МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних робіт з дисципліни
«Методи пошуку та прийняття рішень»
для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти
спеціальності F7 Комп'ютерна інженерія
усіх форм навчання

2025

Методичні вказівки до практичних робіт з дисципліни «Методи пошуку та прийняття рішень» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності F7 Комп'ютерна інженерія усіх форм навчання / Укл.: Р.К. Кудерметов, О.В. Польська – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. — 62 с.

Укладачі: Р. К. Кудерметов, доцент, к.т.н.
О. В. Польська, ст. викладач

Рецензент: М. Ю. Тягунова, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: О. В. Польська, ст. викладач

Затверджено:
на засіданні кафедри
«Комп'ютерні системи та мережі»
Протокол №1 від 05 серпня 2025 р.

Рекомендовано до видання:
НМК факультету КНТ
Протокол №1 від 11 вересня 2025 р.

Зміст

ПРАКТИЧНА РОБОТА 1
Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом

Мета роботи – навчитись формулювати задачі лінійного програмування та розв'язувати їх графічним методом.

1.1 Короткі теоретичні відомості

Задачу лінійного програмування (ЛП) можна сформулювати так [1–3]: *знайти* ***невід'ємні*** *значення змінних* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$*, у яких значення цільової функції досягає максимуму (мінімуму)*

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n, \tag{1.1}$$

та задовольняють умовам-нерівностям:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Допустимим рішенням задачі ЛП називається будь-яка сукупність невід'ємних значень $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, що задовольняє умовам (1.2).

Оптимальним рішенням задачі ЛП називається таке з допустимих рішень, що доставляє максимум функції (1.1).

Теорема 1.1. *Множина допустимих рішень утворює опуклу множину або опуклий багатогранник.*

Теорема 1.2. *Якщо задача ЛП має оптимальний розв'язок, то максимальне значення цільова функція набуває в одній з вершин багатогранника, що утворений обмеженнями.*

Нагадаємо, що множина точок називається *опуклою*, якщо вона разом із будь-якими двома точками містить відрізок, що з'єднує їх (рис. 1.1).

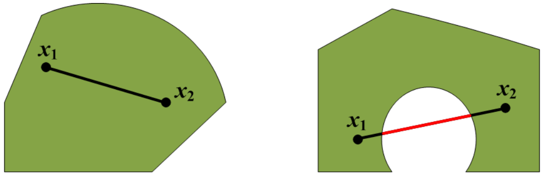


Рисунок 1.1 – Поняття опуклої множини

1.2 Приклад графічного розв'язку задачі ЛП

Нехай виробнику необхідно максимізувати прибуток від виробництва меблів (стільців та столів). Ціна продажну одного стільця дорівнює 45 грошових одиниць (г.о.), а одного столу – 80 г.о. На виготовлення стільця потрібно 5 частин дерева (ч.д.) та 10 людино-годин (л.г.) роботи. На виготовлення столу – 20 ч.д. та 15 л.г. На підприємстві є 400 ч.д. та трудовий ресурс 450 л.г.

Цільова функція задачі максимізації прибутку матиме вигляд:

$$f(\boldsymbol{x}) = 45x_1 + 80x_2, \tag{1.3}$$

де x_1 – кількість стільців, x_2 – кількість столів.

З урахуванням витрат (дерева та трудового ресурсу) нерівності-обмеження запишемо у вигляді

$$5x_1 + 20x_2 \leq 400; \tag{1.4}$$

$$10x_1 + 15x_2 \leq 450; \tag{1.5}$$

умову неможливості виробництва від'ємної кількості меблів:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{1.6}$$

Побудуємо область допустимих рішень. На площині $x_1 0 x_2$ побудуємо пряму для рівняння $5x_1 + 20x_2 = 400$ та позначимо її як P (див. рис. 1.2). Для побудови цієї прямої визначимо дві точки: перша – буде на осі x_1 при $x_2 = 0$, друга – на осі x_2 при $x_1 = 0$.

Визначимо напівплощину, що задається нерівністю (1.4). Ця напівплощина знаходиться нижче за побудовану пряму P. Таким же чином побудуємо пряму Q, для рівняння $10x_1 + 15x_2 = 450$. Напівплощина, яка задається нерівністю (1.5), знаходиться нижче за побудовану пряму Q. Напівплощина, що відповідає нерівності $x_1 \geq 0$, розташована вище осі x_1. Напівплощина, що відповідає нерівності $x_2 \geq 0$, лежить правіше осі x_2.

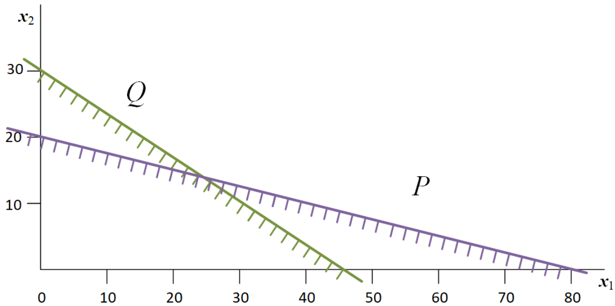


Рисунок 1.2 – Побудова прямих, що визначені обмеженнями

Отже, ми отримали обмежену ділянку $ABCD$, будь-яка точка якої задовольняє умовам-нерівностям і, отже, є *допустимою* (рис. 1.3). З рисунку очевидно, що область допустимих розв'язків (координати точок усередині і на межах області $ABCD$) утворюють опуклий багатогранник, тобто *опуклу множину*.

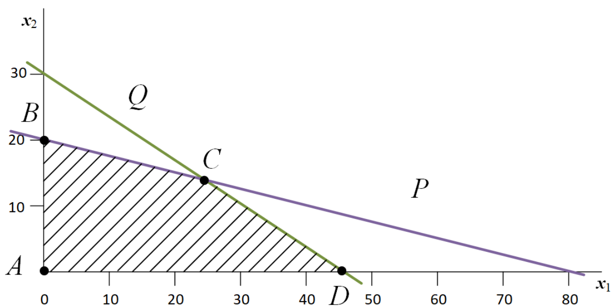


Рисунок 1.3 – Область допустимих розв'язків

Тепер побудуємо пряму G, для рівняння $45x_1+80x_2 = 0$, тобто коли значення цільової функції дорівнює нулю. Ця пряма називається *вектором-градієнтом*, початок якого в точці (0,0), а кінець – у точці (45, 80). Вектор-градієнт вказує напрямок зростання значення цільової функції (рис. 1.4).

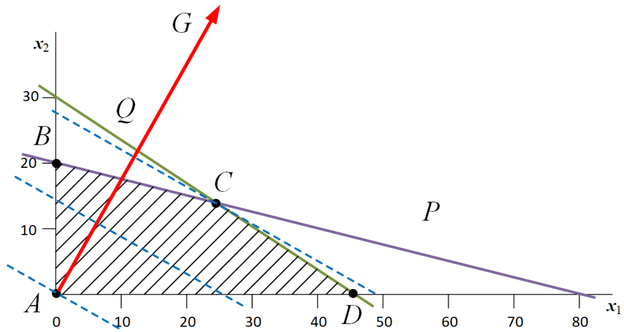


Рисунок 1.4 – Пошук максимального значення цільової функції

Якщо побудувати перпендикуляр (синя пунктирна лінія) до вектора градієнта і пересувати його паралельно самому собі у бік зростання значення цільової функції, ми досягнемо крайньої точки області допустимих рішень. У нашому випадку – це точка C. Координати цієї точки є розв'язком нашої задачі, тобто у цій точці цільова функція набуває максимального значення. Координати цієї точки можна отримати з графіка або розв'язати систему, яка складається з рівнянь прямих, що перетинаються в точці оптимального рішення. Для нашого прикладу ця система має вигляд:

$$\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 = 400; \\ 10x_1 + 15x_2 = 450. \end{cases} \tag{1.7}$$

Розв'язком цієї системи є $x_1 = 24$, $x_2 = 14$. Таким чином для отримання максимального прибутку виробнику необхідно виготовляти 24 стільців та 14 столів.

Зазначимо, що оптимальне рішення виявилося на одній з вершин опуклого багатогранника, як і стверджується у наведеній вище

Теоремі 1.1. Підрахунок прибутку в кутових точках області $ABCD$ дає такі результати:

– у точці A $f(0,0) = 0$;
– у точці B $f(0,20) = 1600$;
– у точці C $f(24,14) = 2200$;
– у точці D $f(0,20) = 2025$.

1.3 Завдання до практичної роботи

Нижче наведено варіанти задач ЛП, в яких записано цільова функція та обмеження-нерівності. Необхідно графічно знайти оптимальний розв'язок задачі та обчислити максимальне значення цільової функції. Результат подати у звіті з практичної роботи. Графіки можна створити вручну або за допомогою середовища Scilab (див. методичні вказівки до лабораторних робіт) або мови програмування (C/C++, Java, Python).

Варіант 1

$$f(x) = 50x_1 + 40x_2 \to \max;$$
$$x_1 + 2x_2 \le 40;$$
$$x_1 + x_2 \le 30;$$
$$2x_1 + x_2 \le 55;$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Варіант 2

$$f(x) = 300x_1 + 200x_2 \to \max;$$
$$3x_1 + x_2 \le 18;$$
$$25x_1 + 3x_2 \le 120;$$
$$3x_2 \le 27;$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Варіант 3

$$f(x) = 90x_1 + 95x_2 \to \max;$$
$$0.7x_1 + 0.34x_2 \le 81;$$
$$0.5x_1 + 0.35x_2 \le 65;$$
$$0.16x_2 \le 14;$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Варіант 4

$$f(x) = 47x_1 + 50x_2 \to \max;$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 12;$$
$$x_1 + 8x_2 \le 28;$$
$$7x_1 + 4x_2 \le 24;$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Варіант 5

$f(x) = 70x_1 + 60x_2 \to \max;$
$3x_1 + 4x_2 \leq 380;$
$5x_1 + 3x_2 \leq 450;$
$x_1 + 4x_2 \leq 270;$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Варіант 6

$f(x) = 20x_1 + 15x_2 \to \max;$
$1.5x_1 + 2x_2 \leq 35;$
$2x_1 + 1.2x_2 \leq 40;$
$x_2 \leq 12;$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Варіант 7

$f(x) = 85x_1 + 63x_2 \to \max;$
$0.8x_1 + 0.5x_2 \leq 84;$
$0.4x_1 + 0.8x_2 \leq 75;$
$0.3x_1 + 0.9x_2 \leq 76;$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Варіант 8

$f(x) = 2.4x_1 + 30x_2 \to \max;$
$6x_1 + 5x_2 \leq 120;$
$-12x_1 + 8x_2 \leq 48;$
$-2x_1 + 4x_2 \leq 40;$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Варіант 9

$f(x) = 6x_1 + 12x_2 \to \max;$
$7x_1 + 6x_2 \leq 90;$
$-3x_1 + 4x_2 \leq 12;$
$-x_1 + 2x_2 \leq 8;$
$x_1 \geq, \quad x_2 \geq 0.$

Варіант 10

$f(x) = x_1 + 8x_2 \to \max;$
$5x_1 + 4x_2 \leq 20;$
$-x_1 + 9x_2 \leq 27;$
$5x_1 + 6x_2 \leq 24;$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

1.4 Зміст звіту

1. Титульний лист, оформлений відповідно до вимог.
2. Мета роботи.
3. Графічний розв'язок задачі ЛП згідно з варіантом.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 2
Розв'язання двоїстої задачі лінійного програмування графічним методом

Мета роботи – навчитись формулювати та розв'язувати двоїсту задачу лінійного програмування.

2.1 Короткі теоретичні відомості

Для зручності представимо задачу ЛП (1.1)–(1.2) у векторно-матричній формі і назвемо її **першою стандартною формою**:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{cx} \to \max, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \tag{2.3}$$

де $\boldsymbol{x}$ – вектор-стовпець невідомих;
$\boldsymbol{c}$ – вектор-стовпець коефіцієнтів цільової функції;
$\boldsymbol{b}$ – вектор-стовпець обмежень;
$\boldsymbol{A}$ – матриця обмежень-умов;
$\boldsymbol{cx} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – скалярний добуток векторів $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{x}$.

Кожній задачі ЛП відповідає так звана *двоїста задача* ЛП. При цьому вихідну задачу називають *прямою задачею ЛП*. Двоїста задача для прямої задачі (2.1)–(2.3) має вигляд, який назвемо **другою стандартною формою**:

$$\varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{by} \to \min, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. Якщо пряма задача ЛП має оптимальний розв' язок, то й двоїста задача також має оптимальний розв'язок і навпаки, якщо двоїста задача ЛП має оптимальний розв'язок то й пряма задача також має оптимальний розв'язок, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій збігаються [2, 4].

