

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

ПРАКТИКУМ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
(частина 2)

для студентів інженерно-фізичного
та транспортного факультетів
усіх форм навчання

2018

Практикум з вищої математики (частина 2) для студентів інженерно-фізичного та транспортного факультетів усіх форм навчання / Укл.: Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 50 с.

Укладачі: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.
Н. М. Антоненко, к. ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Комп'ютерна верстка: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Експерти спеціальностей: О.Ф. Кузькін, доцент, к.т.н.
О.В. Климов, доцент, к.т.н.

Рецензент: В.П. П'янков, доцент, к.ф.-м.н.

Рекомендовано до видання НМК
інженерно-фізичного факультету ЗНТУ
Протокол № 9 від 26.12.2017

Рекомендовано до видання НМК
транспортного факультету ЗНТУ
Протокол № 40 від 26.12.2017

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики ЗНТУ
Протокол № 3 від 29.11.2017

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Кратні та криволінійні інтеграли	5
2 Елементи теорії функцій комплексної змінної	11
3 Диференціальні рівняння.	18
4 Елементи операційного числення	32
5 Теорія ймовірностей.	36
Література	42
Додаток А. Властивості перетворення Лапласа.	44
Додаток Б. Таблиця оригіналів та зображень перетворення Лапласа	45
Додаток В. Таблиця значень функції Гауса	
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	46
Додаток Г. Таблиця значень функції Лапласа	
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2} dt$	48

ВСТУП

Як відомо, одним з видів самостійної роботи студентів є виконання протягом семестру практичних розрахункових завдань. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач. Запропонований практикум зі зразками виконання розрахунково-графічних завдань відповідає курсу „Вища математика”, який читається для студентів транспортного та інженерно-фізичного факультетів як денної, так і скороченої та заочної форм навчання у другому семестрі двосеместрового курсу. Даний практикум також може використовуватись для студентів інших технічних спеціальностей, на яких вивчається вища математика в обсязі двосеместрового курсу.

Даний практикум охоплює практично всі основні розділи даного курсу; тут містяться необхідні теоретичні відомості, методичні вказівки до виконання завдань, наведені приклади розв'язання задач з детальним поясненням. Крім того, наведений список рекомендованої літератури. Також у посібнику міститься необхідний довідковий матеріал (таблиці тощо). З метою полегшення користування даним посібником нумерація прикладів відповідає нумерації задач у збірці розрахунково-графічних завдань [19].

Розрахунково-графічні завдання виконуються протягом семестру, що забезпечує студентам систематичне вивчення курсу на основі опрацювання рекомендованих підручників та посібників, самостійного пошуку необхідних літературних джерел та матеріалів, їх аналізу та узагальнення, самостійного дослідження та письмового викладення практичних питань.

Матеріали даного практикуму можна розглядати як частину конспекту лекцій з вищої математики, в якій на практичних прикладах ілюструються теоретичні положення курсу. З огляду на це матеріали даного посібника можуть бути використані не тільки при виконанні розрахунково-графічних завдань, але і при підготовці до іспиту.

1 КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, де $y(x)$ – неперервна диференційовна функція, то **криволінійний інтеграл першого роду** обчислюється за формулою:

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (1.1)$$

Завдання 1.1. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_l (2x - 3y) ds$, де l – відрізок прямої від точки $A(1; 2)$ до точки $B(4; 6)$.

Розв’язання. Складемо рівняння прямої AB :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{4} \Rightarrow y = \frac{4x + 2}{3}.$$

За формулою (1.1) маємо:

$$\begin{aligned} \int_l (2x - 3y) ds &= \int_1^4 \left(2x - 3 \cdot \frac{4x + 2}{3} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3} \right)^2} dx = -\frac{5}{3} \int_1^4 (2x + 2) dx = \\ &= -\frac{5}{3} (x^2 + 2x) \Big|_1^4 = -35. \end{aligned}$$

Відповідь: -35.

Якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, де $y(x)$, $y'(x)$ – неперервні диференційовні функції, то **криволінійний інтеграл другого роду** обчислюється за формулою:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx. \quad (1.2)$$

Якщо крива L задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, де $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції, то **криволінійний інтеграл другого роду** обчислюється за формулою:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt. \quad (1.3)$$

Завдання 1.2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $I = \int_l (3x + 2y)dx + (x + 2y)dy$, де крива l задається наступними рівняннями:

1) $l: y = -2x + 4$ від точки з абсцисою $x_1 = 2$ до точки з абсцисою $x_2 = 0$;

2) $l: x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$ від точки з $t_1 = 0$ до точки з $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

1) Використовуючи рівняння лінії інтегрування та формулу (1.2), перетворимо даний криволінійний інтеграл у звичайний інтеграл за змінною x і обчислимо його:

$$l: y = -2x + 4, \quad dy = -2dx;$$

$$\begin{aligned} I &= \int_2^0 (3x + 2(-2x + 4))dx + (x + 2(-2x + 4))(-2dx) = \\ &= \int_2^0 (5x - 8)dx = \left(\frac{5x^2}{2} - 8x \right) \Big|_2^0 = 6. \end{aligned}$$

2) Використовуючи формулу (1.3), перетворимо даний інтеграл у звичайний за змінною t та обчислимо його:

$$x = 2 \cos t, \quad dx = -2 \sin t \, dt;$$

$$y = 4 \sin t, \quad dy = 4 \cos t \, dt;$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} [3 \cdot 2 \cos t + 2 \cdot 4 \sin t](-2 \sin t \, dt) + [2 \cos t + 2 \cdot 4 \sin t](4 \cos t \, dt) = \\
&= \int_0^{\pi/2} (20 \sin t \cos t - 16 \sin^2 t + 8 \cos^2 t) dt = \\
&= \int_0^{\pi/2} (10 \sin 2t - 8(1 - \cos 2t) + 4(1 + \cos 2t)) dt = \\
&= (-5 \cos 2t - 8t + 4 \sin 2t + 4t + 2 \sin 2t) \Big|_0^{\pi/2} = 10 - 2\pi.
\end{aligned}$$

Відповідь: 1) 6; 2) $10 - 2\pi$.

Область D називається **правильною** в напрямі осі Oy (Ox), якщо будь-яка пряма паралельна осі Oy (Ox) перетинає границю області не більше ніж у двох точках.

Розглянемо способи обчислення подвійних інтегралів по областях, правильних у напрямках координатних осей.

1) Область інтегрування D (рис. 1.1) обмежена зліва та справа прямими $x = a$ і $x = b$, а знизу та зверху неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ такими, що $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ для всіх $x \in [a, b]$ (область правильна в напрямі осі Oy). Для області такого типу подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.4)$$

Внутрішнє інтегрування виконується за змінною y , а зовнішнє – за змінною x .

2) Область інтегрування D (рис. 1.2) обмежена знизу і зверху прямими $y = c$ і $y = d$, а зліва та справа кривими $x = \psi_1(y)$ та $x = \psi_2(y)$ для всіх $y \in [c, d]$ (область правильна в напрямі осі Ox). Для області такого типу подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dx. \quad (1.5)$$

Внутрішнє інтегрування виконується за змінною x , а зовнішнє – за змінною y .

Вирази, які стоять в лівих частинах формул (1.4) та (1.5), називаються повторними інтегралами.

