

# Инженерные приложения физико-математических наук

УДК 539.37+517.968.23

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОЛЬЦА НЕРАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫМ МОМЕНТОМ

Д.И. Анпилогов, к.т.н., доц.

Запорожский национальный технический университет

e-mail: *anpilogov@ua.fm*

Н.В. Снижко, к.ф.-м.н., доц.

Запорожский национальный технический университет

e-mail: *snizhko.nataliia@gmail.com*

### 1. Введение

В работе методом комплексных потенциалов Мусхелишвили решена система дифференциальных уравнений в частных производных для области в форме кольца, известных [1] как первая основная граничная задача теории упругости. Кольцо моделирует элемент силовой установки, передающий вращательное движение, поэтому граничные условия сформулированы с учётом касательной нагрузки. Подобная задача рассматривалась в [2, 3]. Однако, нагрузка в этих работах считалась равномерно распределённой вдоль контура. Поэтому деформация носила сдвиговый характер. Физически реалистично считать нагрузку равномерно распределённой лишь в пределах углов, соответствующих креплениям кольца, и равной нулю вне этих пределов. Целью работы является решение соответствующей граничной задачи.

### 2. Основные обозначения

Пусть внутренний и внешний радиусы кольца равны  $R_1$ ,  $R_2$ . Положение текущей точки на контуре будем характеризовать углом  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Пусть вдоль контура размещено  $N$  креплений угловым размером  $2\delta$  (рисунок 1), причём середины креплений описываются углами  $\theta_m = m\Delta\theta$ ,  $m = 0, N-1$ ,  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$ . Для исключения перекрытия креплений по углу положим  $N\delta < \pi$ .

Пусть  $C$  означает долю, которую угловой размер крепления составляет от периода следования креплений:  $C = \frac{2\delta}{\Delta\theta} = \frac{N\delta}{\pi}$ . Тогда перекрытия креплений по углу не наступают при значениях  $0 < C < 1$ .

На рисунке 1 изображена также эпюра касательного напряжения, равного  $T_0 = T_{01}$  для внутренней части контура и  $T_0 = T_{02}$  для внешней части.

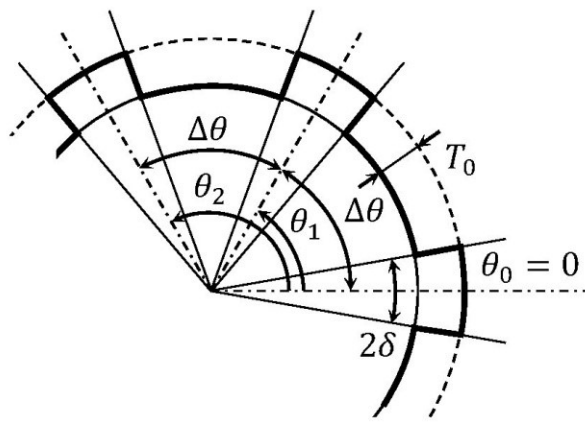


Рисунок 1 – К определению геометрических параметров задачи

В [3] показано, что учёт центробежных сил инерции сводится только к коррекции нормальной компоненты внешнего напряжения, и это не изменяет сдвигового характера деформации. Поэтому в настоящей работе нормальная компонента во внимание не принимается. Таким образом, объёмно распределённые силы отсутствуют, и задача может быть решена методом комплексных потенциалов в статической постановке.

Распределение внешнего напряжения по углу примем в виде

$$T(\theta) = T_0 \cdot t(\theta). \quad (1)$$

Здесь

$$t(\theta) = \sum_{m=0}^N \left\{ \sigma(\theta - \theta_m^-) - \sigma(\theta - \theta_m^+) \right\}, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – функция Хевисайда, а точки разрыва  $\theta_m^\pm = \theta_m \pm \delta$ . Функция  $t(\theta)$  тождественно равна единице внутри интервалов углов, соответствующих креплениям, и нулю вне этих интервалов.

Пусть толщина кольца равна  $h$ . Угол  $d\theta$  опирается на дугу контура длиной  $d\ell = R d\theta$  (индекс у радиуса опущен, т.к. эти вычисления одинаковы для внешней и внутренней частей контура). Элемент площади боковой поверхности  $dS = h d\ell = Rh d\theta$ . Элементарная сила  $dF = T(\theta) dS = T(\theta) \cdot Rh d\theta$ . Элементарный момент  $dM = R dF = T(\theta) \cdot R^2 h d\theta$ . С учётом значений функции (2) интегрирование последнего выражения приводит к результату  $M = 2\pi C T_0 R^2 h$ . Пусть  $M_0 = \frac{M}{h}$  – внешний скручивающий момент в расчёте на единицу длины, отсчитываемой в направлении перпендикуляра к плоскости кольца. Тогда  $M_0 = 2\pi C T_0 R^2$ . Именно такой момент прилагается отдельно к внутренней части контура, и отдельно к внешней (в статическом случае эти моменты должны быть уравновешены). Тогда

$$T_{01} = \frac{M_0}{2\pi C R_1^2}, \quad T_{02} = \frac{M_0}{2\pi C R_2^2}.$$

Для определения функции (1) следует использовать эти значения вместо  $T_0$ .

