

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИКИ (СЕРЕДНЯ ШКОЛА – ВНЗ)

2017

Методичні вказівки Практикум з математики (середня школа – ВНЗ) /
Укл. : Килимник І.М., Полякова Т.Г., Шаніна З.М. - Запоріжжя: ЗНТУ,
2014 -94 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Полякова Т.Г. асистент,
Шаніна З.М. к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н.,доцент

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики ЗНТУ
Протокол № 1 від 06.09.2017 р.

Затверджено НМК машинобудівного
факультету ЗНТУ
Протокол № 1 від 07.09.2017 р.

ЗМІСТ

	Стор.
1. ЗАНЯТТЯ ПЕРШЕ	4
1.1 Відомості з теорії	4
1.2 Аудиторні завдання	13
1.3 Індивідуальні завдання	16
2. ЗАНЯТТЯ ДРУГЕ	25
2.1 Відомості з теорії	25
2.2 Аудиторні завдання	37
2.3 Індивідуальні завдання	38
3. ЗАНЯТТЯ ТРЕТЄ	45
3.1 Відомості з теорії	45
3.2 Аудиторні завдання	57
3.3 Індивідуальні завдання	61
4. ЗАНЯТТЯ ЧЕТВЕРТЕ	66
4.1 Відомості з теорії	66
4.2 Аудиторні завдання	72
4.3 Індивідуальні завдання	74
5. ЗАНЯТТЯ П'ЯТЕ	81
5.1 Відомості з теорії	81
5.2 Аудиторні завдання	85
5.3 Індивідуальні завдання	87
ЛІТЕРАТУРА	94

1. ЗАНЯТТЯ ПЕРШЕ

1.1 Відомості з теорії

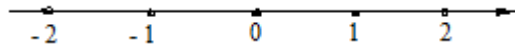
Види чисел

Натуральні числа: $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.



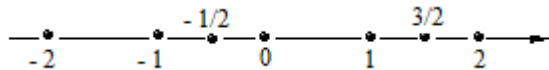
Натуральне число називається **простим**, якщо воно має лише два натуральних різних дільники: одиницю і само себе (2, 7, 11, ...). Число, яке має більше двох натуральних дільників називається **складеним** (4, 12, 21, ...). Два числа, що відрізняються одне від одного лише знаком, називають **протилежними** числами (3 і -3, a і $-a$, ...)

Цілі числа: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.



Раціональні числа: $Q = \left\{ \frac{a}{b}, a \in Z, b \in N \right\}$. $\frac{a}{b}$ – звичайний дріб (a

– чисельник, b – знаменник). Якщо $a < b$, то дріб **правильний**.



Наприклад, $\frac{3}{5}, -\frac{2}{7}$. Якщо $a \geq b$, то дріб **неправильний**.

Неправильний дріб може бути поданий у вигляді мішаного дробу:

$\frac{a}{b} = n \frac{r}{b}$, де n – ціла частина від ділення a на b , r – остача від

ділення. Зворотна дія: $n \frac{r}{b} = \frac{b \cdot n + r}{b}$ – неправильний дріб. Наприклад,

$$\frac{17}{3} = 5 \frac{2}{3}, \quad -4 \frac{2}{9} = -\frac{4 \cdot 9 + 2}{9} = -\frac{38}{9}.$$

Десятковий дріб – це дріб, знаменником якого є степінь числа

10. Наприклад, правильний десятковий дріб $0,3 = \frac{3}{10}$, мішаний

десятковий дріб $1,17 = 1 \frac{17}{100} = \frac{117}{100}$.

Нескінченний періодичний десятковий дріб – десятковий дріб, у якому нескінченно повторюється певна група цифр. Мінімальна група цифр, яка повторюється, називається **періодом**. Період записується в круглих дужках. Якщо період починається відразу після коми, то дріб називається **чисто періодичним**. Якщо ж період починається не відразу після коми, то дріб називається **змішаним періодичним**. Чисто періодичний десятковий дріб дорівнює звичайному дробу, чисельник якого є період, а знаменник – цифра 9, що записана стільки разів, скільки цифр у періоді. Для того щоб перетворити змішаний нескінченний періодичний дріб на звичайний, треба від числа, що стоїть до другого періоду, відняти число, що стоїть до першого періоду. Потім записати цю різницю чисельником, а в знаменнику записати цифру 9 стільки разів, скільки цифр у періоді, а після дев'яток дописати стільки нулів, скільки цифр стоїть між комою і першим періодом.

Наприклад, $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad 0,(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33},$

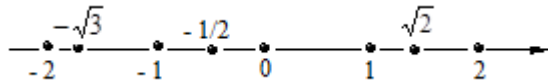
$$1,8(3) = \frac{183 - 18}{90} = \frac{165}{90} = \frac{11}{6} = 1 \frac{5}{6}.$$

Будь-яке ціле число можна подати у вигляді дробу враховуючи, що $1 = \frac{a}{a}$, матимемо $b = b \cdot 1 = b \cdot \frac{a}{a} = \frac{b \cdot a}{a}$ ($a \in \mathbb{N}$ – будь-яке число,

вибране за змістом). Наприклад, ціле число 3 подати у вигляді дробу з знаменником 7: $3 = 3 \cdot \frac{7}{7} = \frac{3 \cdot 7}{7} = \frac{21}{7}$.

Ірраціональні числа: $I = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots\}$. Це нескінченні неперіодичні десяткові дробу, тобто не можуть бути виражені відношенням цілих чисел.

Дійсні числа: $R = Q \cup I$.



Комплексні числа: $C = \{a + bi, a \in R, b \in R, i = \sqrt{-1} - \text{уявна одиниця}\}$.

Дії над числами

Додавання $a + b = c$. Числа a і b доданки, c – сума.

Віднімання $a - b = c$. Число a – зменшуване, b – від’ємник, c – різниця.

Множення $a \cdot b = c$. Числа a і b множники, c – добуток.
Правило знаків при множенні:

"+" · "+" = "+",

"-" · "-" = "+",

"-" · "+" = "-" або "+" · "-" = "-"

Ділення $a : b = c$. Число a – ділене, b – дільник ($b \neq 0$), число c – частка. Число a ділиться на число b націло, якщо $a = b \cdot n$, де n – яке-небудь натуральне число. У протилежному випадку маємо ділення з остачею: $a = b \cdot c + r$, де r – остача від ділення. Наприклад, $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$.

При діленні правило знаків аналогічне множенню.

Зауваження. На нуль ділити не можна!

Піднесення до цілого степеня. Наприклад, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ і т. д.

Справедливо:

$$1) a+b=b+a, a+b-c=(a-c)+b=a+(b-c), a+0=a, 0-a=-a, \\ a-b=-(b-a), ab=ba, a(bc)=(ab)c, a \cdot 1=a, (a \pm b)c = ac \pm bc.$$

Наприклад, $3-8=-(8-3)=-5, -7-4=-11.$

$$2) \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}. \text{ Якщо } b=mk \text{ і } d=nk, \text{ то } \frac{a}{mk} \pm \frac{c}{nk} = \frac{an \pm mc}{mnk}.$$

Наприклад, $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 5 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{14 + 15}{35} = \frac{29}{35},$
 $\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{15 + 4}{18} = \frac{19}{18}$

$$3) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}, (k \neq 0), \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}, c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}.$$

$$4) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}, c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{cb}{a}.$$

Числовий вираз складається з чисел, знаків дій та дужок. Якщо виконати всі зазначені дії у правильному порядку, дістанемо число, яке називається значенням числового виразу. Порядок виконання дій:

- 1) Виконують дії в дужках.
- 2) Виконують множення та ділення в тому порядку, як вони зустрічаються зліва направо.
- 3) Виконують додавання та віднімання таким же чином.

Наприклад, виконати дії:

$$2 \frac{13}{25} \cdot \left(2 \frac{2}{7} + 3 \frac{2}{3} \right) - 8 \frac{1}{4} : \left(1 \frac{4}{5} - 0,15 \right) = \frac{63}{25} \cdot \left(\frac{16}{7} + \frac{11}{3} \right) - \frac{33}{4} : \left(\frac{9}{5} - \frac{15}{100} \right) = \\ = \frac{63}{25} \cdot \frac{16 \cdot 3 + 11 \cdot 7}{21} - \frac{33}{4} : \left(\frac{9}{5} - \frac{3}{20} \right) = \frac{63}{25} \cdot \frac{125}{21} - \frac{33}{4} : \frac{9 \cdot 4 - 3 \cdot 1}{20} = 15 - \frac{33}{4} : \frac{33}{20} = \\ = 15 - \frac{33}{4} \cdot \frac{20}{33} = 15 - 5 = 10.$$

Степені і корні.

Нагадаємо властивості степенів і коренів:

1.	$a^0 = 1, a \neq 0$	11.	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
2.	$(-a)^{2n} = a^{2n}$	12.	$\sqrt{a^2} = a = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0 \end{cases}$
3.	$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, a > 0$	13.	$2n\sqrt{a^{2n}} = a $
4.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$	14.	$2n+1\sqrt{a^{2n+1}} = a$
5.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	15.	$2n+1\sqrt{-a} = -2n+1\sqrt{a}$
6.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^n \cdot a^{-m}$	16.	$n\sqrt{m\sqrt{a}} = nm\sqrt{a}$
7.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	17.	$n\sqrt{a} = nm\sqrt{a^m}$
8.	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	18.	$n\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{n\sqrt{a}}{n\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$
9.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	19.	$n\sqrt{ab} = n\sqrt{a} \cdot n\sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$
10.	$\frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n}, a > 0$	20.	$a^n \sqrt{b} = n\sqrt{a^n b}, a > 0$

Наприклад, 1) обчислити:

$$\text{а) } 5^0 + 3 \cdot (-2)^2 - (-3)^3 = 1 + 3 \cdot 4 - (-27) = 1 + 12 + 27 = 40 ;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 2 \cdot \left(-\sqrt[3]{5}\right)^3 + 0,2 \cdot \sqrt{100} - 3 \cdot \left(-\sqrt[4]{16}\right)^2 &= 2 \cdot (-5) + 0,2 \cdot 10 - 3 \cdot 4 = -10 + 2 - \\ &- 12 = -20 ; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \left(-1\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} ;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \left(\frac{5^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{4}}}{2 \cdot 20^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-8} &= \left(\frac{20^{\frac{3}{4}} \cdot 20^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-8} = \left(\frac{20^{\frac{3}{4}} \cdot 20^{\frac{2}{4}}}{2}\right)^{-8} = \frac{20^{\frac{5}{4} \cdot (-8)}}{2^{(-8)}} = \\ &= \frac{2^8}{20^{10}} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^{10}} . \end{aligned}$$

2) спростити вираз:

$$\text{а) } a \cdot \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^6} = a \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot a^2} = a \cdot \sqrt[4]{a^4} = a \cdot a = a^2 \quad (a > 0) ;$$

$$\text{б) } \frac{(a^3)^2 \cdot (b^2)^3}{(c^{-2})^4} : \frac{(b^{-3})^2 \cdot (c^4)^3}{(a^{-2})^3 \cdot b^0} = \frac{a^6 \cdot b^6}{c^{-8}} \cdot \frac{a^{-6} \cdot 1}{b^{-6} \cdot c^{12}} = \frac{b^{12}}{c^4} .$$

3) звільнитись від ірраціональності в знаменнику:

$$\text{а) } \frac{10}{\sqrt[5]{2}} = \frac{10}{\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{10 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{10 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{2} = 5 \cdot \sqrt[5]{16} .$$

Алгебраїчні вирази

Алгебраїчні вирази бувають раціональні і ірраціональні. Раціональні містять алгебраїчні дії відносно величини, яка входить у вираз. Раціональні вирази розподіляються на цілі і дробові. **Цілий раціональний вираз** – це многочлен (поліном), степінь якого визначається найвищим степенем величини, від якої він залежить.

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – многочлен n -го степеня відносно x , $a_i \in R$ ($i = \overline{0, n}$), $a_n \neq 0, n \geq 0$ – ціле число. Наприклад, $P_0(x) = -1.23$, $P_2(x) = 3x^2 - 4x + 1$ і т.д.

Два многочлени $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ рівні, якщо рівні їх коефіцієнти про однакових степенях x .

Наприклад, $P_2(x) = 3x^2 - 4x + 1$ і $Q_3(x) = 2x^3 - 3x + 1$. Знайти

$$S(x) = P_2(x) + Q_3(x) = (3x^2 - 4x + 1) + (2x^3 - 3x + 1) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 2;$$

$$T(x) = P_2(x) - Q_3(x) = (3x^2 - 4x + 1) - (2x^3 - 3x + 1) = -2x^3 + 3x^2 - x;$$

$$D(x) = P_2(x) \cdot Q_3(x) = (3x^2 - 4x + 1) \cdot (2x^3 - 3x + 1) = 6x^5 - 9x^3 + 3x^2 - 8x^4 + 12x^2 - 4x + 2x^3 - 3x + 1 = 6x^5 - 8x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 4x + 1.$$

Многочлени можна розкласти на множники різними способами, одним з яких є застосування формул скороченого множення.

Формули скороченого множення

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 + 3ab(b \pm a)$$

$$(a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

Зауваження. Вираз $a^2 + b^2$ не розкладається на множники.

Многочлен $P(x, y, \dots, z)$ складається з суми одночленів $a x^k y^l \dots z^q$ (a – числовий коефіцієнт, $k, l, \dots, q$ – невід’ємні цілі числа, $k + l + \dots + q$ – степінь одночлена). Найвищий із степенів одночленів, з яких складається многочлен, називається степенем многочлена.

Дробовий раціональний вираз (*алгебраїчний дріб*) – це відношення двох многочленів $\frac{P(x,y,\dots,z)}{Q(x,y,\dots,z)}$.

Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – два многочлени, при цьому степінь многочлена $P(x)$ не менший за степінь многочлена $Q(x)$.

Якщо існує многочлен $Q(x)$ такий, що $P(x)=Q(x) \cdot S(x)$, то многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $Q(x)$ (націло). При цьому $P(x)$ – ділене, $Q(x)$ – дільник, $S(x)$ – частка.

У протилежному випадку розглядається ділення з остачею: $P(x)=Q(x) \cdot S(x)+R(x)$, де $R(x)$ – остача ($R(x)$ – многочлен, степінь якого менший за степінь многочлена $Q(x)$)

Алгебраїчний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильний, якщо $n < m$ і неправильний, коли $n \geq m$. В останньому випадку (степінь многочлена $Q_m(x)$ не нижчий першого), розглядається ділення з остачею: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$. Ділення виконується за правилом «кута»:

Наприклад, виділити цілу частину неправильного алгебраїчного дробу:

$$\text{а) } \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{x-3} = x+3;$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{x+3} \quad \begin{array}{r} -x^2 \\ \underline{x+3x} \\ -3x \\ -\underline{3x-9} \\ 9 \end{array}$$

$$\text{Маємо } \frac{x^2}{x+3} = x-3 + \frac{9}{x+3};$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} \qquad \begin{array}{l} - \frac{x^3 + 2x - 3}{x^3 - x^2} \bigg| \frac{x - 1}{x^2 + x + 3} \\ \hline - \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x} \\ \hline - \frac{3x - 3}{3x - 3} \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

$$\text{Маємо } \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} = x^2 + x + 3.$$

Дії над алгебраїчними дробами аналогічні діям з числовими дробами.

Наприклад, виконати дії з алгебраїчними дробами:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2 - 4}{(x + 2) \cdot (x - 3)} - \frac{9 - 2x}{x^2 - 3x} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{(x + 2) \cdot (x - 3)} - \frac{9 - 2x}{x \cdot (x - 3)} = \frac{x - 2}{x - 3} - \frac{9 - 2x}{x \cdot (x - 3)} = \\ & = \frac{x \cdot (x - 2) - (9 - 2x)}{x \cdot (x - 3)} = \frac{x^2 - 2x - 9 + 2x}{x \cdot (x - 3)} = \frac{x^2 - 9}{x \cdot (x - 3)} = \frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{x \cdot (x - 3)} = \frac{x + 3}{x}; \\ \text{б) } & \frac{x^2}{x + 5} \cdot \frac{x^2 - 25}{x \cdot (x + 4)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 25)}{(x + 5) \cdot x \cdot (x + 4)} = \frac{x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5)}{(x + 5) \cdot (x + 4)} = \frac{x \cdot (x - 5)}{x + 4}; \\ \text{в) } & \frac{x^2 - 4y^2}{3xy} : \frac{(x + 2y)^2}{9x^2} = \frac{(x - 2y) \cdot (x + 2y)}{3xy} \cdot \frac{9x^2}{(x + 2y)^2} = \frac{3x \cdot (x - 2y)}{y \cdot (x + 2y)}. \end{aligned}$$

Пропорція. Властивості пропорції

Рівність двох алгебраїчних дробів $\frac{P}{Q}$ і $\frac{P_1}{Q_1}$ утворює **пропорцію**:

$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$, де P, Q_1 – крайні члени, а Q, P_1 – середні члени пропорції.

Властивість пропорції $P \cdot Q_1 = Q \cdot P_1$.

Пропорція рівносильна рівностям: $\frac{P}{P_1} = \frac{Q}{Q_1}$, $\frac{Q_1}{Q} = \frac{P_1}{P}$, $\frac{Q}{P} = \frac{Q_1}{P_1}$.

Наприклад, розв'язати пропорцію: а) $\frac{5-x}{5} = \frac{x+3}{-3}$.

Маємо: $-3(5-x)=5(x+3)$; $-15+3x=5x+15$; $2x=-30$; $x=-15$.

$$\text{б) } \frac{2-5x}{3} = \frac{x+4}{7}.$$

Маємо: $7(2-5x)=3(x+4)$; $14-35x=3x+12$; $38x=2$; $x=\frac{2}{38}=\frac{1}{19}$.

Перетворення ірраціональних алгебраїчних виразів базується на основі арифметичних дій і правил з радикалами (коренями будь-якого степеню). Якщо необхідно в алгебраїчному дробі позбавитись ірраціональності у знаменнику або чисельнику, необхідно чисельник і знаменник одночасно помножити на спряжений вираз до знаменника або чисельника за змістом. Для запису спряженого виразу можна застосовувати формули скороченого множення:

$$a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$a\pm b=(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})$$

Наприклад, звільнитись від ірраціональності в знаменнику, застосовуючи формули скороченого множення:

$$\begin{aligned}\text{б) } \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} &= \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{4\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \\ &= \frac{4\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = 2\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3}),\end{aligned}$$

$$\text{в) } \frac{a^2-4}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{a}} = \frac{a^2-4}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}} =$$

$$= \frac{(a^2-4)\cdot(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})}{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{a^3}} = \frac{(a-2)\cdot(a+2)\cdot(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})}{2+a}$$

$$= (a-2) \cdot \left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} \right).$$

1.2 Аудиторні завдання

1.2.1 Дії над числами:

а) $2-9$; б) $-2-5$; в) $3\frac{2}{3} : \left(3\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4} \right) - \frac{24}{35} \cdot \left(2\frac{2}{3} + 0,25 \right)$ (Відповідь: 2).

1.2.2 Обчислити:

а) $2 \cdot (-3)^2 + (-4)^3 - 9^0$ (Відповідь: -47);

б) $4 \cdot \left(-\sqrt[8]{6} \right)^8 - 0,8 \cdot \sqrt[4]{10000} + \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{270} \right)^3$ (Відповідь: 26);

в) $\left(-2\frac{1}{3} \right)^2$ (Відповідь: $\frac{49}{9}$);

г) $\left(\frac{\frac{5}{3^6} \cdot \frac{5}{2^6}}{5^{-\frac{1}{6}} \cdot 6} \right)^{-12}$ (Відповідь: $\frac{36}{25}$).

1.2.3 Спростити:

а) $\frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^2}{(c^4)^2} : \frac{(a^3)^2 \cdot c^0}{(b^{-2})^3 \cdot (c^2)^4}$ (Відповідь: 1);

б) $\sqrt[3]{b \cdot \sqrt[4]{b}}$ (Відповідь: $\sqrt[12]{b^5}$).