2.2 Приклад формулювання та розв'язання задачі

Розглянемо спочатку приклад прямої задачі ЛП і потім сформулюємо для неї подвійне завдання ЛП.

Пряма задача ЛП.

Виробнику необхідно максимізувати прибуток від місячного виробництва трьох видів продукції: P_1, P_2 і P_3. Для виготовлення цих видів продукції використовується два типи сировини M_1 и M_2. Витрати сировини на виготовлення одиниці виду продукції та її місячний запас наведено у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Приклад

	P_1	P_2	P_3	Місячний запас
M_1	6	7	1	320
M_2	7	4	2	480

Ціна продажу одиниці продукції виду P_1 дорівнює 42 грошовим одиницям (г.о.), виду P_2 – 28 г.о., виду P_3 – 8 г.о. Отже, метою виробника є визначення обсягів кожного виду продукції, які потрібно виготовити для отримання максимального прибутку від їх продажу.

Для формалізації прямої задачі ЛП позначимо обсяги продукції P_1, P_2 та P_3 відповідно через x_1, x_2 і x_3; ціни продажу цих видів продукції відповідно через c_1, c_2 і c_3; місячні запаси типів сировини M_1, M_2 відповідно через b_1 і b_2. Тоді ця задача в першій стандартній формі матиме вигляд:

$$f(\boldsymbol{x}) = 42x_1 + 28x_2 + 8x_3 \to \max, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 + 1x_3 &\le 320, \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 480, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0. \tag{2.9}$$

Тепер для одержаної прямої задачі сформулюємо двоїсту задачу ЛП у другій стандартній формі. Введемо нові змінні y_1 і y_2, які позначатиму відповідно вартості одиниці сировини типу M_1 та одиниці сировини типу M_2. Відповідно до формул (2.4)–(2.6) двоїста задача матиме вигляд:

$$\varphi(\boldsymbol{y}) = 320y_1 + 480y_2 \to \min, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} 6y_1 + 7y_2 &\geq 42, \\ 7y_1 + 4y_2 &\geq 28, \\ 1y_1 + 2y_2 &\geq 8, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0. \tag{2.12}$$

Інтерпретувати двоїсту задачу для прямої задачі, що розглядається, можна наступним чином. Виробник зацікавлений придбати необхідні типи сировини за мінімальну ціну, тобто цільова функція має бути мінімізована. Цим визначається цільова функція (2.10). Умови-обмеження (2.11) означають, що загальна вартість сировини, яка використовується для виготовлення кожного виду продукції, не може бути меншою за вартість того обсягу сировини, без якого виготовлення цього виду продукції неможливе.

Двоїста задача (2.10)–(2.12) має всього дві невідомі змінні y_1 і y_2, тому може бути розв'язана графічно. Побудуємо на площині $y_1 0 y_2$ прямі **1**, **2** і **3** (див. рис. 2.1), які описуються рівностями:

$$\begin{aligned} 6y_1 + 7y_2 &= 42, \\ 7y_1 + 4y_2 &= 28, \\ 1y_1 + 2y_2 &= 8. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Відповідно до умов-нерівностей (2.11) і (2.12) визначається область допустимих розв'язків (заштрихована частина на рис. 2.1). Побудуємо вектор-градієнт G, відповідний цільовій функції (2.10), та перпендикулярну пряму до нього (пунктирна лінія, див. рис. 2.1) у будь-якій точці області допустимих розв'язків. Якщо переміщати цей перпендикуляр паралельно самому собі у напрямку вектора градієнта, ми досягнемо крайньої точки C області допустимих розв'язків. Координати цієї точки є оптимальним розв'язком двоїстої задачі ЛП і визначаються перетином прямих, що відповідають першій та третій рівностям системи (2.11). Точні значення координат цієї точці ($y_1 = 5.6, y_2 = 1.2$) можна знайти, якщо розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{aligned} 6y_1 + 7y_2 &= 42, \\ 1y_1 + 2y_2 &= 8. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Підставляючи знайдені y_1 і y_2 у цільову функцію (2.10), знайдемо її мінімальне значення:

$$\varphi(\boldsymbol{y}) = 320 \cdot 5.06 + 480 \cdot 1.2 = 2368.$$

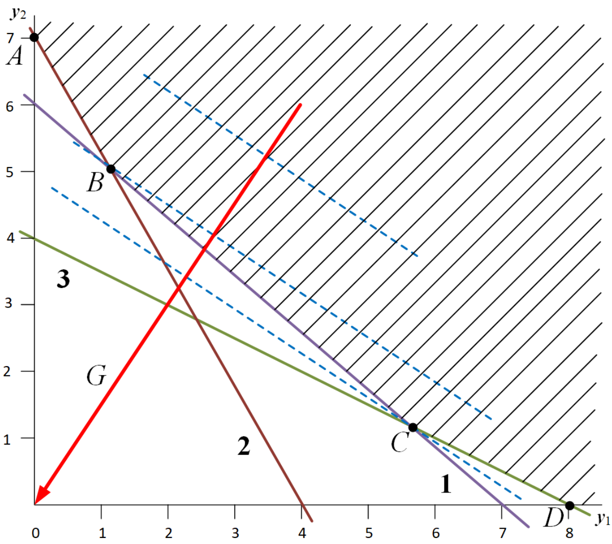


Рисунок 2.1 – Пошук мінімального значення цільової функції

2.3 Завдання до практичної роботи

Нижче наведено варіанти прямої задачі ЛП, в якої записано цільова функція та обмеження-нерівності. Сформулюйте для цієї задачі двоїсту задачу ЛП та розв'яжіть її графічним способом. Знайдіть аналітично розв'язок цієї задачі та мінімальне (максимальне) значення цільової функції. Бажано придумати змістовну інтерпретацію прямої та двоїстої задачі.

Варіант 1

$$f(x) = 0.6x_1 + 28x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 32;$$
$$1.5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 36;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Варіант 2

$$f(x) = 30x_1 + 13x_2 + 11x_3 \to \max;$$
$$5x_1 + 1x_2 + 4x_3 \le 43;$$
$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 35;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Варіант 3

$$f(x) = 20x_1 + 15x_2 + 14x_3 \to \max;$$
$$-5x_1 + 1x_2 + 3x_3 \le 10;$$
$$8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 13;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Варіант 4

$$f(x) = 30x_1 + 15x_2 + 50x_3 \to \max;$$
$$4x_1 + 1.5x_2 + 6x_3 \le 200;$$
$$1.5x_1 + 2.7x_2 + 4x_3 \le 110;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Варіант 5

$$f(x) = 0.6x_1 + 27x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$-0.9x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 16;$$
$$1.6x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 42;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Варіант 6

$$f(x) = 8x_1 + 11x_2 + 20x_3 \to \max;$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 10;$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 20;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Варіант 7

$$f(x) = 11x_1 + 7x_2 + 10x_3 \to \min;$$
$$2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \ge 10;$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 25;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Варіант 8

$$f(x) = 6x_1 + 10x_2 + 3x_3 \to \max;$$
$$1.2x_1 + 2.5x_2 + 0.4x_3 \ge 17;$$
$$2.9x_1 + 3.5x_2 + 2.7x_3 \ge 32;$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Варіант 9

$f(x) = 600x_1 + 310x_2 + 240x_3 \to \min;$
$24x_1 + 8x_2 + 3x_3 \geq 40;$
$8x_1 + 8x_2 + 8x_3 \geq 50;$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$

Варіант 10

$f(x) = 6x_1 + 81x_2 + 62x_3 \to \max;$
$2x_1 + 40x_2 + 60x_3 \leq 60;$
$3x_1 + 20x_2 + 10x_3 \leq 65;$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$

2.4 Зміст звіту

1. Титульний лист, оформлений відповідно до вимог.
2. Мета роботи.
3. Формулювання двоїстої задачі згідно з варіантом.
4. Графічний розв'язок двоїстої задачі ЛП згідно з варіантом.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 3
Розв'язання транспортної задачі

Мета роботи – навчитися розуміти та розв'язувати задачу ЛП транспортного типу.

3.1 Теоретичні відомості та приклад задачі

Для зручного представлення транспортної задачі будемо використовувати *транспортну таблицю* у вигляді, показаному на рис. 3.1. Робочі клітини таблиці мають координати $(A_i B_j)$, де індекс $i = 1, 2, \ldots, m$, відповідає номеру постачальника товару, а індекс $j = 1, 2, \ldots, n$ – номеру споживача. У кожній робочій клітині таблиці вказується вартість перевезення однієї одиниці товару від i-постачальника j-му споживачеві c_{ij} (у правому верхньому куті клітини) та кількість товару x_{ij}, перевезеного від постачальника A_i споживачеві B_j.

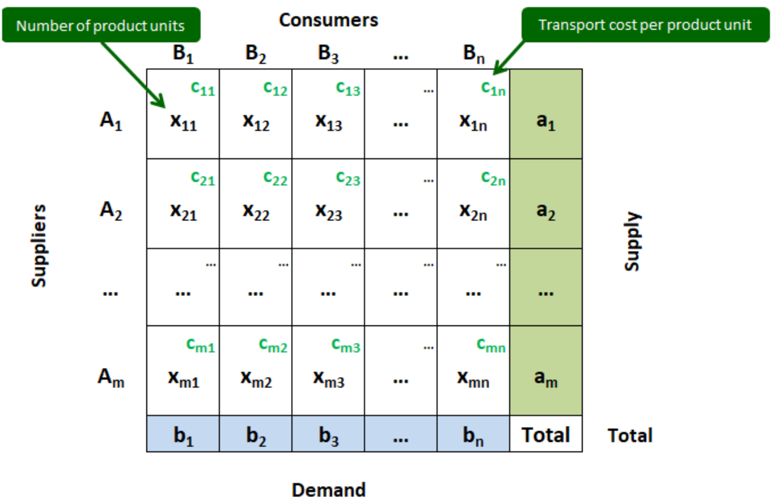


Рисунок 3.1 – Транспортна таблиця

У правій колонці таблиці вказується кількість товару, що є у запасі в постачальника. У нижньому рядку таблиці записано кількість товару, яку має отримати споживач. Ми розглядаємо збалансовану транспортну задачу, тому загальна кількість товару у постачальників повинна дорівнювати загальній кількості товару, яка необхідна споживачеві.

Нагадаємо, що у задачах лінійного програмування (ЛП) оптимальне рішення досягається в одній з вершин *області допустимих рішень*. Розв'язок транспортної задачі, яка також відноситься до завдань ЛП, що знаходиться в області допустимих рішень, називається *опорним планом*. Опорний план, що призводить до мінімальної вартості перевезень, називається *оптимальним*.

У даному завданні для побудови опорного плану транспортної задачі використовується «метод північно-західного кута» [4]. Хоча цей метод не найкращий, він допоможе глибше розібратися в суті вирішення транспортної задачі. Ми розглянемо цей спосіб на прикладі.

3.2 Приклад розв'язку транспортної задачі

Хід розв'язання прикладу транспортної задачі показано на рис. 3.2. На рис. 3.2a наведено вихідну транспортну таблицю, в якій зазначено вартість перевезення товару, запаси товару у постачальників та потреби у товарі у споживачів.

Почнемо заповнення транспортної таблиці з лівого верхнього («північно-західного») кута (рис. 3.2b). Відправимо споживачеві B_1 стільки одиниць товару, скільки йому потрібно, із запасів постачальника A_1. Решту товару постачальника A_1 відправимо споживачеві B_2. Частину товару, що бракує споживачеві B_2, виділимо із запасів постачальника A_2. У даному випадку запаси постачальника A_2 дозволяють повністю задовольнити споживача B_3, а частину товару, що залишиться, відправити споживачу B_4. Частину товару, що бракує споживачеві B_4, виділимо із запасів постачальника A_3. І, нарешті, частину товару, що залишилася у постачальника A_3 відправимо споживачеві B_4. Таким чином, дотримано умови балансу: постачальники реалізували всі запаси товару, а споживачі отримали стільки товару, скільки їм потрібно. Якщо умова балансу дотримується, план є опорним.

На цьому етапі ми одержали перший опорний план. Але чи є він оптимальним? При розподілі товару ми враховували вартості перевезень, тому план може бути не оптимальним. Підрахуємо вартість перевезення:

$$S = 60 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 50 \cdot 6 + 70 \cdot 4 + 30 \cdot 7 + 80 \cdot 1 + 80 \cdot 6 = 1850.$$

Розглядаючи рис. 3.2b, можна помітити, що план можна поліпшити, збільшивши кількість товару в клітці з дешевим перевезенням (A_3, B_4) і зменшивши кількість у клітці з більш дорогим перевезенням (A_2, B_4). Дотримуючись умови балансу виконаємо так звану циклічну перестановку (показано на рисунку стрілкою). Після такого перенесення опорний план набуде вигляду, показаного на рис. 3.2c.

