

УДК 621.391

Сніжко Н.В.¹, Гаврик В.М.²

¹ канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

² студ. гр. ІФ-514 НУ «Запорізька політехніка»

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ГІДРОСТАТИКИ

Інтегральне числення дає математичний апарат для моделювання та дослідження фізичних процесів. Визначення інтегральної суми дозволяє використовувати поняття визначеного інтеграла при розв'язанні фізичних задач. Його застосування засноване на тому, що будь-яка фізична величина, що змінюється, може бути інтерпретована як неперервна, природи якої досить близькі до нуля.

Розглядаються фізичні задачі гідростатики, розв'язки яких отримані із застосуванням методів інтегрального числення.

1. Визначити тиск рідини на занурену в неї вертикальну пластину-півколо, якщо його радіус R , а центр знаходиться на вільній поверхні рідини (рис. 1).

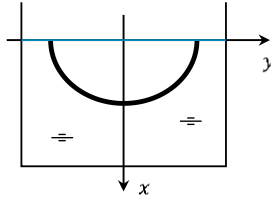


Рисунок 1 – Пластина, занурена у рідину.

Початок системи координат розташований у центрі півкола, напрям осей показано на рис. 1. Тиск рідини з питомою вагою γ на один бік зануреної в неї вертикальної пластини, якщо відстань x точок пластини до рівня рідини змінюється від a до b , визначається за формулою $\int_a^b \gamma x y dx$, де y – довжина горизонтального перерізу пластини. В даному випадку пластина обмежена лініями $x=0$, $x=R$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Одержуємо

$$P = \int_0^R \gamma \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2} \right) \right) x dx = 2\gamma \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{2}{3} \gamma R^3.$$

Таким чином, за допомогою інтегрального числення ми отримали формулу визначення тиску рідини на вертикальну пластину вказаної форми.

2. Розглянемо задачу про витікання рідини з резервуару під впливом сили тяжіння. Нехай є резервуар із початковим рівнем рідини h_0 із невеликим отвором поблизу дна. Потрібно знайти, як рівень змінюється згодом через витікання рідини через отвір, та знайти час, за який рідина повністю витече з резервуару.

Рівняння Бернуллі для рівня води $h(t)$ у кожен момент часу t має вигляд $p + g\rho h(t) = p + \rho \frac{v^2}{2}$, звідки $v = \sqrt{2gh(t)}$, де v – швидкість витікання рідини, ρ – питома вага рідини, p – тиск.

Умова збереження об'єму рідини, що витікає за час dt : $S_1 dh = -S_0 v(t) dt$, де S_0 – площа отвору, S_1 – площа дна резервуару, dh – зниження рівня води протягом часу dt . Ділячи обидві частини на S_1 , отри-

муємо диференціальне співвідношення $dh = -\alpha\sqrt{h}dt$, або $\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\alpha dt$, де

$\alpha = \frac{S_0}{S_1}\sqrt{2g}$. Інтегруємо обидві сторони цього співвідношення від $t=0$ до довільного t .

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2\left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0}\right), \int_0^t (-\alpha)dt = -\alpha t,$$

тобто $2\left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0}\right) = -\alpha t$. Одержали $h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{\alpha t}{2}\right)^2$. Ця формула

дає рівень рідини в резервуарі в довільний момент часу t .

З одержаної формули випливає, що витікання рідини з резервуару відбувається за скінченний час $\tau = \sqrt{2\frac{h_0}{g}} \cdot \frac{S_1}{S_0}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Анпілогов Д. І. Інтегральне числення / Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко // навч. посібник. – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2021. – 254 с.
2. Загальний курс фізики : у 3 т. 2-ге вид. випр. / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук. – Київ : Техніка, 2006. – 536 с.