $I_{nom} = (U_{nom} - C_e \Omega_{nom}) / R = 0,25$ А, $M_{load_nom} = C_m I_{nom} = 6,1 \cdot 10^{-3}$ Н·м.

Следуя общему подходу [1, 2], выразим разномасштабность по времени при помощи безразмерного малого параметра. В нашей задаче он должен входить в «быстрое» уравнение – уравнение для электрического тока в качестве множителя при производной тока. Для этого положим $L = L_0 \cdot \lambda$, где $L_0 = 0,136$. Тогда $\lambda = 0,1$ дает фактическое значение L . Число λ будем далее рассматривать как малый параметр, и строить асимптотику задачи по этому параметру.

Введем переменные – отклонения от номинальных значений: $\omega = \Omega - \Omega_{nom}$, $i = I - I_{nom}$, $u = U - U_{nom}$ и перепишем уравнения ЭД в отклонениях при условии $M_{load} \approx M_{load_nom}$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= a_1\omega + a_2i + m_{load}, \\ \lambda \frac{di}{dt} &= a_3\omega + a_4i + bu. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ – малый параметр, ω – медленная переменная, i – быстрая, $m_{load} = M_{load} - M_{load_nom} \approx 0$, а постоянные коэффициенты выражаются формулами

$$a_1 = -\frac{C_{fr}}{J}, \quad a_2 = \frac{C_m}{J}, \quad a_3 = -\frac{C_e}{L_0}, \quad a_4 = -\frac{R}{L_0}, \quad b = \frac{1}{L_0}.$$

Поставим задачу перевести ЭД в номинальный режим по скорости из состояния с начальной скоростью $\Omega(0)$ за конечное время t_f . В терминах переменной ω это эквивалентно переводу системы (1) из начального состояния $\omega(0) = \Omega(0) - \Omega_{nom}$ в нулевое состояние $\omega = 0$. Качество перевода будем оценивать квадратичным функционалом

$$J_f = \frac{1}{2} f \omega^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (q_1 \omega^2 + q_2 i^2 + ru^2) dt, \quad (2)$$

где весовые коэффициенты $f > 0$, $q_{1,2} \geq 0$, $r > 0$ выбираются дополнительно из соображений эффективности управления.

Общепринятым способом считается в настоящее время выбор значений указанных коэффициентов обратно пропорционально квадрату размаха допустимых отклонений соответственных переменных состояния и управления от желаемых значений с последующей доводкой в процессе численного моделирования [3]. В рассматриваемой нами терминальной задаче выбирается, в том числе, параметр f . Его величина берется обратно пропорциональной квадрату желаемой терминальной ошибки, т. е. ошибки управления по скорости в момент $t = t_f$. При достаточно большом весе f терминальная ошибка $\omega(t_f) = \Omega(t_f) - \Omega_{nom}$ может быть сделана сколь угодно малой: $\omega(t_f) \approx 0$ [4].

Данный способ использован в настоящей статье. Заметим, что точные регулярные методы дополнительной оптимизации системы по коэффициентам функционала качества (2) в настоящее время отсутствуют.

Не вдаваясь в рутинные промежуточные расчеты, сразу назовем выбранные значения коэффициентов:

$$f = 0,1, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 4600, \quad r = 300.$$

Они обеспечивают

- 1) отсутствие перерегулирования по скорости вращения вала ЭД;
- 2) приемлемую амплитуду управляющего напряжения, безопасную для якорной цепи ЭД;
- 3) достаточно малую терминальную ошибку, т. е. малое отклонение конечной скорости от заданной в 400 рад/с.

Результаты, подтверждающие указанное качество управления, приводятся в конце статьи.

Время t_f определяется требованиями к скорости управления. Для систем управления с микродвигателями, к которым относится рассматриваемая система с электродвигателем постоянного тока, можно взять время регулирования t_f равным типичному для таких систем значению в 15 миллисекунд.