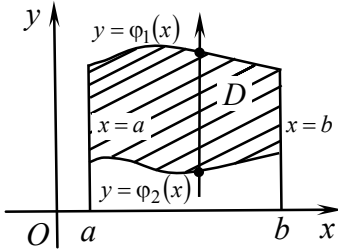


Рисунок 1.1

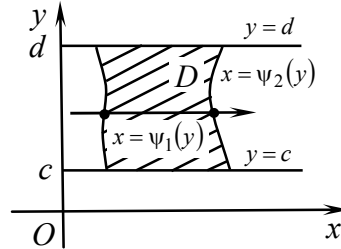


Рисунок 1.2

Завдання 1.3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x - 2xy) dx dy$,

$D: y = x^2, x = -y^2 + 2, x = 2$.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 1.3).

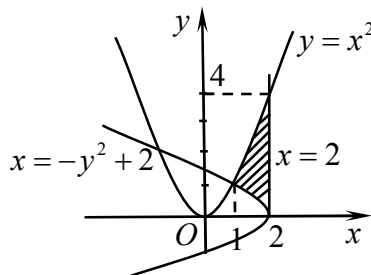


Рисунок 1.3

Знайдемо координати точок перетину кривих $y = x^2$, $x = -y^2 + 2$:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = -y^2 + 2. \end{cases}$$

Розв'язок системи – $(1;1)$. (Система має ще один розв'язок, оскільки параболи перетинаються у двох точках, див. рис. 1.3, але за змістом задачі нам потрібна саме точка $(1;1)$).

$$D: 1 \leq x \leq 2, \sqrt{-x+2} \leq y \leq x^2.$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x - 2xy) dx dy &= \int_1^2 dx \int_{\sqrt{-x+2}}^{x^2} (x - 2xy) dy = \int_1^2 dx \cdot (xy - xy^2) \Big|_{\sqrt{-x+2}}^{x^2} = \\ &= \int_1^2 (x^3 - x^5 - x\sqrt{2-x} + x(-x+2)) dx = \int_1^2 (x^3 - x^5 - x^2 + 2x) dx - \\ &\quad - \int_1^2 x\sqrt{2-x} dx = I_1 - I_2 = -\frac{73}{12} - \frac{14}{15} = -\frac{421}{60} = -7\frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Нижче наведено процес обчислення інтегралів I_1, I_2 .

$$I_1 = \int_1^2 (x^3 - x^5 - x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_1^2 = -\frac{73}{12}.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 x\sqrt{2-x} dx = \left| \begin{array}{l} t^2 = 2-x, \\ x = 2-t^2, \\ dx = -2tdt, \end{array} \right| = -2 \int_1^0 (2-t^2) t^2 dt = \\ &= -2 \int_1^0 (2t^2 - t^4) dt = -2 \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_1^0 = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

Відповідь: $-7\frac{1}{60}$.

Якщо в якості області інтегрування виступає круг, кільце або їх частина, то при обчисленні подвійних інтегралів краще переходити до **полярної системи координат**. Прямокутні декартові координати (x, y) пов'язані з полярними (r, φ) такими співвідношеннями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Формула переходу в подвійному інтегралі від декартових координат до полярних:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (1.6)$$

Завдання 1.4. Обчислити подвійний інтеграл.

$$\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad D: y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0.$$

Розв'язання. Область інтегрування – половина круга радіуса 2, яка лежить у верхній півплощині (рис. 1.4).

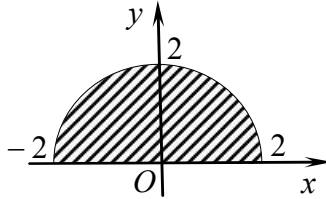


Рисунок 1.4

За формулою (1.6) отримуємо:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ dx dy = r dr d\varphi, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = r \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq r \leq 2. \end{array} \right| = \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 \frac{r \sin \varphi}{r} \cdot r dr = \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^2 r dr = \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \\ &= -2 \cdot \cos \varphi \Big|_0^\pi = 4. \end{aligned}$$

Відповідь: 4.

2 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Існує кілька форм запису *комплексного числа*:

$z = x + iy$ – *алгебраїчна форма*;

$z = re^{i\varphi}$ – *показникова форма*;

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ – *тригонометрична форма*,

де $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (декартові координати), $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ (полярні координати). Мають місце наступні співвідношення:

$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, якщо z належить I або IV квадранту,

$\varphi = \arctg \frac{y}{x} \pm \pi$, якщо z належить II або III квадранту, (2.1)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.2)$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Піднесення до натурального степеня комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ здійснюється за **формулою Муавра**:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (2.3)$$

Корінь n -го степеня з комплексного числа z має n різних значень, які обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (2.4)$$

Точки на комплексній площині, що відповідають значенням $\sqrt[n]{z}$, є вершинами правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $R = \sqrt[n]{r}$ з центром в початку координат.

Завдання 2.1. Надати показникової та тригонометричної форм запису числам:

а) $z_2 = \sqrt[10]{6} i$;

$$\text{б) } z_3 = -7^{\sqrt{7}};$$

$$\text{в) } z_4 = -1 - i\sqrt{3};$$

Розв'язання. а) Знайдемо модуль і аргумент числа z_2 .

$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, оскільки радіус-вектор точки $\sqrt[10]{6}i$ утворює кут $\frac{\pi}{2}$ з

додатним напрямом осі OX . Далі, $r_2 = \sqrt[10]{6}$. Отже, число z_2 можна подати в тригонометричній і показниковій формах таким чином:

$$z_2 = \sqrt[10]{6} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right); \quad z_2 = \sqrt[10]{6} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

б) $r_3 = 7^{\sqrt{7}}$, $\varphi_3 = \pi$, оскільки радіус-вектор точки $-7^{\sqrt{7}}$ утворює кут π з додатним напрямом осі OX . Отже,

$$z_3 = 7^{\sqrt{7}} (\cos \pi + i \sin \pi); \quad z_3 = 7^{\sqrt{7}} e^{i\pi}.$$

в) Знайдемо модуль і аргумент числа z_4 . Оскільки $x_4 = -1 < 0$, $y_4 = -\sqrt{3} < 0$, то z_4 належить III квадранту;

$$r_4 = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2;$$

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} + \pi = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Отже, число z_4 можна подати у вигляді:

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \quad \text{і} \quad z_4 = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$

Відповідь: а) $z_2 = \sqrt[10]{6} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt[10]{6} e^{i\frac{\pi}{2}};$

б) $z_3 = 7^{\sqrt{7}} (\cos \pi + i \sin \pi) = 7^{\sqrt{7}} e^{i\pi};$

в) $z_4 = 2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}.$

Завдання 2.2. Комплексне число w подати у вигляді $a+ib$.

Навести геометричну інтерпретацію:

а) $w = (1 + i\sqrt{3})(-i - 1);$

б) $w = \frac{1-2i}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i};$

в) $w^4 + 1 = 0.$

Розв'язання. а) Виконаємо множення:

$$w = (1 + i\sqrt{3})(-i - 1) = -i - 1 + \sqrt{3} - i\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1) - i(\sqrt{3} + 1).$$

Тут врахували, що $i \cdot i = -1$.

