

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРОСТОРИ ГЕЛЬДЕРА

ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

В роботі вивчається структура узагальнених просторів Гельдера функцій двох комплексних змінних. Встановлюються умови, що накладаються на структурні характеристики просторів, при виконанні яких простори збігаються або вкладені один в одного.

Нехай $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$ – кістяк Ляпунова, утворений довільними замкненими контурами Ляпунова γ_1 і γ_2 на комплексній площині; функція $x(t, \tau) \in C$ на γ , де $t \in \gamma_1$, $\tau \in \gamma_2$. Розглядаються функціонали [1]

$$\omega_k(\delta_1, \delta_2; x) = \sup_{\substack{|h| \leq \delta_1 \\ |\eta| \leq \delta_2}} \left| \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} C_k^v x(t + vh, \tau + v\eta) \right|,$$

$$\omega_{k,l}(\delta_1, \delta_2; x) = \sup_{\substack{|h| \leq \delta_1 \\ |\eta| \leq \delta_2}} \left| \sum_{v=0}^k \sum_{\mu=0}^l (-1)^{k+l-v-\mu} C_k^v C_l^\mu x(t + vh, \tau + \mu\eta) \right|,$$

$$\omega_k(\delta_1, 0; x) = \omega_{k,0}(\delta_1, \delta_2; x) = \sup_{\tau \in \gamma_2} \sup_{|h| \leq \delta_1} \left| \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} C_k^v x(t + vh, \tau) \right|,$$

$$\omega_k(0, \delta_2; x) = \omega_{0,k}(\delta_1, \delta_2; x) = \sup_{t \in \gamma_1} \sup_{|\eta| \leq \delta_2} \left| \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} C_k^v x(t, \tau + v\eta) \right|,$$

які є відповідно повним, мішаним і частинними модулями неперервності функції $x(t, \tau)$ порядку k ($k+l$), де k, l – натуральні числа. Нехай $\omega(\delta_1, \delta_2)$ – деякий модуль неперервності, а $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ – відповідні йому [2] прості (одновимірні) модулі неперервності. Під узагальненим простором Гельдера H_ω будемо розуміти множину функцій $x(t, \tau) \in C$ на γ , модулі неперервності яких задовольняють умови:

$$\omega(\delta_1, \delta_2; x) \leq C_1 \omega(\delta_1, \delta_2), \quad (A)$$

$$\omega_{1,1}(\delta_1, \delta_2; x) \leq C_2 \Omega_1(\delta_1) \Omega_2(\delta_2), \quad (B)$$

де C_1, C_2 – сталі, що залежать тільки від $x(t, \tau)$. Слід зауважити, що умова (B) не впливає з умови (A).

Норму в просторі H_ω введемо наступним чином:

$$\begin{aligned} \|x(t, \tau)\|_{H_\omega} &= \|x(t, \tau)\|_C + H(x; \omega) + H^{t\tau}(x; \omega) = \\ &= \max_{(t, \tau) \in \mathcal{T}} |x(t, \tau)| + \sup_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega(\delta_1, \delta_2; x)}{\omega(\delta_1, \delta_2)} + \sup_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega_{1,1}(\delta_1, \delta_2; x)}{\Omega_1(\delta_1)\Omega_2(\delta_2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Зауважимо, що в просторі $H_\omega \equiv H_{\Omega_1\Omega_2}$ норму можна визначити і таким чином:

$$\begin{aligned} \|x(t, \tau)\|_{H_{\Omega_1\Omega_2}} &= \|x(t, \tau)\|_C + H^t(x; \Omega_1) + H^\tau(x; \Omega_2) + H^{t\tau}(x; \omega) = \\ &= \max_{(t, \tau) \in \mathcal{T}} |x(t, \tau)| + \sup_{\delta_1 > 0} \frac{\omega(\delta_1, 0; x)}{\Omega_1(\delta_1)} + \sup_{\delta_2 > 0} \frac{\omega(0, \delta_2; x)}{\Omega_2(\delta_2)} + \sup_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega_{1,1}(\delta_1, \delta_2; x)}{\Omega_1(\delta_1)\Omega_2(\delta_2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 1. В просторі H_ω норми (1) і (2) еквівалентні.

Теорема 2. [3] Відносно норми (1) простір H_ω є банаховим.

З твердження теорема 1 випливає, що простір H_ω є банаховим і відносно норми (2).

Модулі неперервності $\omega^{(1)}(\delta_1, \delta_2) \equiv \omega^{(1)}$ і $\omega^{(2)}(\delta_1, \delta_2) \equiv \omega^{(2)}$ назовемо еквівалентними ($\omega^{(1)} \sim \omega^{(2)}$), якщо існують сталі $0 < m, M < \infty$ такі, що

$$0 < m = \inf_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega^{(1)}(\delta_1, \delta_2)}{\omega^{(2)}(\delta_1, \delta_2)}, \quad \sup_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega^{(1)}(\delta_1, \delta_2)}{\omega^{(2)}(\delta_1, \delta_2)} = M < +\infty.$$

Теорема 3. [3] Простори $H_{\omega^{(1)}}$ і $H_{\omega^{(2)}}$ співпадають тоді і тільки тоді, коли $\omega^{(1)} \sim \omega^{(2)}$.

Теорема 4. Нехай простори $H_{\omega^{(1)}}$ і $H_{\omega^{(2)}}$ такі, що їх характеристики $\omega^{(1)}$ і $\omega^{(2)}$ не еквівалентні. Тоді:

$$1) \text{ якщо } m = \inf_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega^{(1)}(\delta_1, \delta_2)}{\omega^{(2)}(\delta_1, \delta_2)} > 0, \quad M = \sup_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega^{(1)}(\delta_1, \delta_2)}{\omega^{(2)}(\delta_1, \delta_2)} = \infty,$$

то простір $H_{\omega^{(2)}}$ вкладений у простір $H_{\omega^{(1)}}$;

2) якщо $m = 0$, $M < \infty$, то простір $H_{\omega^{(1)}}$ вкладений у простір $H_{\omega^{(2)}}$;

3) якщо $m = 0$, $M = \infty$, то простори $H_{\omega^{(1)}}$ і $H_{\omega^{(2)}}$ не будуть вкладені один в одного, тобто існують функції $x(t, \tau)$, що належать простору

$H_{\omega^{(1)}}$ і не належать простору $H_{\omega^{(2)}}$, і навпаки. В цьому випадку переріз просторів $H_{\omega^{(1)}}$ і $H_{\omega^{(2)}}$ містить клас Ліпшиця в якості вкладеного простору.

Ці теореми узагальнюють відомі результати щодо класичних двовимірних просторів Гельдера $H_{\alpha\beta}$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
2. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. – М.: ГИФМЛ, 1965. – 624 с.
3. Сніжко Н.В. Класифікація узагальнених просторів Гельдера функцій двох змінних / Н.В. Сніжко // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. №3. – С. 124–128.