Підрахуємо вартість перевезення за новим планом:

$$S = 60 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 50 \cdot 6 + 70 \cdot 4 + 30 \cdot 8 + 110 \cdot 1 + 50 \cdot 6 = 1730.$$

Як бачимо, цей план кращий за попередній. Продовжимо процес циклічних перестановок. Виконаємо перестановку, показану стрілками на рис. 3.2c. Результат перестановки показано на рис. 3.2d, а загальна вартість перевезення за цим планом:

$$S = 60 \cdot 5 + 50 \cdot 6 + 50 \cdot 4 + 70 \cdot 4 + 30 \cdot 8 + 110 \cdot 1 + 50 \cdot 3 = 1580.$$

Виконаємо ще одну перестановку згідно зі стрілками на рис. 3.2d. Результат цієї перестановки показаний на рис. 3.2e, а вартість перевезення:

$$S = 30 \cdot 5 + 30 \cdot 9 + 50 \cdot 4 + 50 \cdot 6 + 70 \cdot 4 + 110 \cdot 1 + 80 \cdot 3 = 1550.$$

Порожні клітини у транспортній таблиці називаються *вільними*, не порожні - *базисними*. Число клітин у таблиці дорівнює $n \cdot m$. Число вільних клітин $k = (m-1)(n-1)$, а кількість базисних $m + n - 1$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	(5)	(4)	(5)	(6)	(3)	110
A_2	(9)	(6)	(4)	(7)	(8)	150
A_3	(7)	(4)	(8)	(1)	(6)	160
b_j	60	100	70	110	80	420

(a) Транспортна таблиця

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	(5) 60	(4) 50	(5)	(6)	(3)	110
A_2	(9)	(6) 50	(4) 70	(7) 30	(8)	150
A_3	(7)	(4)	(8)	(1) 80	(6) 80	160
b_j	60	100	70	110	80	420

(b) Перший опорний план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	(5) 60	(4) 50	(5)	(6)	(3)	110
A_2	(9)	(6) 50	(4) 70	(7)	(8) 30	150
A_3	(7)	(4)	(8)	(1) 110	(6) 50	160
b_j	60	100	70	110	80	420

(c) Результат першої перестановки

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	(5) 60	(4)	(5)	(6)	(3) 50	110
A_2	(9)	(6) 50	(4) 70		(8) 30	150
A_3	(7)	(4) 50	(8)	(1) 110	(6)	160
b_j	60	100	70	110	80	420

(d) Результат другої перестановки

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	(5) 30	(4) −	(5)	(6)	(3) 80 +	110
A_2	(9) 30	(6) 50 +	(4) 70	(7) −	(8)	150
A_3	(7)	(4) 50	(8)	(1) 110	(6)	160
b_j	60	100	70	110	80	420

(e) Результат третьої перестановки

Рисунок 3.2 – Етапи розв’язання транспортної задачі

Для кожної вільної клітини існує єдиний цикл, у якому одна клітина вільна, інші базисні. Отже, розглядаючи транспортну таблицю, треба шукати вільну клітину, яка дешевша за якусь клітину в циклі даної вільної клітини.

При аналізі плану перевезення зручно скористатися так званою «ціною циклу». Ціна циклу – це алгебраїчна сума вартості перевезень, зазначених у клітинах циклу, причому, якщо в цю клітину переноситься перевезення, то вартість береться зі знаком плюс, якщо з клітини циклу вилучається перевезення, вартість цієї клітини береться зі знаком мінус. Якщо ціна циклу негативна, то перестановка за цим циклом зменшить загальну вартість плану.

Обчислимо, наприклад, ціну циклу, показаного на рис. 3.2b. Вона дорівнює $-7+1-6+8 = -4$, отже, переміщення за цим циклом зменшить загальну вартість перевезення (на $-4 \cdot 30 = -120$).

Таким чином, для отримання оптимального плану необхідно переглянути цикли вільних клітин і якщо їх ціна негативна, то зробити перестановки. Якщо циклів з негативною ціною немає у плані, він оптимальний.

3.3 Завдання до практичної роботи

Нижче наведено варіанти задач: A_1, A_2, A_3 – постачальники, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 – споживачі.

Таблиця 3.1 – Варіанти 1–2

Варіант 1	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	5	4	5	6	3	110
A_2	9	6	4	7	8	150
A_3	7	4	8	5	1	160
Попит	120	90	50	100	60	

Варіант 2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	2	4	5	7	3	280
A_2	5	6	3	7	8	160
A_3	9	4	3	5	12	170
Попит	60	150	160	80	160	

Таблиця 3.2 – Варіанти 3–8

Варіант 3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	2	4	7	3	9	220
A_2	6	8	1	5	7	160
A_3	5	12	9	4	6	180
Попит	120	80	160	110	90	

Варіант 4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	7	10	4	6	4	180
A_2	2	8	6	5	3	60
A_3	6	11	8	7	4	150
Попит	120	50	60	100	60	

Варіант 5	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	5	4	5	6	3	110
A_2	9	6	4	7	8	150
A_3	7	4	8	5	1	160
Попит	120	90	50	100	60	

Варіант 6	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	7	12	4	6	5	280
A_2	1	5	6	5	3	160
A_3	6	13	8	7	4	170
Попит	90	140	60	110	210	

Варіант 7	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	1	4	7	3	9	90
A_2	6	8	2	5	7	150
A_3	3	12	9	4	6	140
Попит	120	70	50	100	40	

Варіант 8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	9	4	5	5	3	180
A_2	5	6	11	4	8	160
A_3	2	4	3	5	2	70
Попит	60	50	60	80	160	

Таблиця 3.3 – Варіанти 9–10

Варіант 9	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	9	4	5	5	3	220
A_2	5	6	11	4	8	160
A_3	2	4	3	5	7	80
Попит	120	80	60	100	100	

Варіант 10	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Пропозиція
A_1	5	12	4	6	3	80
A_2	2	9	6	5	7	160
A_3	6	1	8	9	4	150
Попит	120	50	60	100	60	

3.4 Зміст звіту

1. Титульний лист, оформлений відповідно до вимог.
2. Мета роботи.
3. Постановка транспортної задачі.
4. Опорні плани, яки побудовані в процесі розв'язання транспортної задачі.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 4
Розв'язання задач методом динамічного програмування

Мета роботи – навчитись формулювати задачі динамічного програмування та розв'язувати їх чисельним методом.

4.1 Короткі теоретичні відомості

Динамічне програмування – це обчислювальний метод для розв'язання задач, які можна представити у вигляді кількох контрольованих (керованих) етапів. Ось деякі задачі, які ефективно вирішуються за допомогою динамічного програмування:

- планування розподілом ресурсів;
- календарне планування виробництва;
- планування заміною та ремонтом обладнання;
- вибір оптимального маршруту

Початком розробки методу динамічного програмування послужили роботи Р. Беллмана для задач розподілу ресурсів. В основі динамічного програмування лежить принцип оптимальності, запропонований Р. Беллманом, який можна сформулювати так: незалежно від того, в якому стані знаходиться система на поточному етапі, управління на даному етапі потрібно вибрати таке, щоб цей етап і всі наступні були найбільш вигідними. Інакше висловлюючись, сумарний виграш має бути максимальним на цьому і всіх інших етапах.

Розглянемо спочатку простий та наочний приклад, у якому шляхом простих обчислень визначається оптимальна траєкторія [2].

4.2 Приклад задачі про вибір траєкторії

Нехай прокладання траєкторії (маршруту) з початкового пункту до пункту призначення складається з кількох етапів, кожен з яких має певну вартість. Це може бути обумовлено, наприклад, рельєфом місцевості, наявністю або відсутністю прокладених доріг тощо. Завдання полягає в тому, щоб побудувати такий маршрут, щоб його вартість була мінімальною. Якщо етапів завдання багато, то пошук оптимального маршруту може стати дуже важким обчислювальним завданням.

Представимо етапи прокладання маршруту у вигляді сітки відрізків із зазначенням вартості кожного етапу (див. рис. 4.1). У кожному вузлі сітки необхідно вирішити, в якому напрямку рухатися далі: праворуч або вгору. Очевидно, що в цьому прикладі будь-який маршрут складатиметься з 10 етапів. Позначимо вузли сітки як a_{ij}, $i = 1, \cdots, 5$, $j = 1, \cdots, 7$.

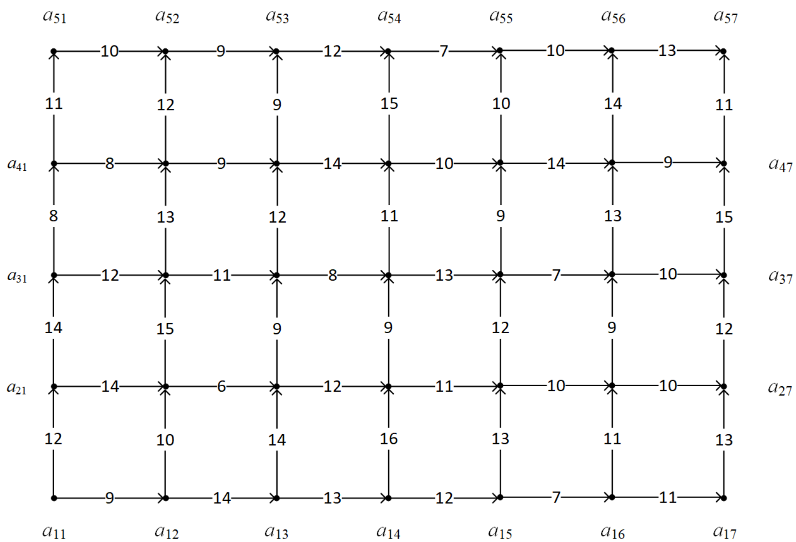


Рисунок 4.1 – Сітка відрізків із зазначенням вартості кожного етапу

Кожен маршрут матиме власну вартість. Наприклад, послідовність кроків

$$a_{11} \to a_{21} \to a_{31} \to a_{41} \to a_{51} \to a_{52} \to a_{53} \to a_{54} \to a_{55} \to a_{56} \to a_{57}$$

матиме загальну вартість 106.

Процедура динамічного програмування для цієї задачі полягає в тому, що ми спочатку виконаємо *умовну оптимізацію*, а потім – *безумовну*.

Умовна оптимізація виконується з кінця маршруту, тобто з вузла a_{57}. Рухаємось з кінцевого вузла (a_{57}) . У вузол a_{57} можна достатися лише з двох вузлів a_{47} і a_{56} (див. рис. 4.2).

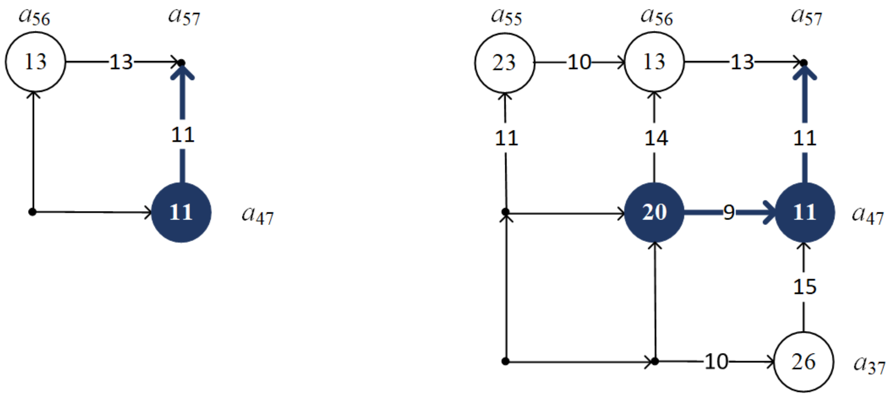


Рисунок 4.2 – Приклад умовної оптимізації

З вузла a_{47} дистанція дорівнює 11, а з вузла a_{56} – 13. Ці значення є мінімальними для переміщення з вузлів a_{47} і a_{56}, ставимо їх в кружки біля відповідних вузлів. Оптимальне значення в даному випадку є 11, тому відзначимо шлях з a_{47} до a_{57} жирною стрілкою. Тепер переходимо до вибору оптимального шляху на передостанньому кроці. Розглянемо вузли, із яких можна дістатися до вузлів a_{47} і a_{56} за один крок. Це вузли a_{37}, a_{46} та a_{55}. З вузла a_{37} до кінцевого вузла a_{57} дистанція дорівнює 26, з вузла a_{46} – 20, з вузла a_{55} – 23. Тому оптимальною стратегією буде рух з вузла a_{46}. Відзначимо цей шлях жирною стрілкою, а мінімальні значення з вузлів ставимо в кружки біля відповідних вузлів. Таким чином, рухаючись послідовно від вузла до вузла справа наліво і зверху вниз, знаходимо для кожного вузла мінімальну відстань до кінцевого вузла (див. рис. 4.3).