1.2.4 Звільнитися від ірраціональності у знаменнику:

а) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$ (Відповідь: $2 \cdot \sqrt[3]{9}$); б) $\frac{33}{\sqrt{17} + \sqrt{6}}$ (Відповідь: $3 \cdot (\sqrt{17} - \sqrt{6})$);

$$в) \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3}} \text{ (Відповідь: } \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{3a} + \sqrt[3]{9}}{a-3} \text{)}.$$

1.2.5 Виділити цілу частину неправильного алгебраїчного дробу:

$$а) \frac{x^3+27}{x+3} \text{ (Відповідь: } x^2-3x+9 \text{)};$$

$$б) \frac{x^3+2x-12}{x-2} \text{ (Відповідь: } x^2+2x+6 \text{)};$$

$$в) \frac{x^3-3x-7}{x^2-x-2} \text{ (Відповідь: } x+1-\frac{5}{x^2-x-2} \text{)};$$

$$г) \frac{2x^3+4x^2+5x}{x+1} \text{ (Відповідь: } 2x^2+2x+3-\frac{3}{x+1} \text{)}.$$

1.2.6 Виконати дії з алгебраїчними виразами:

$$а) (2x+3)^2-4 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \text{ (Відповідь: } 12x+13 \text{)};$$

$$б) \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \text{ (Відповідь: } \frac{2y}{x^2-y^2} \text{)};$$

$$в) \frac{m-n}{2m+2n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} \text{ (Відповідь: } \frac{m+n}{2(n-m)} \text{)};$$

$$г) \frac{x^3-1}{(x+2) \cdot (x-1)} + \frac{4-x^2}{2 \cdot (x-2)} \text{ (Відповідь: } \frac{x^2-2x-2}{2 \cdot (x+2)} \text{)};$$

$$д) \frac{x^2-1}{x+3} \cdot \frac{9-x^2}{x \cdot (x+1)} \text{ (Відповідь: } \frac{(x-1) \cdot (3-x)}{x} \text{)};$$

$$е) \frac{x^2-4}{2x} : \frac{(x+2)^2}{4x^2} \text{ (Відповідь: } \frac{2x \cdot (x-2)}{x+2} \text{)}.$$

1.2.7 Розв'язати пропорцію:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{3-2x}{2} \quad (\text{Відповідь: } x = \frac{13}{8}).$$

1.3 Індивідуальні завдання

1.3.1 Обчислити (без калькулятора). Отримати точну відповідь.

1.1	$\left(5\frac{2}{3} - 5\frac{13}{15} : 2,2\right) \cdot 1\frac{1}{3}$	1.2	$1 - \left(0,75 : 1\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right)$
1.3	$\frac{3}{5} + 1,2(2,3 - 0,06 : 0,2)$	1.4	$\left(6\frac{1}{5} - 4,88\right) : \left(0,35 + \frac{3}{4}\right)$
1.5	$\frac{\left(4 - 2\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot 1\frac{1}{4}}{2\frac{1}{12}}$	1.6	$\frac{2,48 + 3\frac{5}{9} \cdot 1\frac{1}{8}}{6,1 - 3,7}$
1.7	$\frac{\left(2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{3}\right) \cdot 1,2}{8,5 - 1,4}$	1.8	$\frac{\left(2,5 + 1\frac{2}{3}\right) \cdot \left(3\frac{1}{3} - 1\frac{14}{15}\right)}{2\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}}$
1.9	$\frac{0,75 \cdot (9,9 : 3 - 1,3) + 2,5}{2,4 \cdot \frac{1}{6}}$	1.10	$\left(\frac{1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}}{3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3}} - 1\frac{2}{5}\right) \cdot 3\frac{1}{3}$
1.11	$0,3 \cdot \left(9\frac{1}{6} + 3\frac{2}{3} : 4,4\right)$	1.12	$1 - \left(1\frac{1}{3} \cdot 1,8 - 1,4\right)$
1.13	$10 \cdot (0,6 : 3 - 0,05) + 2\frac{1}{2}$	1.14	$6 \cdot \left(4\frac{2}{3} - 2,5\right) : (1,7 + 0,9)$
1.15	$\frac{\left(2\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) - 3 \cdot \frac{1}{3}}{1\frac{1}{12}}$	1.16	$\frac{4,28 + 2\frac{5}{8} \cdot 1\frac{1}{7}}{7,3 - 4,5}$

1.17	$\frac{\left(4\frac{1}{6} - 2\frac{7}{8}\right) \cdot 2,4}{1,6 + 1,5}$	1.18	$\frac{\left(1\frac{2}{3} + 2,5\right) \cdot \left(4\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6}\right)}{0,75 + 1\frac{1}{3}}$
1.19	$\frac{0,9 \cdot \left(6,6 : 3 - \frac{1}{5}\right) + 1,2}{2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{14}}$	1.20	$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\left(7\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}\right) \cdot 7}{1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{3}} - 2 \right)$

1.3.2 Обчислити

	а)	б)
1.	$2(-4)^2 + (-3)^3 - 5^0$	$4 \cdot (-\sqrt[6]{5})^6 - 0,5 \cdot \sqrt[3]{1000} + \left(\frac{1}{4} \sqrt[3]{640}\right)^3$
2.	$(-4)^2 + (-2)^3 + 3^0$	$0,2\sqrt{400} + \left(\frac{1}{3} \sqrt[4]{81}\right)^4 + (-\sqrt[3]{5})^3$
3.	$(-8)^2 - (-1)^{10} - 10^0$	$(-\sqrt[4]{7})^4 + 2 \cdot (-\sqrt[3]{4})^3 + \sqrt{2^3 + 1}$
4.	$7 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^3 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + 4^0$	$(\sqrt[5]{64})^5 - \sqrt{5^2 + 12^2} + (-\sqrt[3]{50})^3$
5.	$(-3)^3 + 2(-3)^2 + 10^0$	$0,1 \cdot (-\sqrt[4]{10})^4 - 2(-\sqrt[3]{3})^3 + \left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{270}\right)^3$
6.	$2(-2)^4 + (-3)^3 - 7^0$	$\frac{1}{8} \sqrt{256} - \frac{2}{3} (-\sqrt[5]{12})^5 + (\sqrt[3]{6})^3$
7.	$(-9)^2 + (-1)^7 + 3^0$	$18 \left(-\frac{1}{3} \sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \sqrt[3]{27}\right)^3 + (-\sqrt[5]{3})^5$
8.	$5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 13^0$	$0,1\sqrt{900} + \left(-\frac{1}{2} \sqrt[3]{8}\right)^3 + (-5)^2$
9.	$(-5)^3 - (10)^2 + 25^0$	$(-\sqrt[4]{5})^4 + 10(-\sqrt[3]{0,2})^3 + \left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{27}\right)^3$

	а)	б)
10.	$4 \cdot (-2)^3 + (-5)^2 + 7^0$	$10 \cdot \sqrt{0,49} + (-\sqrt[5]{6})^5 + \left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{64}\right)^3$
11.	$(-2)^4 - (-5)^3 - 3^0$	$5 \cdot (-\sqrt[6]{2})^6 + 0,1 \cdot \sqrt{1000} + \left(-\frac{1}{5}\sqrt[3]{125}\right)^3$
12.	$(-7)^2 - (-2)^3 - 4^0$	$4 \cdot (-\sqrt{3})^2 - \sqrt{11^2 + 23} - \left(-\sqrt[3]{23}\right)^3$
13.	$3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 4^0$	$\sqrt[5]{-32} + (-\sqrt{2})^2 + 0,1 \cdot \sqrt[4]{10000}$
14.	$(-0,4)^2 - (-0,3)^3 - 15$	$3 \cdot (-\sqrt[4]{4})^4 - (\sqrt[3]{10})^3 + \left(-\frac{1}{7}\sqrt[3]{343}\right)^3$
15.	$(-5)^2 + (-3)^3 + 2^0$	$(-\sqrt[4]{5})^4 + 0,2 \cdot \sqrt{25} + (-\sqrt[5]{6})^5$
16.	$(-10)^2 - (-2)^3 - 8^0$	$2 \cdot (-\sqrt{0,5})^2 - \sqrt{5^2 - 24} - \left(-\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{125}\right)^3$
17.	$5 \cdot (-2)^2 + 2(-2)^3 + 4^0$	$\frac{1}{7} \cdot \sqrt{196} - 10 \cdot \sqrt[3]{0,001} + \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt[4]{4})^5$
18.	$(-3)^3 + (-5)^2 + 9^0$	$\frac{1}{8} \cdot (-\sqrt[3]{64})^3 + 2 \cdot \sqrt{10^2 - 96} + 0,1 \cdot (\sqrt[5]{10})^5$
19.	$3 \cdot (-2)^3 + (-3)^4 - 7^0$	$0,2 \cdot (-\sqrt[6]{10})^6 - 0,5 \cdot (-\sqrt[3]{4})^3 + \frac{1}{7} \cdot (\sqrt[5]{21})^5$
20.	$(-2)^5 + (-6)^2 - 10^0$	$0,4 \cdot (-\sqrt{5})^2 - \frac{1}{5} \cdot 2(\sqrt[3]{5})^3 + 0,01 \cdot (-\sqrt[5]{100})^5$

1.3.3 Спростити вираз (змінні додатні)

1.	а)	$\left(\frac{125x^{-4}}{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[6]{\rho} \cdot \sqrt[5]{\rho}$
2.	а)	$\left(\frac{32x^{-4}}{x^6}\right)^{-\frac{3}{5}}$	б)	$\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^7}$

3.	a)	$\left(\frac{64a^{-2}}{a^4}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[7]{c \cdot \sqrt[5]{c^2}}$
4.	a)	$\left(\frac{81b^{-2}}{b^6}\right)^{-\frac{3}{4}}$	б)	$\sqrt[4]{b \cdot \sqrt[5]{b^3}}$
5.	a)	$\left(\frac{x^{-2}}{125x^4}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[6]{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^2}}$
6.	a)	$\left(\frac{x^{-6}}{32x^4}\right)^{-\frac{3}{5}}$	б)	$\sqrt[3]{b \cdot \sqrt[4]{b^5}}$
7.	a)	$\left(\frac{a^{-4}}{64a^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[7]{a \cdot \sqrt[3]{a^4}}$
8.	a)	$\left(\frac{b^{-6}}{81b^2}\right)^{-\frac{3}{4}}$	б)	$\sqrt[8]{c \cdot \sqrt[5]{c^3}}$
9.	a)	$\left(\frac{216x^{-1}}{x^5}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[9]{\rho^5 \cdot \sqrt[4]{\rho^7}}$
10.	a)	$\left(\frac{243x^{-3}}{x^7}\right)^{-\frac{3}{5}}$	б)	$\sqrt[5]{b^3 \cdot \sqrt[4]{b^3}}$
11.	a)	$\left(\frac{a^{-1}}{27a^5}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt[4]{m}}$
12.	a)	$\left(\frac{625b^{-1}}{b^7}\right)^{-\frac{3}{4}}$	б)	$\sqrt[6]{b \cdot \sqrt[4]{b^5}}$

13.	a)	$\left(\frac{81a^{-3}}{a^5}\right)^{-\frac{3}{4}}$	б)	$\sqrt[4]{b^5 \cdot \sqrt[3]{b}}$
14.	a)	$\left(\frac{32x^{-3}}{x^7}\right)^{-\frac{3}{5}}$	б)	$\sqrt[3]{b \cdot \sqrt{b}}$
15.	a)	$\left(\frac{8x^{-4}}{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[7]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}$
16.	a)	$\left(\frac{x^{-5}}{216x}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[4]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a^5}}$
17.	a)	$\left(\frac{x^{-7}}{243x^3}\right)^{-\frac{3}{5}}$	б)	$\sqrt[8]{c^3 \cdot \sqrt[5]{c}}$
18.	a)	$\left(\frac{27a^{-2}}{a^7}\right)^{-\frac{2}{3}}$	б)	$\sqrt[9]{a^4 \cdot \sqrt{a}}$
19.	a)	$\left(\frac{b^{-3}}{625b^5}\right)^{-\frac{3}{4}}$	б)	$\sqrt[11]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3}}$
20.	a)	$\left(\frac{64a^{-5}}{a^7}\right)^{-\frac{5}{6}}$	б)	$\sqrt[13]{a^3 \cdot \sqrt{a^7}}$

1.3.4 Позбутися ірраціональності у знаменнику дробу

	a)	б)	в)
1.	$\frac{16}{\sqrt[3]{4}}$	$\frac{26}{\sqrt{19} + \sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{4}}$
2.	$\frac{6}{\sqrt[4]{27}}$	$\frac{1}{\sqrt{11} - 1}$	$\frac{a-1}{\sqrt[3]{a} - 1}$

	a)	б)	в)
3.	$\frac{12}{\sqrt[3]{36}}$	$\frac{14}{\sqrt{17} + \sqrt{3}}$	$\frac{x+3}{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{2}}$
4.	$\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{15}{\sqrt{43} - \sqrt{13}}$	$\frac{a+8}{\sqrt[3]{a} + 2}$
5.	$\frac{4}{\sqrt[5]{16}}$	$\frac{6}{\sqrt{10} - 2}$	$\frac{x+5}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{5}}$
6.	$\frac{3}{2\sqrt[3]{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{26} - 1}$	$\frac{x-4}{\sqrt[3]{x+4} - 2}$
7.	$\frac{8}{3\sqrt[3]{2}}$	$\frac{35}{\sqrt{37} + \sqrt{2}}$	$\frac{13-x}{2 - \sqrt[3]{x-5}}$
8.	$\frac{12}{\sqrt[3]{9}}$	$\frac{16}{\sqrt{47} - \sqrt{15}}$	$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$
9.	$\frac{10}{\sqrt[3]{25}}$	$\frac{4}{\sqrt{13} + 3}$	$\frac{a+1}{\sqrt[3]{a} + 1}$
10.	$\frac{6}{\sqrt[4]{8}}$	$\frac{10}{\sqrt{14} - 2}$	$\frac{a-1}{\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{b}}$
11.	$\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{11}{\sqrt{12} + 1}$	$\frac{3}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$
12.	$\frac{21}{\sqrt[3]{49}}$	$\frac{13}{\sqrt{27} - 1}$	$\frac{x+y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$
13.	$\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}$	$\frac{a+3}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{3}}$
14.	$\frac{5}{2\sqrt[3]{100}}$	$\frac{4}{\sqrt{21} + \sqrt{5}}$	$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$
15.	$\frac{6}{\sqrt[4]{216}}$	$\frac{3}{\sqrt{8} + \sqrt{2}}$	$\frac{a-2}{\sqrt[3]{4a} - 2}$
16.	$\frac{15}{\sqrt[4]{125}}$	$\frac{5}{\sqrt{43} - \sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{a}}$
17.	$\frac{8}{\sqrt[3]{16}}$	$\frac{12}{\sqrt{25} + 1}$	$\frac{a-4}{\sqrt[3]{a-3} - 1}$

	a)	б)	в)
18.	$\frac{2}{3\sqrt[3]{6}}$	$\frac{7}{\sqrt{15}-1}$	$\frac{a+2}{\sqrt[3]{a+3}-1}$
19.	$\frac{9}{\sqrt[3]{81}}$	$\frac{9}{\sqrt{50}+\sqrt{5}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{a}+1}$
20.	$\frac{5}{3\sqrt[3]{5}}$	$\frac{15}{\sqrt{34}-2}$	$\frac{a-3}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3}}$

1.3.5 Спростити вираз

1.	a)	$(1-3x)^2 - (3x-2) \cdot (3x+2)$	б)	$\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1}\right) : \frac{4a}{1-a^2}$
2.	a)	$(2x-5) \cdot (2x+5) - (2x+3)^2$	б)	$\frac{x^2}{x^2-y^2} : \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y}$
3.	a)	$(2-3x)^2 - (3x+4) \cdot (3x-4)$	б)	$\left(\frac{b+1}{b-1} + \frac{b-1}{b+1}\right) : \frac{b^2+1}{b^2-1}$
4.	a)	$(5-2x)^2 - (2x-3) \cdot (2x+3)$	б)	$\frac{5a}{a-3} - \frac{a+6}{2a-6} : \frac{a^2+6a}{90} - \frac{15}{a}$
5.	a)	$(2x+3) \cdot (2x-3) - (2x+7)^2$	б)	$\left(a-1 + \frac{2}{a+1}\right) : \frac{a^2+1}{a^2+2a+1}$
6.	a)	$(4x-1) \cdot (4x+1) - (4x+3)^2$	б)	$\left(\frac{4x}{1-x^2} + \frac{1-x}{1+x}\right) : \frac{1+x}{x} + \frac{1}{1-x}$
7.	a)	$(2-3x) \cdot (3x+2) + (3x-1)^2$	б)	$\left(b+1 + \frac{2}{b-1}\right) : \frac{b^2+1}{b^2-2b+1}$
8.	a)	$(4x+3)^2 - (4x-5) \cdot (4x+5)$	б)	$\left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{4a}{1-a^2}\right) : \frac{1-a}{a} + \frac{1}{a+1}$
9.	a)	$(7-3x)^2 - (3x+2) \cdot (3x-2)$	б)	$\left(2a + \frac{1-a^2}{1+a}\right) : \frac{a^2+2a+1}{1-a} + \frac{2a}{a+1}$
10.	a)	$(2x+3) \cdot (3-2x) + (7-2x)^2$	б)	$\left(\frac{a}{a-1} + \frac{2a}{(a-1)^2}\right) : \frac{(a+1)^2}{a^3-a} + \frac{1}{1-a}$

11.	a)	$(5-2x) \cdot (2x+5) + (2x-1)^2$	б)	$\left(\frac{a}{(a-1)^2} - \frac{a}{a^2-1} \right) : \frac{2a}{a^2-2a+1} + \frac{a}{a+1}$
12.	a)	$(3x-4)^2 - (3x+2) \cdot (3x-2)$	б)	$\left(\frac{1-b^2}{1-b} - 2b \right) : \frac{b^2-2b+1}{b+1} + \frac{2b}{b-1}$
13.	a)	$(2x+7)^2 - (2x-5) \cdot (2x+5)$	б)	$\left(\frac{b}{b+1} - \frac{2b}{(b+1)^2} \right) : \frac{(b-1)^2}{b^2-b} - \frac{1}{b+1}$
14.	a)	$(3x+5)(3x-5) - (3x+1)^2$	б)	$\left(\frac{b}{(b+1)^2} - \frac{b}{b^2-1} \right) : \frac{2b}{b^2+2b+1} + \frac{b}{b-1}$
15.	a)	$(2x-6)^2 - (2x+3) \cdot (2x-3)$	б)	$\left(\frac{b}{a^2-ab} + \frac{a}{b^2-ab} \right) : \frac{a^2-b^2}{a^2b+ab^2}$
16.	a)	$(3x-10)^2 - (3x+5) \cdot (3x-5)$	б)	$\left(\frac{1}{1-a} - 1 \right) : \left(a+1 - \frac{1-2a^2}{1-a} \right)$
17.	a)	$(4x-5)^2 - (4x+7) \cdot (4x-7)$	б)	$\left(\frac{a}{a+1} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2} \right)$
18.	a)	$(6x+1) \cdot (6x-1) - (6x-2)^2$	б)	$\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1} \right) : \frac{3a^2+5a}{1-6a+9a^2}$
19.	a)	$(2x-3)^2 - (2x+7) \cdot (2x-7)$	б)	$\left(\frac{a}{x-a} - \frac{a}{x+a} \right) : \frac{2a^2}{x^2+2ax+a^2}$
20.	a)	$(3x-2) \cdot (3x+2) - (3x+4)^2$	б)	$\left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1} \right) : \frac{4m}{10m-5}$

1.3.6 Виділити цілу частину неправильного алгебраїчного дробу

1.	a) $\frac{x^3-10x-75}{x-5}$	б) $\frac{3x^3+5x^2+1}{x+2}$
2.	a) $\frac{x^3-7x-6}{x+1}$	б) $\frac{5x^3+3x+2}{x-3}$
3.	a) $\frac{x^3-20x+25}{x+5}$	б) $\frac{-2x^3+5x+1}{x-2}$

4.	a) $\frac{x^3 - 2x - 4}{x - 2}$	б) $\frac{4x^3 + 3x - 4}{x + 3}$
5.	a) $\frac{x^3 - 5x + 4}{x - 1}$	б) $\frac{-3x^3 + 5x + 4}{x + 2}$
6.	a) $\frac{x^3 - 10x + 24}{x + 4}$	б) $\frac{2x^3 + 7x^2 - 3}{x - 1}$
7.	a) $\frac{x^3 - 30x - 36}{x - 6}$	б) $\frac{-5x^3 + 4x + 3}{x + 1}$
8.	a) $\frac{x^3 - 30x - 25}{x + 5}$	б) $\frac{4x^3 - 5x + 6}{x - 2}$
9.	a) $\frac{x^3 - 40x - 24}{x + 6}$	б) $\frac{-2x^3 + 4x - 7}{x + 2}$
10.	a) $\frac{x^3 - 12x - 16}{x - 4}$	б) $\frac{-4x^3 + 7x - 2}{x + 3}$
11.	a) $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x + 1}$	б) $\frac{3x^3 - 7x^2 + 4}{x - 3}$
12.	a) $\frac{x^3 + x^2 + 4}{x + 2}$	б) $\frac{6x^3 + 2x - 5}{x - 2}$
13.	a) $\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x - 1}$	б) $\frac{-5x^3 + 2x^2 - 4}{x + 2}$
14.	a) $\frac{x^3 + x^2 - 36}{x - 3}$	б) $\frac{-3x^3 + 6x^2 + 7}{x - 1}$
15.	a) $\frac{x^3 - 3x + 4}{x - 2}$	б) $\frac{4x^3 + 3x^2 - 8}{x + 1}$
16.	a) $\frac{x^3 - 2x^2 + 45}{x + 3}$	б) $\frac{-6x^3 + 2x^2 + 7}{x + 2}$
17.	a) $\frac{x^3 + 2x^2 + 32}{x + 4}$	б) $\frac{2x^3 + 7x^2 - 4}{x + 3}$
18.	a) $\frac{x^3 - 3x^2 - 50}{x - 5}$	б) $\frac{-4x^3 + 5x^2 + 9}{x - 1}$
19.	a) $\frac{x^3 - 2x^2 - 32}{x - 4}$	б) $\frac{5x^3 - 4x^2 + 7}{x - 2}$