Закон управления. Перепишем задачу (1), (2) в матричном виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (3)$$

$$J_f = \frac{1}{2} (x' \Phi x)_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x' Q x + ru^2) dt, \quad (4)$$

где $x = \begin{bmatrix} \omega \\ i \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \lambda^{-1} a_3 & \lambda^{-1} a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^{-1} b \end{bmatrix}$, $S = BR^{-1}B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} s \end{bmatrix}$, $s = b^2 r^{-1}$, $H = [1 \quad 0]$, $\Phi = H'fH = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$, штрих обозначает транспонирование.

Оптимальное управление для задачи (3), (4) на отрезке $0 \leq t \leq t_f$ определяется выражением [4]

$$u = -r^{-1} B' K(t) x, \quad (5)$$

где матрица $K(t)$ находится из уравнения Риккати

$$\frac{dK}{dt} = -KA - A'K + KSK - Q, \quad K|_{t=T} = \Phi.$$

Согласно [4] K представляется с помощью матричного разложения

$$K = P + W'(M + F^{-1})^{-1}W, \quad (6)$$

где матрицы K, P, W, M и F имеют покомпонентный вид

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & \lambda k_2 \\ \lambda k_2 & \lambda k_3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 & \lambda p_2 \\ \lambda p_2 & \lambda p_3 \end{bmatrix}, W = [w_1 \quad \lambda w_2],$$

$M = m$ и $F = f$ – скаляры.

В развернутой записи матрица K приобретает тогда вид

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & \lambda k_2 \\ \lambda k_2 & \lambda k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{10} & \lambda p_2 \\ \lambda p_2 & \lambda p_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{m+f-1} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \lambda w_2 \end{bmatrix} \cdot [w_1 \quad \lambda w_2].$$

Отдельные компоненты удовлетворяют следующим уравнениям, которые для удобства запишем в смещенном времени $\vartheta = t - t_f, -t_f \leq \vartheta \leq 0$

$$\frac{dp_1}{d\vartheta} = -2a_1 p_1 - 2a_3 p_2 + sp_2^2 - q_1, \quad p_1|_{\vartheta=0} = 0,$$

$$\lambda \frac{dp_2}{d\vartheta} = -a_2 p_1 - a_4 p_2 - \lambda a_1 p_2 - a_3 p_3 + sp_2 p_3, \quad p_2|_{\vartheta=0} = 0,$$

$$\lambda \frac{dp_3}{d\vartheta} = -2\lambda a_2 p_2 - 2a_4 p_3 + sp_3^2 - q_2, \quad p_3|_{\vartheta=0} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dw_1}{d\vartheta} = -(a_3 - sp_2)w_2, \quad w_1|_{\vartheta=0} = 1,$$

$$\lambda \frac{dw_2}{d\vartheta} = -a_2 w_1 - (a_4 - sp_3)w_2, \quad w_2|_{\vartheta=0} = 0,$$

$$\frac{dm}{d\vartheta} = -sw_2^2, \quad m|_{\vartheta=0} = 0.$$

Асимптотика матриц обратной связи P, W и M . Согласно теореме из [4], компоненты решения системы уравнений (7) при малом λ имеют равномерные асимптотические разложения нулевого порядка вида

$$p_1(\vartheta, \lambda) = p_{10}(\vartheta) + \lambda O(1),$$

$$p_i(\vartheta, \lambda) = p_{i0}(\vartheta) + \Pi_0 p_i(\tau) + \lambda O(1) \quad (i = \overline{2, 3}),$$

$$w_1(\vartheta, \lambda) = w_{10}(\vartheta) + \lambda O(1),$$

$$w_2(\vartheta, \lambda) = w_{20}(\vartheta) + \Pi_0 w_2(\tau) + \lambda O(1),$$

$$m(\vartheta, \lambda) = m_0(\vartheta) + \lambda O(1),$$

где $\tau = (t - t_f)/\lambda$, а $O(1)$ – ограниченные на области $-t_f \leq \vartheta \leq 0, 0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ функции от ϑ и λ, λ_0 – некоторое положительное число.