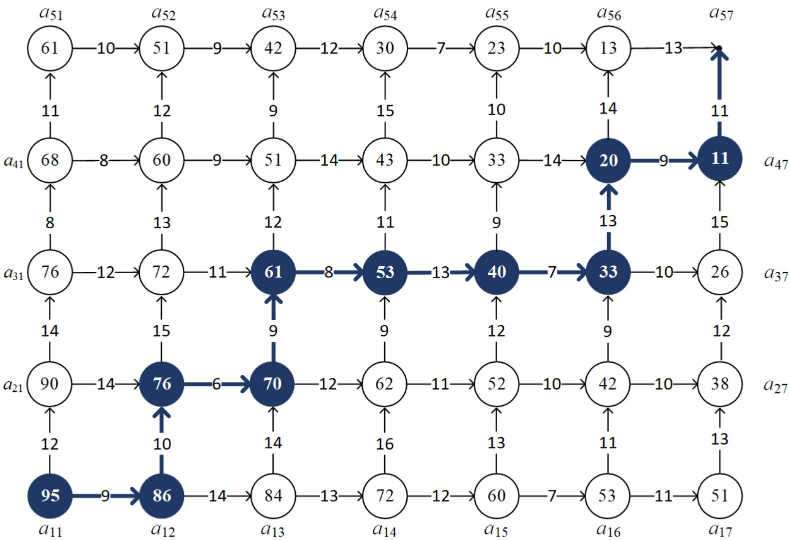


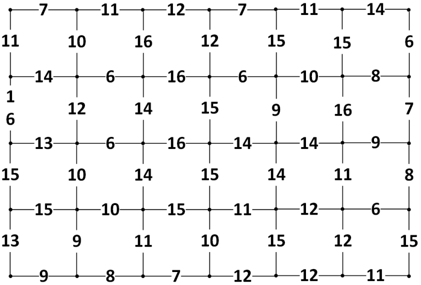
Рисунок 4.3 – Процес умовної оптимізації

Цей процес умовної оптимізації закінчиться, коли ми дійдемо до початкового вузла a_{11}. В результаті цього процесу ми отримали оптимальну траєкторію між вузлами a_{11} і a_{57}, а в кружку біля вузла a_{11} – значення дистанції між ними. Безумовна оптимізація полягає в тому, щоб слідувати по побудованій траєкторії. Запишемо цю траєкторію так

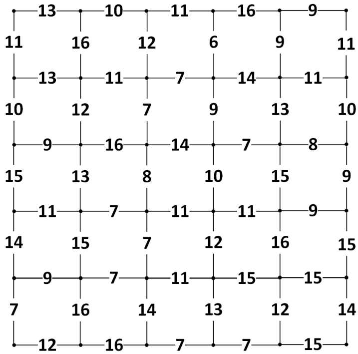
$$a_{11} \to a_{12} \to a_{22} \to a_{23} \to a_{33} \to a_{34} \to a_{35} \to a_{36} \to a_{46} \to a_{47} \to a_{57}$$

4.3 Завдання до практичної роботи

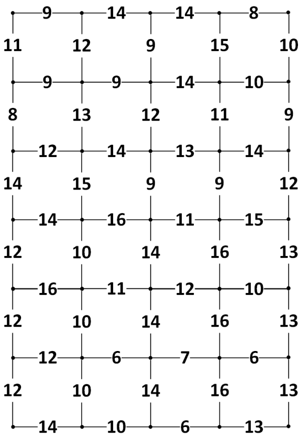
Нижче наведено варіанти задач прокладання маршруту у вигляді сітки відрізків із зазначенням вартості кожного етапу. Необхідно побудувати такий маршрут, щоб його вартість була мінімальною. У кожному вузлі сітки необхідно вирішити, в якому напрямку рухатися далі: праворуч або вгору. Результат подати у звіті з практичної роботи.



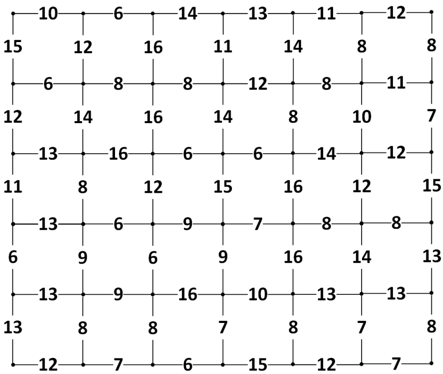
(a) Варіант 1



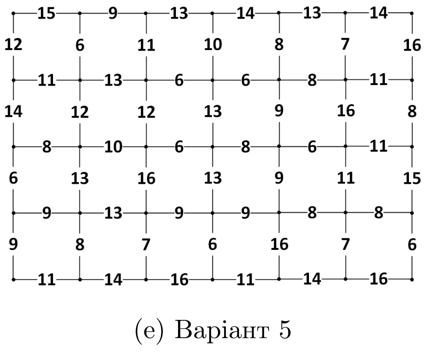
(b) Варіант 2



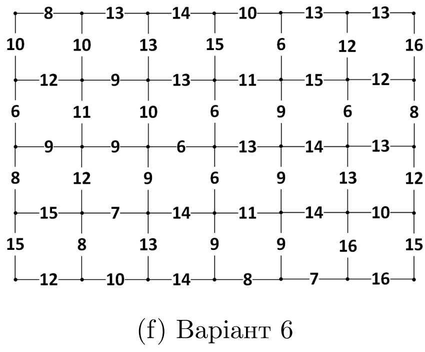
(c) Варіант 3



(d) Варіант 4

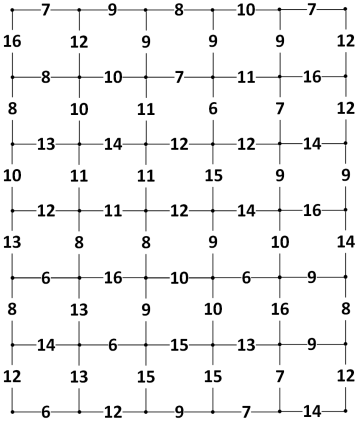


(e) Варіант 5

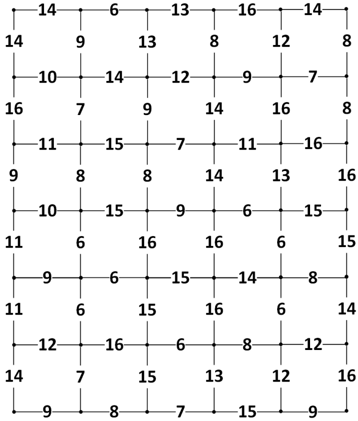


(f) Варіант 6

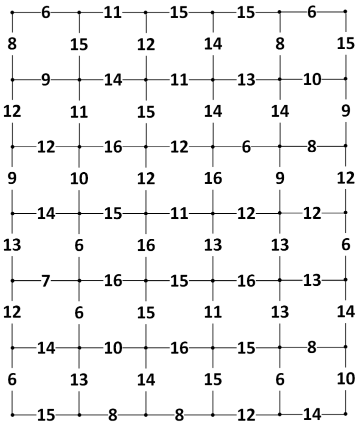
Рисунок 4.4 – Завдання (варіанти 1–6)



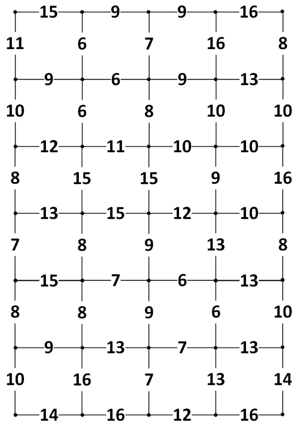
(a) Варіант 7



(b) Варіант 8



(c) Варіант 9



(d) Варіант 10

Рисунок 4.5 – Завдання (варіанти 7–10)

4.4 Зміст звіту

1. Титульний лист, оформлений відповідно до вимог.
2. Мета роботи.
3. Графічний розв’язок задачі за варіантом.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 5
Розв'язання задачі розподілу ресурсів

Мета роботи – навчитись розв'язувати методом динамічного програмування задачу розподілу ресурсів.

5.1 Короткі теоретичні відомості

Задача розподілу ресурсів належить до задач динамічного програмування. Вона складається з кількох етапів (кроків). Кількість етапів позначимо через N. Кожен етап характеризується деяким станом s_0, s_1,..., s_N. На кожному етапі вибирається якесь рішення x_1,..., x_N, яке називається управлінням (або *кроковим управлінням*). Ефективність керування на кожному кроці зазвичай називається виграшем. Сукупність усіх управлінь є управління у цілому. Потрібно знайти таке управління в цілому $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$, при якому сума виграшів усіх етапів була б максимальною.

Перехід системи з одного стану в інший визначається станом системи на попередньому етапі та управлінням на даному етапі:

$$s_i = h_i(s_{i-1}, x_i). \tag{5.1}$$

Оптимальний виграш на кожному етапі визначається рекурентним *рівнянням Беллмана*, яке пов'язує *умовний* оптимальний виграш $g_i(s_{i-1})$ на i-му етапі з умовним оптимальним виграшем $g_{i+1}(s_i)$ на наступному етапі [2, 4]:

$$g_i(s_{i-1}) = \max_{x_i}(f_i(s_{i-1}, x_i) + g_{i+1}(h_i(s_{i-1}, x_i))), \tag{5.2}$$

де $f_i(s_{i-1}, x_i)$ – цільова функція, яка визначає ефективність переходу зі стану s_{i-1} у стан s_i.

Оптимальний виграш називається *умовним*, тому що він залежить від можливих станів системи s_{i-1} на попередньому етапі.

Так як останній етап пошуку ефективного переходу не впливає на наступні переходи (вони відсутні), то умовний оптимальний виграш на N-му етапі визначається виразом:

$$g_N(s_{N-1}) = \max_{x_N}(f_N(s_{N-1}, x_N)). \tag{5.3}$$

Цей ефект підказує нам, що задачу розподілу ресурсів слід розв'язувати починаючи з останнього етапу. Таким чином, знайшовши максимальний виграш на останньому етапі, згідно з рівнянням Беллмана можна знайти умовний оптимальний виграш на $N-1$ етапі, потім – на $N-2$ етапі і т.д. Отримавши нарешті рішення на першому етапі, ми матимемо умовні оптимальні управління на всіх етапах задачі.

Тепер можна знайти оптимальне управління на першому етапі за формулою:

$$g_1(s_0) = \max_{x_i}(f_1(s_0, x_1) + g_2(h_1(s_0, x_1))). \tag{5.4}$$

З формули (5.4) знаходимо стан $s_1 = h_1(s_0, x_1)$ і на підставі s_1 вибираємо вже відоме управління $x_2(s_1)$. Продовжуючи цей процес, ми дійдемо до останнього N-го етапу. В результаті ми отримаємо для кожного етапу оптимальне управління. Це й буде розв'язанням нашої задачі.

5.2 Приклад задачі про розподіл ресурсів

Будемо називати ресурсами суму інвестицій, які необхідно вкласти у розвиток кількох підприємств з метою отримання максимального прибутку. У постановці задачі відомо, який прибуток можна отримати від інвестицій у кожне підприємство та загальна сума інвестицій. Припустимо, що загальна сума запланованих інвестицій s_0 дорівнює 7 (наприклад, мільйонів грн), є чотири підприємства (A, B, C, D) і відомі можливі прибутки f_A, f_B, f_C, f_D від вкладу інвестицій x_A, x_B, x_C, x_D, подані в табл. 5.1.

Умовою обмеженням у цій задачі є нерівність

$$x_A + x_B + x_C + x_D \leq s_0,$$

яка означає, що сума інвестицій, вкладених у всі підприємства, не може бути більшою за задану, тобто вихідну суму інвестицій, виділених на всю операцію розподілу ресурсів.

У таблиці 5.1 значення типу $(x_A, f_A) = 0, 0$ означає нульову інвестицію і, відповідно, нульовий прибуток.

Значення типу $(x_A, f_A) = (–, –)$ означає, що вкладення інвестиції більше 3 у підприємство A не збільшує прибуток, тобто, коли підприємство не здатне освоїти вкладення більше ніж 3.

Таблиця 5.1 – Варіанти інвестицій та прибутків

x_A	f_A	x_B	f_B	x_C	f_C	x_D	f_D
0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	1	3	1	4	2	5
3	5	2	4	2	5	5	6
–	–	3	6	5	7	–	–

Зазначимо, що цю задачу можна розв'язати шляхом повного перебору варіантів. При такому способі повна кількість варіантів, які треба аналізувати, дорівнюватиме $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$. Варіантів, які задовольняють умову-обмеження $x_A + x_B + x_C + x_D \leq s_0$, буде 74. Розв'язання задачі методом динамічного програмування суттєво ефективніше за метод прямого перебору.

