

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з дисципліни
“Електронні системи”
для студентів спеціальності 6.050801
„Мікро- та наноелектроніка”
денної і заочної форм навчання

2010

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Електронні системи”. Для студентів спеціальності 6.050801 “Мікро- та наноелектроніка” денної і заочної форм навчання / Укл.: Н.М. Нагорна. –Запоріжжя: ЗНТУ, 2010.- 62 с.

Укладач: Н.М. Нагорна, ст.викладач

Рецензент: О.В.Томашевський, доц., канд.техн.наук

Відповідальний за випуск: Г.В. Сніжной, доц., канд.фіз.-матем. наук

Затверджено
на засіданні кафедри
“Мікро- та наноелектроніка”

Протокол № 7
від 1 липня 2010

ЗМІСТ

1 Практичне заняття №1 "Характеристики підсистем електронної системи та принципи взаємодії блоків"	5
1.1 Основні теоретичні відомості.	5
1.1.1 Методика визначення параметрів блоків системи.	5
1.1.2 Методика визначення шумових властивостей електронної системи.	8
1.2 Завдання.	11
1.3 Вимоги до звіту.	14
1.4 Контрольні запитання.	14
2 Практичне заняття №2 "Розрахунок параметрів електронних систем"	15
2.1 Основні теоретичні відомості.	15
2.2 Завдання.	21
2.3 Вимоги до звіту.	22
2.4 Контрольні запитання.	22
3 Практичне заняття №3 "Сpektри періодичних сигналів"	23
3.1 Основні теоретичні відомості.	23
3.2 Завдання.	25
3.3 Вимоги до звіту.	28
3.4 Контрольні запитання.	28
4 Практичне заняття №4 "Сpektри одиночних імпульсів"	29
4.1 Основні теоретичні відомості.	29
4.2 Завдання.	31
4.3 Вимоги до звіту.	33
4.4 Контрольні запитання.	33
5 Практичне заняття №5 "Частотна модуляція"	34
5.1 Основні теоретичні відомості.	34
5.1.1 Модуляція.	34
5.1.2 Частотна модуляція аналогових повідомлень.	35
5.1.3 Спектр сигналу з гармонічною частотною модуляцією ..	36
5.1.4 Частотна модуляція цифрових повідомлень.	37
5.2 Завдання.	38
5.3 Вимоги до звіту.	41
5.4 Контрольні запитання.	41

6 Практичне заняття №6 "Випадкові сигнали"	42
6.1 Основні теоретичні відомості.	42
6.2 Завдання.	44
6.3 Вимоги до звіту.	45
6.4 Контрольні запитання.	45
7 Практичне заняття №7 "Кількість інформації та ентропія" ..	46
7.1 Основні теоретичні відомості.	46
7.1.1 Ансамблі та джерела повідомлень.	46
7.1.2 Поняття кількості інформації у конкретному повідомленні	47
7.1.3 Одиниці вимірювання кількості інформації.	49
7.1.4 Середня кількість інформації.	50
7.1.5 Ентропія як міра невизначеності.	51
7.1.6 Приклади розрахунків.	52
7.2 Завдання.	55
7.3 Вимоги до звіту.	57
7.4 Контрольні запитання.	57
Перелік рекомендованої літератури.	58
Додаток А Приклад розрахунку періодичної функції.	59
Додаток Б Приклад розрахунку спектра імпульсу.	61
Додаток В Приклад розрахунку бesselевих функцій	62

1 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1

«ХАРАКТЕРИСТИКИ ПІДСИСТЕМ ЕЛЕКТРОННОЇ СИСТЕМИ ТА ПРИНЦИПИ ВЗАЄМОДІЇ БЛОКІВ»

Мета роботи: розгляд системного підходу при проектуванні електронних систем на основі дотримання принципів взаємодії блоків і набуття навичок розробки функціональних схем електронних систем та розрахунків параметрів блоків функціональних схем.