б) Для того, щоб звести дріб до стандартної алгебраїчної форми, домножимо чисельник і знаменник на величину, спряжену до

знаменника, в даному випадку це $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i$:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1-2i}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i} = \frac{(1-2i)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i - \frac{2}{3}i - 1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{-\frac{2}{3} - \frac{7}{6}i}{\frac{13}{36}} = -\frac{24}{13} - \frac{42}{13}i. \end{aligned}$$

в) Скористаємося формулою (2.4). Оскільки $w^4 + 1 = 0$, то $w = \sqrt[4]{-1}$; $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$. Корінь має чотири значення:

$$w = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$k = 0: \quad w_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 1: \quad w_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 2: \quad w_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 3: \quad w_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

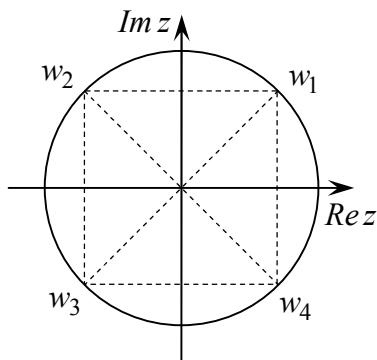


Рисунок 2.1

Геометрично числа w_k є вершинами вписаного в одиничне коло квадрата (рис. 2.1).

Відповідь: а) $(\sqrt{3}-1)-i(\sqrt{3}+1)$;

б) $-\frac{24}{13}-\frac{42}{13}i$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$
 $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Завдання 2.3. Обчислити $(-1+i\sqrt{3})^{60}$.

Розв'язання. Зобразимо число $z = -1+i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі (враховуючи, що $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$):

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Застосовуючи формулу Муавра (2.3), одержуємо:

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60} \left(\cos \left(60 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(60 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^{60} (\cos 40\pi + i \sin 40\pi) = 2^{60}. \end{aligned}$$

Відповідь: 2^{60} .

Завдання 2.4. Знайти множину точок на площині комплексної змінної z , що задовольняють умову $\left| z - \frac{1}{2} \right| \leq \left| 1 - \frac{1}{2}z \right|$.

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$. Тоді нерівність набуває вигляду:

$$\left| \left(x - \frac{1}{2} \right) + iy \right| \leq \left| \left(1 - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2}iy \right|.$$

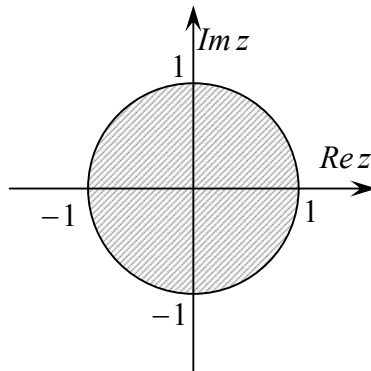


Рисунок 2.2

За означенням модуля маємо:

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} \leq \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{4}y^2}.$$

Розв'язуючи цю нерівність, одержуємо:

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Це є внутрішня область одиничного кола, включно з границею (рис. 2.2).

Відповідь: одиничний круг $x^2 + y^2 \leq 1$ (рис. 2.2).

При розв'язуванні задач можна користуватися **формулою Ейлера**:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (2.5)$$

із якої отримуємо:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (2.6)$$

Також наведемо означення ще однієї елементарної функції $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Функція $w = f(z)$ здійснює відображення точок комплексної площини z на відповідні точки комплексної площини w . Нехай $z = x + iy$ і $w = u + iv$. Тоді залежність $w = f(z)$ може бути описана за допомогою двох дійсних функцій u і v дійсних змінних x і y :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}.$$

При дослідженні функції на аналітичність користуються **умовами Коші – Рімана**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.8)$$

Існування частинних похідних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, а також виконання рівностей (2.8) є необхідною умовою аналітичності функції $f(z)$, а за додаткової вимоги диференційовності функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ – достатньою умовою аналітичності.

Завдання 2.5. Відновити аналітичну в околі точки $z = 0$ функцію за її уявною частиною $v(x, y) = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$, якщо $f(0) = 2$.

Розв'язання. Якщо $f(z)$ аналітична, то її уявна і дійсна частини задовольняють умови Коші – Рімана (2.8). Користуючись першою умовою, одержуємо:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dx + \psi(y) = \int (2 \cos x \operatorname{sh} y + 2y) dx + \psi(y) = \\ &= 2 \sin x \operatorname{sh} y + 2xy + \psi(y). \end{aligned}$$

Із другої умови одержуємо рівність:

$$2 \sin x \operatorname{ch} y + 2x + \psi'(y) = -(-2 \sin x \operatorname{ch} y - 2x),$$

звідки $\psi'(y) = 0$ і $\psi(y) = C$. Отже, маємо:

$$u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{sh} y + 2xy + C;$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 2 \sin x \operatorname{sh} y + 2xy + C + i(2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2) = \\ &= 2i(\cos x \cos iy - \sin x \sin iy) - i(x^2 + 2xyi - y^2) + C = \\ &= 2i \cos(x + iy) - i(x + iy)^2 + C = 2i \cos z - iz^2 + C. \end{aligned}$$

Сталу C знаходимо із умови $f(0) = 2$: $2i + C = 2$, звідки $C = 2 - 2i$. Остаточно маємо:

$$f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2.$$

Відповідь: $f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2$.

3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рівняння виду

$$f_1(x) \cdot g_1(y) dx + f_2(x) \cdot g_2(y) dy = 0. \quad (3.1)$$

або

$$y' = f_1(x)f_2(y). \quad (3.2)$$

називаються **рівняннями з відокремлюваними змінними**.

Для розв'язання рівняння (3.1) відокремлюємо змінні таким чином, щоб при dx стояла функція, яка залежить лише від x , а при dy – функція, яка залежить лише від y . Для цього поділимо (3.1) на $g_1(y) \cdot f_2(x)$ ($f_2(x) \neq 0, g_1(y) \neq 0$). Отримаємо

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0.$$

Загальний інтеграл рівняння (3.1):

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = C.$$

Для розв'язання рівняння (3.2) відокремлюємо змінні, вважаючи, що $f_2(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Загальний інтеграл рівняння (3.2):

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Завдання 3.1. Знайти загальний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними.

$$1) (x+1) \frac{dy}{dx} = y+2;$$

$$2) (x^2+4)y' - y^2 = 16;$$

$$3) (y + yx^2)dx + (x - xy^2)dy = 0.$$

Розв'язання. 1) $(x+1)\frac{dy}{dx} = y+2.$

Відокремимо змінні та проінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{dy}{y+2} = \frac{dx}{x+1},$$

$$\int \frac{dy}{y+2} = \int \frac{dx}{x+1} + \ln C,$$

$$\ln|y+2| = \ln|x+1| + \ln|C|,$$

$$y+2 = C(x+1),$$

$$y = C(x+1) - 2.$$

$$2) (x^2 + 4)y' - y^2 = 16.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо дане рівняння:

$$(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = 16 + y^2,$$

$$\frac{dy}{y^2 + 16} = \frac{dx}{x^2 + 4},$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$3) (y + yx^2)dx + (x - xy^2)dy = 0.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо дане рівняння:

$$x(y^2 - 1)dy = y(1 + x^2)dx,$$

$$\left(y - \frac{1}{y}\right)dy = \left(\frac{1}{x} + x\right)dx,$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln|y| = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C,$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C.$$

Відповідь: 1) $y = C(x+1) - 2$;

$$2) \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C ;$$

$$3) \frac{y^2}{2} = \ln|x y| + \frac{x^2}{2} + C .$$

Функція $f(x, y)$ називається **однорідною функцією порядку α** відносно аргументів x і y , якщо виконується рівність

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y) \quad \forall t \in R, \alpha \in R .$$

Диференціальне рівняння в нормальній формі $y' = f(x, y)$ називається **однорідним** відносно змінних x і y , якщо функція $f(x, y)$ – однорідна функція нульового порядку відносно своїх аргументів.