20.	а) $\frac{x^3 - 2x - 21}{x - 3}$	б) $\frac{-3x^3 + 7x - 8}{x + 2}$
-----	----------------------------------	-----------------------------------

1.3.7 Розв'язати пропорцію

1	$\frac{3x+1}{2} = \frac{3-x}{5}$	2	$\frac{4-x}{3} = \frac{2x+5}{2}$
3	$\frac{4x-1}{3} = \frac{1+x}{2}$	4	$\frac{5-2x}{3} = \frac{3x+2}{2}$
5	$\frac{3x-2}{2} = \frac{5x+1}{3}$	6	$\frac{4x+5}{2} = \frac{2-x}{3}$
7	$\frac{2x-3}{3} = \frac{1-x}{4}$	8	$\frac{5x+2}{4} = \frac{1-x}{3}$
8	$\frac{5x+2}{3} = \frac{2-x}{2}$	10	$\frac{4x+3}{3} = \frac{2-x}{2}$
11	$\frac{4x-3}{2} = \frac{3+x}{3}$	12	$\frac{6x+1}{3} = \frac{7-x}{2}$
13	$\frac{3x+1}{2} = \frac{4-x}{3}$	14	$\frac{6x+3}{2} = \frac{5-x}{3}$
15	$\frac{5-x}{2} = \frac{2x+1}{3}$	16	$\frac{5x+3}{2} = \frac{3-x}{3}$
17	$\frac{3x+5}{2} = \frac{5-x}{3}$	18	$\frac{4x+7}{3} = \frac{2-x}{2}$
19	$\frac{4x+7}{3} = \frac{2-x}{2}$	20	$\frac{3x+4}{2} = \frac{4-x}{3}$

2. ЗАНЯТТЯ ДРУГЕ

2.1 Відомості з теорії

Виділення повного квадрата з квадратного тричлена

Застосовується формула:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)
 \end{aligned}$$

Якщо квадратний тричлен є приведеним (коефіцієнт при x^2 дорівнює одиниці), то зручно користуватись формулою:

$$x^2 \pm px + q = \left(x \pm \frac{p}{2} \right)^2 - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q.$$

Наприклад, виділити повний квадрат з квадратного тричлена:

а) $P_2(x) = x^2 - 6x + 13$. Квадратний тричлен є приведеним. Застосуємо другу формулу:

$$x^2 - 6x + 13 = \left(x - \frac{6}{2} \right)^2 - \left(\frac{6}{2} \right)^2 + 13 = (x - 3)^2 - 9 + 13 = (x - 3)^2 + 4;$$

б) $P_2(x) = 3x^2 + 12x + 17$. Квадратний тричлен не є приведеним. Коефіцієнт 3 при x^2 виносимо за дужки і для приведенного квадратного тричлена у дужках застосуємо другу формулу:

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 12x + 17 &= 3 \left(x^2 + 4x + \frac{17}{3} \right) = 3 \left(\left(x + \frac{4}{2} \right)^2 - \left(\frac{4}{2} \right)^2 + \frac{17}{3} \right) = \\
 &= 3 \left((x + 2)^2 - 4 + \frac{17}{3} \right) = 3 \left((x + 2)^2 + \frac{5}{3} \right);
 \end{aligned}$$

в) $P_2(x) = 2 - 3x - x^2$. Квадратний тричлен не є приведеним. Коефіцієнт (-1) при x^2 виносимо за дужки і для приведенного квадратного тричлена у дужках застосуємо другу формулу:

$$2 - 3x - x^2 = - \left(x^2 + 3x - 2 \right) = - \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2 \right) =$$

$$= - \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2 \right) = - \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - 2 \right) = - \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{17}{4} \right).$$

Квадратні рівняння

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Воно має два кореня x_1 і x_2 . Розв'язок його $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Вираз $D = b^2 - 4ac$ називається дискримінантом. Для нього маємо три випадки:

а) $D > 0 \Rightarrow x_1, x_2$ — дійсні різні корені.

б) $D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ — дійсні рівні корені.

в) $D < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — комплексно-спряжені корені, де $\sqrt{-1} = i$

— уявна одиниця, $\alpha = -\frac{b}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$. В цьому випадку рівняння дійсних коренів не має.

Наприклад, розв'язати квадратні рівняння:

а) $8 + 2x - x^2 = 0$. Для зручності помножимо рівняння на (-1) , знайдемо дискримінант і визначимо корні рівняння. Маємо

$x^2 - 2x - 8 = 0$, $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$, $D > 0$. Рівняння має два дійсні різні кореня: $x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$;

б) $x^2 + 2x = 0$. Так як вільний член у рівнянні дорівнює нулю ($c = 0$), то винесемо x за дужки. Маємо $x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{bmatrix}$;

в) $4x^2 + 4x + 1 = 0$. Знайдемо дискримінант і визначимо корні рівняння. Маємо $D = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, $D = 0$. Рівняння має два дійсні рівні корені: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$;

г) $2x^2 - x + 6 = 0$. Знайдемо дискримінант і визначимо корні рівняння. Маємо $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1 - 48 = -47$, $D < 0$. Рівняння дійсних коренів не має. Корні рівняння комплексно-спряжені

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-47}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm i\sqrt{47}}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{47}}{4} \cdot i.$$

Розкладання многочлена на множники

Якщо x_0 – корінь многочлена $P(x)$ ($P(x_0) = 0$), то справедливо $P(x) = (x - x_0) \cdot S(x)$. Враховуючи це, квадратний тричлен (многочлен другого степеня) може бути розкладений на множники у випадку існування для нього двох дійсних коренів x_1 і x_2 :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Якщо корні квадратного тричлена однакові ($x_1 = x_2$), то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Для многочленів третього степеня маємо такі випадки розкладання на множники:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3), \quad (x_1 \neq x_2 \neq x_3);$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)^2 \cdot (x - x_3), \quad (x_1 = x_2 \neq x_3);$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)^3, \quad (x_1 = x_2 = x_3);$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1) \cdot (x^2 + px + q), \quad D < 0 \text{ для } x^2 + px + q = 0$$

і т. д.

Зауваження. У випадку цілих коефіцієнтів многочлена степеня вище другого, цілі корні його, якщо вони існують, є дільниками вільного члена.

Наприклад, розкласти многочлен на множники:

а) $P_2(x) = x^2 - 2x - 8$. Корні його за вище наведеними формулами є $x_1 = -2$ і $x_2 = 6$. Тому $P_2(x) = (x + 2) \cdot (x - 6)$;

б) $P_2(x) = 2x^2 + x - 1$. Корні його за вище наведеними формулами є $x_1 = -1$ і $x_2 = \frac{1}{2}$. Тому $P_2(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+1) \cdot (2x-1)$;

в) $P_3(x) = x^3 - 2x + 4$. Маємо многочлен третього степеня. Дільниками вільного члена є $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Підставимо замість x по черзі дільники. При $x = -2$ многочлен дорівнює нулю. Корінь знайдено. Многочлен можна записати як $P_3(x) = (x+2) \cdot P_2(x)$. Многочлен $P_2(x)$ знайдемо шляхом ділення за правилом «кута» заданого многочлена на $x+2$:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x + 4 & x+2 \\
 \underline{x^3 + 2x^2} & \\
 -2x^2 - 2x & \\
 \underline{-2x^2 - 4x} & \\
 -2x + 4 & \\
 \underline{-2x + 4} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Маємо $P_2(x) = x^2 - 2x + 2$. Знайдемо для нього дискримінант: $D < 0$. Цей многочлен на множники не розкладається, так як не має дійсних коренів. Тому $P_3(x) = (x+2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$.

Алгебраїчний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можна скоротити, якщо чисельник і знаменник в розкладенні на множники мають однакові.

Наприклад, скоротити дробі:

а) $\frac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

Корні чисельника $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$. Для знаменника застосуємо формулу скороченого множення. Маємо

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2} = \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(3-x) \cdot (3+x)} = \frac{x-2}{-(3+x)} = \frac{2-x}{3+x};$$

б) $\frac{3x^2+2x-16}{x^2-4x+4}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

Корні чисельника $x_1 = 2$ і $x_2 = -\frac{8}{3}$. Для знаменника застосуємо формулу скороченого множення. Маємо

$$\frac{3x^2+2x-16}{x^2-4x+4} = \frac{3(x-2) \cdot \left(x + \frac{8}{3}\right)}{(x-2)^2} = \frac{3\left(x + \frac{8}{3}\right)}{x-2} = \frac{3x+8}{x-2};$$

в) $\frac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

Корні чисельника $x_1 = -2$ і $x_2 = \frac{1}{9}$. У знаменнику x винесемо за дужки. Маємо

$$\frac{9x^2+17x-2}{x^2+2x} = \frac{9(x+2) \cdot \left(x - \frac{1}{9}\right)}{x \cdot (x+2)} = \frac{9 \cdot \left(x - \frac{1}{9}\right)}{x} = \frac{9x-1}{x};$$

г) $\frac{7x^2-5x-12}{3x^2-x-4}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

Корні чисельника $x_1 = -1$ і $x_2 = \frac{17}{7}$. Корні знаменника $x_1 = -1$ і

$x_2 = \frac{4}{3}$. Маємо

$$\frac{7x^2-5x-12}{3x^2-x-4} = \frac{7(x+1) \cdot \left(x - \frac{17}{7}\right)}{3(x+1) \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)} = \frac{7 \cdot \left(x - \frac{17}{7}\right)}{3 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)} = \frac{7x-17}{3x-4};$$

д) $\frac{2x^2+7x-22}{x^3+5x-18}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

Корні чисельника $x_1 = 2$ і $x_2 = -\frac{11}{2}$. У знаменнику многочлен третього степеня. При $x = 2$ многочлен дорівнює нулю. Корінь знайдено. Поділимо знаменник на $x-2$:

$$\begin{array}{r}
 - \frac{x^3 + 5x - 18}{x^3 - 2x^2} \Bigg| \frac{x-2}{x^2 + 2x + 9} \\
 \underline{- 2x^2 + 5x} \\
 \underline{- 2x^2 - 4x} \\
 - 9x - 18 \\
 \underline{- 9x - 18} \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{Маємо } \frac{2x^2 + 7x - 22}{x^3 + 5x - 18} = \frac{2(x-2) \cdot \left(x + \frac{11}{2}\right)}{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 9)} = \frac{2 \cdot \left(x + \frac{11}{2}\right)}{x^2 + 2x + 9} = \frac{2x + 11}{x^2 + 2x + 9}.$$

Розв'язування нерівностей

Рціональні нерівності $P_n(x) > 0$ і дробово-раціональні нерівності $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$, де знак $>$ може бути одним з знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, розв'язуються методом «інтервалів». Порядок дій:

1) знаходимо ОДЗ: $Q_m(x) \neq 0$;

2) знаходимо значення x , що задовольняють системі $\begin{cases} P_n(x) = 0 \\ Q_m(x) = 0 \end{cases}$ (ці

значення є коренями многочленів);

3) знайдені значення x наносимо на вісь, маємо інтервали;

4) з'ясовуємо знак лівої частини на кожному інтервалі;

5) розв'язком нерівності є сукупність інтервалів, на яких знак співпадає з знаком нерівності.

Зауваження. Для нерівностей справедливо:

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \text{ або } f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}.$$

Наприклад, розв'язати нерівності:

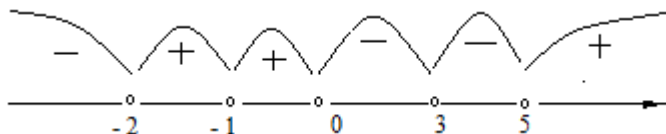
$$\text{а) } x \cdot (x-3)^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x^2+3) \cdot (x+1)^2 \cdot (x-5) > 0.$$

Многочлен в лівій частині розкладений на множники. Щоб знайти його корні, треба кожний множник привіряти до нуля

$(x^2 + 3 \neq 0)$. Рівняння має корні парної кратності ($x = -1$, $x = 3$) і непарної ($x = -2$, $x = 0$, $x = 5$). Нанесемо їх у вигляді точок на вісь (точки на осі «виколоті» тому, що нерівність строга).

Зауваження. При розташуванні точок на осі масштаб не враховується, а головне – послідовність їх розташування.

На отриманих інтервалах визначимо знаки многочлена. Для цього будь-яке значення x з інтервалу підставимо у многочлен.



Розв'язком нерівності є сукупність інтервалів, на яких знак «+»:

$$x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (5; \infty).$$

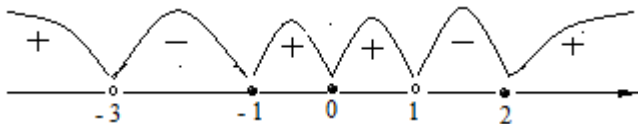
Зауваження. Для дробово-раціональної нерівності корні знаменника на осі зображуються «виколотими» точками. Якщо при старшому степені змінної у чисельнику і знаменнику коефіцієнт додатний, то знаки на інтервалах можна розставити наступним чином: на інтервалі за «більшим» коренем завжди «+» і справа наліво на інтервалах знаки чергуються при «переході» через корінь непарної кратності, а для кореня парної кратності залишаються без зміни.

$$б) \frac{x^2 \cdot (2-x) \cdot (x+1)^3}{(x-1) \cdot (x+3)} \geq 0.$$

В чисельнику коефіцієнт при старшому степені x від'ємний. Помножимо нерівність на (-1) , знак нерівності зміниться на протилежний і у другому множнику чисельника доданки зміняться місцями:

$$\frac{x^2 \cdot (x-2) \cdot (x+1)^3}{(x-1) \cdot (x+3)} \leq 0.$$

Знайдемо корні чисельника ($x = 0$, $x = 2$, $x = -1$) і знаменника ($x = 1$, $x = -3$). Розташуємо їх на осі. Враховуючи зауваження розставимо знаки на інтервалах.



Розв'язком нерівності є сукупність інтервалів з знаком «-»:

$$x \in (-3; -1] \cup (1; 2] \cup \{0\}.$$

Розкладання правильного алгебраїчного дробу на суму простих дробів

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб ($n < m$). Якщо правильний дріб не є простий, необхідно знаменник $Q_m(x)$ розкласти на множники (множниками можуть бути лінійні многочлени виду: $x \pm x_1$, $(x \pm x_2)^k$ та квадратні $x^2 + a^2$, $(x^2 + a^2)^k$, $x^2 + px + q$, $(x^2 + px + q)^k$ з дискримінантом меншим нуля), а потім правильний дріб – на прості дроби. Простих дробів буде стільки, скільки множників у знаменнику, враховуючи кратність кожного. У чисельниках простих дробів записують многочлени в загальному вигляді, не враховуючи кратність многочленів у знаменнику. Коефіцієнти чисельників знаходимо методом невизначених коефіцієнтів або комбінованим методом.

Наприклад, розкласти алгебраїчний дріб на суму простих дробів:

а) $\frac{x-7}{(x+3) \cdot (x-2)}$. Чисельник дробу – многочлен першого степеня, а

знаменник – многочлен другого степеня, розкладений на два лінійних множники. Враховуючи вище наведене, матимемо два простих дробів, які приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{x-7}{(x+3) \cdot (x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A \cdot (x-2) + B \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot (x-2)}.$$

Початковий дріб і отриманий рівні. Вони мають рівні знаменники. З цього випливає, що їх чисельники рівні:

$$x-7 = A \cdot (x-2) + B \cdot (x+3)$$

Зауваження. Якщо відомі дійсні корні знаменників, то їх значення можна підставити у рівність чисельників.

Маємо рівність многочленів. Так як знаменники дробів мають дійсні корні, то їх значення $x = -3$ і $x = 2$ підставимо в отриману рівність чисельників:

$$\begin{array}{l|l} x = -3 & -10 = -5A \\ x = 2 & -5 = 5B \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 2 \\ B = -1 \end{array}$$

$$\text{Маємо } \frac{x-7}{(x+3) \cdot (x-2)} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2}.$$

б) $\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}$. Чисельник дробу – многочлен першого степеня, а

знаменник – многочлен третього степеня, розкладений на два множники: лінійний і квадратний. Враховуючи вище наведене, матимемо два простих дробу, які приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{x+1}{(x+2) \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2) \cdot (x^2+1)} = \frac{x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C}{(x+2) \cdot (x^2+1)}$$

Початковий дріб і отриманий рівні. Вони мають рівні знаменники. З цього випливає, що їх чисельники рівні:

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C) \cdot (x+2) = x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C.$$

Маємо рівність многочленів, з чого випливає рівність коефіцієнтів при однакових степенях x . Прирівнюємо коефіцієнти, маємо систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів.

Враховуючи зауваження, корінь $x = -2$ підставимо в отриману рівність, а також прирівняємо коефіцієнти при другому і першому степені x :

$$\begin{array}{l|l} x = -2 & -2+1 = A((-2)^2+1) + (B(-2)+C)(-2+2) \Rightarrow -1 = 5A; A = -1/5 \\ x^2 & 0 = A+B; B = 1/5 \\ x & 1 = 2B+C; C = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \end{array}$$

Маємо $\frac{x+1}{(x+2) \cdot (x^2+1)} = \frac{-1/5}{x+2} + \frac{1/5x+3/5}{x^2+1} = \frac{-0,2}{x+2} + \frac{0,2x+0,6}{x^2+1}$.

в) $\frac{3}{(x-1)^2(x+1)}$. Дріб правильний. Чисельник дробу – многочлен

нульового степеня, а знаменник – многочлен третього степеня, розкладений на два множники: лінійний кратності першої і лінійний кратності другої. Враховуючи вище наведене, матимемо три простих дробу, які приведемо до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \frac{3}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \\ &= \frac{A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2(B+C)+x(A-2C)+2A-B+C}{(x-1)^2(x+1)}. \end{aligned}$$

Початковий дріб і отриманий рівні. Вони мають рівні знаменники. З цього випливає, що їх чисельники рівні:

$$3 = A(x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)^2 = x^2(B+C) + x(A-2C) + 2A-B+C.$$

Маємо рівність многочленів. Так як знаменники дробів мають дійсні корні, то їх значення $x=-1$ і $x=1$ підставимо в отриману рівність чисельників, а також прирівняємо коефіцієнти при другому степені x :

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 3=4C; C=3/4 \\ x=1 & 3=2A; A=3/2 \\ x^2 & 0=B+C; B=-3/4 \end{array}$$

Маємо $\frac{3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3/2}{(x-1)^2} + \frac{-3/4}{x-1} + \frac{3/4}{x+1}$.

г) $\frac{2x^3+20x^2+66x+39}{(x^2+4x+3) \cdot (x+5)}$. Дріб неправильний. Чисельник і

знаменник дробу – многочлен третього степеня. Треба виділити цілу

частину, поділивши чисельник на знаменник за правилом «жута». Розкриємо дужки у знаменнику і виконаємо ділення.

$$\begin{array}{r} (x^2 + 4x + 3) \cdot (x + 5) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15. \\ \underline{2x^3 + 21x^2 + 66x + 39} \quad | \quad \begin{array}{l} x^3 + 9x^2 + 23x + 15 \\ 2x^3 + 18x^2 + 46x + 30 \end{array} \\ \hline 3x^2 + 20x + 9 \end{array}$$

Тоді

$$\frac{2x^3 + 20x^2 + 66x + 39}{(x^2 + 4x + 3) \cdot (x + 5)} = 2 + \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x^2 + 4x + 3) \cdot (x + 5)} = 2 + \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x + 5)}.$$

Розкладемо правильний дріб на суму простих дробів. Простих дробів буде три, так як у знаменнику три лінійні множники з коренями $x = -5$, $x = -3$, $x = -1$.