1.1 Основні теоретичні відомості

1.1.1 Методика визначення параметрів блоків системи

Розроблювач електронної системи, який оперує з блоками, має знати тільки ті характеристики і параметри блоків, що мають відношення до взаємодії конкретного блоку з іншими блоками системи.

Нижче наведені принципи розробки електронної системи на прикладі розробки мегафонної установки.

Порядок проведення дій наступний.

На першому етапі необхідно розробити функціональну (структурну) схему системи.

Мегафонна установка складається з трьох підсистем (блоків). Функціональна схема установки представлена на рис. 1.1.



Рисунок 1.1 - Функціональна схема установки

Кожна підсистема має свої технічні характеристики. Найбільш стиснутим є опис підсистем у термінах «чорних» ящиків. Однак такий опис є повним при розробці систем.

Типові технічні характеристики кожного блоку мегафонної установки наведені в табл. 1.1.

На другому етапі приймається, що імпеданс мікрофона дорівнює 50 Ом.

Таблиця 1.1 - Типові технічні характеристики блоків

№	Параметр	Підсистеми			Система
		Мікрофон	Підсилювач	Репродуктор	
1	Імпеданс	На вибір: 50 Ом; 500 Ом,	Вхідний: 1МОм Вихідний: 8 Ом	8 Ом	—
2	Вихідна напруга	100 мкВ	15,5 В (максимальна)	—	—
3	Смуга частот у межах рівнів голосності ± 3 дБ, Гц	40 - 9000	20 - 15000	30 - 12000	40 - 9000
4	Коефіцієнт підсилення K_U , в.о.	—	10000	—	—
5	Коефіцієнт нелінійних спотворень, %	—	1 (при повній потужності)	—	1 (при повній потужності)
6	Напруга живлення, В	—	20	—	20
7	Потужність, Вт	—	30 (максимальна)	30	30

При відомих вихідній напрузі і вихідному опорі мікрофона можна зобразити його еквівалентну схему (рис. 1.2).

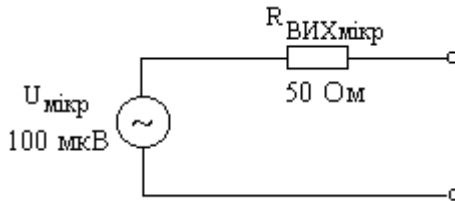


Рисунок 1.2 – Еквівалентна схема мікрофона

На третьому етапі з метою визначення напруги на виході підсилювача зображаються послідовно з'єднані еквівалентні схеми мікрофона і підсилювача (рис. 1.3).

Якщо вхідний опір підсилювача $R_{BX\text{ підс}} = 1 \text{ МОм}$, а коефіцієнт підсилення $K_U = 10000$, то вхідна і вихідна напруги підсилювача:

$$U_{BX} = \frac{U_{\text{мікр}} \cdot R_{BX\text{ підс}}}{R_{\text{ВИХ мікр}} + R_{BX\text{ підс}}} = \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{50 + 10^6} = 0,99995 \cdot 10^{-4} \text{ В};$$

$$U_{\text{ВИХ}} = K_U U_{BX} = 10000 \cdot 0,99995 \cdot 10^{-4} = 0,99995 \text{ В}.$$

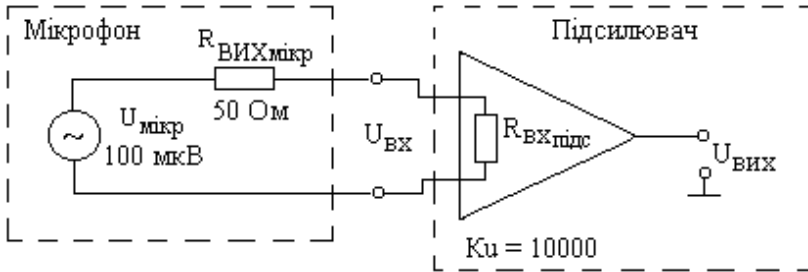


Рисунок 1.3 - Послідовно з'єднані еквівалентні схеми мікрофона і підсилювача

Якщо ж прийняти вхідний опір підсилювача $R_{ВХ\text{ підс}} = 10 \text{ кОм}$, то напруга на виході підсилювача вийде заниженою у порівнянні з попереднім випадком:

$$U_{ВІХ} = 10000 \cdot U_{ВХ} = \frac{10000 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4}{50 + 10^4} = 0,99505 \text{ В.}$$