Составляющие типа $\Pi_0 X(\tau)$ быстро убывают при $\tau \rightarrow -\infty$ [1]. $\Pi_0 X(\tau) < C e^{k\tau}$ и, значит, они несутся вне малой окрестности конечного момента $t = t_f$ ($\vartheta = 0$). По этой причине в теории разномасштабных

систем они называются составляющими пограничного слоя, или «погранслойными» составляющими. Попытаемся ими пренебречь. Это приведет к потере точности задания коэффициентов обратной связи в законе (5), но лишь в конце промежутка управления (в узком пограничном слое). По нашему предположению такая потеря не должна существенно отразиться на точности управления скоростью ввиду инерционности вала двигателя. Подобное усеченное представление коэффициентов обратной связи в (5) и названо выше редуцированным. Оно имеет вид

$$p_1(\vartheta, \lambda) = p_{10}(\vartheta) + \lambda O(1),$$

$$p_i(\vartheta, \lambda) = p_{i0}(\vartheta) + \lambda O(1) \quad (i = \overline{2, 3}),$$

$$w_1(\vartheta, \lambda) = w_{10}(\vartheta) + \lambda O(1),$$

$$w_2(\vartheta, \lambda) = w_{20}(\vartheta) + \lambda O(1),$$

$$m(\vartheta, \lambda) = m_0(\vartheta) + \lambda O(1),$$

где $O(1)$ – функции от ϑ и λ , ограниченные на отрезке $-t_f \leq \vartheta \leq \vartheta_0 < 0$ при $0 \leq \lambda \leq \lambda_0, \vartheta_0$ – фиксировано и близко к нулю [4].

Главные члены записанных разложений определяют из уравнений (7), если положить в них $\lambda = 0$ [4]

$$\frac{dp_{10}}{d\vartheta} = -2a_1 p_{10} - 2a_3 p_{20} + sp_{20}^2 - q_1, \quad p_{10}(0) = 0$$

$$0 = -a_2 p_{10} - a_4 p_{20} - a_3 p_{30} + sp_{20} p_{30},$$

$$0 = -2a_4 p_{30} + sp_{30}^2 - q_2,$$

$$\frac{dw_{10}}{d\vartheta} = -(a_3 - sp_{20})w_{20}, \quad w_{10}(0) = 1, \quad (8)$$

$$0 = -a_2 w_{10} - (a_4 - sp_{30})w_{20},$$

$$\frac{dm_0}{d\vartheta} = -sw_{20}^2, \quad m_0|_{\vartheta=0} = 0.$$

Уточним, выражения вида $X(0)$ имеют здесь смысл значений функций $X(\vartheta)$ при $\vartheta = 0$, т. е. при $t = t_f$. Заметим также, так как $p_{30}(\vartheta)$ – постоянная величина, то $p_{30}(\vartheta) = p_{30}(0) = p_{30}|_{t=t_f}$.

Асимптотика матрицы K и асимптотика закона управления. Используя представленные асимптотические приближения компонент матриц P, W и M , запишем нулевое асимптотическое приближение этих матриц и всей матрицы Риккати K [4]

$$K_0 = \begin{bmatrix} k_{10} & \lambda k_{20} \\ \lambda k_{20} & \lambda k_{30} \end{bmatrix} = P_0 + W_0^* W_0 (m_0 + f^{-1})^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_{10} & \lambda p_{20} \\ \lambda p_{20} & \lambda p_{30} \end{bmatrix} + \frac{1}{m_0 + f^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} w_{10} \\ \lambda w_{20} \end{bmatrix} \cdot [w_{10} \quad \lambda w_{20}].$$

Асимптотический закон управления выражается теперь формулой

$$u_0 = -r^{-1} B' K_0 x. \quad (9)$$

Для нахождения K_0 в функции времени надо решить уравнения (8). Для этого сначала из алгебраических уравнений системы (8) выразим члены p_{30} , p_{20} и w_{20} через константы и члены p_{10} , w_{10} . Затем подставим их в оставшиеся дифференциальные уравнения и проинтегрируем последние. Из алгебраических уравнений (8) находим

$$p_{30} = \frac{1}{s} \left(a_4 + \sqrt{a_4^2 + sq_2} \right) = \text{const},$$

$$p_{20} = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} (a_2 p_{10} + a_3 p_{30}),$$

$$p_{20}(0) = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} (a_2 p_{10}(0) + a_3 p_{30}) = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} a_3 p_{30}, \quad (10)$$

$$w_{20} = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} a_2 w_{10},$$

$$w_{20}(0) = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} a_2 w_{10}(0) = \frac{a_2}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}},$$