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x + 5)} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x + 5} = \\ &= \frac{A(x + 3) \cdot (x + 5) + B(x + 1) \cdot (x + 5) + C(x + 1) \cdot (x + 3)}{(x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x + 5)} \end{aligned}$$

Прирівнюємо чисельники початкового і отриманого дробів:

$$3x^2 + 20x + 9 = A(x + 3) \cdot (x + 5) + B(x + 1) \cdot (x + 5) + C(x + 1) \cdot (x + 3).$$

Послідовно корені знаменників простих дробів підставляємо у рівність чисельників:

$$\begin{array}{l|l} x = -5 & -16 = 8C; \quad C = -2 \\ x = -3 & -24 = -4B; \quad B = 6. \\ x = -1 & -8 = 8A; \quad A = -1 \end{array}$$

Маємо
$$\frac{2x^3 + 20x^2 + 66x + 39}{(x^2 + 4x + 3) \cdot (x + 5)} = 2 - \frac{1}{x + 1} + \frac{6}{x + 3} - \frac{2}{x + 5}.$$

2.2 Аудиторні завдання

2.2.1 Виділити повний квадрат з квадратного тричлена:

а) $x^2 + 4x + 5$ (Відповідь: $(x + 2)^2 + 1$).

б) $2x^2 + 6x + 7$ (Відповідь: $2 \cdot \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \right)$).

в) $2 - 2x - x^2$ (Відповідь: $3 - (x + 1)^2$).

2.2.2 Розв'язати квадратне рівняння

а) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (Відповідь: $x_1 = -3$, $x_2 = -2$).

б) $3x^2 - 4x + 1 = 0$ (Відповідь: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$).

в) $9x^2 - 6x + 5 = 0$ (Відповідь: $x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}i$).

г) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ (Відповідь: $x_{1,2} = -\frac{1}{2}$).

2.2.3 Скоротити дріб:

а) $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 5x + 6}$ (Відповідь: $\frac{x}{x + 2}$).

б) $\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 2x + 1}$ (Відповідь: $\frac{x - 6}{x - 1}$).

в) $\frac{2x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 7x - 6}$ (Відповідь: $\frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{4}{9}}$).

г) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 4x + 5}$ (Відповідь: $\frac{x - 3}{x^2 - x + 5}$).

2.2.4 Розв'язати нерівність:

а) $x^2 - 6x + 8 > 0$ (Відповідь: $x \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$).

б) $-x^2 - 6x - 15 > 0$ (Відповідь: $x \in \{ \emptyset \}$).

в) $x^2 - 8x + 16 > 0$ (Відповідь: $x \in (-\infty; 4) \cup (4; \infty)$).

г) $2x^2 - 3x + 5 > 0$ (Відповідь: $x \in \mathbb{R}$).

д) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ (Відповідь: $x = 3$).

е) $\frac{(1-5x)^3 \cdot (x+2)}{(2-x)^2(x+7)} \geq 0$ (Відповідь: $x \in (-\infty; -7) \cup \left[-2; \frac{1}{5}\right]$).

2.2.5 Розкласти алгебраїчний дріб на суму простих дробів

а) $\frac{3x^3 + 27}{x^3 - 9x}$ (Відповідь: $\frac{3x^3 + 27}{x^3 - 9x} = 3 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x-3} - \frac{3}{x+3}$).

б) $\frac{4x-1}{(x+1)^2(x+3)}$ (Відповідь: $\frac{4x-1}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{-2,5}{(x+1)^2} + \frac{3,25}{x+1} + \frac{-3,25}{x+3}$).

в) $\frac{x^2 + 22}{(x-2) \cdot (x^2 + 9)}$ (Відповідь: $\frac{x^2 + 22}{(x-2) \cdot (x^2 + 9)} = \frac{2}{x-2} - \frac{x+2}{x^2 + 9}$).

г) $\frac{-2x}{(x-3) \cdot (x^2 - 4x + 6)}$ (Відповідь: $\frac{-2x}{(x-3) \cdot (x^2 - 4x + 6)} = \frac{-2}{x-3} + \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 6}$).

2.3 Індивідуальні завдання

2.3.1 Виділити повний квадрат з квадратного тричлена

1.	а)	$x^2 + 5x - 7$	б)	$3x^2 - 6x + 5$	в)	$-x^2 + 4x - 3$
2.	а)	$x^2 + 7x - 5$	б)	$2x^2 - 4x + 7$	в)	$-x^2 + 6x - 11$
3.	а)	$x^2 - 9x - 5$	б)	$3x^2 - 12x + 5$	в)	$-x^2 + 8x - 13$
4.	а)	$x^2 + 11x + 5$	б)	$2x^2 + 8x + 7$	в)	$-x^2 - 6x + 9$
5.	а)	$x^2 - 7x + 9$	б)	$3x^2 - 18x + 11$	в)	$-x^2 - 4x + 5$
6.	а)	$x^2 - 5x + 11$	б)	$2x^2 - 8x + 9$	в)	$-x^2 - 8x + 13$
7.	а)	$x^2 + 9x + 7$	б)	$3x^2 + 18x - 11$	в)	$-x^2 + 10x + 15$

8.	a)	$x^2 - 19x + 15$	б)	$2x^2 + 12x + 5$	в)	$-x^2 - 12x + 5$
9.	a)	$x^2 - 13x + 5$	б)	$3x^2 - 24x + 5$	в)	$-x^2 + 16x - 4$
10.	a)	$x^2 + 17x + 13$	б)	$2x^2 + 24x + 7$	в)	$-x^2 + 2x - 3$
11.	a)	$x^2 + 5x + 13$	б)	$3x^2 + 6x - 7$	в)	$-x^2 - 2x - 5$
12.	a)	$x^2 - 7x + 11$	б)	$2x^2 - 12x + 11$	в)	$-x^2 + 4x - 7$
13.	a)	$x^2 - 9x + 15$	б)	$3x^2 + 12x - 8$	в)	$-x^2 - 8x + 15$
14.	a)	$x^2 + 3x - 7$	б)	$2x^2 - 8x + 15$	в)	$-x^2 + 6x - 20$
15.	a)	$x^2 - 7x + 13$	б)	$3x^2 - 24x - 4$	в)	$-x^2 - 4x + 1$
16.	a)	$x^2 - 17x + 2$	б)	$2x^2 + 4x + 13$	в)	$-x^2 + 10x + 2$
17.	a)	$x^2 - 9x + 15$	б)	$3x^2 - 18x + 20$	в)	$-x^2 - 10x + 4$
18.	a)	$x^2 + 11x + 13$	б)	$2x^2 - 20x + 15$	в)	$-x^2 + 12x + 5$
19.	a)	$x^2 - 11x - 4$	б)	$3x^2 + 24x - 16$	в)	$-x^2 - 12x + 7$
20.	a)	$x^2 - 13x + 8$	б)	$2x^2 - 24x + 17$	в)	$-x^2 + 14x - 7$

2.3.2 Розв'язати квадратні рівняння

	а)	б)	в)
1.	$2x^2 - x - 3 = 0$	$25x^2 - 10x + 1 = 0$	$x^2 + 12x + 37 = 0$
2.	$x^2 - 11x + 28 = 0$	$9x^2 - 6x + 1 = 0$	$x^2 + 8x + 25 = 0$
3.	$5x^2 + 7x + 2 = 0$	$x^2 - 40x + 400 = 0$	$x^2 - 6x + 10 = 0$
4.	$x^2 + 4x - 21 = 0$	$x^2 + 12x + 36 = 0$	$x^2 + 6x + 25 = 0$
5.	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$	$x^2 - 6x + 13 = 0$
6.	$3x^2 - 8x - 3 = 0$	$x^2 - 4x + 4 = 0$	$x^2 + 2x + 5 = 0$
7.	$2x^2 + 13x - 7 = 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x^2 + 4x + 13 = 0$
8.	$x^2 - 9x + 14 = 0$	$x^2 - 8x + 16 = 0$	$x^2 + 2x + 2 = 0$
9.	$x^2 - 7x + 10 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 10x + 29 = 0$
10.	$3x^2 + 14x - 5 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$x^2 + 4x + 8 = 0$
11.	$2x^2 - 7x - 4 = 0$	$x^2 + 14x + 49 = 0$	$x^2 + 4x + 20 = 0$
12.	$2x^2 + x - 1 = 0$	$x^2 - 16x + 64 = 0$	$x^2 - 2x + 10 = 0$

	а)	б)	в)
13.	$9x^2 + 3x - 2 = 0$	$16x^2 + 8x + 1 = 0$	$x^2 + 2x + 17 = 0$
14.	$4x^2 + 8x - 5 = 0$	$9x^2 + 24x + 16 = 0$	$x^2 - 2x + 5 = 0$
15.	$x^2 - 5x + 4 = 0$	$4x^2 - 12x + 9 = 0$	$x^2 - 4x + 29 = 0$
16.	$x^2 - 6x + 8 = 0$	$x^2 + 18x + 81 = 0$	$x^2 + 2x + 37 = 0$
17.	$x^2 - 2x - 15 = 0$	$9x^2 - 12x + 4 = 0$	$x^2 - 8x + 17 = 0$
18.	$x^2 - 10x + 16 = 0$	$x^2 + 22x + 121 = 0$	$x^2 - 6x + 34 = 0$
19.	$x^2 + 2x - 3 = 0$	$25x^2 - 20x + 4 = 0$	$x^2 - 8x + 20 = 0$
20.	$x^2 + 2x - 24 = 0$	$36x^2 + 12x + 1 = 0$	$x^2 + 10x + 34 = 0$

2.3.3 Скоротити дріб

1.	а)	$\frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3}$	б)	$\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 1}$
2.	а)	$\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + 2x}$	б)	$\frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4}$
3.	а)	$\frac{x^2 + 4x}{3x^2 + 11x - 4}$	б)	$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$
4.	а)	$\frac{x^2 - x}{2x^2 - x - 1}$	б)	$\frac{x^3 + x^2 - 36}{x^2 - 9}$
5.	а)	$\frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x}$	б)	$\frac{x^2 - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$
6.	а)	$\frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 5x - 3}$	б)	$\frac{x^2 - 9}{x^3 - 2x^2 + 45}$
7.	а)	$\frac{3x^2 - 13x + 4}{x^2 - 4x}$	б)	$\frac{x^3 + 2x^2 + 32}{x^2 - 16}$
8.	а)	$\frac{3x^2 - x}{6x^2 + x - 1}$	б)	$\frac{x^2 - 25}{x^3 - 3x^2 - 50}$
9.	а)	$\frac{x^2 - 3x}{3x^2 - 8x - 3}$	б)	$\frac{x^2 - 16}{x^3 - 2x^2 - 32}$

10.	a)	$\frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 2x}$	б)	$\frac{x^3 - 2x - 21}{x^2 - 9}$
11.	a)	$\frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 5x + 2}$	б)	$\frac{x^2 - 25}{x^3 - 10x - 75}$
12.	a)	$\frac{x^2 + 3x}{4x^2 + 11x - 3}$	б)	$\frac{x^3 - 20x + 25}{x^2 - 25}$
13.	a)	$\frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 5x}$	б)	$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 7x - 6}$
14.	a)	$\frac{x^2 - 5x}{2x^2 - 9x - 5}$	б)	$\frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4}$
15.	a)	$\frac{3x^2 + 8x - 3}{x^2 + 3x}$	б)	$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 5x + 4}$
16.	a)	$\frac{x^2 + 4x}{3x^2 + 11x - 4}$	б)	$\frac{x^3 - 10x + 24}{x^2 - 16}$
17.	a)	$\frac{2x^2 + x}{2x^2 + 9x - 5}$	б)	$\frac{x^2 - 36}{x^3 - 30x - 36}$
18.	a)	$\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 8x - 3}$	б)	$\frac{x^3 - 30x - 25}{x^2 - 25}$
19.	a)	$\frac{3x^2 - 17x - 6}{x^2 - 6x}$	б)	$\frac{x^3 - 40x - 24}{x^2 - 36}$
20.	a)	$\frac{x^2 + 6x}{2x^2 + 11x - 6}$	б)	$\frac{x^3 - 12x - 16}{x^2 - 16}$

2.3.4 Розв'язати нерівності

1.	a)	$x^2 - 8x + 15 < 0$	б)	$\frac{(x+2)(x-3)^2}{(5-x)^3(x+4)} \leq 0$
2.	a)	$8 + 7x - x^2 \leq 0$	б)	$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)^2(x-3)^5} \geq 0$

3.	a)	$x^2 - x + 5 > 0$	б)	$\frac{(x+2)^3(x-1)}{(x+4)^4} \leq 0$
4.	a)	$x^2 - 6x + 9 \leq 0$	б)	$\frac{(x-7)^3 \cdot x^2}{(x+2)(x-6)} \geq 0$
5.	a)	$7 - 6x - x^2 \geq 0$	б)	$\frac{(x+2)^3(x-1)^2}{(x+5)^5} \leq 0$
6.	a)	$x^2 + 3x + 5 < 0$	б)	$\frac{(3-x)^2(x-5)}{(x+2)^3} \geq 0$
7.	a)	$2x^2 - 9x - 5 \geq 0$	б)	$\frac{(5-x)^3(x+5)^2}{x-1} \geq 0$
8.	a)	$2x^2 - 9x - 5 \leq 0$	б)	$\frac{(x+7)^4(x-3)}{(x+2)(x-1)^3} \geq 0$
9.	a)	$x^2 + x - 2 < 0$	б)	$\frac{(x+10)^2(4-x)}{(x+1)^2(x+5)^3} \geq 0$
10.	a)	$x^2 + 3x - 4 < 0$	б)	$\frac{(x-8)^4(x+3)}{(x+1)^3(2-x)} \leq 0$
11.	a)	$x^2 + 6x + 8 > 0$	б)	$\frac{(x+1)(x-3)^2(x+5)^3}{(6-x)} \geq 0$
12.	a)	$x^2 - 7x + 12 \geq 0$	б)	$\frac{(2x+1)^2(x-3)^4}{(x+11)^3} \leq 0$
13.	a)	$x^2 - 2x - 3 \geq 0$	б)	$\frac{(x-10)^4(x+3)^3}{(x-1)(x-5)} \geq 0$
14.	a)	$4x^2 - 19x + 12 > 0$	б)	$\frac{(3x-1)(x+2)^2}{(x-6)^5(x+3)} \geq 0$
15.	a)	$2 + 3x - 2x^2 > 0$	б)	$\frac{(x+4)^3(x-1)^2}{(x+2) \cdot (3-x)} \leq 0$
16.	a)	$x^2 - 7x + 6 > 0$	б)	$\frac{(x+1)^3(2x-3)^2}{(x+2) \cdot (1-x)} \leq 0$

17.	a)	$x^2 - 5x - 24 \geq 0$	б)	$\frac{(x+4)^3(x-3)^2}{(9-x)(x+2)} \leq 0$
18.	a)	$x^2 + 10x - 11 > 0$	б)	$\frac{(x+5)^3(x-7)}{(x+3)^2(x-2)} \geq 0$
19.	a)	$x^2 + 4x - 5 \geq 0$	б)	$\frac{(x-8)^2(x+2)^3}{(2x+1)^4(x-3)} \leq 0$
20.	a)	$x^2 + 4x + 3 < 0$	б)	$\frac{(2-x)^4(x+2)^3}{(x-4) \cdot (x-9)^2} \leq 0$

2.3.5 Розкласти алгебраїчний дріб на суму простих дробів

1.	a)	$\frac{3x^3 - 1}{x^3 - x}$	2.	a)	$\frac{5x^3 - 9}{x^3 - 9x}$
	б)	$\frac{3x+2}{x^2(x-1)}$		б)	$\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2(x+3)}$
	в)	$\frac{13 - 2x^2}{(x-4)(x^2 + 3)}$		в)	$\frac{9x+1}{(x-3)(x^2 + 5)}$
3.	a)	$\frac{2x^3 + 4}{x^3 - x}$	4.	a)	$\frac{4x^3 - 2}{x^3 - x}$
	б)	$\frac{x+2}{x^3 - 4x^2 + 4x}$		б)	$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x}$
	в)	$\frac{5x^2 - 44}{(x+4)(x^2 + 2)}$		в)	$\frac{6x+14}{(x-1)(x^2 + 3)}$
5.	a)	$\frac{3x^3 - 27}{x^3 - 9x}$	6.	a)	$\frac{3x^3 + 5}{x^3 - x}$
	б)	$\frac{3 - 7x}{(x+1)^2(x-4)}$		б)	$\frac{2 - 3x}{(x+4)^2(x-5)}$
	в)	$\frac{12}{(x-2)(x^2 + 4)}$		в)	$\frac{36}{(x-3)(x^2 + 9)}$

7.	a)	$\frac{6x^3 - 8}{x^3 - 4x}$	8.	a)	$\frac{2x^3 - 8}{x^3 - 4x}$
	б)	$\frac{x + 4x^2}{(x+3)(x+1)^2}$		б)	$\frac{4}{(x-3)^2(x-1)}$
	в)	$\frac{24 - x^2}{(x+2)(x^2 + 6)}$		в)	$\frac{7x - 12}{(x+3)(x^2 + 2)}$
9.	a)	$\frac{3x^3 - 7}{x^3 - x}$	10.	a)	$\frac{2x^3 + 18}{x^3 - 9x}$
	б)	$\frac{2x + 1}{(x+1)(x-2)^2}$		б)	$\frac{x - 4x^2}{(x-2)(x-1)^2}$
	в)	$\frac{x^2 + 17}{(x+1)(x^2 + 5)}$		в)	$\frac{9x + 10}{(x-4)(x^2 + 7)}$
11.	a)	$\frac{3x^3 + 8}{x^3 - 4x}$	12.	a)	$\frac{5x^3 + 3}{x^3 - x}$
	б)	$\frac{2x^2 - 3}{(x-4)(x^2 - 4)}$		б)	$\frac{3x + 2}{x^3 - 2x^2}$
	в)	$\frac{x^2 - 28}{(x+2)(x^2 + 8)}$		в)	$\frac{3x - 27}{(x+3)(x^2 + 9)}$
13.	a)	$\frac{2x^3 - 4}{x^3 - x}$	14.	a)	$\frac{4x^3 + 8}{x^3 - x}$
	б)	$\frac{4x^2 - 3}{(x-1)(x^2 - 1)}$		б)	$\frac{5x^2 - x}{(x-1)(x-7)^2}$
	в)	$\frac{2x^2 + 22}{(x+4)(x^2 + 2)}$		в)	$\frac{1 - 9x}{(x-3)(x^2 + 4)}$
15.	a)	$\frac{5x^3 + 8}{x^3 - 4x}$	16.	a)	$\frac{3x^3 - 5}{x^3 - x}$
	б)	$\frac{5x + 4x^2 + 1}{(x-8)^2(x+2)}$		б)	$\frac{4 - x}{(x-1)(x+2)^2}$

	в)	$\frac{16-4x^2}{(x-4)(x^2+8)}$		в)	$\frac{7x+17}{(x-1)(x^2+5)}$
17.	а)	$\frac{6x^3+2}{x^3-x}$	18.	а)	$\frac{3x^3+9}{x^3-9x}$
	б)	$\frac{1-5x^2}{x^3-x^2}$		б)	$\frac{4x+9}{(x-1)(x+2)^2}$
	в)	$\frac{30}{(x-2)(x^2+6)}$		в)	$\frac{2-12x}{(x-2)(x^2+7)}$
19.	а)	$\frac{5x^3-8}{x^3-4x}$	20.	а)	$\frac{2x^3-18}{x^3-9x}$
	б)	$\frac{4x+8}{(x+3)^2(x+1)}$		б)	$\frac{3x-5}{(x+6)^2(x-4)}$
	в)	$\frac{2x^2-35}{(x+3)(x^2+8)}$		в)	$\frac{9x-14}{(x+4)(x^2+9)}$

3. ЗАНЯТТЯ ТРЕТЄ

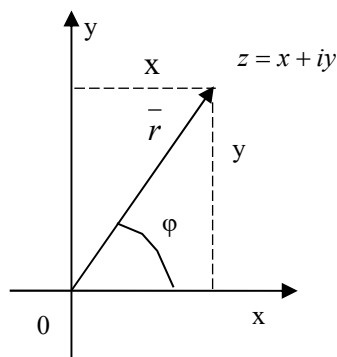
3.1 Відомості з теорії

Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом z називається число, яке має вигляд: $z = x + iy$, де x і y – дійсні числа, i – уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$; $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина комплексного числа. Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається **спряженим** комплексному числу z .

Зауваження. $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою площини xOy з



координатами (x, y) , або вектором $\bar{r}$, який має напрямок з початку координат т. O в точку (x, y) . Довжина вектора $\bar{r}$ називається **модулем комплексного числа**: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Кут φ , утворений вектором з додатним напрямом осі Ox називається **аргументом комплексного числа**: $\varphi = \text{Arg } z$.

Дії над комплексними числами.

Маємо $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$. Тоді

1) **Рівність**: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ і } y_1 = y_2$;

2) **Додавання**: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

3) **Добуток**: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

4) **Частка**:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} \cdot \frac{x_2 - i y_2}{x_2 - i y_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{(x_2)^2 + (y_2)^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} - i \cdot \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{(x_2)^2 + (y_2)^2}.$$

Наприклад, для заданих комплексних чисел $z_1 = 2 + i$ і

$z_2 = -2 + 2i$ знайти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) $(z_2)^3$.