Отже, при сполученні блоків мікрофона і підсилювача повинна дотримуватися умова (у цьому випадку сильно не навантажується вихід мікрофона)

$$R_{ВХ\text{ підс}} \gg R_{ВІХ\text{ мікр}}.$$

Висновок: імпеданси впливають на систему при взаємодії блоків.

На *четвертому етапі* визначаються смуги пропускання частот системи. Відповідно до таблиці 1.1 у мікрофона найменш вузький діапазон частот. Смуга пропускання частот мегафонної установки не може бути ширше зазначеної.

Висновок: у випадку смуги пропускання частот найбільш вузька ланка визначає технічні характеристики системи.

На *п'ятому етапі* визначається характер взаємодії між підсилювачем і репродуктором. Еквівалентна схема підсилювача і підключеного до нього репродуктора показана рис. 1.4.

Для передачі в репродуктор максимальної потужності необхідне виконання умови: $R = R_{ВІХ\text{ підс}} = R_H = 8 \text{ Ом}$.

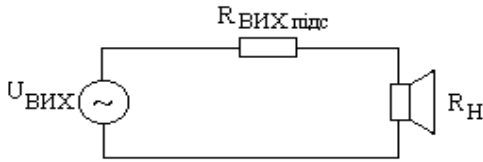


Рисунок 1.4 - Еквівалентна схема підсилювача з навантаженням

Якщо попередньо до системи пред'явлені вимоги видачі потужності $P=30$ Вт, то репродуктор теж має бути розрахований на потужність $P = 30$ Вт.

Отже, підсилювач теж має видавати потужність $P=30$ Вт на навантаження, що дорівнює 8 Ом. Тоді вихідний струм підсилювача складе

$$I_{ВИХ} = \sqrt{P/R} = \sqrt{30/8} = 1,92 \text{ А}$$

при вихідній напрузі підсилювача

$$U_{ВИХ} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{30 \cdot 8} = 15,5 \text{ В.}$$

Для спрощення розрахунків приймається, що $R_{ВХ підс} \gg R_{ВИХ мікр}$, тоді підсилювач матиме коефіцієнт підсилення:

$$K_U = U_{ВИХ} / U_{ВХ} = \frac{15,5}{100 \cdot 10^{-6}} = 155000 \text{ в.о.}$$

Приймається, що коефіцієнт підсилення K_U не повинний змінюватися більш, ніж на ± 1 дБ у робочому діапазоні частот.

1.1.2 Методика визначення шумових властивостей електронної системи

Всі шуми в системі прийнято характеризувати за допомогою відношення потужності корисного сигналу до потужності шуму.

Потужність цих двох сигналів обчислюється з урахуванням середньоквадратичних значень сигналу і шуму, поділених на вихідний

опір схеми. Отже, відношення сигнал/шум

$$SNR = \frac{\overline{V}_S^2 / R}{\overline{V}_N^2 / R} = \frac{\overline{V}_S^2}{\overline{V}_N^2},$$

де риска над квадратом напруги позначає його середнє значення.

Оскільки відношення сигнал/шум - це відношення потужностей, воно в загальному випадку виражається в децибелах (дБ). Тому можна записати

$$SNR = 10 \lg \frac{\overline{V}_S^2}{\overline{V}_N^2}.$$

Допустиме значення відношення сигнал/шум залежить від характеристик і призначення системи. Для радіоприймальних систем воно повинне бути не менше 70 дБ, щоб фонові шуми не були чутні при прослуховуванні музики. Якісне телевізійне зображення можливе при відношенні сигнал/шум в антені приблизно 50 дБ.