Дифференциальные уравнения для оставшихся компонент запишем отдельно

$$\frac{dp_{10}}{d\vartheta} = -2a_1 p_{10} - 2a_3 p_{20} + sp_{20}^2 - q_1, \quad p_{10}(0) = 0,$$

$$\frac{dw_{10}}{d\vartheta} = -(a_3 - sp_{20}) w_{20}, \quad w_{10}(0) = 1, \quad (11)$$

$$\frac{dm_0}{d\vartheta} = -sw_{20}^2, \quad m_0|_{\vartheta=0} = 0.$$

Интегрируя уравнения (11) и подставляя их решения в конечные уравнения (10), рассчитаем матрицу K_0 в функции текущего времени. Затем с помощью формулы (9), в силу уравнений объекта (1), найдем асимптотически оптимальное управление u_0 и формируемые им процессы в объекте ω_0 и i_0 . Для нахождения точных оптимальных процессов u , ω и i аналогично решим систему уравнений (7) совместно с (1), (3) при указанной выше величине малого параметра $\lambda = 0,1$.

Полные значения процессов выражаются через номинальные значения и найденные отклонения: $U = U_{nom} + u$, $\Omega = \Omega_{nom} + \omega$, $I = I_{nom} + i$ – точные оптимальные процессы; $U_0 = U_{nom} + u_0$, $\Omega_0 = \Omega_{nom} + \omega_0$, $I_0 = I_{nom} + i_0$ – их асимптотики.

Результаты расчетов матрицы Риккати и процессов управления представлены на нижеследующих рис. 1–3. Оптимальные (точные) компоненты матрицы Риккати обозначены на графиках именами $K11 = k_1$, $K12 = \lambda k_2$, $K22 = \lambda k_3$. Их нулевые асимптотические приближения – $K011 = k_{10}$, $K012 = \lambda k_{20}$, $K022 = \lambda k_{30}$. Аналогичным образом обозначены и процессы U , Ω и I – оптимальное управляющее напряжение, угловая скорость и ток в обмотке соответственно; $U_0 = U_0$, $\Omega_0 = \Omega_0$ и $I_0 = I_0$ – их асимптотические приближения.

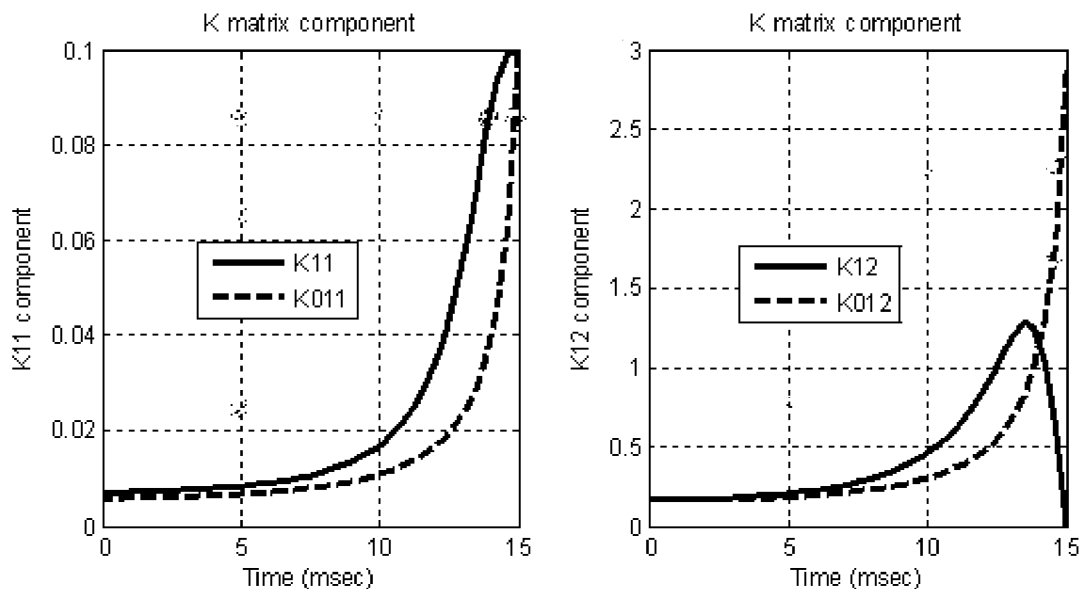


Рис. 1. Компоненты матрицы Риккати: $K11 = k_1$ и $K12 = \lambda k_2$ – точные; $K011 = k_{10}$ и $K012 = \lambda k_{20}$ – асимптотически приближенные