а) $z_1 + z_2 = (2 + i) + (-2 + 2i) = 3i$;

б) $z_1 - z_2 = (2 + i) - (-2 + 2i) = 4 - i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (-2 + 2i) = -4 + 4i - 2i + 2i^2 = -6 + 2i$;

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{-2 + 2i} \cdot \frac{-2 - 2i}{-2 - 2i} = \frac{-4 - 4i - 2i - 2i^2}{4 - 4i^2} = \frac{-2 - 6i}{8} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$;

д) $(z_2)^3 = (-2 + 2i)^3 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 \cdot (2i) + 3 \cdot (-2) \cdot (2i)^2 + (2i)^3 =$
 $= -8 + 24i + 24 - 8i = 16 + 16i$.

Область визначення функції

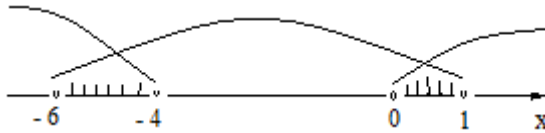
Областю визначення $D(y)$ функції $y=f(x)$ називають множину значень аргументу x функції, при яких функція має зміст.

Функція $f(x)$	$D(y)$
$P_n(x)$	$x \in R$
$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$	$Q_m(x) \neq 0$
$\frac{A}{g(x)}, A - const$	$g(x) \neq 0$
$\sqrt[2k]{g(x)}$	$g(x) > 0$
$\sqrt[2k+1]{g(x)}$	$g(x) \in R$, якщо корінь у знаменну, то $g(x) > 0$
${}_a g(x)$	$g(x) \in R$
$\log_a g(x)$	$g(x) > 0$
$\sin g(x)$	$g(x) \in R$
$\cos g(x)$	$g(x) \in R$
$tg g(x)$	$g(x) \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$ctg g(x)$	$g(x) \in R, x \neq \pi n, n \in Z$
$\arcsin g(x)$	$ g(x) \leq 1$
$\arccos g(x)$	$ g(x) \leq 1$
$\arctg g(x)$	$g(x) \in R$
$\operatorname{arccctg} g(x)$	$g(x) \in R$

Наприклад, знайти область визначення функції:

$$y = \ln(-x^2 - 5x + 6) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}.$$

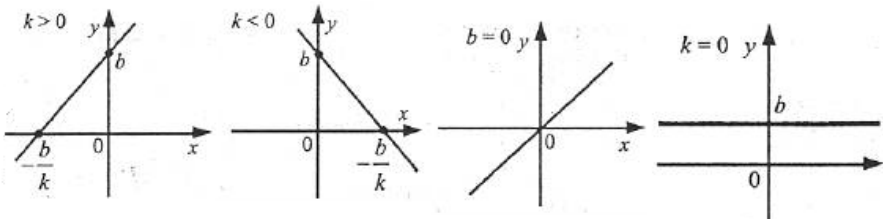
$$D(y): \begin{cases} -x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 + 4x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+6) \cdot (x-1) < 0 \\ x \cdot (x+4) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-6; 1) \\ x \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty) \end{cases}.$$



Відповідь: $D(y): x \in (-6; -4) \cup (0; 1)$.

Графіки елементарних функцій

1) Лінійна $y = kx + b$

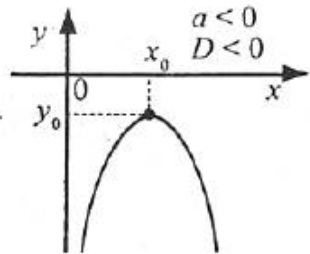
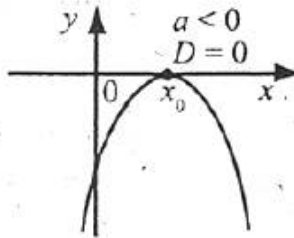
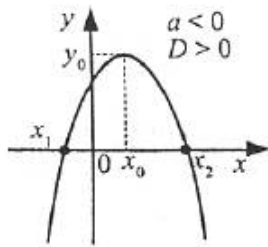
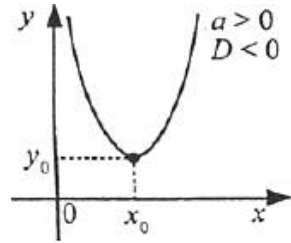
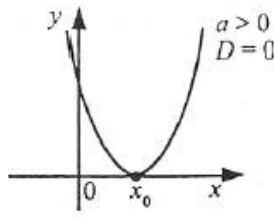
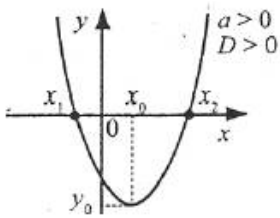


Графік лінійної функції зручно будувати по двом точкам, взятим на осях координат: $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$ і $(0; b)$.

2) Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, де

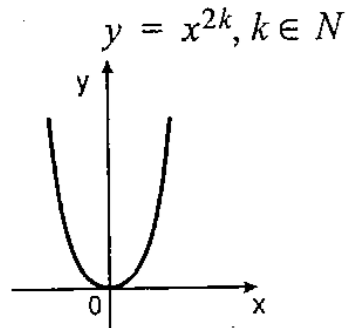
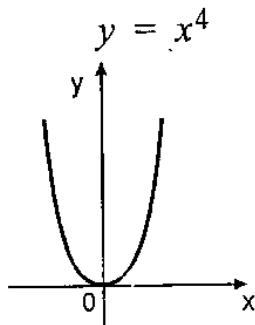
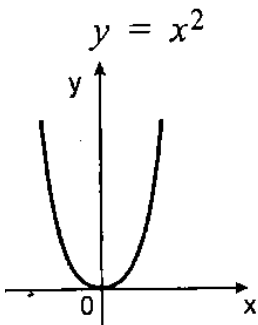
x_1, x_2 – корені квадратного тричлена (або $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = y(x_0)$),

$$D = b^2 - 4ac.$$

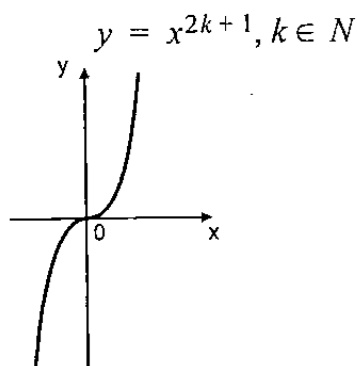
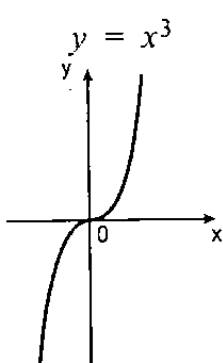
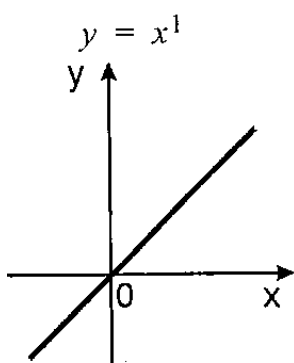


3) Степенева функція $y = x^\alpha$

α – парне натуральне число



α – непарне натуральне число

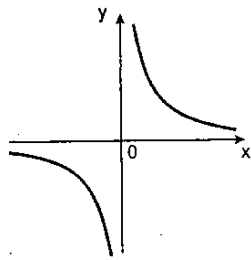
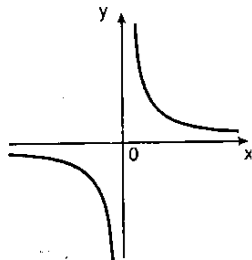
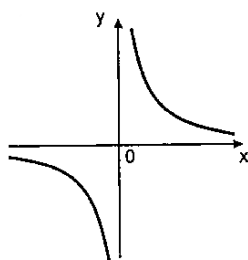


α – непарне від'ємне число

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$y = x^{-(2k-1)} = \frac{1}{x^{2k-1}}, k \in \mathbb{N}$$

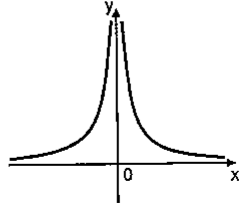
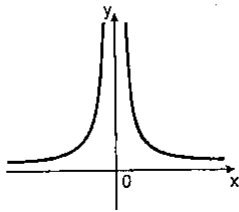
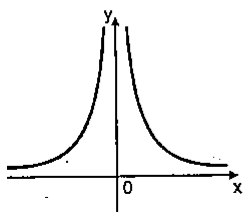


α – парне від'ємне число

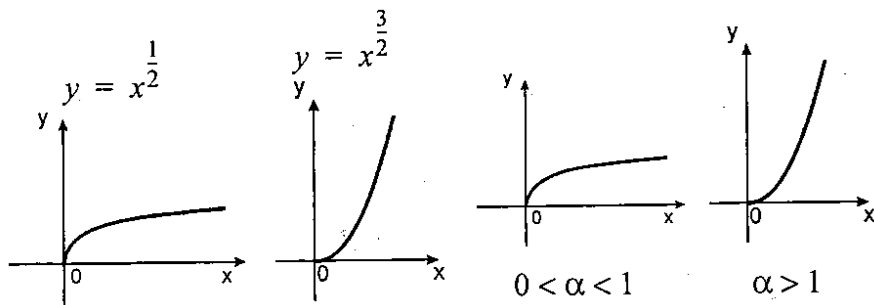
$$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

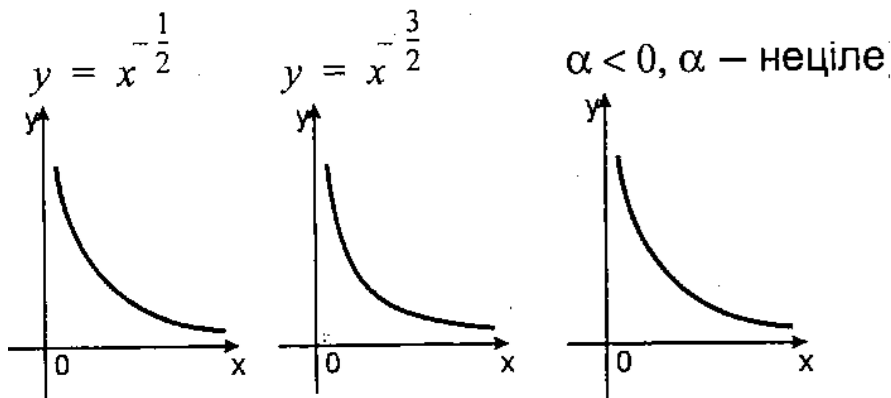
$$y = x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}, k \in \mathbb{N}$$



α – неціле додатне число



α – неціле від'ємне число

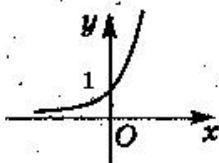


4) Показникова функція

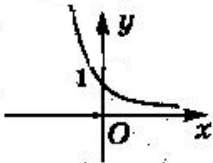
5) Логарифмічна функція

$$y = a^x$$

а) $a > 1$

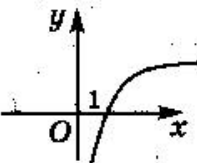


б) $0 < a < 1$

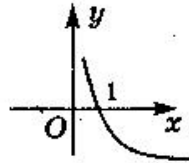


$$y = \log_a x$$

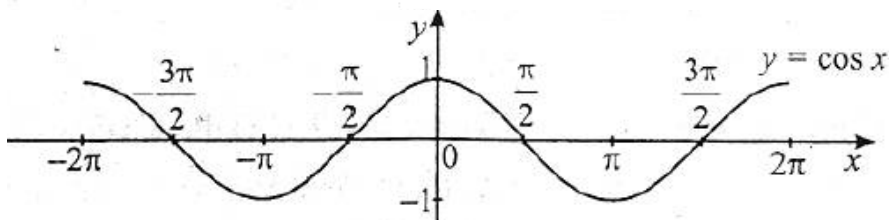
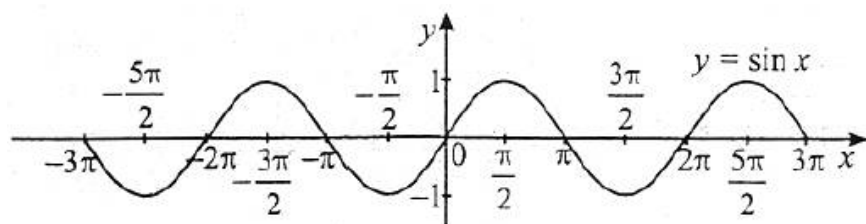
а) $a > 1$



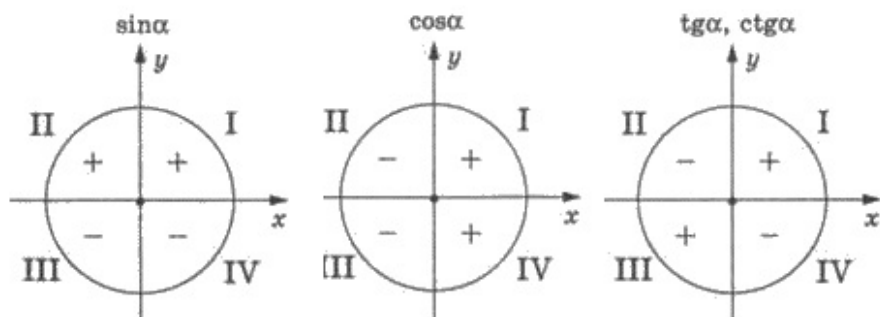
б) $0 < a < 1$



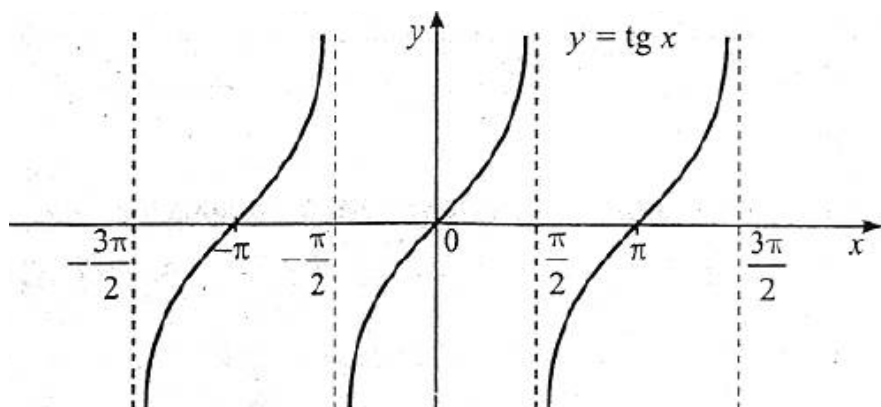
б) Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

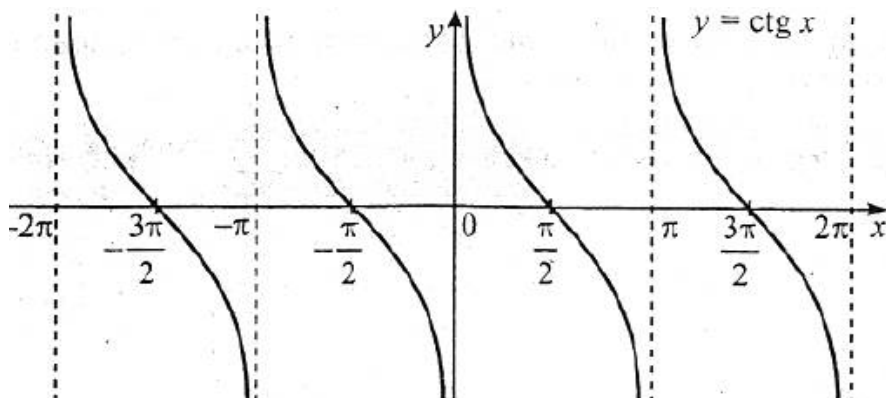


Властивості	Функція	
	$\sin x$	$\cos x$
$D(y)$	$R = (-\infty; \infty)$	R
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Парність	непарна	парна
Основний період	2π	2π
Нулі функції	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$f(x) > 0$	$(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
$f(x) < 0$	$(2\pi n + \pi; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
Інтервали: зростання	$\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),$	$(2\pi n - \pi; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
спадання	$\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),$	$(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$



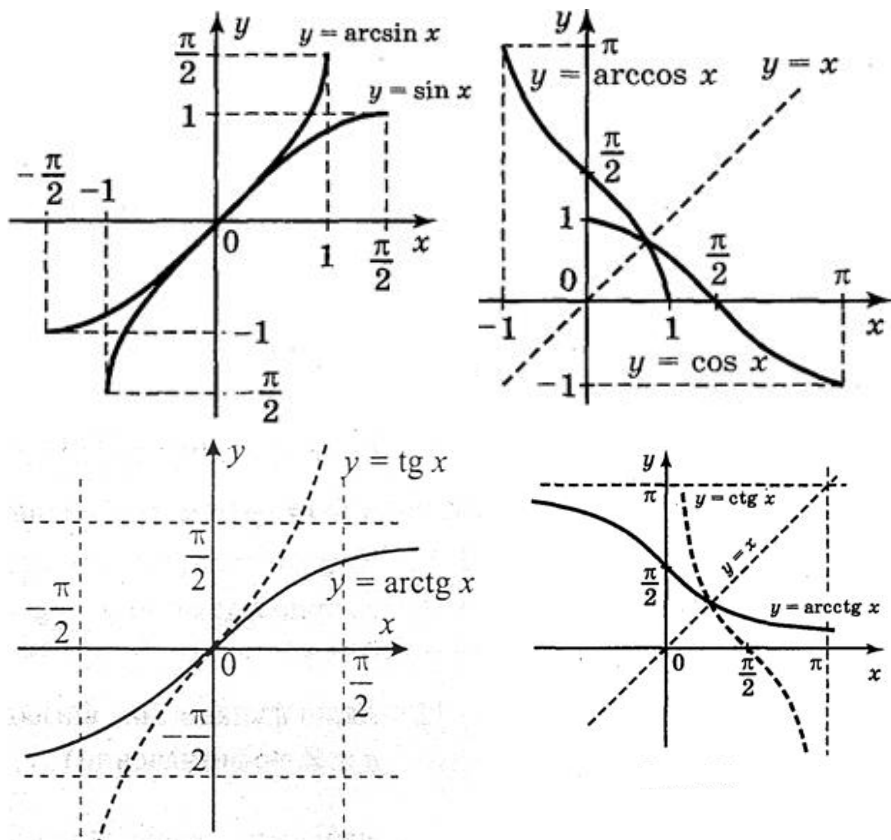
α	$0(0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$	$\pi(180^\circ)$	$\frac{3\pi}{2}(270^\circ)$	$2\pi(360^\circ)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	He ichye	0	He ichye	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	He ichye	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	He ichye	0	He ichye





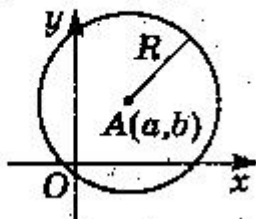
Властивості	Функція	
	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$D(y)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$E(y)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Парність	непарна	непарна
Основний період	π	π
Нулі функції	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$f(x) > 0$	$(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$f(x) < 0$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z}$
Інтервали: зростання спадання	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(\pi n, \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

7) Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arccctg} x$



Рівняння кола з центром в точці $A(a; b)$ радіуса R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$



Перетворення графіків функцій

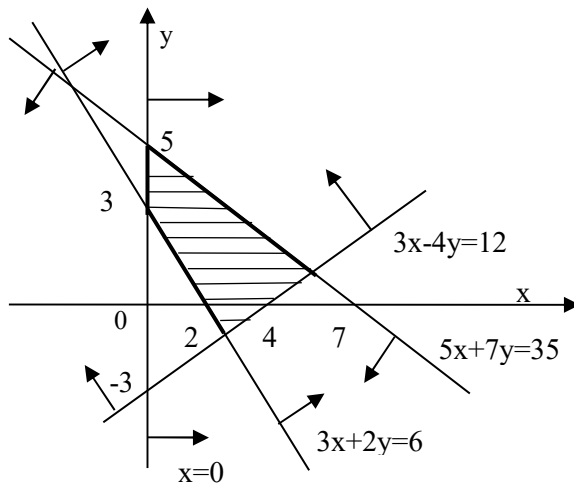
Щоб побудувати графік функції	Потрібно
$y = f(x - b)$	Зсунути $y = f(x)$ на b одиниць вздовж осі Ox праворуч при $b > 0$, або ліворуч при $b < 0$.
$y = f(x) + c$	Зсунути $y = f(x)$ на c одиниць вздовж осі Oy вгору при $c > 0$, або вниз при $c < 0$.
$y = f(mx), m > 0$	Стиснути $y = f(x)$ у m разів у напрямку осі Ox до осі Oy , якщо $m > 1$, або розтягти у $\frac{1}{m}$ разів, якщо $0 < m < 1$.
$y = kf(x), k > 0$	Розтягти $y = f(x)$ у k разів у напрямку осі Oy від осі Ox , якщо $k > 1$, або стиснути до осі Ox , якщо $0 < k < 1$.
$y = f(-x)$	Перевернути $y = f(x)$ відносно осі Oy .
$y = -f(x)$	Перевернути $y = f(x)$ відносно осі Ox .
$y = f(x) $	Залишити без змін ту частину $y = f(x)$, яка вище осі Ox , а ту, що нижче, відобразити симетрично на верхню півплощину.
$y = f(x)$	Відкинути ту частину $y = f(x)$, яка знаходиться у лівій півплощині відносно осі Oy , а ту, що в правій, залишити та відобразити симетрично на ліву півплощину.