Коли система складається з декількох окремих частин (перетворювача, сполучного кабелю, схеми сполучення тощо), і кожна частина має своє власне відношення сигнал/шум, необхідно обчислити спільне для системи в цілому відношення сигнал/шум. Це можна зробити, якщо охарактеризувати кожен складову частину системи коефіцієнтом шуму, що дорівнює відношенню сигнал/шум на вході до відношення сигнал/шум на виході складової частини системи

$$F = \frac{SNR_{BX}}{SNR_{BIX}},$$

$$\text{або в децибелах } F = 10 \lg \frac{SNR_{BX}}{SNR_{BIX}} = SNR_{BX \text{ дБ}} - SNR_{BIX \text{ дБ}}.$$

Чим менше коефіцієнт шуму, тим краще шумові характеристики системи.

Нехай в системі, зображений на рис. 1.5, вихідний сигнал перетворювача спочатку підсилюється, а потім відображається на індикаторі.



Рисунок 1.5 – Вимірювальна електронна система

Перетворювач має відношення сигнал/шум на виході, рівне 60 дБ. Між ним і підсилювачем, а також між підсилювачем і індикатором є сполучні кабелі з коефіцієнтами підсилення за потужністю K_{P1} , K_{P3} , що дорівнюють 0,25. Кабелі є резистивними і пасивними, тому вони не дають підсилення, а тільки послаблюють сигнал. У таких частинах системи коефіцієнти шуму (F_1 і F_3) обернено пропорційні коефіцієнтам підсилення, зокрема, в сполучних кабелях коефіцієнти шуму рівні 4. Індикатор, як і кабелі, також є пасивним, його коефіцієнт підсилення $K_{P4} = 0,5$; отже, коефіцієнт шуму $F_4 = 2$. Коефіцієнт підсилення за потужністю підсилювача $K_{P2} = 100$. Це активна частина системи. Власний коефіцієнт шуму підсилювача заданий і складає $F_2 = 4$.

Спільний коефіцієнт шуму визначається із співвідношення

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{K_{P1}} + \frac{F_3 - 1}{K_{P1}K_{P2}} + \frac{F_4 - 1}{K_{P1}K_{P2}K_{P3}}.$$

У даному прикладі вказане співвідношення дає наступне значення коефіцієнта шуму:

$$F = 4 + \frac{4-1}{0,25} + \frac{4-1}{0,25 \cdot 100} + \frac{2-1}{0,25 \cdot 100 \cdot 0,25} = 16,12 \text{ (приблизно 12 дБ)}.$$

Спільне відношення сигнал/шум обчислюється як різниця між відношенням сигнал/шум перетворювача і коефіцієнтом шуму схеми сполучення, тобто $60 - 12 = 48$ (дБ). Це значення може бути задовільним або, навпаки, неприйнятним залежно від типу системи.

У наведеному прикладі вводилися деякі спрощення при обчисленні коефіцієнта шуму. Дійсне значення коефіцієнта шуму залежить від температури, діапазону частот, вихідного опору попереднього каскаду та інших чинників.

1.2 Завдання

1.2.1 Знайдіть напругу на затискувачах навантаження в системі, що складається з датчика і підсилювача.

Складіть еквівалентну схему системи.

Параметри блоків наведені в табл. 1.2.

1.2.2 Знайдіть частотний діапазон системи, що складається з блоків *A*, *B*, *C*.

Смуга пропускання частот для кожного з блоків приведена в табл. 1.3.

1.2.3 Визначте коефіцієнт підсилення за напругою і вихідний імпеданс підсилювача, що необхідні для одержання максимальної потужності, рівної 10 Вт, на 8-омному динаміку, якщо система складається з наступних блоків:

- датчика з параметрами: $R_{\text{вих}} = 100 \text{ Ом}$, $U_{\text{вих}} = 100 \text{ мВ}$;
- підсилювача з $R_{\text{вх}} = \infty$;
- динаміка з параметрами: $P = 10 \text{ Вт}$, $R_{\text{н}} = 8 \text{ Ом}$.