Диференціальне рівняння в диференціальній формі $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ буде однорідним, якщо функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – однорідні функції однакових порядків α , тобто $P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y)$, $Q(tx, ty) = t^\alpha Q(x, y)$.

Однорідні рівняння за допомогою заміни $u = \frac{y}{x}$, $y = u \cdot x$, $y' = u + x u'$ зводять до рівнянь з відокремлюваними змінними відносно нової функції $u = u(x)$.

Завдання 3.2. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння.

$$1) xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2} ;$$

$$2) (y^2 + x^2)dx + (xy - 2x^2)dy = 0 .$$

Розв'язання. 1) $xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2} .$

Запишемо рівняння в нормальному вигляді:

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} .$$

Дане рівняння однорідне, оскільки функція $\frac{y}{x} + \sqrt{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ – однорідна функція нульового порядку.

Зробимо заміну $u = \frac{y}{x}$, тоді $y = u x$, $y' = u + x u'$. Маємо:

$$u + x u' = u + \sqrt{4 + u^2},$$

$$\frac{du}{\sqrt{4 + u^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u + \sqrt{4 + u^2}| = \ln|x| + \ln C,$$

$$u + \sqrt{4 + u^2} = Cx.$$

В останньому виразі повернемося до змінної y :

$$y + \sqrt{4x^2 + y^2} = Cx^2.$$

$$2) (y^2 + x^2)dx + (xy - 2x^2)dy = 0.$$

Функції $y^2 + x^2$ та $xy - 2x^2$ – однорідні функції другого порядку. Отже, дане рівняння однорідне. Зробимо заміну $u = \frac{y}{x}$, тоді $y = u x$, $y' = u + x u'$. Маємо

$$y' = -\frac{y^2 + x^2}{xy - 2x^2} = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}{\frac{y}{x} - 2},$$

$$u'x + u = -\frac{u^2 + 1}{u - 2},$$

$$\frac{u - 2}{2u^2 - 2u + 1} du = -\frac{dx}{x},$$

$$\frac{u - 2}{2u^2 - 2u + 1} du = -\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо окремо ліву частину рівняння:

$$\begin{aligned}\int \frac{u-2}{2u^2-2u+1} du &= \frac{1}{4} \int \frac{(4u-2)-6}{2u^2-2u+1} du = \frac{1}{4} \int \frac{d(2u^2-2u+1)}{2u^2-2u+1} - \\ &- \frac{3}{2} \int \frac{1}{2u^2-2u+1} du = \frac{1}{4} \ln|2u^2-2u+1| - \frac{3}{4} \int \frac{1}{(u-1/2)^2+1/4} du = \\ &= \frac{1}{4} \ln|2u^2-2u+1| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(2u-1).\end{aligned}$$

Загальний інтеграл рівняння:

$$\frac{1}{4} \ln|2u^2-2u+1| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(2u-1) = -\ln|x| + C.$$

В отриманому виразі повернемося до змінної y :

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2y^2-2xy+x^2}{x^2} \right| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x} - 1 \right) = -\ln|x| + C.$$

Відповідь: 1) $y + \sqrt{4x^2 + y^2} = Cx^2$;

2) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2y^2-2xy+x^2}{x^2} \right| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x} - 1 \right) = -\ln|x| + C.$

Диференціальне рівняння першого порядку називається **лінійним**, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (3.3)$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – задані функції.

Метод Бернуллі розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Рівняння (3.3) зводиться до двох диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою $y = uv$ (підстановка Бернуллі), де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – деякі функції. Тоді:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \Rightarrow u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x). \quad (3.4)$$

Підберемо функцію $v = v(x)$ так, щоб вираз у квадратних дужках дорівнював нулю:

$$v' + P(x)v = 0.$$

Підставляючи знайдений частинний розв'язок $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$ в рівняння (3.4), одержимо друге диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, але вже відносно функції $u(x)$:

$$u'v = Q(x), \text{ тобто } u' = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad (3.5)$$

Знаходячи загальний розв'язок рівняння (3.5)

$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$, одержуємо загальний розв'язок початкового рівняння (3.3):

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right].$$

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$$

де $\alpha = \text{const} \in R$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 0$, називається **рівнянням Бернуллі**. Воно також може бути розв'язане за допомогою підстановки Бернуллі.

Завдання 3.3. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння першого порядку або рівняння Бернуллі.

$$1) \quad xy' - 2y = \frac{1}{x};$$

$$2) \quad y' - \frac{1}{x}y = y^2(\ln x + x).$$

Розв'язання. 1) $xy' - 2y = \frac{1}{x}$.

Дане рівняння – лінійне першого порядку. Ділимо рівняння на x , ($x \neq 0$):

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2} \quad \left(P(x) = -\frac{2}{x}, \quad Q(x) = \frac{1}{x^2} \right).$$

Підстановка Бернуллі: $y = uv$, тоді

$$u'v + v'u - \frac{2}{x}uv = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

$$1) \quad v' - \frac{2v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{2}{x} dx, \quad \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}, \quad \text{і маємо} \\ v = x^2.$$

$$2) \quad u'x^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^4}, \quad du = \frac{1}{x^4} dx, \quad \int du = \int \frac{1}{x^4} dx, \quad \text{і маємо} \\ u = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Таким чином, загальним розв'язком даного рівняння буде:

$$y = uv = -\frac{1}{3x} + Cx^2.$$

$$2) \quad y' - \frac{1}{x}y = y^2(\ln x + x).$$

Дане рівняння – рівняння Бернуллі. Підстановка Бернуллі: $y = uv$,
тоді

$$u'v + v'u - \frac{1}{x}uv = u^2v^2(\ln x + x),$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = u^2v^2(\ln x + x).$$

$$1) \quad v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{1}{x} dx, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \quad \text{і маємо} \\ v = x.$$

$$2) \quad u'x = u^2x^2(\ln x + x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2x(\ln x + x), \quad \frac{du}{u^2} = x(\ln x + x)dx, \\ \int \frac{du}{u^2} = \int x(\ln x + x)dx, \quad \text{і маємо} \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{C}{12}, \\ \text{або}$$

$$u = \frac{12}{C - 6x^2 \ln x + 3x^2 - 4x^3}.$$

Таким чином, загальним розв'язком даного рівняння буде:

$$y = uv = \frac{12x}{C - 6x^2 \ln x + 3x^2 - 4x^3}.$$

Відповідь: 1) $y = Cx^2 - \frac{1}{3x}$;

2) $y = \frac{12x}{C - 6x^2 \ln x + 3x^2 - 4x^3}$.

Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку.

Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x) \quad (3.6)$$

розв'язують послідовним n -кратним інтегруванням. Загальний розв'язок рівняння (3.6):

$$y = \varphi(x) + C_1 \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

Якщо задано рівняння виду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.7)$$

яке не містить явно шуканої функції та кілька її похідних до $(k-1)$ -го порядку, то для зниження порядку рівняння (3.7) на k одиниць необхідно зробити заміну $y^{(k)} = z(x)$, тоді $y^{(k+1)} = z'(x)$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$. Рівняння (3.7) зведеться до рівняння $(n-k)$ -го порядку відносно функції $z(x)$:

$$F(x, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Завдання 3.4. Знайти загальний розв'язок рівняння вищого порядку.