Наприклад, Побудувати на площині область розв'язків системи

$$\text{лінійних нерівностей: } \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 3x - 4y \leq 12 \\ 5x + 7y \leq 35 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Побудуємо лінії: $3x + 2y = 6$, $3x - 4y = 12$, $5x + 7y = 35$, $x \geq 0$.
Визначимо півплощини, які задовольняють задані нерівності за

допомогою контрольних точок. Якщо точка $(0;0)$ не задовольняє рівнянню прямої, то саме її беремо, як контрольну точку. Наприклад, рівняння $3x+2y=6$ розбиває усю площину на дві частини, умовно кажучи: ліву і праву. Точка $(0,0)$ належить лівій частині площини відносно прямої. Підставимо точку $(0;0)$ у нерівність $3x+2y \geq 6$, маємо $0 \geq 6$ – це невірно, тому розв'язком нерівності буде права частина площини відносно прямої. Аналогічно перевіряємо інші нерівності. Розв'язки нерівностей позначаємо стрілками. Область розв'язків системи лінійних нерівностей міститься у перетині знайдених півплощин. Вона позначається штрихованими лініями:



3.2 Аудиторні завдання

3.2.1 Для заданих комплексних чисел $z_1 = 1 - 2i$ і $z_2 = 3 + 4i$

знайти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) $(z_1)^3$.

(Відповідь: а) $4 + 2i$; б) $-2 - 6i$; в) $11 - 2i$; г) $-0,2 - 0,4i$; д) $-11 + 2i$).

3.2.2 Знайти область визначення функції дійсного аргументу

$$a) y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3}} + \frac{x+1}{x^2 - 4}$$

(Відповідь: $D(y): x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 2) \cup (2; \infty)$).

$$б) y = \ln(25 - x^2) + \arcsin \frac{x-1}{5}. \text{ (Відповідь: } D(y): x \in [-4; 5) \text{).}$$

$$в) y = \sqrt{\frac{5-x}{x+4}} + \arccos \frac{x-3}{6}. \text{ (Відповідь: } D(y): x \in (-4; 3] \text{).}$$

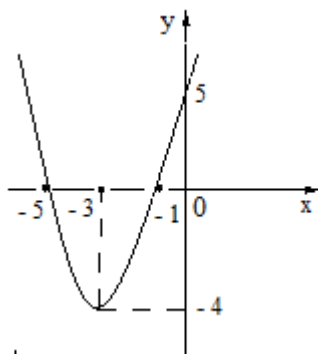
3.2.3 Побудувати графіки парабол та знайти рівняння лівої і правої віток у вигляді $x = \varphi(y)$:

$$a) y = x^2 + 6x + 5$$

Відповідь:

$$x = -3 - \sqrt{y+4} \text{ — ліва вітка}$$

$$x = -3 + \sqrt{y+4} \text{ — права вітка}$$

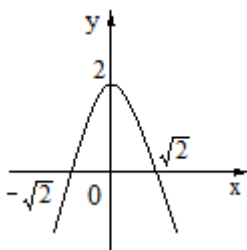


$$б) y = -x^2 + 2$$

Відповідь:

$$x = -\sqrt{2-y} \text{ — ліва вітка}$$

$$x = \sqrt{2-y} \text{ — права вітка}$$

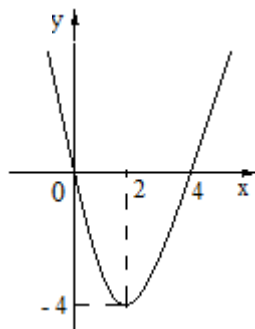


$$в) y = x^2 - 4x$$

Відповідь:

$$y = 2 - \sqrt{x-2} \text{ — ліва вітка}$$

$$y = 2 + \sqrt{x-2} \text{ — права вітка}$$



3.2.4 Побудувати графік рівняння кола. В п. а) знайти рівняння лівої та правої частин кола і верхньої та нижньої частин кола:

а) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$, центр кола $O_1(2; -3)$

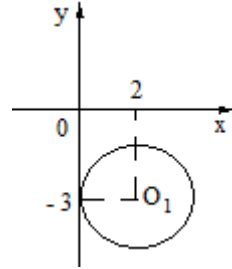
Відповідь:

$$x = 2 - \sqrt{-y^2 - 6y - 5} \quad \text{— ліва частина кола}$$

$$x = 2 + \sqrt{-y^2 - 6y - 5} \quad \text{— права частина кола}$$

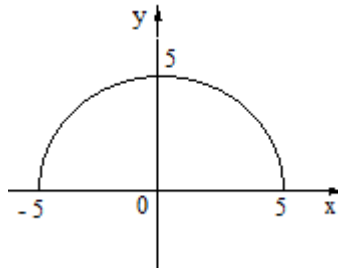
$$y = -3 + \sqrt{4x - x^2} \quad \text{— верхня частина кола}$$

$$y = -3 - \sqrt{4x - x^2} \quad \text{— нижня частина кола}$$



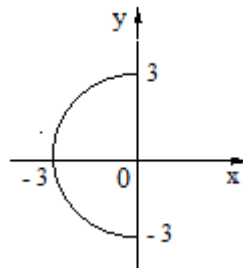
б) $y = \sqrt{25 - x^2}$

Відповідь:



в) $x = -\sqrt{9 - y^2}$

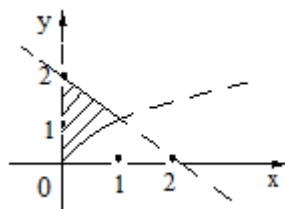
Відповідь:



3.2.5 Побудувати область, обмежену лініями, рівняння яких задані:

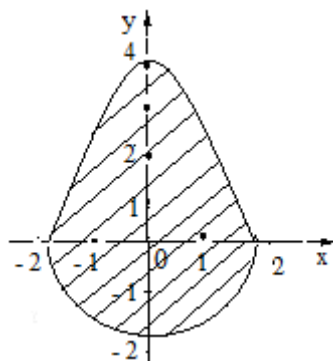
а) $x = y^2$, $x + y = 2$, $x = 0$

Відповідь:



б) $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $y = 4 - x^2$

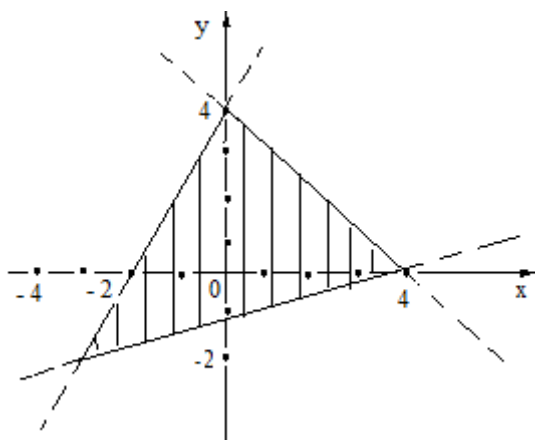
Відповідь:



3.2.6 Побудувати на площині область розв'язків системи лінійних

нерівностей:
$$\begin{cases} y - 2x \leq 4 \\ x + y \leq 4 \\ 2x - 7y \leq 8 \end{cases}$$

Відповідь:



3.3 Індивідуальні завдання

3.3.1 Для заданих комплексних чисел z_1 , z_2 знайти: а) $z_1 + z_2$, б)

$z_1 - z_2$, в) $z_1 \cdot z_2$, г) $\frac{z_1}{z_2}$, д) $(z_2)^3$.

Варіант	z_1	z_2
1.	$3 - 2i$	$2 + i$
2.	$-2 - 3i$	$1 + 3i$
3.	$-2 + 5i$	$1 - 4i$
4.	$3 - 5i$	$1 - 3i$
5.	$2 - 3i$	$4 + 3i$
6.	$1 - 2i$	$3 - 4i$
7.	$7 - i$	$3 + 2i$
8.	$-3 + 4i$	$1 - 2i$
9.	$5 + 2i$	$2 + 3i$
10.	$3 + i$	$3 - 2i$
11.	$-3 + 2i$	$2 - 3i$
12.	$2 + 3i$	$1 + 4i$
13.	$-5 + 2i$	$4 + i$
14.	$5 - 3i$	$3 - i$
15.	$-1 + 3i$	$5 - 2i$
16.	$-4 - 3i$	$2 + 5i$
17.	$4 + 5i$	$5 - i$
18.	$4 - i$	$5 + 3i$
19.	$5 + i$	$3 + 4i$
20.	$-6 + i$	$5 + 2i$

3.3.2 Знайти область визначення функції

1.	$y = \ln\left(\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}\right) + \frac{x}{ x - 3}$	2.	$y = \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}} + \frac{x + 1}{ x - 2}$
3.	$y = \ln\left(\frac{-x^2 + x + 6}{x^2 - 2x + 1}\right) + \frac{x + 3}{ x - 2}$	4.	$y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x + 2}} - 3 + \frac{x + 2}{ x - 7}$

5.	$y = \ln\left(\frac{x^2 - 3x}{x + 3} - 2\right) + \frac{x + 3}{ x - 2}$	6.	$y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}} + \frac{x - 5}{ x - 3}$
7.	$y = \ln\left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}\right) + \frac{x + 3}{ x - 1}$	8.	$y = \sqrt{\frac{6 - x^2 - x}{x^2 + 2x + 1}} + \frac{x + 1}{ x - 2}$
9.	$y = \ln\left(3 - \frac{x^2 - 2x}{x + 2}\right) + \frac{x + 2}{ x - 7}$	10.	$y = \sqrt{2 - \frac{x^2 - 3x}{x + 3}} + \frac{x - 3}{ x - 8}$
11.	$y = \ln\left(\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}\right) + \frac{x}{ x - 2}$	12.	$y = \sqrt{\frac{6x - x^2}{x^2 - 36}} + \frac{x - 6}{ x - 5}$
13.	$y = \ln\left(\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16}\right) + \frac{x}{ x - 3}$	14.	$y = \sqrt{\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x + 1}} + \frac{x + 1}{ x - 4}$
15.	$y = \ln\left(\frac{x^2 - 36}{x^2 - 6x}\right) + \frac{x - 6}{ x - 5}$	16.	$y = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}} + \frac{x - 1}{ x - 3}$
17.	$y = \ln\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{5 - x^2 - 4x}\right) + \frac{x - 1}{ x - 4}$	18.	$y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 4}{-x^2 - 6x - 5}} + \frac{x + 1}{ x - 3}$
19.	$y = \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 6x + 5}\right) + \frac{x + 5}{ x - 2}$	20.	$y = \sqrt{\frac{x^2 - 49}{x^2 + 7x}} + \frac{x}{ x - 5}$

3.3.3 Побудувати графіки парабол та знайти рівняння лівої і правої віток у вигляді $x = \varphi(y)$

	а)	б)	в)
1.	$y = x^2 - 4x + 7$	$y = x^2 + 3$	$y = x^2 - 6x$
2.	$y = x^2 + 5x + 3$	$y = x^2 - 6$	$y = -x^2 + 2x$
3.	$y = 2 - 3x - x^2$	$y = x^2 + 1$	$y = x^2 - 4x$
4.	$y = x^2 + 6x - 1$	$y = x^2 + 4$	$y = x^2 + 7x$
5.	$y = -6 + 2x - x^2$	$y = x^2 - 8$	$y = 8x - x^2$
6.	$y = x^2 + 9x + 3$	$y = x^2 + 5$	$y = x^2 - 2x$

	а)	б)	в)
7.	$y = x^2 + 6x + 9$	$y = 4 - x^2$	$y = x^2 + 5x$
8.	$y = 3 - 2x - x^2$	$y = x^2 - 9$	$y = x - x^2$
9.	$y = x^2 + 11x - 6$	$y = 7 - x^2$	$y = x^2 + 10x$
10.	$y = x^2 - 7x - 10$	$y = x^2 + 11$	$y = 3x - x^2$
11.	$y = 9 - 4x - x^2$	$y = -x^2 - 6$	$y = x^2 - x$
12.	$y = 2x^2 - 3x + 4$	$y = x^2 + 2$	$y = 5x - x^2$
13.	$y = 4 - 8x - x^2$	$y = 10 - x^2$	$y = x^2 + 6x$
14.	$y = 3x^2 - x + 9$	$y = x^2 - 3$	$y = 4x - x^2$
15.	$y = x^2 - 4x + 4$	$y = 2 - 4x^2$	$y = x - 3x^2$
16.	$y = x^2 - 9x - 8$	$y = x^2 + 6$	$y = x^2 - 3x$
17.	$y = 7 - 3x - x^2$	$y = x^2 + 6$	$y = x^2 + 12x$
18.	$y = 2 - 3x - 4x^2$	$y = x^2 - 5$	$y = 2x - 2x^2$
19.	$y = x^2 + 12x + 8$	$y = 3 - x^2$	$y = x^2 - 10x$
20.	$y = 4 + 3x - x^2$	$y = x^2 - 12$	$y = x^2 + 4x$

3.3.4 Побудувати графіки рівняння кола. В п. а) знайти рівняння лівої і правої частин кола та верхньої і нижньої частин кола

	а)	б)	в)
1.	$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$	$y = \sqrt{9 - x^2}$	$x = -\sqrt{5 - y^2}$
2.	$(x+7)^2 + (y-2)^2 = 3$	$y = -\sqrt{5 - x^2}$	$x = \sqrt{4 - y^2}$
3.	$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$	$y = \sqrt{4 - x^2}$	$x = -\sqrt{16 - y^2}$
4.	$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	$x = \sqrt{3 - y^2}$
5.	$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$	$y = \sqrt{6 - x^2}$	$x = -\sqrt{25 - y^2}$
6.	$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$	$y = -\sqrt{3 - x^2}$	$x = \sqrt{7 - y^2}$

	a)	б)	в)
7.	$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 1$	$y = \sqrt{2-x^2}$	$x = -\sqrt{9-y^2}$
8.	$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 2$	$y = -\sqrt{16-x^2}$	$x = \sqrt{1-y^2}$
9.	$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 6$	$y = \sqrt{6-x^2}$	$x = -\sqrt{36-y^2}$
10.	$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 7$	$y = -\sqrt{25-x^2}$	$x = \sqrt{2-y^2}$
11.	$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$	$y = \sqrt{7-x^2}$	$x = -\sqrt{6-y^2}$
12.	$(x+5)^2 + (y-5)^2 = 9$	$y = -\sqrt{10-x^2}$	$x = \sqrt{8-y^2}$
13.	$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 3$	$y = \sqrt{16-x^2}$	$x = -\sqrt{49-y^2}$
14.	$(x+6)^2 + (y+5)^2 = 16$	$y = -\sqrt{8-x^2}$	$x = \sqrt{7-y^2}$
15.	$(x+1)^2 + (y-6)^2 = 1$	$y = \sqrt{12-x^2}$	$x = -\sqrt{11-y^2}$
16.	$(x-1)^2 + (y-6)^2 = 1$	$y = -\sqrt{13-x^2}$	$x = \sqrt{16-y^2}$
17.	$(x+5)^2 + (y+1)^2 = 4$	$y = \sqrt{16-x^2}$	$x = -\sqrt{12-y^2}$
18.	$(x-7)^2 + (y-7)^2 = 2$	$y = -\sqrt{2-x^2}$	$x = \sqrt{25-y^2}$
19.	$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$	$y = \sqrt{7-x^2}$	$x = -\sqrt{8-y^2}$
20.	$(x+4)^2 + (y+1)^2 = 16$	$y = -\sqrt{8-x^2}$	$x = \sqrt{9-y^2}$

3.3.5 Побудувати область, обмежену лініями, рівняння яких задані

1.	$y^2 = 4x, \quad x + y = 3, \quad y \geq 0$	2.	$y = 6x^2, \quad x + y = 2, \quad x \geq 0$
3.	$y = x^2 + 1, \quad x + y = 3$	4.	$y = \cos x, \quad y \leq x + 1, \quad y \geq 0$
5.	$y = x^2 + 2, \quad x \geq 0, \quad x = 2, \quad y = x$	6.	$x = \cos y, \quad x \leq y + 1, \quad x \geq 0$
7.	$y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4$	8.	$xy = 4, \quad x = 2, \quad y = 2x$
9.	$2y = \sqrt{x}, \quad x + y = 5, \quad x \geq 0$	10.	$y = x^2, \quad 2x + y = 3$

11.	$y = 2^x, y = 2x - x^2, x = 2, x = 0$	12.	$xy = 1, y = x, x = 2$
13.	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$	14.	$y = \frac{2}{x}, x = 2y, y = 2$
15.	$xy = 1, x^2 = y, y = 2, x = 0$	16.	$y = x^2 - 1, x + y = 1$
17.	$x = 2y, y = 2x, xy = 2 (x \geq 0)$	18.	$y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1$
19.	$y = 2x^2, 4x + y = 6$	20.	$y = x^2, x - y + 2 = 0$

3.3.6 Побудувати на площині область розв'язків системи лінійних нерівностей

1.	$\begin{cases} 7x + 10y \leq 70 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ x \geq 0 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x - y \geq 5 \\ y \leq 0 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 3x + 2y \geq -6 \\ x \leq 0 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 3x - 2y \geq -12 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ y \leq 0 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 3x + 2y \leq 12 \\ 2x - 3y \geq -6 \\ y \geq 0 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x - y \leq 3 \\ 3x + 4y \geq -24 \\ x \leq 0 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 2x - y \geq -6 \\ x + 2y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x + 2y \geq -4 \\ x - y \leq 5 \\ y \leq 0 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ 3x - 4y \geq -24 \\ x \leq 0 \end{cases}$

11.	$\begin{cases} 3x + 5y \leq 5 \\ x - y \geq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x - y \geq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 3x + 2y \geq -6 \\ y \geq 0 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 3x - 2y \leq -12 \\ 2x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 2x - 3y \leq -6 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 3x + 4y \geq -24 \\ x - y \geq 3 \\ y \leq 0 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ 2x - y \geq -6 \\ x \leq 0 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} x - 2y \leq 6 \\ x + y \geq 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} x - y \leq 5 \\ x + 2y \leq -4 \\ x \geq 0 \end{cases}$	20.	$\begin{cases} 3x - 4y \geq -24 \\ x + 2y \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$

4. ЗАНЯТТЯ ЧЕТВЕРТЕ

4.1 Відомості з теорії

Формули перетворення для тригонометричних функцій

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1;$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}, \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta};$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Для обернених тригонометричних функцій справедливо:

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arccotg} a = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin b = \arccos \sqrt{1 - b^2} = \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}}$$

$$\arccos b = \arcsin \sqrt{1 - b^2} = \operatorname{arccotg} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}}$$

$$\operatorname{arctg} b = \operatorname{arccotg} \frac{1}{b} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$$

Наприклад, спростити вираз:

$$\text{a) } \frac{1 - \sin^2 2\alpha}{1 - \cos^2 2\alpha} + \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} + 1 = \operatorname{ctg}^2 2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 2\alpha};$$

$$\text{б) } \frac{2 \sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin 3\alpha} = \frac{2 \sin \frac{3\alpha}{2}}{2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{3\alpha}{2}};$$

$$\text{в) } \cos^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1;$$

$$\text{г) } \frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{-2 \sin 3\alpha \cdot \sin(-\alpha)}{2 \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Формули зведення

β	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \mp \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \mp \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Наприклад, спростити вираз:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\alpha - 2\pi)} - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} - \sin \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = -\sin \alpha - \\ & -\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\sin \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = -\sin \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Зауваження. Вважаючи, що $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ формули можна подати у

вигляді правила:

1) якщо α відкладається від горизонтального діаметра $(\pi \pm \alpha, 2\pi - \alpha)$, то назва функції зберігається; якщо α відкладається від вертикального діаметра $(\pi/2 \pm \alpha, 3\pi/2 \pm \alpha)$, то назва синус,

косинус, тангенс, котангенс змінюються відповідно на косинус, синус, котангенс, тангенс;

2) з'ясуємо в якій чверті знаходиться кут $(\pi n/2 \pm \alpha)$, потім визначаємо знак заданої функції цього кута і цей знак ставимо перед отриманим результатом.

