

УДК 539.3

Онуфрієнко В.М.¹

¹ д-р фіз.-мат. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ГЕРЦА ПРО УДАРНУ ВЗАЄМОДІЮ ФРАКТАЛЬНО КОНФІГУРОВАНИХ ТІЛ

У розробленій теоретичній диферінтегральній моделі контактної задачі Герца узагальнюється фрактальний підхід до опису процесів різної природи, зокрема вільних та вимушених коливань нелінійних механічних систем. Порівняно з іншими відомими теоріями механічного удару [1] у запропонованому підході створюється можливість визначати максимальне значення сили удару фрактально конфігурованих тіл у просторових і часових координатах, тривалість такої ударної імпульсної взаємодії та інші так звані α – характеристики [2], що використовуються для оцінки динамічної міцності тіл з фрактальною геометрією в умовах інтенсивного короткочасного навантаження.

Для постановки задачі Герца про контактну взаємодію двох твердих тіл, що заповнені суцільними середовищами з фрактальними властивостями в'язко-пружних границь, будується диферінтегральна модель з визначеною мірою Хаусдорфа та відповідною фрактальною розмірністю. Задача зводиться до визначення введених нами α – характеристик фрактального шару, що є узагальненням простого та подвійного потенціалів.

Для розрахунку зближення $x(t)$ центрів мас при ударі двох незакріплених фрактально конфігурованих твердих тіл з масами m_1 і m_2 розглядаємо нелінійне диференціальне рівняння

$$m \ddot{x} = -\kappa x^\alpha, \quad (1)$$

де $m = (m_1 \cdot m_2)/(m_1 + m_2)$; κ – коефіцієнт для урахування форми і фрактальних властивостей тіл. Початкові умови: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = v_0$.

Розв'язок задачі Коші для рівняння (1) будемо з урахуванням перетворення $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$. Отже,

$$m \dot{x} d\dot{x} = -\kappa x^\alpha dx. \quad (2)$$

Після інтегрування (2) з урахуванням початкових умов маємо

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}},$$

звідки для визначення $x(t)$ необхідно обчислити інтеграл

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{2}{mv_0^2} \cdot \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}}} = v_0 t. \quad \text{З урахуванням цього виразу розв'язок рівняння (1)}$$

отримуємо у вигляді

$$x(t) = \gamma Sa(\alpha, 1, \frac{(1+\alpha)v_0 t}{2\gamma}). \quad (3)$$

У формулі (3) використано інтегральне подання Ateb-синуса Sa ; $\max x(t) = \gamma$. Час досягнення максимального зближення центрів фрактально конфігурованих мас визначається рівнянням:

$$Sa(\alpha, 1, \frac{(1+\alpha)v_0 t}{2\gamma}) = 1.$$

Для $\alpha = \frac{3}{2}$ маємо розв'язок задачі (1) у постановці [1] для розрахунку пружного удару двох незакріплених твердих тіл з урахуванням їх контактної деформації.

Розглянутий підхід можливий для використання у розрахунках коливань континуальних систем з фрактально конфігурованими метаматеріальними включеннями в балках, пластинах і оболонках, що піддаються в'язко-пружному удару.

Уможливлюється обчислення не тільки переміщення, а й напруження у фрактальних тонкостінних елементах конструкцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ольшанский В. П. АТЕБ-синус у розв'язку задачі Герца про удар / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2018. – № 3 (1279). – С. 98–103.

2. Онуфрієнко В. М. Фрактальний шар зарядів у граничній задачі як узагальнення простого та подвійного шарів / В. М. Онуфрієнко, А. В. Куземко // XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука : матеріали, Київ, 15–17 травня 2014 р. (Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування). – Київ : НТУУ «КПІ», 2014. – С. 235.