Процедура динамічного програмування для цієї задачі полягає в тому, що ми спочатку виконаємо *умовну оптимізацію*, а потім – *безумовну*.

Задачу розподілу ресурсів розпочнемо з останнього етапу, тобто із розподілу інвестиції підприємству D. Для цього складемо таблицю табл. 5.2. Умовно оптимальні управління на етапі 4 шукаються згідно з формулою:

$$g_D(s_3) = \max_{x_i}(f_D(s_3, x_D)),$$

де x_D може набувати значення 0, 3 або 5 при восьми теоретично можливих станах s_3.

Якщо інвестиції не виділено жодному з підприємств A, B і C, то підприємству D можна виділити будь-який із необхідних обсягів ресурсу, тобто 0 або 2 або 5. Якщо, наприклад, підприємству A не виділено ресурс, а кожному з підприємств B і C виділено ресурс, який дорівнює одиниці, то підприємству D можна виділити ресурс, що дорівнює 5. Якщо весь ресурс було виділено на підприємства A, B і C, то підприємству D не виділяється ресурс.

Всі можливі варіанти стану системи перед четвертим етапом записані в першій колонці табл. 5.2. У наступних трьох колонках табл. 5.2 записані прибутки з табл. 5.1, які можуть бути отримані при управліннях для кожного можливого стану s_3. В останній колонці табл. 5.2 записані максимальні значення прибутку, які отримані для всіх варіантів управління для кожного стану s_3. У передостанній колонці таблиці записані управління, у яких досягнуто ці максимальні прибутки.

Таблиця 5.2 – Умовно оптимальні управління (етап 4)

s_3	$f_D(x=0)$	$f_D(x=2)$	$f_D(x=5)$	x_D	$g_D(s_3)$
0	0	–	–	0	0
1	0	–	–	0	0
2	0	5	–	2	5
3	0	5	–	2	5
4	0	5	–	2	5
5	0	5	6	5	6
6	0	5	6	5	6
7	0	5	6	5	6

Далі розглянемо третій етап – варіанти виділення інвестиції підприємству C (див. табл. 5.3). На цьому етапі визначається умовний оптимальний виграш, який можна отримати від розподілу інвестицій для підприємств D та C. Він визначається рівнянням

$$g_C(s_2) = \max_{x_i}(f_C(s_2, x_C) + g_D(s_2 - x_D)).$$

Розглянемо кілька прикладів (варіантів) виділення інвестиції підприємству C докладніше. Припустимо, що перед етапом 3 запас ресурсу s_2 дорівнює двом. Тоді, згідно з наведеною вище формулою при управлінні $x_C = 0$ прибуток $f_C(s_2 = 2, x_C = 0) = 0$ і весь запас буде вкладено в підприємство D, тобто

$$g_D(s_2 - x_D) = g_D(2 - 0) = 5,$$

і загальний прибуток при такому варіанті дорівнюватиме 0+5=5.

Розглянемо варіант, у якому $s_2 = 3$ і $x_C = 1$. У цьому варіанті $f_C(s_2 = 3, x_C = 1) = 4$. В результаті такого управління для підприємства D доступна буде інвестиція, що дорівнює 2, яка дасть прибуток, що дорівнює 5 (див. табл. 5.2). Таким чином, при стані $s_2 = 3$ і управлінні $x_C = 1$ максимальний сумарний прибуток від підприємств C і D дорівнюватиме 9. Подібним чином визначено всі умовно оптимальні управління третього етапу розподілу інвестицій.

Таблиця 5.3 – Умовно оптимальні управління (етап 3)

s_2	$f_C(x=0)$	$f_C(x=1)$	$f_C(x=2)$	$f_C(x=5)$	x_C	$g_C(s_2)$
0	0+0=0	–	–	–	0	0
1	0+0=0	4+0=4	–	–	1	4
2	0+5=5	4+0=4	5+0=5	–	$0 \vee 2$	5
3	0+5=5	4+5=9	5+0=5	–	1	9
4	0+5=5	4+5=9	5+5=10	–	2	10
5	0+6=6	4+5=9	5+5=10	7+0=7	2	10
6	0+6=6	4+6=10	5+5=10	7+0=7	$1 \vee 2$	10
7	0+6=6	4+6=10	5+6=11	7+5=12	5	12

Аналогічно складається таблиця другого етапу для визначення умовно оптимальних управлінь при інвестуванні підприємства B (див. табл. 5.4). Для цього етапу можна записати рівняння Беллмана у вигляді

$$g_B(s_1) = \max_{x_i}(f_B(s_1, x_B) + g_C(s_1 - x_C)).$$

Таблиця 5.4 – Умовно оптимальні управління (етап 2)

s_1	$f_B(x=0)$	$f_B(x=1)$	$f_B(x=2)$	$f_B(x=3)$	x_B	$g_B(s_1)$
0	0+0=0	–	–	–	0	0
1	0+4=4	3+0=3	–	–	0	4
2	0+5=5	3+4=7	4+0=5	–	1	7
3	0+9=9	3+5=8	4+4=8	6+0=6	0	9
4	0+10=10	3+9=12	4+5=9	6+4=10	1	12
5	0+10=10	3+10=13	4+9=13	6+5=11	2∨3	13
6	0+10=10	3+10=13	4+10=14	6+9=15	4	15
7	0+12=12	3+10=13	4+10=14	6+10=16	4	16

Розглянемо тепер останній етап задачі, у якому виділяється ресурс підприємству A. На цьому етапі стан $s_0 = 7$, тобто в нашому розпорядженні знаходиться весь ресурс, тому на цьому етапі ми визначаємо безумовно оптимальний виграш, який визначається рівнянням Беллмана у вигляді

$$g_A(s_0) = \max_{x_i}(f_A(s_0, x_A) + g_B(s_0 - x_B)).$$

Результат цього етапу представлений в табл. 5.5. Як видно з таблиці максимальний прибуток ($g_A(s_0) = 17$) досягається при управлінні $x_A = 3$.

Таблиця 5.5 – Безумовно оптимальне управління

s_0	$f_A(x=0)$	$f_A(x=2)$	$f_A(x=3)$	x_A	$g_A(s_0)$
7	0+16=16	3+13=16	5+12=17	3	17

Підсумковий оптимальний розподіл ресурсів між підприємствами A, B, C і D визначається, якщо розглянути таблиці 5.2–5.5 у зворотному порядку: для отримання максимального прибутку, що дорівнює 17, необхідно підприємству A виділити інвестицію, що дорівнює 3, щоб сумарний прибуток від інвестицій у підприємства B,

C і D дорівнював 12; у підприємство B необхідно вкласти інвестицію, рівну 1, щоб сумарний прибуток від інвестицій у підприємства C і D дорівнював 9; зрештою, щоб отримати саме такий прибуток, підприємство D необхідно інвестувати у розмірі 2. Остаточний результат розподілу інвестицій оформлений у вигляді табл. 5.6.

Таблиця 5.6 – Оптимальний розподіл ресурсів

	A	B	C	D
Інвестиція	3	1	1	2
Прибуток	5	3	4	5

5.3 Завдання до практичної роботи

У завданні для кожного варіанту заданий повний обсяг ресурсів и таблиця, в якій наведено обсяги можливих вкладень ресурсів у розвиток підприємств A, B, C, і D та відповідні прибутки, які отримають ці підприємства за рахунок цих вкладень. Необхідно за допомогою методу динамічного програмування знайти такий розподіл ресурсів між підприємствами, щоб прибуток від розподілу був максимальним.

Таблиця 5.7 – Завдання (варіанти 1-2)

Варіант 1	x_A	f_A	x_B	f_B	x_C	f_C	x_D	f_D
Об'єм ресурсів $s = 10$	0	0	0	0	1	2	1	3
	1	2	2	2	2	3	2	4
	2	3	3	4	4	5	5	6
	4	5	5	6	5	7	–	–
Варіант 2	x_A	f_A	x_B	f_B	x_C	f_C	x_D	f_D
Об'єм ресурсів $s = 7$	1	2	0	0	1	2	1	2
	2	3	1	2	2	3	2	4
	4	5	3	5	4	5	3	5
	5	6	5	6	–	–	–	–

Таблиця 5.8 – Завдання (варіанти 3-5)

Варіант 3	x_A	f_A	x_B	f_B	x_C	f_C	x_D	f_D
Об'єм ресурсів $s = 12$	0	0	2	3	1	3	1	3
	2	4	5	6	4	5	3	5
	4	5	7	8	5	7	5	6
	6	7	–	–	6	8	–	–
Варіант 4	x_A	f_A	x_B	f_B	x_C	f_C	x_D	f_D
Об'єм ресурсів $s = 18$	2	3	2	4	1	2	2	5
	3	5	4	6	3	5	3	6
	4	6	5	7	5	6	4	7
	6	8	–	–	6	7	–	–
Варіант 5	x_A	f_A	x_B	f_B	x_C	f_C	x_D	f_D
Об'єм ресурсів $s = 13$	2	3	1	2	1	2	1	3
	3	5	3	4	3	4	3	5
	5	7	4	5	4	7	4	6
	–	–	5	7	–	–	5	7

5.4 Зміст звіту

1. Титульний лист, оформлений відповідно до вимог.
2. Мета роботи.
3. Розв'язок задачі розподілу ресурсів за допомогою таблиць.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 6
Побудова парето-оптимальних розв'язків багатокрітеріальної задачі прийняття рішення

Мета роботи – набути практичних навичок побудови парето-оптимальних множин, навчитися використовувати для розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації принцип Еджворта-Парето.

6.1 Короткі теоретичні відомості

Задача багатокритеріальної оптимізації може бути сформульована так: *потрібно знайти числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *що задовольняють системі обмежень*

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.1}$$

для яких функції

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; k = 1, 2, \ldots, K \tag{6.2}$$

досягають максимального (мінімального) значення.

Підмножина точок $D \subseteq X$, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, що задовольняють системі обмежень (6.1), називається множиною *допустимих розв'язків*. Числові функції f_k (6.2) називаються *цільовими функціями*, або *критеріями ефективності*. Цільові функції відображають множину D в множину F, яка називається *множиною досяжності* (див. рис. 6.1)

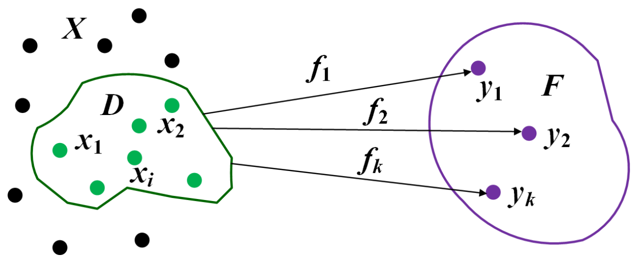


Рисунок 6.1 – Множини допустимих розв'язків і досяжності

Два критерії назвемо *суперечливими* відносно деякої множини допустимих альтернатив D, якщо покращення оцінки по одному з критеріїв на множині D супроводжується її погіршенню за іншим.

Два критерії назвемо *сильно зв'язаними* відносно деякої множини допустимих альтернатив D, якщо їх оцінки є близькими на різних альтернативах множини D, або якщо покращення оцінки за одним критерієм приводить до її покращення за іншим критерієм. Приклад суперечливих критеріїв: мінімізація затрат на виробництво та максимізація прибутку. Приклад сильно зв'язаних критеріїв: мінімізація собівартості продукції та мінімізація енергозатрат виробництва.

Якщо функції $f_1, f_2, \ldots, f_K$ досягають максимуму в одній і тій же точці множини $D = \{x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n\}$ (рис. 6.2), тоді задача багатокритеріальної оптимізації є тривіальною і має *ідеальний розв'язок.*

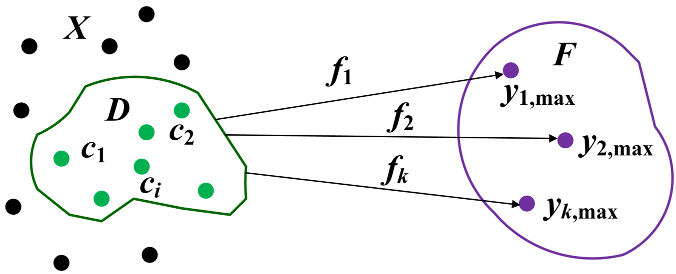


Рисунок 6.2 – Ідеальний розв'язок багатокритеріальної задачі

Випадки існування ідеального розв'язку в багатокритеріальній задачі вкрай рідкі. В більшості випадків задача багатокритеріальної оптимізації є задачею *пошуку компромісів*

Вектор значень цільових функцій $F(X) = (f_1(X), \ldots, f_K(X))$ називається *векторною оцінкою* альтернативи $X \in D$.