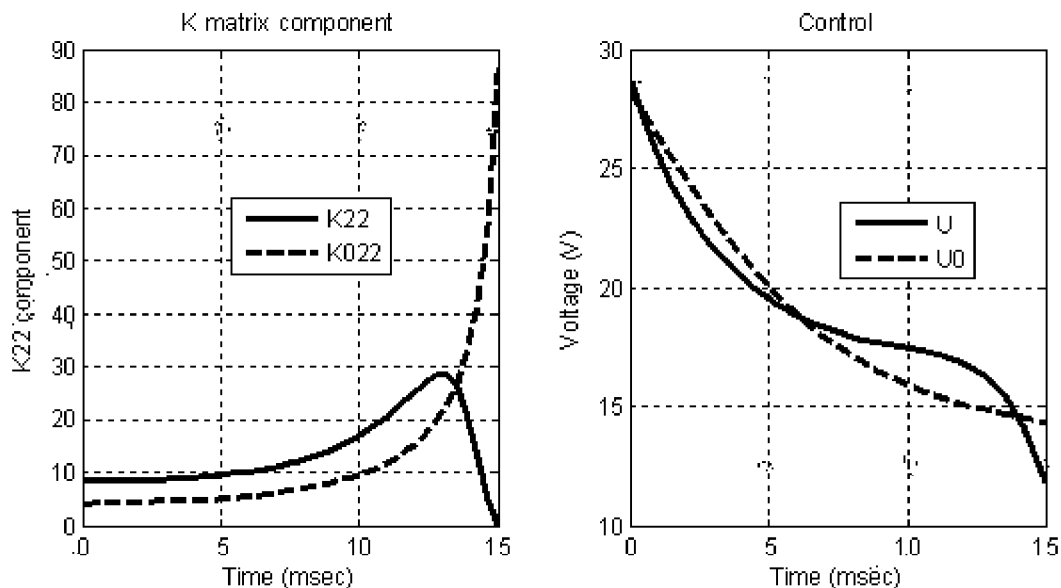


Рис. 2. Компонента матрицы Риккати: $K22 = \lambda k_3$ – точная; $K022 = \lambda k_{30}$ – асимптотически приближенная (слева). Управляющее электрическое напряжение U и его асимптотическое приближение $U0 = U_0$ (справа)