Пусть  $\gamma = \frac{R_1}{R_2}$  – доля, которую внутренний радиус составляет от внешнего.

Тогда  $T_{02} = \gamma^2 T_{01}$ . Выполнение этого соотношения обеспечивает равенство нулю суммарного внешнего момента.

### 3. Граничные условия

В терминах комплексных потенциалов  $\Phi$ ,  $\Psi$  граничное условие [1, § 41, (23)] в форме Колосова-Мусхелишвили при отсутствии нормальной компоненты ( $N = 0$ ) имеет вид ( $j = 1, 2$ ):

$$\left\{ \Phi + \bar{\Phi} - e^{2i\theta} \left[ \bar{z} \cdot \Phi' + \Psi \right] \right\} \Big|_{|z|=R_j} = -iT. \quad (3)$$

Здесь касательная компонента  $T = T_{0j} \cdot t(\theta)$ ,  $j = 1, 2$ .

### 4. Метод решения

Решение граничной задачи ищем в виде

$$\Phi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a'_k z^k.$$

Подстановка этих выражений в (3) и последующее использование метода неопределённых коэффициентов при функциях  $e^{ik\theta}$  позволяют найти коэффициенты  $a_k$ ,  $a'_k$ , а следовательно – и решение граничной задачи. При этом для точек контура следует полагать  $z = R_j e^{i\theta}$ ,  $j = 1, 2$ . Такой подход требует разложения правой части (3) в комплексный ряд Фурье.

Функцию (2) разложим в ряд Фурье по углу  $\theta$  на интервале  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Очевидно, коэффициенты при синусах равны нулю, и поэтому

$$t(\theta) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos k\theta. \quad (4)$$

Постоянная составляющая (интегральное среднее)  $c_0$  равна отношению площади под графиком  $t(\theta)$  к ширине интервала разложения:

$$c_0 = \frac{2\delta \cdot N}{2\pi} = C.$$

Коэффициенты при косинусах:

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(\theta) \cos k\theta d\theta.$$

Ограничиваясь интегрированием вдоль тех интервалов, на которых  $t(\theta) \neq 0$ , имеем:

$$\pi c_k = \int_0^{\delta} \cos k\theta d\theta + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \cos k\theta d\theta + \sum_{m=1}^{N-1} \int_{\theta_m-\delta}^{\theta_m+\delta} \cos k\theta d\theta = \frac{2 \sin k\delta}{k} \sum_{m=0}^{N-1} \cos k\theta_m.$$

Имеем  $k\theta_m = k \cdot \frac{2\pi m}{N} = m\chi$ , где временно обозначено  $\chi = \frac{2k\pi}{N}$ . Как известно,

$$\sum_{m=0}^{N-1} \cos mx = \begin{cases} N, & x = 2\pi p, \quad p \in Z; \\ 0, & x = 2\pi p, \quad p \notin Z. \end{cases}$$

Условие  $x = 2\pi p$  есть  $k = Np$ , тогда

$$c_k = \begin{cases} \frac{2N \sin k\delta}{k\pi}, & k = N, 2N, \dots; \\ 0, & k \neq 0, N, 2N, \dots \end{cases}$$

Теперь разложение (4) построено. Преобразуем его к комплексной форме:

$$t(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\theta}. \quad (5)$$

Здесь с учётом (4):  $A_0 = c_0 = C$ , а также

$$A_k = A_{-k} = \frac{c_k}{2} = \begin{cases} \frac{N \sin k\delta}{k\pi}, & k = N, 2N, \dots; \\ 0, & k \neq 0, N, 2N, \dots \end{cases}$$

Положим:

$$A'_k = -iT_{01}A_k, \quad A''_k = -iT_{02}A_k.$$

Теперь (3) совпадает с [1, § 59, (2)], и можно использовать методику, изложенную в [1, § 59].