Наприклад, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$. Так як α відкладається від вертикального діаметра, то замінюємо синус на косинус. Знаходимо знак заданої функції $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ (дивимось на кругову діаграму знаків для синуса). Це третя чверть, в якій знак мінус. В результаті матимемо $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$.

Наприклад, обчислити:

а) $\sin 64^\circ \cdot \cos 34^\circ - \cos 64^\circ \cdot \sin 34^\circ = \sin(64^\circ - 34^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$

б) $10 \cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 1/2$.

$$10 \cos \alpha = 10 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} = 10 \cdot \frac{1 - 1/4}{1 + 1/4} = 10 \cdot \frac{3/4}{5/4} = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$$

в) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,8$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha = 2 \sqrt{1 - (-0,8)^2} \cdot (-0,8) = \\ &= 2 \sqrt{1 - (-0,8)^2} \cdot (-0,8) = 2 \sqrt{0,36} \cdot (-0,8) = 2 \cdot 0,6 \cdot (-0,8) = -0,96; \end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2(-0,8)^2 - 1 = 1,28 - 1 = 0,28;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-0,96}{0,28} = -\frac{24}{7}.$$

Елементарні тригонометричні рівняння

$\sin x = a, \quad a \leq 1$	$\cos x = a, \quad a \leq 1$
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\arccos a \in [0; \pi]$
$\arcsin(-a) = -\arcsin a$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$
$a = 0 \Rightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$a = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$a = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$a = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$a = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$a = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a, \quad a \in \mathbb{R}$	$\operatorname{ctg} x = a, \quad a \in \mathbb{R}$
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$
$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$	$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$
$a = 0 \Rightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$a = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$a = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$a = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
	$a = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Наприклад, розв'язати рівняння:

а) $2 \sin \frac{x}{2} = -1$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi n =$$

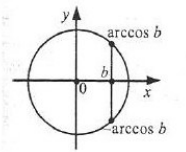
$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$. $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. Перевіримо, які значення x належать заданому інтервалу. Надаємо n значення $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Маємо $x = -\frac{\pi}{3}, n=0$ і $x = \frac{\pi}{3} \pm 2\pi, n=\pm 1$, які не належать інтервалу. Умові завдання задовольняє одне значення $x = -\frac{\pi}{3}$.

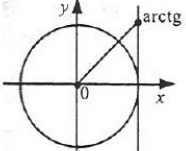
$$\text{б) } \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

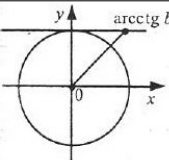
$$x - \frac{\pi}{3} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \quad x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Елементарні тригонометричні нерівності

		$a < -1$	$-1 \leq a \leq 1$	$a > 1$
	$\sin t > a$	$t \in R$	$\arcsin a + 2\pi n \leq t \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$	не має розв'язків
	$\sin t < a$	не має розв'язків	$-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq t \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$	$t \in R$

		$b < -1$	$-1 \leq b \leq 1$	$b > 1$
	$\cos t > b$	$t \in \mathbb{R}$	$-\arccos b + 2\pi n \leq t \leq \arccos b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\cos t < b$			$\arccos b + 2\pi n \leq t \leq -\arccos b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$t \in \mathbb{R}$

		$a < -1$	$-1 \leq a \leq 1$	$a > 1$
	$\tan t > a$	$t \in \mathbb{R}$	$\arctg a + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\tan t < a$			$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	

	$\operatorname{ctg} t > b$	$\pi n < t < \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
	$\operatorname{ctg} t < b$	$\operatorname{arctg} b + \pi n < t < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Наприклад, розв'язати нерівність: $\cos \frac{x}{3} < -\frac{1}{2}$.

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < \frac{x}{3} < \pi + \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi n < \frac{x}{3} < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$2\pi + 6\pi n < x < 5\pi + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4.2 Аудиторні завдання

4.2.1 Спростити вираз:

а) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ (Відповідь: $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$);

б) $\frac{\sin \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ (Відповідь: $\sin \frac{\alpha}{2}$);

в) $8 \cos^2 2\alpha - 4 \cos 4\alpha + 7$ (Відповідь: 11);

г) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha}$ (Відповідь: $\operatorname{tg} 2\alpha$).

4.2.2 Обчислити:

а) $\cos 225^\circ$ (Відповідь: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$); б) $\sin \frac{5\pi}{3}$ (Відповідь: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$);

в) $\operatorname{tg} \left(-\frac{20\pi}{3} \right)$ (Відповідь: $\sqrt{3}$); г) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$ (Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$);

д) $\sin(-30^\circ) - 2 \operatorname{tg}(-45^\circ) - \cos(-60^\circ)$ (Відповідь: 1);

е) $\cos 64^\circ \cdot \cos 34^\circ + \sin 64^\circ \cdot \sin 34^\circ$ (Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}$);

є) $82 \sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1,25$ (Відповідь: 80);

ж) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)
(Відповідь: $-0,96; -0,28; \frac{24}{7}$).

4.2.3 Перетворити добуток у суму:

а) $\cos 7\alpha \cdot \sin 4\alpha$ (Відповідь: $\frac{1}{2}(\sin 11\alpha - \sin 3\alpha)$);

б) $\cos 25^\circ \cdot \cos 50^\circ$ (Відповідь: $\frac{1}{2}(\cos 75^\circ + \cos 25^\circ)$).

4.2.4 Розв'язати рівняння:

а) $2 \cos \frac{x}{2} = -\sqrt{2}$, якщо $x \in (0; 360^\circ)$ (Відповідь: 270°);

б) $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$ (Відповідь: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$);

в) $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$ (Відповідь: $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$).

4.2.5 Розв'язати нерівність:

а) $\sin x \leq \frac{1}{2}$ (Відповідь: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right]$, $n \in \mathbb{Z}$);

б) $\cos \frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Відповідь: $\left(-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n; \frac{3\pi}{2} + 4\pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$);

в) $\operatorname{tg} 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} \right]$, $n \in \mathbb{Z}$);

г) $\operatorname{ctg} 2x \geq 1$ (Відповідь: $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \right]$, $n \in \mathbb{Z}$).

4.3 Індивідуальні завдання

4.3.1 Спростити вираз

1.	a)	$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha$	б)	$\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha}$
2.	a)	$4 \cos^2 \alpha - 2 \cos 2\alpha$	б)	$\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}$
3.	a)	$2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$	б)	$\frac{\cos \alpha + \cos 5\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha}$
4.	a)	$2 \cos^2 2\alpha - \cos 4\alpha$	б)	$\frac{\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}$
5.	a)	$8 \sin^2 3\alpha - 4 \cos 6\alpha$	б)	$\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$
6.	a)	$\cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha$	б)	$\frac{\sin \alpha - \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha}$
7.	a)	$2 \cos 4\alpha - 4 \sin^2 2\alpha$	б)	$\frac{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\sin 3\alpha + \sin \alpha}$
8.	a)	$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha$	б)	$\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha}$
9.	a)	$\cos 4\alpha + 2 \sin^2 2\alpha$	б)	$\frac{\sin 7\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}$
10.	a)	$2 \sin^2 \frac{3}{2}\alpha + \cos 3\alpha$	б)	$\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}$
11.	a)	$2 \sin^2 \frac{5}{2}\alpha + \cos 5\alpha$	б)	$\frac{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 4\alpha}$
12.	a)	$2 \cos^2 4\alpha - \cos 8\alpha$	б)	$\frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}$
13.	a)	$4 \sin^2 3\alpha + 2 \cos 6\alpha$	б)	$\frac{\cos 5\alpha + \cos \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}$
14.	a)	$2 \cos^2 5\alpha - \cos 10\alpha$	б)	$\frac{\cos 7\alpha + \cos \alpha}{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha}$
15.	a)	$10 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 5 \cos \alpha$	б)	$\frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 3\alpha - \cos \alpha}$

16.	a)	$\cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4}$	б)	$\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}$
17.	a)	$\cos 4\alpha + 2 \sin^2 2\alpha$	б)	$\frac{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}$
18.	a)	$6 \sin^2 \frac{3}{2} \alpha + 3 \cos 3\alpha$	б)	$\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 5\alpha + \sin \alpha}$
19.	a)	$2 \sin^2 5\alpha + \cos 10\alpha$	б)	$\frac{\cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha}$
20.	a)	$\cos 7\alpha + 2 \sin^2 \frac{7}{2} \alpha$	б)	$\frac{\sin 7\alpha + \sin \alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha}$

4.3.2 Обчислити, застосовуючи період та формули зведення

1.	a)	$\sin(-585^\circ)$	б)	$\operatorname{tg} \frac{20\pi}{3}$	2.	a)	$\cos(-600^\circ)$	б)	$\operatorname{tg} \frac{23\pi}{4}$
3.	a)	$\sin(-570^\circ)$	б)	$\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$	4.	a)	$\cos(-495^\circ)$	б)	$\operatorname{tg} \frac{23\pi}{3}$
5.	a)	$\sin(-510^\circ)$	б)	$\operatorname{tg} \frac{27\pi}{4}$	6.	a)	$\cos(-480^\circ)$	б)	$\operatorname{tg} \frac{17\pi}{6}$
7.	a)	$\sin 1215^\circ$	б)	$\operatorname{tg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$	8.	a)	$\cos 1200^\circ$	б)	$\operatorname{tg}\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$
9.	a)	$\sin(-1230^\circ)$	б)	$\operatorname{tg} \frac{29\pi}{6}$	10.	a)	$\cos(-855^\circ)$	б)	$\operatorname{tg} \frac{39\pi}{4}$
11.	a)	$\sin(-600^\circ)$	б)	$\operatorname{ctg} \frac{20\pi}{3}$	12.	a)	$\cos(-585^\circ)$	б)	$\operatorname{ctg} \frac{23\pi}{4}$
13.	a)	$\sin(-495^\circ)$	б)	$\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$	14.	a)	$\cos(-570^\circ)$	б)	$\operatorname{ctg} \frac{23\pi}{3}$
15.	a)	$\sin(-480^\circ)$	б)	$\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$	16.	a)	$\cos(-510^\circ)$	б)	$\operatorname{ctg} \frac{17\pi}{6}$
17.	a)	$\sin 1200^\circ$	б)	$\operatorname{ctg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$	18.	a)	$\cos 1215^\circ$	б)	$\operatorname{ctg}\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$
19.	a)	$\sin(-855^\circ)$	б)	$\operatorname{ctg} \frac{29\pi}{6}$	20.	a)	$\cos(-1230^\circ)$	б)	$\operatorname{ctg} \frac{39\pi}{4}$

4.3.3 Обчислити

1.	$\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$	2.	$\cos 3\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{3}$
3.	$\sin 4\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$	4.	$\cos 4\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 2\alpha = 8$
5.	$\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5$	6.	$\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5$
7.	$\sin 5\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{5}{2}\alpha = 2$	8.	$\cos 5\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{5}{2}\alpha = 2$
9.	$\sin 3\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{4}$	10.	$\cos 3\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\alpha = 5$
11.	$\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$	12.	$\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 4$
13.	$\sin 3\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{6}$	14.	$\cos 3\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{6}$
15.	$\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{7}$	16.	$\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$
17.	$\sin 4\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 2\alpha = 5$	18.	$\cos 4\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 2\alpha = 4$
19.	$\sin 6\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 3\alpha = 0,5$	20.	$\cos 6\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 3\alpha = 0,2$

4.3.4 Обчислити $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо

1.	$\sin \alpha = -0,8, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$	2.	$\cos \alpha = \frac{5}{13}, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$
3.	$\sin \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$	4.	$\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$
5.	$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$	6.	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$
7.	$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$	8.	$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$
9.	$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$	10.	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$
11.	$\sin \alpha = 0,6, \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$	12.	$\cos \alpha = -\frac{12}{13}, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$

13.	$\sin \alpha = -\frac{5}{13}, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$	14.	$\cos \alpha = 0,8, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$
15.	$\sin \alpha = -0,6, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$	16.	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$
17.	$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$	18.	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$
19.	$\sin \alpha = \frac{12}{13}, \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$	20.	$\cos \alpha = -\frac{3}{4}, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$

4.3.5. Перетворити добуток у суму

1.	$\sin 3\alpha \sin 5\alpha$	2.	$\sin 3\alpha \cos 6\alpha$
3.	$\cos 4\alpha \cos 5\alpha$	4.	$\sin \alpha \cos 2\alpha$
5.	$\sin 2\alpha \cos 4\alpha$	6.	$\cos 3\alpha \cos 7\alpha$
7.	$\sin 4\alpha \sin 6\alpha$	8.	$\sin 5\alpha \cos 4\alpha$
9.	$\cos 3\alpha \cos 5\alpha$	10.	$\sin 4\alpha \sin 8\alpha$
11.	$\sin \alpha \cos 3\alpha$	12.	$\cos \alpha \cos 5\alpha$
13.	$\sin 7\alpha \sin 3\alpha$	14.	$\sin 6\alpha \cos 4\alpha$
15.	$\cos 2\alpha \cos 8\alpha$	16.	$\sin 5\alpha \sin 6\alpha$
17.	$\sin 7\alpha \cos 3\alpha$	18.	$\cos 8\alpha \cos 3\alpha$
19.	$\sin 2\alpha \sin 6\alpha$	20.	$\sin 9\alpha \cos 3\alpha$

4.3.6 Розв'язати рівняння

1.	а)	$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1, x \in (-\pi; 0)$		
	б)	$\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 3x = -1$
2.	а)	$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, x \in (-\pi; 0)$		
	б)	$\cos 2x = -\frac{1}{2}$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \sqrt{3}$

3..	a)	$\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, x \in (-\pi; 0)$		
	б)	$\cos 3x = -1$	в)	$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
4.	a)	$2 \sin(x + 20^\circ) = -1, x - \text{найменший додатний}$		
	б)	$\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$
5.	a)	$2 \sin(x + 25^\circ) = -\sqrt{2}, x - \text{найбільший від'ємний}$		
	б)	$\cos 4x = -\frac{1}{2}$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$
6.	a)	$2 \sin(x - 35^\circ) = -\sqrt{3}, x \in (-90^\circ; 0^\circ)$		
	б)	$\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 4x = -1$
7.	a)	$2 \sin(40^\circ - x) = 1, x - \text{найменший додатний}$		
	б)	$\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$
8.	a)	$2 \sin(50^\circ - x) = \sqrt{3}, x - \text{найбільший від'ємний}$		
	б)	$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 2x = 1$
9.	a)	$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$		
	б)	$\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
10.	a)	$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = -1, x \in (-\pi; 0)$		
	б)	$\cos \frac{x}{3} = -1$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{4} = -1$
11.	a)	$2 \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 1, x - \text{найбільший від'ємний}$		
	б)	$\cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 5x = -\sqrt{3}$

12.	a)	$2 \sin\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = \sqrt{3}, x \in [-\pi; 0)$		
	б)	$\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
13.	a)	$2 \sin(x + 15^\circ) = -\sqrt{2}, x \in (-90^\circ; 0^\circ)$		
	б)	$\cos \frac{x}{5} = -\frac{1}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 7x = 1$
14.	a)	$2 \sin(x - 15^\circ) = -\sqrt{3}, x - \text{найменший додатний}$		
	б)	$\cos 6x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{4} = -\sqrt{3}$
15.	a)	$2 \sin(15^\circ - x) = 1, x \in (-90^\circ; 0^\circ)$		
	б)	$\cos 5x = -\frac{1}{2}$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
16.	a)	$2 \sin(x - 35^\circ) = -1, x \in (0^\circ; 90^\circ)$		
	б)	$\cos \frac{x}{6} = -1$	в)	$\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$
17.	a)	$2 \sin(x - 55^\circ) = -\sqrt{2}, x \in (0^\circ; 90^\circ)$		
	б)	$\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
18.	a)	$2 \sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \sqrt{3}, x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$		
	б)	$\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 9x = -1$
19.	a)	$2 \sin(10^\circ - x) = 1, x \in (180^\circ; 270^\circ)$		
	б)	$\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	в)	$\operatorname{tg} \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
20.	a)	$\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = -1, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$		
	б)	$\cos \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$	в)	$\operatorname{tg} 6x = -\sqrt{3}$

4.3.7 Розв'язати нерівності

1.	a)	$\sin 2x \geq \frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{3} \geq 1$
2.	a)	$\cos \frac{x}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 2x \geq -1$
3.	a)	$\sin \frac{x}{3} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 3x \geq \sqrt{3}$
4.	a)	$\cos 2x \geq -\frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq 1$
5.	a)	$\sin 3x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 4x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$
6.	a)	$\cos \frac{x}{3} \geq \frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 2x \leq -\sqrt{3}$
7.	a)	$\sin \frac{x}{2} \leq -\frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 3x \geq 1$
8.	a)	$\cos 4x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{3} \leq -1$
9.	a)	$\sin \frac{x}{4} \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 5x \geq \sqrt{3}$
10.	a)	$\cos 5x \leq \frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$
11.	a)	$\sin 5x \geq -\frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{4} \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$
12.	a)	$\cos \frac{x}{4} \geq \frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 2x \leq 1$
13.	a)	$\sin 6x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{3} \geq -\sqrt{3}$
14.	a)	$\cos \frac{x}{3} \leq -\frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 3x \leq \sqrt{3}$
15.	a)	$\sin 2x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

16.	a)	$\cos \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 3x \leq -1$
17.	a)	$\sin \frac{x}{5} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 4x \leq -\sqrt{3}$
18.	a)	$\cos 6x \leq -\frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{3} \geq -1$
19.	a)	$\sin 4x \geq -\frac{1}{2}$	б)	$\operatorname{tg} \frac{x}{6} \leq \sqrt{3}$
20.	a)	$\cos \frac{x}{4} \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$	б)	$\operatorname{tg} 5x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. ЗАНЯТТЯ П'ЯТЕ

5.1 Відомості з теорії

Показникова функція $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Властивості.

$$E(y): y \in (0; +\infty), a^0 = 1 \ (a \neq 0)$$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$a^x \cdot a^b = a^{x+b}$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$	$\frac{a^x}{a^b} = a^{x-b} = a^x \cdot a^{-b}$
$(a^x)^b = a^{b \cdot x}$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Елементарні показникові рівняння

$$1) a^{f(x)} = b \ (a > 0, b > 0) \Rightarrow f(x) = \log_a b.$$

$$2) a^{f(x)} = a^{g(x)} \ (a > 0, b > 0) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Наприклад, розв'язати рівняння:

а) $5^x = 3 \Rightarrow x = \log_5 3$;

б) $5^x \cdot 3^{x-2} = \frac{225}{9} \Rightarrow 5^x \cdot \frac{3^x}{3^2} = \frac{225}{9} \Rightarrow 5^x \cdot 3^x = 225 \Rightarrow 15^x = 15^2 \Rightarrow x = 2$;

в) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-25} = 1 \Rightarrow x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25, x = \pm 5$;

г) $(3^{x+2})^{x-3} = 9^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 3^{(x+2)(x-3)} = 3^{2x} \cdot 3^{-2} \Rightarrow 3^{x^2-x-6} = 3^{2x-2},$

$$x^2 - x - 6 = 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4;$$

е) $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$.

Логарифмічна функція $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$). **Властивості.**

$$D(y): x > 0$$

$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$	$\log_a a^n = n$
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy,$ $x > 0, y > 0$	$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$ $x > 0, y > 0$
$k \log_a x = \log_a x^k$	$\frac{1}{k} \log_a x = \log_a \sqrt[k]{x}$
$\log_e x = \ln x$	$\log_{10} x = \lg x$
$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$	$a^{\log_a x} = x$

Наприклад, обчислити:

а) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$;

б) $4^{\log_4 2 + 1} = 4^{\log_4 2} \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$.

Наприклад, користуючись властивостями логарифмів, знайти натуральний логарифм заданого виразу, якщо $a > 0, b > 1, c > 0, d > 0$

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{(b-1)^3}}{\sqrt[3]{c^5} \cdot d^6} &\Rightarrow \ln \frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{(b-1)^3}}{\sqrt[3]{c^5} \cdot d^6} = \ln \left(a^2 \cdot (b-1)^{\frac{3}{4}} \right) - \ln \left(c^{\frac{5}{3}} \cdot d^6 \right) = \\ &= \ln a^2 + \ln (b-1)^{\frac{3}{4}} - \left(\ln c^{\frac{5}{3}} + \ln d^6 \right) = 2 \ln a + \frac{3}{4} \ln (b-1) - \frac{5}{3} \ln c - 6 \ln d. \end{aligned}$$

Елементарні логарифмічні рівняння

- 1) $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b \quad (a > 0, a \neq 1).$
- 2) $\log_a x = 0 \Rightarrow x = 1, \quad \log_a x = 1 \Rightarrow x = a \quad (a > 0, a \neq 1).$
- 3) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0, g(x) > 0 \end{cases}, \quad (a > 0, a \neq 1).$

Наприклад, розв'язати рівняння:

а) $\ln(5x-7)=3 \Rightarrow 5x-7=e^3, \quad x=\frac{e^3+7}{5}.$

б) $\ln(2x+3)=1 \Rightarrow 2x+3=e, \quad x=\frac{e-3}{2}.$

в) $\log_2 x = -\log_2 3 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 3^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$

г) $\ln x = 2 \ln 5 \Rightarrow \ln x = \ln 5^2 \Rightarrow x = 25.$

Таблиця похідних для функцій $u = u(x)$.