Складіть функціональну схему даної системи.

1.2.4 Оцініть відношення сигнал/шум системи, представленої на рис. 1.5, із заданими початковими даними для випадку, коли кабель, призначений для сполучення перетворювача і підсилювача, має параметри з табл. 1.4, а також для випадку, коли підсилювач розташовується безпосередньо біля перетворювача і має дуже малі втрати і коефіцієнт шуму. Оцініть шумові властивості системи в обох випадках.

Виконайте порівняльний аналіз внесків кожної з частин системи в коефіцієнт шуму системи.

Відношення сигнал/шум на виході перетворювача дорівнює 50 дБ.

Таблиця 1.2 – Параметри блоків електронної системи

№ вар.	Параметри блоків						
	Датчик		Підсилювач			Навантаження	
	$U_{ВНХ}$, мВ	$R_{ВНХ}$, Ом	K_U , в.о.	$R_{ВХ}$, кОм	$R_{ВНХ}$, Ом	R_H , Ом	P_H , Вт
1	15	50	100	10	10	10	10
2	20	70	100	100	20	20	10
3	25	30	70	50	10	10	20
4	15	100	80	500	5	5	10
5	20	75	100	20	40	40	5
6	25	60	60	50	5	5	20
7	30	50	200	40	10	10	5
8	20	80	200	70	20	20	10
9	15	90	150	90	10	10	20
10	30	70	130	80	30	30	5
11	10	40	110	75	4	4	20
12	15	30	100	20	5	5	60
13	22	50	140	25	10	10	10
14	18	80	100	80	5	5	10
15	18	75	120	10	15	15	5
16	20	50	50	100	20	20	5
17	25	100	20	1000	30	30	10
18	30	75	110	500	40	40	20
19	15	30	500	100	10	10	15
20	20	50	220	50	5	5	12
21	30	100	100	20	20	20	16
22	22	30	60	200	10	10	20
23	25	75	150	150	30	30	5
24	10	40	180	80	50	50	10
25	15	50	250	200	75	75	20
26	25	30	400	50	50	50	30
27	20	25	150	90	75	75	40
28	25	75	200	100	10	10	5
29	30	40	300	150	20	20	60
30	10	50	250	75	30	30	10

Таблиця 1.3 - Частотні параметри блоків системи

№ вар.	Блок А		Блок В		Блок С	
	f_H , Гц	f_B , кГц	f_H , Гц	f_B , кГц	f_H , Гц	f_B , кГц
1	20	1000	200	500	20	50
2	50	100	400	30	10	10
3	100	120	10	400	100	100
4	30	1500	80	1500	30	40
5	35	2000	150	300	55	300
6	20	200	20	1000	60	200
7	40	300	10	800	10	30
8	80	2500	250	150	20	50
9	100	100	40	100	44	40
10	150	160	55	400	60	150
11	10	1000	25	250	100	200
12	30	1100	40	20	150	40
13	50	800	50	100	30	25
14	20	400	30	40	10	30
15	40	250	40	600	20	60
16	200	100	5	10	100	70
17	30	90	10	50	200	200
18	50	200	20	40	300	40
19	300	130	40	30	500	20
20	250	150	20	20	20	5
21	30	200	60	300	100	100
22	50	300	100	20	50	30
23	40	100	20	200	500	45
24	200	500	40	150	300	200
25	35	40	60	20	100	125
26	20	50	20	30	200	200
27	40	150	10	40	40	30
28	50	400	60	30	60	400
29	60	300	100	100	70	50
30	70	50	20	210	80	60

