

МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ПОЛІНОМІВ ЛЕЖАНДРА

При комутаціях електротехнічних системах виникають перехідні електромагнітні процеси. Це призводить до небезпечних кидків струму та перенапруг.

У роботі [1], використано апроксимацію рішення для функції струму в електричному колі рядами по поліномах Чебишова. В результаті отримано метод, що дозволяє значно підвищити швидкість моделювання. Метод розкладання функцій у ряди по ортогональних поліном називається спектральним методом. Це є аналогією розкладання функцій у ряд Фур'є по тригонометричним функціям, де сукупність коефіцієнтів розкладання є частотним спектром. Є актуальним провести дослідження застосування інших ортогональних поліномів для розрахунку перехідних процесів. Для досліджень обрано популярні поліноми Лежандра.

Розглянемо електричне коло, що містить послідовно резистивний R, індуктивний L і ємнісний C елементи. До комутації конденсатор вважаємо зарядженим до значення напруги $u_c(t_0)$. Якщо момент $t=t_0$ підключити джерело змінної ЕРС $e(t)$, то у колі відбувається перехідний процес. Цей процес описується лінійним інтегро-диференціальним рівнянням із постійними коефіцієнтами:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_c(0) = e(t) \quad (1)$$

Поставимо умову, щоб рівняння (1), що складене за законом напруг Кірхгофа, дотримувалося точно заданому ряді N вузлових часових точок $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$ для функції $i(t)$.

Функцію зміни $i(t)$, розкладемо в ряд за поліномами Лежандра:

$$i(t) \approx p(t) = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) + \dots + c_{N-1} P_{N-1}(t) \quad (2)$$

де аргумент $t \in [a, b]$.

Поліноми Лежандра мають область визначення аргументу. В цьому випадку для зручності аргумент t замінимо безрозмірним аргументом

$$x \in [-1, 1], \quad x = \frac{2t - (a + b)}{b - a}.$$

Тоді розкладання в ряд (2) набуває вигляду:

$$i(x) \approx p(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \dots + c_{N-1} P_{N-1}(x) \quad (3)$$

Ряди по ортогональних поліномах можна диференціювати, а також інтегрувати:

$$i'(t) \approx p'(t) = c_0 P'_0(t) + c_1 P'_1(t) + \dots + c_{N-1} P'_{N-1}(t), \quad (4)$$

$$J(x) = \int p(x) dx = \int (c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \dots + c_{N-1} P_{N-1}(x)) dx \quad (5)$$

Формування матричних рівнянь.

Виділимо на інтервалі часу $[a, b]$ ряд точок t_m ($m = 0, 1, 2, \dots, N-1$), що відповідає точкам x_m змінної x на нормованому інтервалі. Якщо умову (2) записати для кожної точки, то отримаємо систему лінійних рівнянь алгебри, яка в матричній формі має вигляд:

$$V \cdot C = I - I_0, \quad (6)$$

де $C = [c_1 \ c_2 \dots \ c_{N-1}]^T$ – вектор значень коефіцієнтів полінома (3) без коефіцієнта c_0 ;

$I = [i(x_1) \ i(x_2) \dots \ i(x_{N-1})]^T$ – вектор значень струму в точках $1, 2, \dots, N-1$.

Якщо рівняння (4) для похідних записати для кожної вузлової точки $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$, то отримаємо систему лінійних рівнянь, яка в матричній формі має вигляд:

$$I' = D \cdot C, \quad (7)$$

Інтеграли від поліномів виражаються формулами (5). Інтеграл з верхньою межею x_m має вигляд:

$$J(x_m) = \int_{x_0}^{x_m} (c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \dots + c_{N-1} P_{N-1}(x)) dx = c_0 \int_{x_0}^{x_m} P_0(x) dx + \int_{x_0}^{x_m} (PC) dx \quad (8)$$

Для вузлових точок зі значенням наведеного аргументу x_m ($m=1 \dots N-1$) відповідають значення функції (8) як рядка матриці J :

$$J = [J_1 \quad \dots \quad J_{T-1}]^T \quad (9)$$

Поліноми Лежандра обчислюються за рекурентними формулами:

$$P_n(x) = [(2n-1)x \cdot P_{n-1}(x) - (n-1) \cdot P_{n-2}(x)] / n, \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \quad (10)$$

Використовуємо вектор поліном Лежандра, як функцію від x . Тоді розкладання функції струму в ряд (2) набуває вигляду:

$$i(x) \approx p(x) = c_0 P_0(x) + \mathbf{P}(x) \cdot \mathbf{C} \quad (11)$$

Запис рівняння стану електричного кола через поліноми.

Напишемо рівняння (1) для вузлових точок за зміни номера $m = 1, 2, \dots, N-1$. Отримаємо систему рівнянь, яка у матричній формі має вигляд:

$$L\mathbf{I} + R\mathbf{I} + B\mathbf{J} + u_{c0} = \mathbf{e}, \quad (12)$$

де $B = 1/C$, $\mathbf{e}$ – вектор значень ЕРС джерела у точках $1, 2, \dots, N-1$ часового сегмента; $\mathbf{I}, \mathbf{P}, \mathbf{J}$ – вектори струму (6), похідної струму (11) та інтеграла струму (13) у вузлових точках,

u_{c0} – значення напруги на конденсаторі на момент t_0 .

Якщо підставити у вираз (12) вектори $\mathbf{I}$ (9), $\mathbf{P}$ (7), $\mathbf{J}$ (9), то отримаємо вираз другого закону Кірхгофа для зображення $\mathbf{C}$:

$$(LD + RV + BS)\mathbf{C} = \mathbf{e} - u_{c0} - Ri_0 - B \cdot \Delta \cdot i_0 \quad (13)$$

В результаті рішення (13) визначається вектор коефіцієнтів $\mathbf{C}$ поліноміальної апроксимації струму. Тоді при відомому початковому значенні струму i_0 та початковому значенні напруги на конденсаторі можна визначити значення струму у всіх довільних точках часового сегмента згідно (2).

Висновки

1. Вектори поліноміальних коефіцієнтів задовольняють законам струмів та напруг Кірхгофа для схеми заміщення та є рішеннями системи алгебраїчних рівнянь.

2. Для модельної задачі відзначено найкращу швидкодію розрахунку порівняно з відомими числовими методами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Tykhovod, S. Calculation of Transients in Electrical Circuits at the Use of Solution Approximation by Tchebyshev's Polynomials [Text] // S. Tykhovod, D. Patalakh / 2019 IEEE 20th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE). Date Added to IEEE Xplore: 06 January 2020 ISBN Information: INSPEC Accession Number: 19247158 Retrieved from: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8949129>