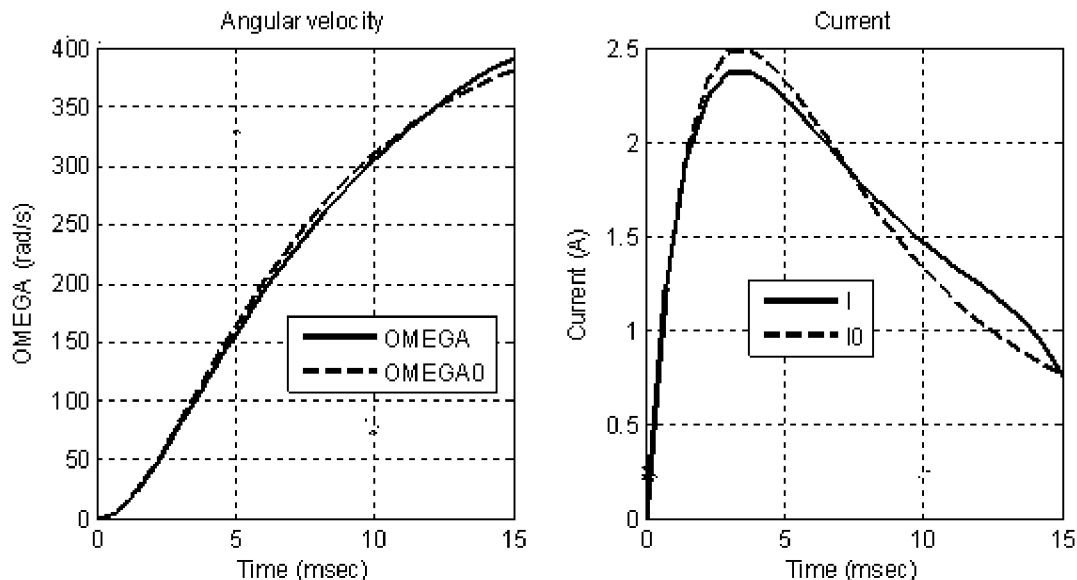


Рис. 3. Угловая скорость вращения вала двигателя $OMEGA = \Omega$, ток в обмотке I , их асимптотические приближения $OMEGA0 = \Omega_0, I0 = I_0$

Из графиков на рис. 1 и 2 наблюдается определенное расхождение точных и асимптотических компонент матрицы Риккати. Это связано с использованием асимптотики нулевого порядка малости по λ , а также с отбрасыванием погранслойных составляющих.

Тем не менее, сами процессы управления близки (см. напряжения U и U_0 на рис. 2, справа, скорости микродвигателя Ω и Ω_0 на рис. 3, слева и токи I и I_0 на рис. 3, справа). Заметим, что это наблюдается при довольно жестком ограничении на время управления, составляющее в нашем примере всего лишь 15 мс.

Одновременно достигается достаточно точный терминальный переход скорости из нулевого значения в заданное номинальное Ω_{nom} за указанное малое время 15 мс без перерегулирования (см. рис. 3, слева).

Следует также отметить, что, хотя и происходит бросок пускового тока I до 2,5 А (см. рис. 3, справа), но этот бросок кратковременный. Он не может вызвать перегрева обмотки микродвигателя.

ВЫВОД

Выполненные расчеты свидетельствуют о приемлемой точности упрощенной асимптотики закона управления. Формирование подобного управления осуществляется путем решения более простых уравнений, чем точного, оптимального управления. Его встраивание в управляющий микроконтроллер связано с заданием существенно меньшего числа узловых точек по времени и, вследствие этого, уменьшением расхода объема памяти и времени работы контроллера.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Васильева, А. Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М. : Наука, 1973. – 272 с.
2. *Yackel, R. A.* A boundary layer method for the matrix Riccati equation/ R. A. Yackel, P. V. Kokotovic // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1973. – V. 18. – № 1, February. – P. 17–24.
3. *Kwakernaak, H.* Design Methods for Control Systems / O. H. Bosgra, H. Kwakernaak, G. Meinsma. – Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, 2006. – 319 pp.
4. *Козырев, В. Г.* Редуцированный оптимальный регулятор выхода сингулярно возмущенных систем / В. Г. Козырев // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2005. – № 1. – С. 134–139.

Стаття надійшла до редакції 27.01.2012.

Після доробки 24.02.2012.

Козырев В. Г.
РІЗНОМАСШТАБНЕ ТЕРМІНАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ ШВИДКІСТЮ ОБЕРТАННЯ ВАЛА ЕЛЕКТРОДВИГУНА

Запропонований редукований закон термінального керування швидкістю обертання вала електродвигуна, що враховує регулярні компоненти асимптотичного представлення динаміки двигуна і істотно спрощує алгоритм керування. Моделювання динаміки вала із запропонованим законом керування показало його ефективність.

Ключові слова: різномасштабна система, термінального керування, зредукована асимптотика закону керування.

Kozyrev V. G.

MULTI-TIME-SCALE TERMINAL CONTROL OF MOTOR AXIS ANGULAR VELOCITY

Reduced law of terminal control of electric motor shaft speed of rotation utilizing truncated motor dynamics asymptotic approximation and appreciably simplifying control algorithm is proposed. Modeling of the dynamics of the shaft with the proposed control law has shown its effectiveness.

Key words: multi-time-scale system, terminal control, reduced asymptotic of control law.