## 5. Решение граничной задачи

Компоненты  $u$ ,  $v$  поля перемещений определяются как

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi - z\overline{\varphi'} - \psi. \quad (6)$$

Здесь  $\mu$  – модуль сдвига материала; коэффициент  $\kappa = 3 - 4\sigma$  для состояния плоской деформации или  $\kappa = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}$  для плосконапряжённого состояния,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона;  $\varphi = \int \Phi dz$ ,  $\psi = \int \Psi dz$ .

Коэффициенты  $a_k$  и  $a'_k$  для различных значений  $k$  определяются соотношениями [1, § 59, (5), (6), (7'), (14) (16), (16')]. При этом коэффициенты  $a_0, a_1, a_{-1}$  вычисляются нетиповым образом и в нашем случае оказываются равными нулю:  $a_0 = a_1 = a_{-1} = 0$ . Кроме того, нетиповым образом вычисляются коэффициенты  $a'_{-1}, a'_{-2}, a'_{-3}$ ; в нашем случае  $a'_{-1} = a'_{-3} = 0$ .

## 6. Приведение к безразмерному виду

Положение текущей точки области будем характеризовать числом

$$z = R e^{i\theta} = \rho R_2 e^{i\theta} = \frac{\rho}{\gamma} R_1 e^{i\theta}.$$

Здесь через  $\rho = \frac{R}{R_2}$  обозначена доля, которую текущий радиус  $R$  составляет от внешнего радиуса  $R_2$ . Тогда  $\gamma < \rho < 1$ . Величина  $\rho$ , таким образом, описывает безразмерный модуль текущего значения  $z$ .

Для приведения правой части (6) к безразмерному виду положим:

$$a_k = i \cdot \frac{M_0}{2\pi CR_1} \cdot \frac{1}{R_1^{k+1}} \cdot \alpha_k, \quad a'_k = i \cdot \frac{M_0}{2\pi CR_1} \cdot \frac{1}{R_1^{k+1}} \cdot \alpha'_k.$$

Совместное использование этих соотношений и результатов [1, § 59] даёт:

$$\alpha_k = \begin{cases} A_k \cdot f_k(\gamma), & k = \pm 2, \pm 3, \dots; \\ 0, & k = 0, \pm 1. \end{cases}$$

Здесь обозначено

$$f_k(\gamma) = (1 - \gamma^k) \cdot \frac{(1+k)(\gamma^{2k} - \gamma^{2k+2}) - \gamma^{3k} + \gamma^{k+2}}{(1-k^2)(\gamma^{k-1} - \gamma^{k+1})^2 - (1 - \gamma^{2k+2})(\gamma^{2k-2} - 1)}.$$

Получаем также

$$\alpha'_k = \begin{cases} 0, & k = -3, -1; \\ C, & k = -2; \\ \alpha_{k+2} + \alpha_{-k-2} + A_{k+2}, & k \neq -3, -2, -1. \end{cases}$$

При делении (6) на  $\frac{M_0}{2\pi CR_1}$  оказываются целесообразными замены

$$U = u \cdot \frac{4\pi\mu CR_1}{M_0}, \quad V = v \cdot \frac{4\pi\mu CR_1}{M_0}.$$

В результате (6) принимает вид:

$$U + iV = i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^{k+1}}{\gamma^{k+1}} e^{i\theta} \left( \frac{\kappa\alpha_k - \alpha'_k}{k+1} \cdot e^{ik\theta} + \alpha_k e^{-ik\theta} \right).$$

В этой сумме слагаемое с номером  $k = 0$  с учётом приведенных выше значений коэффициентов  $\alpha_k$ ,  $\alpha'_k$  равно

$$S_0 = -i \cdot \frac{\rho}{\gamma} \cdot e^{i\theta} (\alpha_2 + \alpha_{-2} + A_2).$$

Пара слагаемых с номерами  $k = 1$  и  $k = -1$  в сумме даёт:

$$S_{\pm 1} = -\frac{i}{2} \cdot \left( \frac{\rho}{\gamma} \right)^2 \cdot e^{2i\theta} (\alpha_3 + \alpha_{-3} + A_3).$$

Остальные пары слагаемых вычисляются типовым образом и могут быть накоплены в цикле. Безразмерные компоненты  $U$ ,  $V$  перемещения точки с координатами  $(\rho; \theta)$  возникают при отделении в накопленной сумме действительной и мнимой частей.

## 7. Результаты и обсуждение

Рассмотрим пример применения изложенной методики расчёта компонент поля перемещений. Зададимся параметрами  $N = 3$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ . По соображениям симметрии достаточно рассмотреть интервал углов  $\theta \in [0; \frac{\pi}{3}]$ . При этом угол  $\theta = 0$  соответствует середине крепления (нагруженного участка), а угол  $\theta = \frac{\pi}{3}$  — середине участка, свободного от внешних напряжений. При фиксированном

значении угла  $\theta$  строим распределение смещений по радиусу в интервале  $\gamma < \rho < 1$ . Результат расчёта представлен на рисунке 2.

