УДК 517.9:621.382.323

Онуфрієнко В.М.[1], Слюсарова Т.І.[2]
[1] д-р фіз.-мат. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»
[2] асист. НУ «Запорізька політехніка»

ДИФЕРІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПУАСОНА В ЗАДАЧАХ ПРО РОЗПОДІЛ ЗАРЯДУ В ШАРАХ НАПІВПРОВІДНОЇ ФРАКТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

Для виявлення ефектів, що можуть виникати у фізично реалізованих приладах, розглядаємо задачу про розподіл зарядів в шарах метало-окисло-напівпровідникової фрактальної структури (МОНП-структури). Такі структури є основою для дослідження сучасних польових нанотранзисторів у розділі імітації від'ємних характеристик індуктивностей та ємностей.

Для моделювання кусково-неперервного у просторі заряду (струму) $Q(x,t)$ з розривами 1-го роду в точках x_1, x_2, … та скачками Δ_1, Δ_2, … у фрактальному середовищі розглянемо $Q_1(x,t) = Q(x,t) - \sum_k \Delta_k \theta(x - x_k)$. Для одиничної функції $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ та її дробової похідної $_0D_x^\alpha \theta(x) = \theta^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ порядку α дія на заряд (струм) $Q(x,t)$ з урахуванням формул інтегрування частинами дає

$$\left(\theta^{(\alpha)}(x), Q(x,t)\right) = \left(\theta(x), (-1)^\alpha Q^{(\alpha)}(x,t)\right) = (-1)^\alpha \int_0^\infty Q^{(\alpha)}(x,t)dx = Q^{(\alpha-1)}(0,t),$$

звідки одержуємо зв'язок між похідною порядку α одиничної функції та похідною порядку $\alpha - 1$ дельта-функції $\theta^{(\alpha)}(x) = \delta^{(\alpha-1)}(x)$, $\theta^{(\alpha)}(x - x_0) = \delta^{(\alpha-1)}(x - x_0)$, або $\theta^{(1+\alpha)}(x) = \delta^{(\alpha)}(x)$, $\theta^{(1+\alpha)}(x - x_0) = \delta^{(\alpha)}(x - x_0)$. Введена функція неперервна всюди та має звичайну похідну за виключенням скінченного числа точок.

В класичній постановці густина зарядів в напівпровіднику визначається сумою зарядів електронів (n), дірок (p) та іонізованих домішків (N)

$\rho(x) = q(-n + p + N)$. Для невиродженого напівпровідника $n = n_i \exp[-\beta(\varphi_F - \varphi)]$, $p = n_i \exp[\beta(\varphi_F - \varphi)]$, де $\beta = q/(kT)$, n_i концентрація носіїв у власному напівпровіднику, $N = -2n_i\, sh(\beta\varphi_F)$, φ_F потенціал, що рахується від рівня Фермі. Отже, густина зарядів у фрактальному (по координаті x) середовищі $\rho(x) = 2q\, n_i\left[sh\beta(\varphi_F - \varphi) - sh\beta\varphi_F\right]$ задовольняє рівнянню Пуассона

$$\frac{d}{dx}\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_s} = \frac{1}{L_D^2}[shu_F - sh(u_F - u)], \qquad (1)$$

де $L_D = \sqrt{\varepsilon_s/(2\beta q n_i)}$ – радіус екранування Дебая, ε_s – діелектрична проникність напівпровідника, $u_F = \beta\varphi_F$, $u = \beta\varphi$.

Після інтегрування (1) маємо

$$D_x^\alpha u = \pm\frac{\varepsilon_s}{\beta}\frac{Q_1(u_s, u_F)}{L_D}, \qquad (2)$$