Розглянемо дві множини $X_1, X_2 \in D$. Якщо для всіх критеріїв $f_1, f_2 \ldots, f_K$ мають місце нерівності $f_k(X_2) \geq f_k(X_1)$, $k = 1, 2, \ldots, K$, причому *хоча б одна нерівність строга*, то говорять, що розв'язок X_2 *переважний* розв'язку X_1 (що розв'язок X_2 *до-*

мінує над розв'язком X_1). Умову переваги прийнято зазначати у вигляді $X_2 \succ X_1$.

Визначення. Розв'язок $X^* \in D$ називається *оптимальним за Парето*, якщо не існує іншого розв'язку $X \in D$, який би переважав розв'язок X^*.

Альтернативне визначення. Якщо X^* – парето-оптимальний розв'язок, то немає іншого розв'язка $X \in D$, яке перевищує X^* хоча б за одним критерієм, а за рештою критеріїв не гірше.

Математичне визначення. Розв'язок X^* називається *парето-оптимальним* (*оптимальним за Парето*, *ефективним*), якщо *не існує* іншого розв'язку $X \in D$, для якого

$$f_k(X) \geq f_k(X^*),\ k = 1, 2, \ldots, K;\ \exists k :\ f_k(X) > f_k(X^*) \qquad (6.3)$$

З вищенаведених визначень випливає, що парето-оптимальний розв'язок – це такий допустимий розв'язок, який не може бути покращений (збільшений) за одним із наявних критеріїв без погіршення (зменшення) за якимось хоча б одним іншим критерієм [5].

Таким чином, віддаючи перевагу одному парето-оптимальному рішенню перед іншими парето-оптимальними рішеннями, ОПР змушена йти на певний компроміс, погоджуючись на деяку втрату хоча б за одним критерієм (отримуючи, зрозуміло, певний виграш, принаймні за якимсь іншим). Тому множину Парето нерідко називають *множиною компромісів*.

Принцип Еджворта-Парето: якщо ОПР поводиться "розумно", то розв'язки, що обираються, обов'язково повинні бути парето-оптимальними.

У разі двох критеріїв можна побудувати наочну геометричну інтерпретацію множини Парето.

Нехай деякий об'єкт характеризується двома критеріями x_1 і x_2 і допустимими розв'язками двокритеріальної задачі є множина векторів $D = \{A_1 = (0.5, 3.5); A_2 = (2, 4), A_3 = (1, 1),\ A_4 = (3.1.5), A_5 = (0.2, 3.5), A_6 = (4, 2.5), A7 = (5, 1)\}$ (рис. 6.3).

Побудуємо для кожного вектора A кут із из сторонами, паралельними координатним осям, и вершиною у точці (x_1, x_2). Якщо в куті точки, що розглядається, знайдуться інші точки, то ця точка не є парето-оптимальною. У нашому прикладі вектори A_1, A_3, A_4 і A_5 не є парето-оптимальними, а множина Парето $P(X)$ складається з векторів A_2, A_6 і A_7.

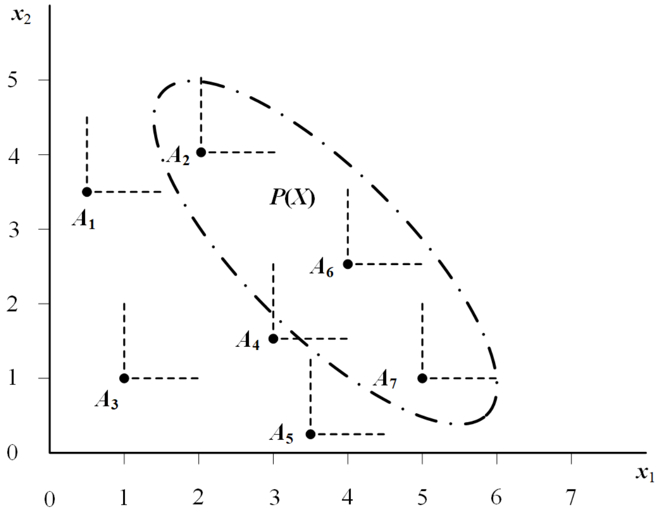


Рисунок 6.3 – Геометрична інтерпретація множини Парето

6.2 Приклад пошуку розв'язків за Парето

Припустимо покупцю комп'ютера запропоновано на вибір п'ять моделей: Model-1 – Model-5. Після аналізу інформації (опубліковані статистики продажу та рейтингів) покупець склав свої оцінки за 10-бальною шкалою про наступні компоненти запропонованих моделей: процесор (CPU), материнська плата (MBoard), жорсткий диск (HDD), монітор (Monitor), корпус (Case). Оцінки цих компонентів разом із вартістю моделей наведено у табл. 6.1.

Перед покупцем стоїть задача вибрати модель комп'ютера для покупки відповідно до власних уподобань та виконаних оцінок. Оцінки компонентів у кожному рядку таблиці є вектором оцінки моделі (для стислості будемо називати їх вектор моделі).

Таблиця 6.1 – Приклад

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	8	7	8	7	6	19500
Model-2	9	7	7	7	5	20200
Model-3	6	8	6	8	7	20500
Model-4	9	7	6	7	5	21500
Model-5	7	8	7	8	6	19100

Перевіримо, чи є ці вектори парето-оптимальною множиною. Порівняємо вектор моделі Model-1 із векторами інших моделей. Наприклад, вектор моделі Model-1 не краще, ніж вектор моделі Model-2 за компонентами CPU, MBoard, Monitor, але краще за компонентами HDD і Case. Порівняння з векторами інших моделей також показує, що вектор моделі Model-1 не краще, ніж інші, але й не гірше. Це говорить нам, що вектор моделі Model-1 не є домінованим.

Далі порівняємо вектор моделі Model-2 з векторами моделей Model-3, Model-4 та Model-5. Ми виявимо, що вектор моделі Model-2 домінує над вектором моделі Model-4 за компонентом HDD. Отже, вектор моделі Model-4 є домінованим і його можна виключити з подальшого розгляду.

Тепер порівнюємо вектор моделі Model-3 з вектором моделі Model-5 і переконуємося, що вектори цих моделей є недомінованими. Таким чином, вектори моделей Model-1, -2, -3, -5 утворюють парето-оптимальну множину: жоден з них не кращий за вектори інших моделей. Отже, множина Парето в даному прикладі складається з векторів:

$$\begin{gathered}(8\ 7\ 8\ 7\ 6)\\(9\ 7\ 7\ 7\ 5)\\(6\ 8\ 6\ 8\ 7)\\(7\ 8\ 7\ 8\ 6)\end{gathered} \tag{6.4}$$

Представимо множину парето-оптимальних векторів у вигляді матриці рішень:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 7 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & 6 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad (6.5)$$

Природно припустити, що рівень важливості компонентів для покупця не однакова. Це може залежати від призначення комп'ютера, що купується (ігровий, для навчання або доступу до Інтернету). Нехай ці компоненти мають таку значущість (ваги) для покупця: CPU (0.35), MBoard (0.25, HDD (0.2), Monitor (0.17), Case (0.03):

$$W = (0.35,\ 0.25,\ 0.2,\ 0.17,\ 0.03)^T. \qquad (6.6)$$

Помножимо матрицю (6.5) на вектор (6.6):

$$V = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 7 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & 6 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.25 \\ 0.2 \\ 0.17 \\ 0.03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.57 \\ 13.84 \\ 11.12 \\ 12.29 \end{pmatrix}. \qquad (6.7)$$

В результаті, ми отримали *вектор пріоритетів* моделей комп'ютерів. Елементи цього вектора характеризують рівень переваги покупця щодо пропонованих моделей або ступінь задоволеності, яку він отримає в результаті купівлі однієї з моделей.

У нашій задачі ми ще не врахували вартість моделей, яка вказана у правій колонці таблиці. Вартість моделі також може відігравати важливу роль у виборі моделі.

Представимо альтернативні рішення задачі вибору моделі комп'ютера на площині пріоритет-вартість у вигляді точок (рис. 6.4).

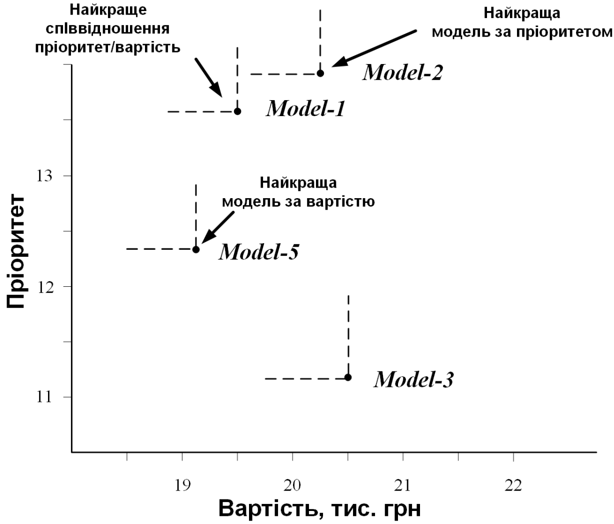


Рисунок 6.4 – Альтернативи на площині пріоритет-вартість

Побудуємо для кожної точки кути, як це зроблено на рис. 6.3, тільки промені кутів по осі абсцис направимо вліво, тому що менша вартість є кращою. В результаті ми бачимо, що альтернатива Модель-3 не є парето-оптимальною, вона домінується іншими альтернативами. У цьому також можна переконатися, якщо побудувати та порівняти вектори моделей за критеріями пріоритет і вартість, як це ми зробили з векторами оцінок компонентів (6.4).

6.3 Завдання до практичної роботи

Знайти парето-оптимальне рішення задачі багатокритеріального ухвалення рішення. Варіанти вихідних даних задачі наведено у таблицях табл. 6.2–6.5. На першому етапі рішення побудувати парето-оптимальну множину альтернатив вибору моделі комп'ютера та визначити вектор пріоритетів, використовуючи значущість (ваги) компонентів, що наведені у формулі (6.6). На другому етапі знайти оптимальну модель комп'ютера з точки зору пріоритет/вартість.

Таблиця 6.2 – Варіанти 1–3

Варіант 1

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	6.0	10.0	5.0	8.0	3.0	19900
Model-2	7.0	4.0	7.0	4.0	5.0	20900
Model-3	4.0	6.0	8.0	5.0	3.0	20200
Model-4	4.0	10.0	4.0	7.0	5.0	21500
Model-5	4.0	6.0	9.0	4.0	9.0	22300
Model-6	3.0	10.0	10.0	7.0	3.0	22200
Model-7	10.0	5.0	9.0	8.0	8.0	19700

Варіант 2

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	6.0	8.0	8.0	4.0	4.0	20400
Model-2	4.0	4.0	5.0	4.0	9.0	22600
Model-3	9.0	4.0	4.0	4.0	4.0	22300
Model-4	9.0	10.0	6.0	9.0	5.0	20400
Model-5	10.0	4.0	7.0	3.0	5.0	20200
Model-6	6.0	4.0	3.0	7.0	8.0	21600
Model-7	8.0	5.0	3.0	4.0	10.0	22800

Варіант 3

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	5.0	4.0	5.0	6.0	4.0	22600
Model-2	10.0	4.0	3.0	10.0	8.0	20900
Model-3	3.0	8.0	10.0	10.0	9.0	22300
Model-4	8.0	6.0	8.0	8.0	6.0	21400
Model-5	5.0	7.0	3.0	6.0	6.0	20400
Model-6	6.0	4.0	8.0	10.0	9.0	19900
Model-7	7.0	8.0	7.0	10.0	8.0	21100

Таблиця 6.3 – Варіанти 4–6

Варіант 4

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	9.0	7.0	6.0	5.0	6.0	20500
Model-2	10.0	6.0	6.0	5.0	8.0	19800
Model-3	9.0	7.0	10.0	3.0	8.0	22200
Model-4	3.0	10.0	4.0	3.0	6.0	21300
Model-5	10.0	3.0	3.0	6.0	10.0	22400
Model-6	8.0	6.0	5.0	3.0	8.0	20100
Model-7	4.0	10.0	9.0	10.0	3.0	19800

Варіант 5

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	5.0	9.0	4.0	3.0	7.0	21300
Model-2	5.0	6.0	10.0	7.0	7.0	21900
Model-3	6.0	10.0	6.0	9.0	7.0	22400
Model-4	6.0	8.0	6.0	4.0	6.0	19700
Model-5	10.0	10.0	6.0	7.0	8.0	22400
Model-6	4.0	7.0	8.0	10.0	4.0	19900
Model-7	6.0	10.0	9.0	6.0	3.0	19600