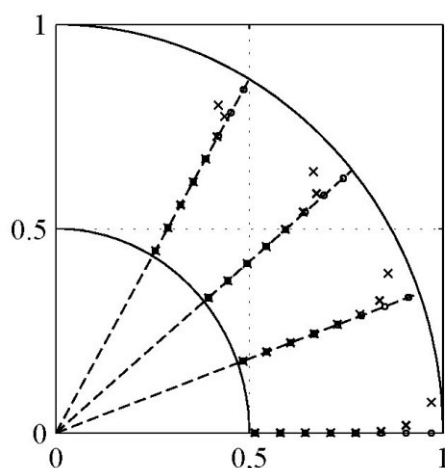


Рисунок 2 – Смещение внутренних точек области

Кружочками обозначены положения некоторых точек до деформирования, а крестиками – этих же точек после деформирования. Координаты каждой точки до деформирования вычислены как  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , а после деформирования – как

$$\begin{cases} x' = x + MU; \\ y' = y + MV. \end{cases}$$

Здесь масштабирующий множитель  $M$  смысловой нагрузки не несёт и подобран только для удобства визуального восприятия поля перемещений.

Как видим, перемещения точек вблизи зоны нагружения практически не имеют радиальных компонент; касательное внешнее усилие вызывает лишь угловые перемещения точек области. Похожая ситуация возникала и прежде, когда внешнее усилие было распределено по контуру равномерно [2, 3]. В этом случае напряжённно-деформированное состояние является чистым сдвигом.

Напротив, вблизи свободной части границы угловые перемещения точек заметно ослабевают, зато возникают существенные радиальные перемещения в направлении к центру. В этом случае напряжённно-деформированное состояние является состоянием сжатия в радиальном направлении.

## 8. Выводы

В настоящей работе методом комплексных потенциалов Мусхелишвили построено решение граничной задачи теории упругости для области в форме кольца, нагружаемого касательной нагрузкой, кусочно-постоянно распределённой вдоль контура. Такие граничные условия соответствуют техническим решениям при креплении различных элементов механических конструкций.

Проанализировано поле перемещений, и установлено, что напряжённно-деформированное состояние близко к сдвигу вблизи нагруженной части границы и к радиальному сжатию вблизи ненагруженной части границы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука. – 1966. – 707 с.
2. Анпилов Д.И. Оценка сдвиговой деформации приводной шестерни авиационного двигателя // Вестник двигателестроения. – 2014. – №1. – С. 25-27.
3. Anpilohov D., Snizhko N. The angular deformation of the ring with reference to the centrifugal forces // Lobachevskii J. of Math. – 2017. – V.38 – №1. – P. 395-399.

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРКОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

М.Ю. Здоровенко, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

e-mail: *zdorovenko.s@mail.ru*

А.С. Серова

ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

e-mail: *anastasya\_serova@mail.ru*

Т.Г. Прозорова

ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

e-mail: *tgprozorova@gmail.com*

В статье обсуждается проблема восстановления сигнала при гиперконечном вейвлетном преобразовании, а также проблема оптимальности значений параметров такого преобразования.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование, табличная аппроксимация, параметры конечномерного вейвлетного преобразования, оптимальность параметров.

### 1. Введение

В последние годы бурно развиваются направления в науке и технике, связанные с числовой обработкой сигналов. Одним из перспективных методов анализа данных сегодня является вейвлетный анализ. Это обстоятельство актуализировало вопросы применения вейвлетного анализа в задачах, связанных с обработкой информации (очистка сигнала от помех, сжатие данных, выявление кратковременных и глобальных закономерностей, спектральный анализ составляющих сигнала, подавление избыточной информации, криптография, обработка мультимедийной информации и пр.) [1]. Для применения вычислительных методов в вейвлетном анализе актуальной становится проблема аппроксимации непрерывного оператора его дискретным аналогом. Эта проблема рассматривается с позиций инфинитезимального анализа [2-5].

Основные понятия и обозначения, используемые в настоящей работе, можно найти, например, в работах [4,5].

### 2. Гиперконечное вейвлетное преобразование

Под сигналом понимают функцию из пространства  $L_2(R)$ , а под материнским вейвлетом – функцию из пространства  $L_2(R) \cap L_1(R)$ , среднее значение ко-