де $Q_1(u_s, u_F) = \dfrac{\sqrt{2}}{L_D}\sqrt{u_s \mathrm{sh} u_F + \mathrm{ch}(u_F - u_s) - \mathrm{ch} u_F}$. З урахуванням отриманих рівнянь величина електричного поля на поверхні напівпровідника буде $E_s^{(\alpha)} = -\dfrac{1}{\beta}(D_x^\alpha u)\Big|_s$ та повний заряд на одиницю поверхні (за теоремою Гауса) $Q_s^{(\alpha)} = -\varepsilon_s E_s^{(\alpha)}$. Густину заряду на фрактально конфігурованій межі знаходимо інтегруванням (2): $\pm\displaystyle\int_{u_s}^{u}\frac{du}{Q_1(u, u_F)} = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$. Порівняння отриманих виразів показує сильний вплив фрактальної межі (скейлінга α) розділу середовищ на величину електричного поля, густину зарядів в напівпровіднику, що супроводжується зміною ємнісних характеристик пристрою. В МОНП-структурі фрактальний елемент $\rho^{(\alpha)}(x)dx = \rho(x)d^\alpha x$ в об'ємі окисла (x відповідає межі розділу метал-сегнетоелектрик, координата межі сегнетоелектрик-напівпровідник $x = x_0$) індукує заряди: $d^\alpha Q_g$ в металі, та $d^\alpha Q_s$ в напівпровіднику. Зміни поля dE_1 зліва та dE_2 справа від точки x, записуємо у вигляді рівняння $x dE_1 + (x_0 - x)dE_2 + d^{(\alpha)}\varphi_s = 0$. Звідси, з урахуванням поверхневого потенціалу $\varphi_s = f(Q_s)$, $d^{\alpha}\varphi_s = f^{(\alpha)}(Q_s)d^{\alpha}Q_s$, теореми Гауса та умови нейтральності $d^{\alpha}Q_g + d^{\alpha}Q_s + \rho^{(\alpha)}dx = 0$, отримаємо рівняння для знаходження заряду в напівпровіднику $-d^{\alpha}Q_s[x_0 - \varepsilon_{0x}f^{(\alpha)}(Q_s)] = x\rho(x)d^{\alpha}x$. Після інтегрування маємо вирази для додаткових зарядів Q_s' и Q_g', наведених в напівпровіднику та в металі

$$Q_s' = -\int_0^{x_0} \frac{x}{x_0}\rho(x)\,d^{\alpha}x + \Delta Q; \quad \Delta Q = \frac{\varepsilon_{0x}}{x_0}\int_{Q_S}^{Q_S+Q_S'} f^{(\alpha)}(Q_s)dQ_s;$$

$$Q_g' = -\int_0^{x_0}(1-\frac{x}{x_0})\,\rho(x)\,d^{\alpha}x - \Delta Q.$$

Для фрактального елемента заряду $\rho^{(\alpha)}(x) = Q_{ss}'\delta^{(\alpha)}(x - x_0) + Q_{gs}'\delta^{(\alpha)}$, зосередженого на поверхні сегнетоелектрика, знаходимо величини еквівалентних поверхневих зарядів Q_{ss}', Q_{gs}'. Отже, виділення в моделі фрактальних елементів призводить до утворення на межі сегнетоелектрик-напівпровідник фрактально конфігурованого заряду $Q_{ss} = Q_s' + Q_{ss}'$. Об’ємний заряд напівпровідника $Q_s^{(\alpha)}$, величина якого залежить від степені фракталізації та V_G на металевому електроді, приводить до залежності повної ємності на одиницю площі МОНП-структури від V_G у вигляді $C_t^{(\alpha)} = dQ_G / dV_G$, де питомий заряд затвора $Q_G = -Q_s^{(\alpha)} - Q_{ss}$. Цей факт є основою метода вивчення МОНП-структур та застосовується надалі для знаходження ємності фрактальної структури.

Таким чином, правильно підібрана фізико-математична модель будови фрактального об’єкта (коли можна вважати фрактальним об’єктом або саме середовище розповсюдження хвиль, або межу розділу середовищ) дозволяє отримати результати взаємодії контурів, поверхонь, тіл з електромагнітним полем, що узгоджуються з відомими даними класичної теорії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Cobbold R. Theory and Application of Field-effect Transistors / Richard S. C. Cobbold. – Wiley-Interscience : 1970. – 534 p.

2. Гинзбург А. И. Дробное интегродифференцирование в гельдеровских классах переменного порядка / А. И. Гинзбург, Н. К. Карапетянц. – Доклады АН, 1994. – Т. 339, № 4. – С. 439–441.

3. Онуфрієнко В. М. Диферінтегральна модель польового транзистора з фрактальним наношаром каналу / В. М. Онуфрієнко, Л. М. Онуфрієнко // матеріали VII міжнар. науково-практичної конф. «Фізико-технічні проблеми передавання, оброблення та зберігання інформації в інфокомунікаційних системах», 8-10 листопада 2018 р. – Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, 2018. – С. 113–114.

4. Onufrienko V. M. Planar Fractally-Shaped Terahertz Waveguide: on the Goos-Hänchen Effect / V. M. Onufrienko, T. I. Slyusarova, L. M. Onufrienko // TCSET-2018: Proceedings 14-th International Conf. on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, Lviv-Slavske, Ukraine, 20-24 February 2018. – Lviv : Lviv Polytechnic National University, 2018. – P. 1237–1240.