Варіант 6

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	4.0	6.0	3.0	3.0	4.0	19000
Model-2	7.0	5.0	8.0	4.0	9.0	22000
Model-3	7.0	4.0	3.0	4.0	8.0	21000
Model-4	5.0	7.0	10.0	5.0	10.0	19900
Model-5	10.0	8.0	8.0	5.0	6.0	22200
Model-6	5.0	6.0	8.0	10.0	5.0	21200
Model-7	7.0	4.0	9.0	3.0	9.0	21600

Таблиця 6.4 – Варіанти 7–9

Варіант 7

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	3.0	6.0	7.0	10.0	3.0	20000
Model-2	9.0	6.0	9.0	6.0	3.0	19700
Model-3	6.0	5.0	9.0	7.0	10.0	22300
Model-4	8.0	10.0	10.0	9.0	10.0	20300
Model-5	10.0	5.0	4.0	9.0	9.0	20400
Model-6	6.0	9.0	6.0	10.0	6.0	21800
Model-7	4.0	3.0	5.0	7.0	6.0	21000

Варіант 8

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	4.0	6.0	5.0	10.0	7.0	21600
Model-2	3.0	3.0	8.0	6.0	8.0	20300
Model-3	3.0	4.0	8.0	10.0	6.0	20600
Model-4	5.0	5.0	8.0	8.0	9.0	21300
Model-5	5.0	7.0	5.0	6.0	7.0	22000
Model-6	3.0	10.0	8.0	4.0	3.0	19500
Model-7	4.0	10.0	9.0	5.0	10.0	20000

Варіант 9

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	6.0	5.0	3.0	3.0	9.0	19700
Model-2	9.0	8.0	7.0	5.0	7.0	21600
Model-3	4.0	10.0	3.0	4.0	4.0	21700
Model-4	10.0	7.0	10.0	10.0	9.0	21100
Model-5	7.0	4.0	7.0	6.0	4.0	20500
Model-6	10.0	5.0	9.0	4.0	6.0	22400
Model-7	4.0	5.0	8.0	8.0	9.0	20800

Таблиця 6.5 – Варіант 10

Варіант 10

Model	CPU	MBoard	HDD	Monitor	Case	Cost
Model-1	7.0	9.0	5.0	9.0	6.0	21600
Model-2	10.0	3.0	10.0	6.0	5.0	21900
Model-3	6.0	7.0	9.0	6.0	5.0	20200
Model-4	9.0	5.0	9.0	5.0	6.0	22300
Model-5	4.0	4.0	10.0	7.0	8.0	19700
Model-6	7.0	5.0	3.0	8.0	5.0	20500
Model-7	5.0	6.0	5.0	7.0	7.0	20400

6.4 Зміст звіту

1. Титульний лист, оформлений відповідно до вимог.
2. Мета роботи.
3. Послідовність побудови множини парето-оптимальних альтернатив.
4. Графічний розв'язок задачі пошуку оптимального рішення з точки зору пріоритет/вартість.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 7

Прийняття рішення при багатьох критеріях методом МАІ. Багатокритеріальна оптимізація

Мета роботи – отримати практичні навички постановки, формулювання та розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, найглибше зрозуміти концепцію критерію оцінки об'єкта, навчитися оцінювати та порівнювати критерії, визначати значимість критерію, перевіріти узгодженість оцінок критеріїв експертом чи особою, яка приймає рішення.

7.1 Короткі теоретичні відомості

7.1.1 Формулювання задачі оптимізації

Показником загальної цінності будь-якої сутності зазвичай розуміють ступень або відсоток виконанних вимог користувача до цієї сутності. Метою оптимізації, наприклад при придбанні комп'ютера може бути:

– максимізація загальної цінності за обмеженої вартості;

– мінімізація загальної вартості, доки загальна цінність перевищує задану потрібну цінність;

– максимізація співвідношення цінність/вартість.

Комп'ютер має багато важливих і не дуже важливих компонентів. Крім того, в комп'ютері є компоненти сумісні і несумісні як за електричними, конструктивними параметрами, так і за інформаційними інтерфейсами. Також існує багато виробників, брендів, постачальників, умов продажу комп'ютерних компонентів. Тому задача комплектації комп'ютера компонентами є складною задачею багатокритеріального вибору як самих компонентів, і вибору альтернативних моделей комп'ютерів.

Наприклад, користувач вибирає модель комп'ютера з урахуванням ефективності вартості п'яти компонентів (рис. 7.1).

<table>
<tr><th colspan="25">Компоненти</th><th>Кількість</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Процесор</td><td colspan="12">Intel</td><td colspan="12">AMD</td><td rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td colspan="4">i3</td><td colspan="4">i5</td><td colspan="4">i7</td><td colspan="4">Ryzen 3</td><td colspan="4">Ryzen 5</td><td colspan="4">Ryzen 7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Материнська плата, шт.</td><td colspan="3">ASUS</td><td colspan="3">Gigabyte</td><td colspan="3">MSI</td><td colspan="3">ASRock</td><td colspan="3">ASUS</td><td colspan="3">Gigabyte</td><td colspan="3">MSI</td><td colspan="3">ASRock</td><td rowspan="2">21</td></tr>
<tr><td colspan="3">3</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Жорсткий диск, Тб</td><td colspan="8">Western Digital</td><td colspan="8">Seagate</td><td colspan="8">Toshiba</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,5</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">0,5</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">0,5</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Монітор, (дюйми)</td><td colspan="6">MSI</td><td colspan="6">Samsung</td><td colspan="6">LG</td><td colspan="6">ASUS</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td colspan="2">21.5</td><td colspan="2">23.8</td><td colspan="2">27</td><td colspan="2">21.5</td><td colspan="2">23.8</td><td colspan="2">27</td><td colspan="2">21.5</td><td colspan="2">23.8</td><td colspan="2">27</td><td colspan="2">21.5</td><td colspan="2">23.8</td><td colspan="2">27</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Корпус, шт.</td><td colspan="6">Vinga</td><td colspan="6">2E</td><td colspan="6">Qube</td><td colspan="6">1st Player</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td colspan="6">2</td><td colspan="6">2</td><td colspan="6">2</td><td colspan="6">2</td></tr>
</table>

Рисунок 7.1 – Приклад вибору моделі комп’ютера

Кількість альтернативних комплектацій комп’ютера дорівнюватиме:

$$3 \cdot (9 + 12) \cdot 12 \cdot 12 \cdot 8 = 72576.$$

Кожна конфігурація з одного боку, має певну цінність чи рівень задоволення потреб користувача, з іншого – певну вартість. Необхідно також враховувати, що звичайному користувачеві не завжди легко розібратися у своїх уподобаннях, які можуть бути суперечливими, помилковими, неусвідомленими та змінними залежно від досвіду, порад експертів, дослідження відгуків в Інтернеті тощо.

7.1.2 Метод МАІ

Метод МАІ детально викладено у лекційних матеріалах до курсу та методичних вказівках до лабораторних робіт. Основними етапами методу МАІ є наступні [6, 7].

1. Створення ієрархії мети, критеріїв та альтернатив.

2. Визначення рейтингів (векторів пріоритетів, значимості) всіх можливих варіантів рішень:

– створення матриці парних порівнянь варіантів рішень за всіма критеріями (кількість матриць дорівнює кількості критеріїв);

– нормалізація кожної матриці;

– отримання векторів пріоритетів по кожної матриці;

– обчислення і перевірка коефіцієнти узгодженості (консистентності).

3. Визначення вагових коефіцієнтів критеріїв:

– створення матриці парних порівнянь значимості критеріїв;

– нормалізація цієї матриці;

– отримання вектору пріоритетів критеріїв;

– обчислення і перевірка коефіцієнта узгодженості матриці парних порівнянь значимості критеріїв.

4. Обчислення рейтингу для кожної альтернативи рішення та вибір рішення.

7.2 Приклад використання методу МАІ

Розглянемо приклад вибору одного з компонентів комп'ютера – жорсткого диска (HDD). Користувачеві запропонували кілька моделей HDD від виробників Seagate, Western Digital (WD) і Toshiba. Найбільш значущі характеристики запропонованих моделей наведені в табл. 7.1. Усі представлені моделі мають однаковий форм-фактор (3,5 дюйми) та інтерфейс (SATA III).

Таблиця 7.1 – Моделі запропонованих HDD

Виробник	Найменування моделі	Ємність, Тб	Швидкість обертання, об/хв	Ємність буферу, Мб	Вартість, грн.
Seagate	ST1000DM010	1	7200	64	1650
Western Digital	WD5000AVDS	0,5	5400	32	920
Western Digital	WD10EZEX	1	7200	64	1700
Toshiba	HDWD320	2	7200	256	2200

Процес МАІ структурує проблему як ієрархію. На рис. 7.2 показано ієрархію, запропоновану для нашого прикладу. Перший рівень ієрархії – це покупка HDD. Другий рівень ієрархії складається з критеріїв, які ми будемо використовувати для ухвалення рішення про покупку. У нашому прикладі ми вирішили використати 3 критерії: «Ємність» жорсткого диска, «Рейтинг» виробників жорстких дисків (https://ek.ua/ua/z190.htm), за статистикою продажів в Україні, відгуків користувачів тощо, а також критерій «Судження» (Jadgment) покупця, який має власну думку та вподобання на основі досвіду використання жорстких дисків.

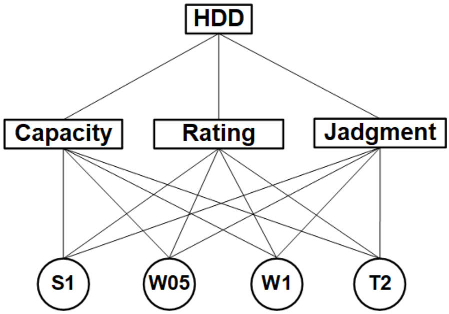


Рисунок 7.2 – Ієрархія рішення при виборі жорсткого диска

Створимо таблиці парних порівнянь за критеріями «Ємність» та «Рейтинг». Для таблиці за критерієм «Ємність» (табл. 7.2) використовуються фактичні дані щодо ємності HDD. При цьому ми припускаємо, що покупець вважає, що цінність диска пропорційна його ємності. Таблиця парних порівнянь за критерієм «Рейтинг» (табл. 7.3) складена згідно з рейтингом: Seagate – 26%; WD – 44%; Toshiba – 11%.

Для зручності позначимо пропоновані моделі HDD наступним чином:

– ST1000DM010 – S1;
– WD5000AVDS – W05;
– WD10EZEX – W1;
– HDWD320 – T2.

Наступним кроком методу МАІ є визначення відносних пріоритетів альтернатив щодо кожного критерію. Ці пріоритети називають *локальними*.

Таблиця 7.2 – Парне порівняння (критерій «Ємність»)

Ємність	0.5	1	2
0.5	1	0.5	0.25
1	2	1	0.5
2	4	2	1

Таблиця 7.3 – Парне порівняння (критерій «Рейтинг»)

Рейтинг	Seagate	WD	Toshiba
Seagate	1	0.591	2.364
WD	1.692	1	4
Toshiba	0.423	0.25	1

Таблиця парних порівнянь за критерієм «Судження» (табл. 7.4) створюється на підставі суджень покупця, який має власну думку щодо цінності пропонованих моделей HDD. Для цього використовується запропонована автором методу МАІ Т. Сааті шкала відносної важливості (значущості, переваги), подана в табл. 7.5.