$(C)' = 0$	$(x)' = 1$
$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \quad a - const$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$

$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(ctg u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$(arcctg u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Правила диференціювання.

Маємо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $C - const$.

$$(C \cdot u)' = C \cdot (u)'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{(v)^2}$$

Наприклад, знайти похідну заданої функції:

$$a) y = x^4 + \frac{x^5}{2} - \frac{3}{x^3} + 2 \sqrt[3]{x^2}$$

$$y' = 4x^3 + \frac{1}{2} \cdot 5x^4 - 3(x^{-3})' + 2 \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 4x^3 + \frac{5}{2} \cdot x^4 - 3 \cdot (-3)x^{-4} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= 4x^3 + \frac{5}{2} \cdot x^4 + 9 \cdot x^{-4} + \frac{4}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

$$б) y = (x^2 - 1) \cos 3x$$

$$y' = (x^2 - 1)' \cdot \cos 3x + (x^2 - 1) \cdot (\cos 3x)' = 2x \cdot \cos 3x + (x^2 - 1) \cdot (-3 \sin 3x) =$$

$$= 2x \cdot \cos 3x - 3(x^2 - 1) \cdot \sin 3x.$$

$$\text{в) } y = \frac{5 + x^4}{x^2 + 3x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(5 + x^4)' \cdot (x^2 + 3x) - (5 + x^4) \cdot (x^2 + 3x)'}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{4x^3 \cdot (x^2 + 3x) - (5 + x^4) \cdot (2x + 3)}{(x^2 + 3x)^2} = \\ &= \frac{4x^5 + 12x^4 - 10x - 15 - 2x^5 - 3x^4}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{2x^5 + 9x^4 - 10x - 15}{(x^2 + 3x)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{г) } y = (2x^3 - 1)^4 + \sin^3 2x$$

$$y' = 4(2x^3 - 1)^3 \cdot 6x^2 + 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 24x^2 (2x^3 - 1)^3 + 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x.$$

5.2 Аудиторні завдання

5.2.1 Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } (2^{x-3})^{x+4} = (0,5)^x \cdot 4^{x-4} \quad (\text{Відповідь: } x = \pm 2);$$

$$\text{б) } 2^{x+3} \cdot 3^x = 288 \quad (\text{Відповідь: } x = 2);$$

$$\text{в) } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{x^2-9} = 1 \quad (\text{Відповідь: } x = \pm 3);$$

$$\text{г) } \left(\frac{2}{3} \right)^x \cdot \left(\frac{9}{8} \right)^x = \frac{27}{64} \quad (\text{Відповідь: } x = 3);$$

$$\text{д) } 3^x = 7 \quad (\text{Відповідь: } x = \log_3 7);$$

$$\text{е) } e^x = 5 \quad (\text{Відповідь: } x = \ln 5).$$

5.2.2 Обчислити:

$$\text{а) } \log_2 8 \quad (\text{Відповідь: } 3); \quad \text{б) } \ln e^2 \quad (\text{Відповідь: } 2);$$

$$\text{в) } 2^{1-\log_2 3} \quad (\text{Відповідь: } \frac{2}{3}).$$

5.2.3 Користуючись властивостями логарифмів, знайти натуральний логарифм заданого виразу, якщо $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

а) $\frac{a^3 \cdot \sqrt[5]{(b+3)^2}}{c^6 \cdot d^4}$ (Відповідь: $3 \ln a + \frac{2}{5} \ln(b+3) - 6 \ln c - 4 \ln d$);

б) $\frac{a^6 \cdot (b+1)^3}{\sqrt[6]{c^5} \cdot d^2}$ (Відповідь: $6 \ln a + 3 \ln(b+1) - \frac{5}{6} \ln c - 2 \ln d$).

5.2.4 Розв'язати рівняння

а) $\log_2(3-x)=0$ (Відповідь: $x=2$);

б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=-2$ (Відповідь: $x=6$);

в) $\ln x=2$ (Відповідь: $x=e^2$);

г) $\ln(2x-1)=-2$ (Відповідь: $x=\frac{e^{-2}+1}{2}$);

д) $\log_2 x = -\log_2 5$ (Відповідь: $x=\frac{1}{5}$);

е) $\ln x=3 \ln 3$ (Відповідь: $x=27$).

5.2.5 Знайти похідну заданої функції

а) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x^4}+2\sqrt{x}$ (Відповідь: $y'=x^2+\frac{8}{x^5}+\frac{1}{\sqrt{x}}$);

б) $y=(x^2-1)\ln x$ (Відповідь: $y'=2x \cdot \ln x + \frac{x^2-1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2x \cdot \ln x + x - \frac{1}{x}$);

в) $y=\frac{2x^3-1}{x+5}$ (Відповідь: $y'=\frac{4x^3+30x^2+1}{(x+5)^2}$);

г) $y=\sin^3 2x$ (Відповідь: $y'=6 \sin^2 2x \cdot \cos 2x$);

д) $y=x^2 \cdot e^{2x}$ (Відповідь: $y'=2x \cdot e^{2x}(x+1)$);

$$е) y = \sqrt[5]{(2x-1)^2} \text{ (Відповідь: } y' = \frac{4}{5\sqrt[5]{(2x-1)^3}} \text{);}$$

$$є) y = \frac{\cos 2x}{e^{2x}} \text{ (Відповідь: } y' = \frac{-2(\sin 2x + \cos 2x)}{e^{2x}} \text{).}$$

5.3 Індивідуальні завдання

5.3.1 Розв'язати рівняння

1.	a)	$5^{x^2-5x-16} = \frac{1}{25}$	б)	$3^x = 4$
2.	a)	$(2^{x-5})^{x-6} = 4$	б)	$5^x = 7$
3.	a)	$4^{2x-3} = 8$	б)	$2^x = 3$
4.	a)	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{x+3}$	б)	$3^x = 5$
5.	a)	$4^{3x-1} = \frac{1}{64}$	б)	$5^x = 8$
6.	a)	$3^{5x+1} = 9^x$	б)	$2^x = 7$
7.	a)	$8 \cdot 2^{x^2+6x} = \frac{1}{4}$	б)	$3^x = 8$
8.	a)	$\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{4x-5}$	б)	$4^x = 5$
9.	a)	$2^{x-1} = 2\sqrt{2}$	б)	$6^x = 3$
10.	a)	$\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$	б)	$7^x = 5$
11.	a)	$\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} = \frac{27}{64}$	б)	$2^x = 9$
12.	a)	$2^{1-2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-1}$	б)	$3^x = 11$

13.	a)	$0,5^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{32}$	б)	$5^x = 10$
14.	a)	$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} = 9^{-x-16}$	б)	$4^x = 7$
15.	a)	$0,2^{\frac{3x-3}{x-2}} = \frac{1}{5}$	б)	$6^x = 8$
16.	a)	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{27}$	б)	$2^x = 10$
17.	a)	$2^{-2x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	б)	$7^x = 3$
18.	a)	$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	б)	$9^x = 2$
19.	a)	$(0,3)^{\frac{x^2-8}{x}} = 11\frac{1}{9}$	б)	$5^x = 11$
20.	a)	$(0,1)^{\frac{x^2-4x-15}{x+1}} = 10^{-3}$	б)	$3^x = 13$

5.3.2 Обчислити

1.	a) $\log_5 125$	б) $\ln e^{-2}$	в) $3^{1+\log_3 2}$
2.	a) $\log_3 81$	б) $\ln e^3$	в) $5^{1+\log_5 2}$
3.	a) $\log_2 16$	б) $\ln e^5$	в) $2^{1-\log_2 7}$
4.	a) $\log_5 625$	б) $\ln e^{-1}$	в) $6^{2-\log_6 7}$
5.	a) $\log_6 216$	б) $\ln e^{21}$	в) $7^{1+\log_7 5}$
6.	a) $\log_7 343$	б) $\ln e^6$	в) $3^{1-\log_3 7}$
7.	a) $\log_5 \frac{1}{125}$	б) $\ln e^{-7}$	в) $5^{1-\log_5 3}$

8.	a) $\log_3 \frac{1}{243}$	б) $\ln e^8$	в) $2^{1+\log_2 5}$
9.	$\log_2 \frac{1}{32}$	б) $\ln e^{-9}$	в) $6^{1+\log_6 5}$
10.	a) $\log_5 0,04$	б) $\ln e^{10}$	в) $7^{1-\log_7 3}$
11.	a) $\log_7 \frac{1}{49}$	б) $\ln e^{-11}$	в) $3^{2+\log_3 4}$
12.	a) $\log_3 \frac{1}{27}$	б) $\ln e^{12}$	в) $5^{1+\log_5 6}$
13.	a) $\log_6 \frac{1}{36}$	б) $\ln e^{-13}$	в) $2^{3-\log_2 5}$
14.	a) $\lg 0,01$	б) $\ln e^{14}$	в) $6^{2-\log_6 5}$
15.	a) $\log_2 64$	б) $\ln e^{-15}$	в) $4^{1+\log_4 5}$
16.	a) $\log_5 0,008$	б) $\ln e^{16}$	в) $8^{1-\log_8 5}$
17.	a) $\lg 0,001$	б) $\ln e^{17}$	в) $3^{3-\log_3 5}$
18.	a) $\log_2 \frac{1}{64}$	б) $\ln e^{-18}$	в) $2^{2+\log_2 7}$
19.	a) $\log_3 \frac{1}{81}$	б) $\ln e^{19}$	в) $5^{2-\log_5 4}$
20.	a) $\log_6 \frac{1}{216}$	б) $\ln e^{-20}$	в) $7^{2-\log_7 8}$

5.3.3 Користуючись властивостями логарифмів, знайти натуральний логарифм заданого виразу, якщо $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

1.	$\frac{a^2 \sqrt[7]{(b+1)^3}}{c^5 d^3}$	2.	$\frac{a^3 \sqrt[5]{(b+6)^2}}{(c+1)^4 d^5}$
3.	$\frac{(a+1)^3 \sqrt[3]{b^5}}{\sqrt{c^3} d^2}$	4.	$\frac{a^5 \sqrt[4]{(b+3)^3}}{\sqrt[3]{c^5} d^4}$

5.	$\frac{a \sqrt[4]{(b+3)^3}}{c^3 d^5}$	6.	$\frac{(a+3)^2 \sqrt[3]{b^5}}{\sqrt[5]{(c+1)^3} d^4}$
7.	$\frac{(a+1)^3 \sqrt[3]{b}}{c^4 (d+3)^5}$	8.	$\frac{a^7 \sqrt[5]{(b+1)^3}}{c^2 \sqrt[4]{(d+1)^3}}$
9.	$\frac{a^3 b^2}{\sqrt[4]{(c+5)^3} d^4}$	10.	$\frac{(a+6)^3 \sqrt[4]{b^5}}{c^6 \sqrt[3]{(d+2)^4}}$
11.	$\frac{(a+3)^2 \sqrt[3]{b^4}}{(c+2)^3 d^4}$	12.	$\frac{a^3 \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{(c+1)^3} d^7}$
13.	$\frac{a^3 b^3}{\sqrt[5]{(c+1)^3} (d+1)^2}$	14.	$\frac{(a+5)^2 \sqrt{(b+1)^3}}{c^6 d^7}$
15.	$\frac{(a+2)^3 \sqrt[6]{b^5}}{\sqrt[3]{(c+1)^2} (d+2)^4}$	16.	$\frac{a^6 \sqrt[3]{(b+3)^2}}{\sqrt{c^7} d^5}$
17.	$\frac{a^2 \sqrt[3]{(b+4)^5}}{c^4 d^5}$	18.	$\frac{a^4 \sqrt[5]{b^2}}{\sqrt{(c+3)^5} d^4}$
19.	$\frac{(a+5)^3 \sqrt[5]{(b+1)^2}}{\sqrt[4]{c^3} d^4}$	20.	$\frac{(a+4)^3 \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt{(c+6)^3} d^7}$

5.3.4 Розв'язати рівняння

1.	a)	$\ln(x+1)=1$	б)	$\log_3 x = -\log_3 2$
2.	a)	$\ln(4x+1)=1$	б)	$\log_5 x = 3 \log_5 2$
3.	a)	$\ln(3x+3)=2$	б)	$\lg x = 3 \lg 5$
4.	a)	$\ln(x-5)=2$	б)	$\ln x = -2 \ln 3$
5.	a)	$\ln(2x-3)=2$	б)	$\log_7 x = -\log_7 0,2$
6.	a)	$\ln(2x-4)=1$	б)	$\lg x = -\lg 7$
7.	a)	$\ln(3x-4)=1$	б)	$\lg x = -2 \lg 4$

8.	a)	$\ln(5x+7)=2$	б)	$\log_5 x = 2 \log_5 2$
9.	a)	$\ln(4x+5)=1$	б)	$\log_2 x = 2 \log_2 3$
10.	a)	$\ln(6x+10)=2$	б)	$\ln x = -\ln 4$
11.	a)	$\ln(4x+4)=2$	б)	$\log_6 x = -\log_6 10$
12.	a)	$\ln(x+6)=1$	б)	$\lg x = 3 \lg 4$
13.	a)	$\ln(5x-1)=3$	б)	$\log_4 x = -3 \log_4 5$
14.	a)	$\ln(7x-1)=1$	б)	$\log_7 x = 2 \log_7 3$
15.	a)	$\ln(x-2)=1$	б)	$\ln x = -3 \ln 2$
16.	a)	$\ln(x-9)=1$	б)	$\ln x = 4 \ln 2$
17.	a)	$\ln(2x-5)=1$	б)	$\lg x = -\lg 0,3$
18.	a)	$\ln(4x+2)=2$	б)	$\lg x = 2 \lg 6$
19.	a)	$\ln(6x-3)=2$	б)	$\log_5 x = -\log_5 3$
20.	a)	$\ln(10x+26)=2$	б)	$\ln x = -\ln \frac{1}{7}$

5.3.5 Знайти похідну заданої функції

1.	a)	$y = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{x^3}$	б)	$y = (x^3 - 1) \cdot \sin x$
	в)	$y = \frac{2x^2 + 1}{x + 6}$	г)	$y = \sqrt{2x^3 - 5x}$
2.	a)	$y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{x^4}$	б)	$y = (x^2 + 4) \cdot \cos x$
	в)	$y = \frac{3x^2 - 1}{x - 6}$	г)	$y = \sin(3x^2 - 5x)$
3.	a)	$y = \frac{x^{12}}{12} - \frac{2}{x^5}$	б)	$y = (x^2 + 5) \cdot \ln x$
	в)	$y = \frac{5x^2 + 1}{x - 3}$	г)	$y = \cos(4x^3 - 2x)$

4.	a)	$y = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x^7}$	б)	$y = (x^2 - 4) \cdot \operatorname{tg} x$
	в)	$y = \frac{4x^2 + 1}{x - 2}$	г)	$y = \sqrt{3x^2 + 4x}$
5.	a)	$y = \frac{x^5}{10} - \frac{3}{x^3}$	б)	$y = (2x^2 + 1) \cdot \operatorname{ctg} x$
	в)	$y = \frac{1 - 2x^3}{x - 3}$	г)	$y = \sin(5x^3 + 4x)$
6.	a)	$y = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^4}$	б)	$y = (3x^2 - 2) \cdot \operatorname{tg} x$
	в)	$y = \frac{2 - 3x^2}{x + 5}$	г)	$y = \cos(6x^4 + 5x)$
7.	a)	$y = \frac{x^7}{7} - \frac{3}{x^3}$	б)	$y = (2x^3 + 2) \cdot e^x$
	в)	$y = \frac{3 - 2x^2}{x + 4}$	г)	$y = \ln(3x^4 + 5x)$
8.	a)	$y = \frac{x^8}{8} - \frac{4}{x^4}$	б)	$y = (5x^2 + 2) \cdot \ln x$
	в)	$y = \frac{5x^2 - 3}{x + 2}$	г)	$y = \sqrt{3x^5 + 4x}$
9.	a)	$y = \frac{x^9}{9} - \frac{5}{x^5}$	б)	$y = (3x^2 + 5) \cdot \sin x$
	в)	$y = \frac{7x^2 + 2}{x - 5}$	г)	$y = \operatorname{tg}(4x^5 - 5x)$
10.	a)	$y = \frac{x^{10}}{10} - \frac{5}{x^5}$	б)	$y = (7x^3 + 2) \cdot \cos x$
	в)	$y = \frac{9x^2 - 2}{x + 3}$	г)	$y = \operatorname{ctg}(3x^4 + 2x)$
11.	a)	$y = \frac{x^{11}}{11} - \frac{2x}{x^2}$	б)	$y = (5x^3 - 2) \cdot \operatorname{tg} x$

	в)	$y = \frac{10x^2 - 3}{x - 2}$	г)	$y = e^{5x^3 + 3x}$
12.	а)	$y = \frac{x^{12}}{12} - \frac{3}{x^3}$	б)	$y = (2x^3 - 7) \cdot \sin x$
	в)	$y = \frac{5 - 3x^2}{x + 7}$	г)	$y = \ln(5x^3 - 4x)$
13.	а)	$y = \frac{x^{13}}{13} - \frac{5}{x^4}$	б)	$y = (2x^4 + 5) \cdot e^x$
	в)	$y = \frac{3x^2 + 7}{x - 8}$	г)	$y = \sin(10x^4 + 5x)$
14.	а)	$y = \frac{x^{14}}{14} - \frac{6}{x^3}$	б)	$y = (5x^2 - 3) \cdot \cos x$
	в)	$y = \frac{10x^2 + 2}{x - 3}$	г)	$y = \operatorname{tg}(8x^3 - 3x)$
15.	а)	$y = \frac{x^{15}}{15} - \frac{2}{x^5}$	б)	$y = (2x^4 - 3) \cdot \operatorname{ctgx}$
	в)	$y = \frac{4x^2 + 3}{x - 2}$	г)	$y = e^{8x^5 + 4x}$
16.	а)	$y = \frac{x^{16}}{16} - \frac{3}{x^4}$	б)	$y = (3x^5 - 4) \cdot \operatorname{tg} x$
	в)	$y = \frac{5x^2 - 4}{x + 7}$	г)	$y = \cos(5x^8 + 2x)$
17.	а)	$y = \frac{x^8}{8} - \frac{5}{x^4}$	б)	$y = (3 - 5x^4) \ln x$
	в)	$y = \frac{3x^2 + 8}{x - 1}$	г)	$y = \sqrt{3x - 8x^3}$
18.	а)	$y = \frac{x^7}{7} - \frac{4}{x^5}$	б)	$y = (7x^3 + 2) \cdot \sin x$
	в)	$y = \frac{4x^3 - 3}{x + 2}$	г)	$y = \ln(5x - 8x^2)$

19.	а)	$y = \frac{x^6}{6} - \frac{3}{x^8}$	б)	$y = (5x^2 - 8) \cdot e^x$
	в)	$y = \frac{8x^2 + 5}{x - 2}$	г)	$y = \sin(3x^4 - 7x)$
20.	а)	$y = \frac{x^5}{15} - \frac{3}{x^4}$	б)	$y = (8x^3 - 4) \cdot \cos x$
	в)	$y = \frac{6x^2 + 5}{x - 2}$	г)	$y = \operatorname{ctg}(5x^6 - 7x)$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вигодський М. Я. Довідник з елементарної математики. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 509 с.

2. Мерзляк А.Г. Алгебра. 8 кл.: Збірник задач і контрольних робіт / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 96 с.

3. Мерзляк А.Г. Алгебра. 9 кл.: Збірник задач і контрольних робіт / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 128 с.

4. Мерзляк А.Г. Алгебра. 10 кл.: Збірник задач і контрольних робіт / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 144 с.

5. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 кл.: Збірник задач і контрольних робіт / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 96 с.

6. Фільчаков П. Ф. Довідник з елементарної математики / за ред.: П. Ф. Фільчаков. – 2-е вид. перероб. і допов. – К.: Наукова думка, 1975. – 656 с.

7. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 11 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закл. освіти / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара. – К.: Освіта, 2001. – 311 с.

8. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для учнів 10 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закладах освіти – К.: Освіта, 2000. – 318 с.