1) $y''' = x^3 + 2$;

2) $x^2 y'' = 2y'^2$;

Розв'язання. 1) $y''' = x^3 + 2$.

Дане рівняння типу (3.6). Проінтегруємо тричі за змінною x задане рівняння:

$$y'' = \int (x^3 + 2) dx = \frac{x^4}{4} + 2x + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^4}{4} + 2x + C_1 \right) dx = \frac{x^5}{20} + x^2 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^5}{20} + x^2 + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^6}{120} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

$$2) \quad x^2 y'' = 2y'^2.$$

Дане рівняння типу (3.7), воно не містить явно шуканої функції $y(x)$. Знизимо його порядок на одиницю. Нехай $z = y'$, тоді $z' = y''$. Маємо: $x^2 \cdot z' = 2z^2$. Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв'язок:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \frac{dz}{dx} &= 2z^2, & \cdot \frac{dz}{z^2} &= \frac{2}{x^2} dx, \\ \cdot \int \frac{dz}{z^2} &= \int \frac{2}{x^2} dx, & -\frac{1}{z} &= -\frac{2}{x} - C_1, \\ z &= \frac{x}{2 + C_1 x}. \end{aligned}$$

Оскільки $z = y'$, то $y' = \frac{x}{2 + C_1 x}$. Проінтегруємо:

$$y = \int \frac{x dx}{2 + C_1 x} = \frac{1}{C_1} \int \left(1 - \frac{2}{2 + C_1 x} \right) dx = \frac{1}{C_1} \left(x - \frac{2}{C_1} \ln|2 + C_1 x| \right) + C_2,$$

якщо $C_1 \neq 0$,

$$y = \int \frac{x dx}{2} = \frac{x^2}{4} + C, \text{ якщо } C_1 = 0$$

Відповідь: 1) $y = \frac{x^6}{120} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$;

2) $y = \frac{1}{C_1} \left(x - \frac{2}{C_1} \ln|1 + C_1 x| \right) + C_2$ ($C_1 \neq 0$), $y = \frac{x^2}{4} + C$.

Диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (3.8)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – сталі, $f(x)$ – задана неперервна функція, називається **лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) n -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0, \quad (3.9)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – сталі, називається **лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) n -го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Схема розв'язання ЛОДР n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Будемо характеристичне рівняння та знаходимо його корені:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (3.10)$$

1) Якщо всі корені рівняння дійсні та прості (різні), тоді загальний розв'язок рівняння (3.9) записуємо у вигляді:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2) Якщо всі корені рівняння дійсні, але серед них є корені кратності m ($m > 1$), тоді кожному простому кореню λ відповідає частинний розв'язок $e^{\lambda x}$, а кожному кореню λ кратності m відповідає m частинних розв'язків

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

3) Якщо серед коренів рівняння (3.10) є комплексно-спряжені, то кожній парі $\alpha \pm i\beta$ простих коренів відповідає два частинних розв'язки $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$, а кожній парі $\alpha \pm i\beta$ комплексно-спряжених коренів кратності m відповідає $2m$ частинних розв'язків:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Структура загального розв'язку ЛНДР n -го порядку. Загальний розв'язок рівняння (3.8) складається із суми частинного розв'язку y_c неоднорідного рівняння та загального розв'язку y_0 відповідного йому однорідного рівняння.

ЛНДР n -го порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального виду. Нехай права частина ЛНДР (3.8) має спеціальний вигляд:

$$f(x) = e^{ax}(P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx), \quad (3.11)$$

де $P_r(x)$, $Q_s(x)$ – многочлени степенів r і s відповідно, a , b – деякі числа.

Для диференціальних рівнянь з правою частиною виду (3.11) частинний розв'язок має аналогічну структуру:

$$y_c = x^k e^{ax}(\tilde{P}_m(x)\cos bx + \tilde{Q}_m(x)\sin bx),$$

де $\tilde{P}_m(x)$, $\tilde{Q}_m(x)$ – многочлени степеня $m = \max\{r, s\}$, k – кількість коренів характеристичного рівняння (з урахуванням їх кратності), які збігаються з числом $z = a + ib$. Визначивши структуру загального розв'язку рівняння (3.8), в якому невідомими являються лише коефіцієнти многочленів $\tilde{P}_m(x)$, $\tilde{Q}_m(x)$, підставляємо частинний розв'язок y_c та його похідні в рівняння (3.8) та прирівнюємо коефіцієнти при подібних членах зліва і справа. Отримуємо необхідну кількість лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів.

Завдання 3.5. Знайти загальний розв'язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (з відшукуванням числових значень коефіцієнтів).

- 1) $y'' + 2y' = (2x + 1)\cos 2x + \sin 2x$;
- 2) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1$;
- 3) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}((2x + 1)\cos x + \sin x)$.

Розв'язання. 1) $y'' + 2y' = (2x + 1)\cos 2x + \sin 2x$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

Для заданого рівняння $a = 0$, $b = 2$, $z = 2i$, тому $k = 0$.

Частинний розв'язок:

$$y_u = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x.$$

Знайдемо y'_u та y''_u :

$$\begin{aligned} y'_u &= (2Cx + A + 2D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x, \\ y''_u &= (-4Ax - 4B + 4C)\cos 2x + (-4Cx - 4A - 4D)\sin 2x. \end{aligned}$$

Підставимо y'_u та y''_u у вихідне рівняння:

$$\begin{aligned} ((-4A + C)x + 2A - 4B + 4C + 4D)\cos 2x + ((-4A - 4C)x - \\ - 4A - 4B + 2C - 4D)\sin 2x = (2x + 1)\cos 2x + \sin 2x. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при $\cos x$, $x \cos x$ та $\sin x$, $x \sin x$ в лівій та правій частинах останньої тотожності, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A , B , C та D :

$$\begin{array}{l|l} x \cos 2x & -4A + C = 2, \\ \cos 2x & 2A - 4B + 4C + 4D = 1, \\ x \sin 2x & -4A - 4C = 0, \\ \sin 2x & -4A - 4B + 2C - 4D = 1. \end{array}$$

З отриманої системи знаходимо, що $A = -\frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{8}$.

Отже, $y_u = -\frac{1}{4}x \cos 2x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)\sin 2x$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x \cos 2x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)\sin 2x.$$

$$2) \ y^{IV} + 8y'' + 16y = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2i, \quad \lambda_{3,4} = -2i.$$

Розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x.$$

Для заданого рівняння $a = 0$, $b = 0$, $z = 0$, тому $k = 0$.

Частинний розв'язок:

$$y_u = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

$$y'_u = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y''_u = 6Ax + B, \quad y'''_u = 6A, \quad y^{IV}_u = 0.$$

Підставимо y_u^{IV} та y''_u у вихідне рівняння, отримаємо:

$$8(6Ax + B) + 16(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах останньої тотожності та отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A , B , C та D :

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 16A = 2, \\ x^2 & 16B = 4, \\ x^1 & 48A + 16C = 3, \\ x^0 & 16B + 16D = 1. \end{array}$$

Отримуємо, що $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = D = -\frac{3}{16}$.

Отже, $y_u = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{3}{16}$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{3}{16}.$$

$$3) \quad y'' - 6y' + 9y = e^{3x}((2x + 1)\cos x + \sin x);$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 3.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

Для заданого рівняння $a = 3$, $b = 1$, $z = 3 + i$, тому $k = 0$.