Таблиця 7.4 – Парне порівняння («Судження»)

Судження	S1	W05	W1	T2
S1	1	3	1	1.5
W05	0.333	1	0.5	0.5
W1	1	2	1	1.5
T2	0.667	2	0.6671	1

Таблиця 7.5 – Шкала Т. Сааті

Вербальне (словесне) судження	Числове значення
Надзвичайна важливість (дуже велика перевага)	9
Дуже сильна важливість (значна перевага)	7
Сильна важливість (суттєва перевага)	5
Помірна важливість (перевага)	3
Однакова важливість	1
Проміжні значення	8, 6, 4, 2

Наступним кроком методу МАІ є визначення відносних пріоритетів альтернатив щодо кожного критерію. Ці пріоритети називають *локальними*. Для математичних перетворень представимо дані у табл. 7.2 – 7.4 у вигляді матриць:

$$A_C = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 2 & 1 & 0.5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0.591 & 2.364 \\ 1.692 & 1 & 4 \\ 0.423 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.33 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

виконаємо їх нормалізацію за формулою:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_i a_{ij}}, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.4}$$

тобто кожен елемент матриці ділиться на суму елементів стовпця, в якому цей елемент знаходиться. В результаті нормалізації матриць (7.1)–(7.3) ми отримаємо відповідні ним нормалізовані матриці:

$$B_C = \begin{pmatrix} 0.143 & 0.143 & 0.143 \\ 0.286 & 0.286 & 0.286 \\ 0.571 & 0.571 & 0.571 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

$$B_R = \begin{pmatrix} 0.321 & 0.321 & 0.321 \\ 0.543 & 0.543 & 0.543 \\ 0.136 & 0.136 & 0.136 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

$$B_J = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.375 & 0.316 & 0.333 \\ 0.111 & 0.125 & 0.158 & 0.111 \\ 0.333 & 0.25 & 0.316 & 0.333 \\ 0.222 & 0.25 & 0.211 & 0.222 \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

Вектори пріоритетів (локальні) за кожним критерієм обчислюються як середні за кожним рядком відповідної нормалізованої матриці, тобто:

$$w_i = \frac{1}{n}\sum_j b_{ij}, \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.8}$$

Таким чином, ми отримали вектори локальних пріоритетів (7.9):

$$\begin{aligned} W_C &= (0.143, 0.286, 0.571)^T; \\ W_R &= (0.321, 0.543, 0.136)^T; \\ W_J &= (0.339, 0.126, 0.308, 0.226)^T. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Матриці парних порівнянь, які отримані на підставі суджень ОПР, необхідно перевірити на узгодженість (консистентність), оскільки ОПР може через різні причини судити непослідовно або помилятися. Нижче наведено методику перевірки консистентності матриці (7.3).

Обчислення вектора зваженої суми:

$$W_J^* = A_J \times W_J \tag{7.10}$$

$$W_J^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1.5 \\ 0.333 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 & 1.5 \\ 0.667 & 2 & 0.667 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.339 \\ 0.126 \\ 0.308 \\ 0.226 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.366 \\ 0.507 \\ 1.239 \\ 0.910 \end{pmatrix}.$$

Обчислення консистентності елементів вектора W_J:

$$\lambda_i = w_{Ji}^* / w_{Ji}, \ i = 1, 2, \cdots, n \tag{7.11}$$

$$\lambda_1 = 4.097; \ \lambda_2 = 4.559; \ \lambda_3 = 3.718; \ \lambda_4 = 4.097.$$

Обчислення середньої консистентності матриці A_J, яка є максимальним власним значення матриці і тому позначається як λ_max:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n}\sum_i \lambda_i = 4.118. \tag{7.12}$$

Обчислення *індексу консистентності*:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{4.118 - 4}{3} = 0.039. \tag{7.13}$$

Обчислення коефіцієнта консистентності:

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.039}{0.9} = 0.044, \tag{7.14}$$

де RI – індекс рандомізації (ймовірності). Індекси рандомізації для матриць різного розміру наведено у табл. 7.6.

Таблиця 7.6 – Індекси рандомізації

n	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0.59	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Відповідно до Т. Сааті практично слід приймати матриці зі значеннями $CR \leq 0.1$ і відкидати інакше. Значення $CR > 0.1$ означає, що судження більш ніж 10% суперечливі, ніби вони булі сформовані випадковим чином. Таким чином, у нашому прикладі консистентність матриці A_J, яка дорівнює 0.044, є допустимою.

Наступним кроком розв'язання задачі вибору буде визначення глобального пріоритету.

Розглянуті критерії «Ємність», «Рейтинг» та «Судження» можуть мати різну значущість для ОПР. Вектор пріоритетів цих критеріїв також можна визначити за допомогою матриці парних порівнянь. Припустимо ОПР, користуючись шкалою Т. Сааті (табл. 7.5), склав таку таблицю парних порівнянь критеріїв (табл. 7.7):

Таблиця 7.7 – Парне порівняння критеріїв

Критерії	Судження	Ємність	Рейтинг
Судження	1	0.333	0.5
Ємність	3	1	2
Рейтинг	2	0.5	1

Користуючись вище наведеною методикою, обчислимо локальний вектор пріоритетів для табл. 7.7 та перевіримо її консистентність. В результаті отримаємо наступне:

Матриця парних порівнянь критеріїв:

$$A_{Cr} = \begin{pmatrix} 1 & 0.333 & 0.5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

Нормалізована матриця парних порівнянь критеріїв:

$$B_{Cr} = \begin{pmatrix} 0.167 & 0.182 & 0.143 \\ 0.5 & 0.545 & 0.571 \\ 0.333 & 0.273 & 0.286 \end{pmatrix}. \tag{7.16}$$

Локальний вектор пріоритетів критеріїв:

$$W_{Cr} = (0.164, 0.539, 0.297)^T; \tag{7.17}$$

Індекс и коефіцієнт консистентності:

$$CI = 0.0046; \; CR = 0.0078. \tag{7.18}$$

Оскільки коефіцієнт консистентності матриці (7.15) менше 0.1, вважаємо, що складені оцінки критеріїв узгоджені.

Вектор глобальних пріоритетів альтернатив обчислюється як лінійна комбінація їх локальних пріоритетів з коефіцієнтами, відповідними пріоритетам критеріїв:

$$\begin{aligned} G_{S1} &= W_{C2} * W_{Cr1} + W_{R1} * W_{Cr2} + W_{JS1} * W_{Cr3}; \\ G_{W05} &= W_{C1} * W_{Cr1} + W_{R2} * W_{Cr2} + W_{JW05} * W_{Cr3}; \\ G_{W1} &= W_{C2} * W_{Cr1} + W_{R2} * W_{Cr2} + W_{JW1} * W_{Cr3}; \\ G_{T2} &= W_{C3} * W_{Cr1} + W_{R3} * W_{Cr2} + W_{JT2} * W_{Cr3}; \end{aligned} \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned} G_{S1} &= 0.286 * 0.164 + 0.321 * 0.539 + 0.339 * 0.297 = 0.32; \\ G_{W05} &= 0.143 * 0.164 + 0.543 * 0.539 + 0.126 * 0.297 = 0.35; \\ G_{W1} &= 0.286 * 0.164 + 0.543 * 0.539 + 0.308 * 0.297 = 0.43; \\ G_{T2} &= 0.571 * 0.164 + 0.136 * 0.539 + 0.226 * 0.297; = 0.23. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Таким чином, ми отримали глобальний вектор пріоритетів альтернатив

$$G = (0.32, 0.35, 0.43, 0.23), \tag{7.21}$$

який визначає остаточний рейтинг моделей HDD:

$$W1 \succ W05 \succ S1 \succ T2. \tag{7.22}$$

Цей рейтинг ми отримали з урахуванням фактичних даних («Ємність» і «Рейтинг»), а також суб'єктивних міркувань (критерії «Судження» та «Критерії») ОПР. Суб'єктивні оцінки в різних ОПР зазвичай різняться, тому отримані рейтинги для кожного ОПР можуть бути різними. Проте, ці рейтинги відповідають оцінкам ОПР, тобто. задовольняють вимогам ОПР до оцінюваних альтернатив.

Для пошуку оптимального розв'язання задачі вибору HDD складемо вектор пар цінність/вартість. Цінність кожного HDD визначається значеннями елементів вектора (7.21), дані вартості моделей HDD наведені в табл. 7.1:

$$((0.32, 1659); (0.35, 920); (0.43, 1700); (0.23, 2200)). \tag{7.23}$$

Побудуємо точки, що відповідають цьому вектору, на площині цінність/вартість (рис. 7.3). Як видно з цього рисунку, оптимальним рішенням щодо співвідношення цінність/вартість є вибір моделі W1, оптимальним найбільш дешевим є варіант W05. Рішення S1 та T2 є домінованими і тому неоптимальними.

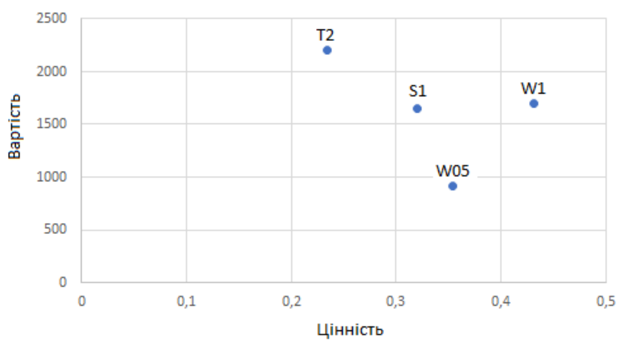


Рисунок 7.3 – Площина цінність/вартість

7.3 Завдання до практичної роботи

Знайти оптимальне рішення вибору одного з компонентів для комп'ютера, призначеного для використання в процесі навчання. Рішення має бути оптимальним за співвідношенням цінність/вартість. У якості критеріїв оцінки альтернатив використовувати:

– одну або дві з технічних характеристик компонента;

– рейтинг виробників (брендів) моделей компонента (продажів чи популярності у світі або в Україні), інформацію підтвердити Інтернет-посиланням;

– власні оцінки переваг (уподобання) моделей компонента;

– власні оцінки значимості критеріїв.

Розрахунками підтвердить консистентність матриць парних порівнянь.

Варіант 1. Знайти оптимальне рішення задачі вибору монітора серед альтернатив:

a) MSI PRO MP223
b) S24R358FZ
c) LG 22MP410-B
d) VP229HE
e) VA24EHF

Варіант 2. Знайти оптимальне рішення задачі вибору монітора серед альтернатив:

a) MSI PRO MP271
b) S22C310
c) LG 24MK430H-B
d) LG 27MP400-B
e) VZ27EHEF

Варіант 3. Знайти оптимальне рішення задачі вибору монітора серед альтернатив:

a) S24R358FZ
b) S22C310
c) LG 24MK430H-B
d) VA24EHF
e) VZ27EHE

Варіант 4. Знайти оптимальне рішення задачі вибору монітора серед альтернатив:

a) MSI PRO MP223

b) S22C310
c) LG 22MP410-B
d) VP229HE
e) VA24EHF

Варіант 5. Знайти оптимальне рішення задачі вибору монітора серед альтернатив:

a) MSI PRO MP243
b) S24R358FZ
c) LG 22MP410-B
d) LG 24MK430H-B
e) VZ27EHE

Варіант 6. Знайти оптимальне рішення задачі вибору корпусу серед альтернатив:

a) Vinga CS210B
b) Vinga Pillar
c) 2E Virtus G3301
d) Qube Neptune
e) 1stPlayer F4-3B1

Варіант 7. Знайти оптимальне рішення задачі вибору корпусу серед альтернатив:

a) Vinga Legend
b) Vinga Ghost
c) 2E RUNA
d) Qube Shadow
e) 1stPlayer F4-3R2

Варіант 8. Знайти оптимальне рішення задачі вибору корпусу серед альтернатив:

a) Vinga CS216B
b) Vinga Winston
c) Qube Carnival
d) 2E 2E-E185
e) 1stPlayer RT5-BK

Варіант 9. Знайти оптимальне рішення задачі вибору корпусу серед альтернатив:

a) Gamemax Storm
b) Gamemax Infinity Mini
c) Qube REEF ARGB
d) Vinga Cloud
e) Vinga CS210B

Варіант 10. Знайти оптимальне рішення задачі вибору корпусу серед альтернатив:

a) 2E GALAXY
b) Chieftec APEX AIR
c) Qube Carnival
d) ASUS TUF Gaming GT302 ARGB
e) Gamemax Focus MB

7.4 Зміст звіту

1. Титульний лист, оформлений відповідно до вимог.
2. Мета роботи.
3. Постановка задачі згідно з варіантом.
4. Таблиці (матриці) парних порівнянь, які використовувалися для визначення локальних пріоритетів та розрахунки елементів векторів локальних пріоритетів.
5. Розрахункове обґрунтування консистентності матриць парних порівнянь, складених виходячи з суджень.
6. Розрахунок елементів вектора глобальних пріоритетів альтернатив.
7. Графічний розв'язок задачі пошуку оптимальної альтернативи з точки зору пріоритет/вартість.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Розен В.П., Кулаковський Л.Я., Босак А.В. Інтелектуальні системи прийняття рішень: практикум. – Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 81 с.

2. Taha H.A. Operations Research: An Introduction, 11th Edition. Pearson, 2022.

3. Hillier F. and Lieberman G. Introduction to Operations Research, 11th Edition. McGraw-Hill Higher Education, 2019.

4. Ладієва Л.Р. Дослідження операцій в системах керування: навч. посіб. – Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 109 с.

5. Катренко А.В., Пасічник В.В. Прийняття рішень: теорія та практика: підручник. -– Львів : «Новий Світ-2000», 2023. – 447 с.

6. Brunnelli M. Introduction to the analytic hierarchy process. Cham: Springer, 2015.

7. Мічківський С. М., Прігунов О. В., Римар П. В. Системи та методи прийняття рішень: методичні вказівки. – Вінниця : ДонНУ ім. Василя Стуса, 2019. – 76 с.