Частинний розв'язок має вигляд:

$$y_u = e^{3x}((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x).$$

Знайдемо y'_u та y''_u :

$$\begin{aligned}
 y'_u &= e^{3x} (((3A + C)x + A + 3B + D)\cos x + \\
 &\quad + ((-A + 3C)x - B + C + 3D)\sin x), \\
 y''_u &= e^{3x} (((8A + 6C)x + 6A + 8B + 2C + 6D)\cos x + \\
 &\quad + ((-6A + 8C)x - 2A - 6B + 6C + 8D)\sin x).
 \end{aligned}$$

Підставимо y'_u та y''_u у вихідне рівняння та поділимо обидві частини рівняння на e^{3x} , отримаємо:

$$(-2Ax - B + 2C)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x = (2x + 1)\cos x + \sin x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при $\cos x$, $x\cos x$ та $\sin x$, $x\sin x$ в лівій та правій частинах останньої тотожності, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно A , B , C та D :

$$\begin{array}{l|l}
 x\cos x & -A = 2, \\
 \cos x & -B + 2C = 1, \\
 x\sin x & -C = 0, \\
 \sin x & -2A - D = 1.
 \end{array}$$

Маємо $A = -2$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 3$. Отже,
 $y_u = e^{3x}((-2x - 1)\cos x + 3\sin x)$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2x) + e^{3x}((-2x - 1)\cos x + 3\sin x).$$

Відповідь: 1) $y = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}x\cos 2x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)\sin 2x$;

2) $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{3}{16}$;

3) $y = e^{3x}(C_1 + C_2x + (-2x - 1)\cos x + 3\sin x)$;

4 ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

При знаходженні зображень за заданими оригіналами користуються, як правило, таблицями *перетворень Лапласа* для елементарних функцій. Вони наведені в додатку Б. Окрім того, можна використовувати *властивості перетворення Лапласа*. Вони наведені в додатку А.

Завдання 4.1. Знайти зображення заданої функції-оригіналу.

1) $f(t) = \sin 3t \cos 5t$;

2) $f(t) = (t-1)^2 \eta(t-1)$.

Розв'язання. 1) $f(t) = \sin 3t \cos 5t$.

Виконаємо тригонометричні перетворення:

$$f(t) = \sin 3t \cos 5t = \frac{1}{2} \sin 8t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

За таблицями (див. Додаток Б) знаходимо:

$$\sin 2t \leftrightarrow \frac{2}{p^2 + 4}, \quad \sin 8t \leftrightarrow \frac{8}{p^2 + 64}.$$

Користуючись лінійністю перетворення Лапласа, одержуємо:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sin 8t - \frac{1}{2} \sin 2t \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{8}{p^2 + 64} - \frac{1}{2} \frac{2}{p^2 + 4} = \frac{4}{p^2 + 64} - \frac{1}{p^2 + 4} = F(p). \end{aligned}$$

2) $f(t) = (t-1)^2 \eta(t-1)$.

Для функції $t^2 \eta(t)$ маємо:

$$t^2 \eta(t) \leftrightarrow \frac{2}{p^3}.$$

За теоремою загалювання для функції $(t-1)^2 \eta(t-1)$ матимемо

$$(t-1)^2 \eta(t-1) \leftrightarrow e^{-p} \frac{2}{p^3} = F(p).$$

Тут істотним є той факт, що шукається зображення функції $(t-1)^2 \eta(t-1)$, тобто функції, яка дорівнює нулю при $t < 1$. Якщо ж розглянути функцію $(t-1)^2 \eta(t)$, то для неї ми отримуємо $(t^2 - 2t + 1)\eta(t)$, і за властивістю лінійності:

$$(t-1)^2 \eta(t) = (t^2 - 2t + 1)\eta(t) \leftrightarrow \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Відповідь: 1) $F(p) = \frac{4}{p^2 + 64} - \frac{1}{p^2 + 4};$

2) $F(p) = e^{-p} \frac{2}{p^3}.$

Для **знаходження оригінала $f(t)$ за відомим зображенням $F(p)$** , окрім використання таблиць, можна застосовувати наступний прийом. Якщо $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то його розкладають в суму простих дробів і знаходять оригінали для кожного простого дробу, користуючись властивостями перетворення Лапласа та таблицями (див. додатки А, Б).

Завдання 4.2. Для даних зображень знайти оригінали.

1) $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)};$

2) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1}.$

Розв'язання. 1) $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}.$

Розкладаємо $F(p)$ на суму простих дробів:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4} = \\
 &= \frac{A(p-1)(p^2+4) + Bp(p^2+4) + (Cp+D)p(p-1)}{p(p-1)(p^2+4)} = \\
 &= \frac{(A+B+C)p^3 + (-A-C+D)p^2 + (4A+4B-D)p - 4A}{p(p-1)(p^2+4)}.
 \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях p у чисельниках, знаходимо:

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{20}, \quad D = -\frac{1}{5}.$$

Одержуємо:

$$F(p) = -\frac{1}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+4}.$$

Оригінали для кожного простого дробу правої частини рівності знаходимо за таблицями (див. Додаток Б). Використовуючи властивість лінійності, отримуємо:

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t.$$

$$2) F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1}.$$

Наявність множника e^{-p} вказує на необхідність застосування теореми загалювання. Тут $\tau = 1$, $\frac{1}{p+1} \leftrightarrow e^{-t}$, тому:

$$\frac{e^{-p}}{p+1} \leftrightarrow e^{-(t-1)} \eta(t-1).$$

$$\text{Відповідь: 1) } f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t;$$

$$2) f(t) = e^{-(t-1)} \eta(t-1).$$

Операційний метод дозволяє розв'язувати *задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*.

При цьому використовується, зокрема, теорема про диференціювання оригіналу (див. додаток А).

Завдання 4.3. Розв'язати задачу Коші.

$$x'' + x = 2 \cos t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1;$$

Розв'язання. Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою про диференціювання оригіналу $x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1$. Крім того, за таблицями маємо $\cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1}$. Операторне рівняння має вигляд:

$$p^2 X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1}.$$

Розв'язуємо відносно невідомої функції $X(p)$:

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1} - 1,$$

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Це операторний розв'язок. Знайдемо для нього оригінал. За таблицями (див. Додаток Б) знаходимо:

$$\frac{1}{p^2 + 1} \leftrightarrow \sin t, \quad \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} \leftrightarrow t \sin t.$$

Отже, $X(p) \leftrightarrow t \sin t - \sin t = (t - 1) \sin t = x(t)$.

Відповідь: $x(t) = (t - 1) \sin t$.

5 ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Завдання 5.1. Шість літаків, серед яких два АН-24, після посадки в аеропорту розташовані випадковим чином в один ряд на шести стоянках. Знайти ймовірність того, що літаки АН-24 будуть на сусідніх стоянках.

Розв'язання. Кількість варіантів розміщення 6 літаків:

$$N = A_6^6 = 6! = 720.$$

Це кількість всіх можливих випадків.

Кількість варіантів розміщення 2 літаків АН-24 так, щоб вони були поряд: $2! \cdot 5 = 10$. При цьому кількість варіантів розміщення решти 4 літаків на місцях, що залишилися: $A_4^4 = 4! = 24$. Отже, кількість варіантів розміщення всіх літаків згідно умови задачі складає:

$$M = 10 \cdot 24 = 240.$$

Це кількість всіх сприятливих випадків.

За означенням ймовірність — відношення кількості всіх сприятливих випадків до кількості всіх можливих випадків:

$$P = \frac{M}{N} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Завдання 5.2. Три студенти складають екзамен з математики. Ймовірність того, що перший складе екзамен, дорівнює 0,9, для другого та третього ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,7. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

- 1) три студенти складуть екзамен;
- 2) три студенти не складуть екзамен;
- 3) два студенти складуть екзамен;
- 4) хоча б один студент складе екзамен.

Розв'язання. Позначимо A_1, A_2, A_3 — випадкові події, які полягають у тому, що перший, другий і третій студент складе екзамен

з математики. Тоді події $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – відповідно не складе. За умовою задачі маємо:

$$P(A_1) = 0,9, \quad P(A_2) = 0,8, \quad P(A_3) = 0,7.$$

Тоді ймовірності протилежних подій такі:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - 0,9 = 0,1, \quad P(\bar{A}_2) = 1 - 0,8 = 0,2, \quad P(\bar{A}_3) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Позначимо події:

$A = \{\text{три студенти складуть екзамени}\};$

$B = \{\text{три студенти не складуть екзамени}\};$

$C = \{\text{два студенти складуть екзамени}\};$

$D = \{\text{хоча б один студент складе екзамени}\}.$

Оскільки випадкові події A_i та $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$) є між собою незалежними, то:

$$1) P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504;$$

$$2) P(B) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006;$$

$$3) P(C) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,398;$$

$$4) P(D) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,994.$$

Відповідь: 1) 0,504; 2) 0,006; 3) 0,398; 4) 0,994.

Завдання 5.3. На деякому підприємстві перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, третя – 40% всіх деталей. В їх продукції браку відповідно 6%, 5% та 4%. Яка ймовірність того, що випадково вибрана деталь виявиться дефектною?

Розв’язання. Нехай гіпотеза B_i , $i = 1, 2, 3$, полягає в тому, що навмання вибрана деталь виготовлена першою, другою, третьою машиною відповідно. Тоді:

$$P(B_1) = 0,25, \quad P(B_2) = 0,35, \quad P(B_3) = 0,4.$$

Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибрана деталь є дефектною, тоді ймовірність цієї події при виконанні гіпотези B_i , $i = 1, 2, 3$, позначимо $P_{B_i}(A)$. Маємо за умовою задачі:

$$P_{B_1}(A) = 0,06, \quad P_{B_2}(A) = 0,05, \quad P_{B_3}(A) = 0,04.$$

Ймовірність того, що навання вибрана деталь є дефектною, обчислюємо за **формулою повної ймовірності**:

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B_3}(A) \cdot P(B_3) = \\ &= 0,06 \cdot 0,25 + 0,05 \cdot 0,35 + 0,04 \cdot 0,4 = 0,0485. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,0485.

Завдання 5.4. Імпортёр постачає жалюзі для вікон, причому 70% з них – горизонтальні. Яка ймовірність того, що серед 6 відібраних жалюзі буде 4 горизонтальних?

Розв'язання. Умова задачі відповідає **схемі незалежних випробувань Бернуллі** з параметрами $p = 0,7$, $q = 1 - p = 0,3$, $n = 6$. Тоді ймовірність того, що k жалюзі будуть горизонтальні, обчислюється за формулою:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

В нашому випадку маємо:

$$P_6(4) = C_6^4 (0,7)^4 (0,3)^{6-4} = \frac{6!}{4!2!} (0,7)^4 (0,3)^2 = 0,324135.$$

Відповідь: 0,324135.

Завдання 5.5. В електромережу увімкнено незалежно одна від одної 100 електролампочок. Ймовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить, дорівнює 0,65. Яка ймовірність того, що з 100 електролампочок не перегорить:

- 1) 50 електролампочок;
- 2) від 50 до 60 електролампочок?

Розв'язання. Умова задачі відповідає схемі незалежних випробувань Бернуллі з параметрами $p = 0,65$, $q = 1 - p = 0,35$, $n = 100$.

1) Скористаємось **локальною теоремою Муавра – Лапласа**. Згідно з цією теоремою ймовірність того, що подія з'явиться у випробуваннях k разів, складає:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де $\varphi(x)$ – функція Гауса, значення якої знаходимо за таблицями (див. додаток В). У нас $k = 50$:

$$\begin{aligned} P_{100}(50) &= \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,65 \cdot 0,35}} \varphi\left(\frac{50 - 100 \cdot 0,65}{\sqrt{100 \cdot 0,65 \cdot 0,35}}\right) = 0,2097 \varphi(-3,14) = \\ &= 0,2097 \varphi(3,14) = 0,2097 \cdot 0,0029 = 0,0006. \end{aligned}$$

Тут скористались парністю функції $\varphi(x)$.

2) За **інтегральною теоремою Муавра – Лапласа** імовірність того, що подія з'явиться у випробуваннях від k_1 до k_2 разів, складає:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, значення якої знаходимо за таблицями (див. додаток Г).

У нас $k_1 = 50$, $k_2 = 60$:

$$\begin{aligned} P_{100}(50, 60) &= \Phi\left(\frac{60 - 100 \cdot 0,65}{\sqrt{100 \cdot 0,65 \cdot 0,35}}\right) - \Phi\left(\frac{50 - 100 \cdot 0,65}{\sqrt{100 \cdot 0,65 \cdot 0,35}}\right) = \\ &= \Phi(-1,05) - \Phi(-3,14) = -\Phi(1,05) + \Phi(3,14) = \\ &= -0,3531 + 0,4991 = 0,1460. \end{aligned}$$

Тут скористались непарністю функції Лапласа.

Відповідь: 1) 0,0006;

2) 0,1460.

Завдання 5.6. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

x	0	1	2
p	0,2	0,5	0,3

Розв'язання. Знайдемо *математичне сподівання*:

$$MX = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 = 1,1.$$

Знайдемо *дисперсію*:

$$DX = \sum x_i^2 p_i - (MX)^2 = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,3 - 1,1^2 = 0,49.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,49} = 0,7.$$

Відповідь: $MX = 1,1$; $DX = 0,49$; $\sigma(X) = 0,7$.

Завдання 5.7. Нерерервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу $f(x)$, математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X , ймовірність того, що X прийме значення в інтервалі $(\alpha; \beta)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4, \\ \frac{x}{4} - 1 & \text{при } 4 < x \leq 8, \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

$$\alpha = 2; \quad \beta = 6.$$

Розв'язання. Знайдемо *щільність розподілу* за формулою $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4 \\ \frac{1}{4}, & \text{при } 4 < x \leq 8 \\ 0, & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

Знайдемо *математичне сподівання*:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_4^8 \frac{1}{4} x dx = \frac{x^2}{8} \Big|_4^8 = 6.$$

Знайдемо *дисперсію*:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (MX)^2 = \int_4^8 \frac{1}{4} x^2 dx - 6^2 = \frac{x^3}{12} \Big|_4^8 - 36 = \frac{4}{3}.$$

Ймовірність того, що X прийме значення в інтервалі $(\alpha; \beta)$, шукаємо за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

У нашому випадку:

$$P(2 < X < 6) = F(6) - F(2) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4 \\ \frac{1}{4}, & \text{при } 4 < x \leq 8; \\ 0, & \text{при } x > 8 \end{cases} \quad MX = 6;$$

$$DX = \frac{4}{3}; \quad P(2 < X < 6) = \frac{1}{2}.$$

Завдання 5.8. Відомо математичне сподівання $a = 4$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5$ **нормально розподіленої випадкової величини** X . Знайти ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу $(\alpha; \beta)$, $\alpha = 2, \beta = 11$.

Розв'язання. Шукану ймовірність знаходимо за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, значення якої знаходимо за таблицями (див. додаток Г). Маємо:

$$\begin{aligned} P(2 < X < 11) &= \Phi\left(\frac{11-4}{5}\right) - \Phi\left(\frac{2-4}{5}\right) = \Phi(1,4) - \Phi(-0,4) = \\ &= \Phi(1,4) + \Phi(0,4) = 0,4192 + 0,1554 = 0,5746. \end{aligned}$$

Ми скористались непарністю функції $\Phi(x)$.

Відповідь: 0,5746.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука. – 2005. – 416 с.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник для студентов инженерно-технических специальностей вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 432 с.
3. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. Пособие для вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2002.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. / Гмурман В.Е. – М.: Высш. шк., 2001.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. / Гмурман В.Е. – М.: Высш. шк., 2001.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 1. – 2003. – 416 с.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 2. – 2003. – 415 с.
8. Краснов М.Т., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / Краснов М.Т., Киселев А.И., Макаренко Г.И. – М.: Наука, 1981
9. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчёты) / Кузнецов Л.А. – М.: Высшая школа, 1983. – 175с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 1985. – 526 с.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 576 с.

12. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
13. Сборник задач по курсу Высшей математики/ под ред. Г.И.Кручовича. – М.:Выш. Шк., 1973
14. Сборник задач по математике для вузов/под ред. А.Е.Ефимова, В.П. Демидовича. М.: Выш. Шк., 1978. – ч.1,2.
15. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.П. Специальные разделы математического анализа / под ред. В.А. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1986. – 615с.
16. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 1 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1990. – 271с.
17. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 2 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1991. – 352с.
18. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (в трёх частях), Ч. 3 / под ред. А.П.Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 1991. – 288 с.
19. Розрахунково-графічні завдання з вищої математики (частина 2) для студентів інженерно-фізичного та транспортного факультетів усіх форм навчання / Укл.: В.М.Онуфрієнко, Н.В.Сніжко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018 – 42 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Властивості перетворення Лапласа

Властивість	Розрахункова формула
Лнійність зображень	$\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(p)$
Теорема загаювання	$f(t - \tau) \cdot \eta(t - \tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} F(p)$
Теорема зміщення	$e^{at} f(t) \leftrightarrow F(p - a)$
Теорема подібності	$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
Диференціювання- оригіналу	$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$ $f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{k-1} f^{(k-1)}(0)$
Диференціювання зображення	$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$
Інтегрування оригіналу	$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$
Інтегрування зображення	$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(p) dp$
Згортка оригіналів	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t) f_2(t - \tau) d\tau \leftrightarrow F_1(p) \cdot F_2(p)$

Додаток Б

Таблиця оригіналів та зображень перетворення Лапласа

Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{\alpha t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
$t^\beta, \beta > -1$	$\frac{\Gamma(\beta + 1)}{p^{\beta+1}}$	$e^{\alpha t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$e^{\alpha t} \cdot \text{ch } \omega t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \omega^2}$
$t^n e^{\alpha t}, n \in N$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$	$e^{\alpha t} \cdot \text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 - \omega^2}$
$t^\beta e^{\alpha t}, n \in N$	$\frac{\Gamma(\beta + 1)!}{(p - \alpha)^{\beta+1}}$	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$t \cdot \text{ch } \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$t \cdot \text{sh } \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$

Додаток В

Таблиця значень функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818

Додаток Г

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,19	0,0753	0,38	0,1480	0,57	0,2157
0,01	0,0040	0,20	0,0793	0,39	0,1517	0,58	0,2190
0,02	0,0080	0,21	0,0832	0,40	0,1554	0,59	0,2224
0,03	0,0120	0,22	0,0871	0,41	0,1591	0,60	0,2257
0,04	0,0160	0,23	0,0910	0,42	0,1628	0,61	0,2291
0,05	0,0199	0,24	0,0948	0,43	0,1664	0,62	0,2324
0,06	0,0239	0,25	0,0987	0,44	0,1700	0,63	0,2357
0,07	0,0279	0,26	0,1026	0,45	0,1736	0,64	0,2389
0,08	0,0319	0,27	0,1064	0,46	0,1772	0,65	0,2422
0,09	0,0359	0,28	0,1103	0,47	0,1808	0,66	0,2454
0,10	0,0398	0,29	0,1141	0,48	0,1844	0,67	0,2486
0,11	0,0438	0,30	0,1179	0,49	0,1879	0,68	0,2517
0,12	0,0478	0,31	0,1217	0,50	0,1915	0,69	0,2549
0,13	0,0517	0,32	0,1255	0,51	0,1950	0,70	0,2580
0,14	0,0557	0,33	0,1293	0,52	0,1985	0,71	0,2611
0,15	0,0596	0,34	0,1331	0,53	0,2019	0,72	0,2642
0,16	0,0636	0,35	0,1368	0,54	0,2054	0,73	0,2673
0,17	0,0675	0,36	0,1406	0,55	0,2088	0,74	0,2703
0,18	0,0714	0,37	0,1443	0,56	0,2123	0,75	0,2734

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,76	0,2764	0,99	0,3389	1,22	0,3883	1,45	0,4265
0,77	0,2794	1,00	0,3413	1,23	0,3907	1,46	0,4279
0,78	0,2823	1,01	0,3438	1,24	0,3925	1,47	0,4292
0,79	0,2852	1,02	0,3461	1,25	0,3944	1,48	0,4306
0,80	0,2881	1,03	0,3485	1,26	0,3952	1,49	0,4319
0,81	0,2910	1,04	0,3508	1,27	0,3980	1,50	0,4332
0,82	0,2939	1,05	0,3531	1,28	0,3997	1,51	0,4345
0,83	0,2967	1,06	0,3554	1,29	0,4015	1,52	0,4357
0,84	0,2995	1,07	0,3577	1,30	0,4032	1,53	0,4370
0,85	0,3023	1,08	0,3599	1,31	0,4049	1,54	0,4382
0,86	0,3051	1,09	0,3621	1,32	0,4066	1,55	0,4394
0,87	0,3078	1,10	0,3643	1,33	0,4082	1,56	0,4406
0,88	0,3106	1,11	0,3665	1,34	0,4099	1,57	0,4418
0,89	0,3133	1,12	0,3686	1,35	0,4115	1,58	0,4429
0,90	0,3159	1,13	0,3708	1,36	0,4131	1,59	0,4441
0,91	0,3186	1,14	0,3729	1,37	0,4147	1,60	0,4452
0,92	0,3212	1,15	0,3749	1,38	0,4162	1,61	0,4463
0,93	0,3238	1,16	0,3770	1,39	0,4177	1,62	0,4474
0,94	0,3264	1,17	0,3790	1,40	0,4192	1,63	0,4484
0,95	0,3289	1,18	0,3810	1,41	0,4207	1,64	0,4495
0,96	0,3315	1,19	0,3830	1,42	0,4222	1,65	0,4505
0,97	0,3340	1,20	0,3849	1,43	0,4230	1,66	0,4515
0,98	0,3365	1,21	0,3869	1,44	0,4251	1,67	0,4525

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,475	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4525	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4985
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		