Таблиця 1.4 – Вихідні дані до пункту 1.2.4

№ вар.	$K_{P1},$ $K_{P3},$ в.о.	$K_{P2},$ в.о.	$F_2,$ в.о.	$K_{P4},$ в.о.	№ вар.	$K_{P1},$ $K_{P3},$ в.о.	$K_{P2},$ в.о.	$F_2,$ в.о.	$K_{P4},$ в.о.
1	0,40	20	6	1,0	16	0,34	20	4	1,0
2	0,20	50	4	0,5	17	0,22	40	2	0,5
3	0,25	60	3	1,0	18	0,28	50	3	1,0
4	0,35	30	5	0,5	19	0,32	60	5	0,5
5	0,32	20	4	1,0	20	0,32	100	5	1,0
6	0,20	40	2	0,5	21	0,40	80	4	0,5
7	0,22	50	5	1,0	22	0,20	20	3	1,0
8	0,24	100	4	0,8	23	0,25	40	2	0,8
9	0,28	80	3	1,0	24	0,35	50	5	0,5
10	0,32	90	4	0,5	25	0,40	40	3	1,0
11	0,34	20	2	1,0	26	0,24	60	6	0,5
12	0,22	10	6	0,8	27	0,32	80	2	1,0
13	0,24	120	5	1,0	28	0,24	120	4	0,5
14	0,32	40	3	0,5	29	0,28	40	8	1,0
15	0,25	60	4	1,0	30	0,25	30	5	0,8

1.3 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити результати розв'язання задач з пунктів 1.2.1÷1.2.4 з відповідними функціональними і еквівалентними схемами електронних систем або блоків та формулами.

1.4 Контрольні запитання

- 1 З чого складається структурна схема системи?
- 2 Зобразіть структурну схему системи, що має наступні блоки: датчик температури, АЦП, ЦАП, обчислювальний пристрій, індикатор.
- 3 Якщо мікрофон має вихідний імпеданс, рівний 60 Ом, то який з підсилювачів треба вибрати для сполучення з ним, якщо вхідний опір першого підсилювача дорівнює 10 МОм, а другого – 1 кОм?
- 4 Чому бажано мати високий вхідний опір підсилювача напруги і малий вихідний опір?

- 5 Який параметр називається коефіцієнтом нелінійних спотворень?
- 6 Яка умова повинна дотримуватись між вхідним опором підсилювача і вихідним опором джерела сигналу?
- 7 Чи є правильним твердження: імпеданси впливають на систему при взаємодії блоків?
- 8 Як визначається частотний діапазон електронної системи?
- 9 Якщо смуги пропускання блоків системи однакові за величиною, то чому буде дорівнювати смуга пропускання системи?
- 10 Яке співвідношення повинно бути між вихідним опором підсилювача і опором навантаження для передачі в навантаження максимальної потужності?
- 11 Як впливає довжина сполучних кабелів (дротів) на шумові властивості системи?
- 12 Чому сполучні кабелі мають достатньо великий коефіцієнт шуму?
- 13 Чому дорівнює спільне відношення сигнал/шум системи, якщо сигнал/шум на виході перетворювача рівний 60 дБ, а коефіцієнт шуму схеми сполучення складає 6 дБ?

2 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2 «РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ЕЛЕКТРОННИХ СИСТЕМ»

Мета роботи: ознайомлення з основними технічними параметрами електронних систем та методами їх розрахунку, а також розрахунок чисельних значень параметрів електронних систем.

2.1 Основні теоретичні відомості

Основними технічними параметрами, що визначають функціонування електронних систем (ЕС), є:

- точність (похибка);
- чутливість;
- роздільна здатність;
- лінійність;
- частотний діапазон.

Точність може виражатися в абсолютних одиницях і у відсотках як відхилення від номінального значення.

Нехай номінальна швидкість тепловоза $v_{НОМ} = 80$ км/год. Якщо регулятор швидкості замість 80 км/год установив швидкість 88 км/год або 72 км/год, то точність системи складає ± 8 км/год або $\pm 10\%$ від номінального значення. Ці величини будуть тотожними тільки при $v_{НОМ} = 80$ км/год.

Якщо ж $v_{НОМ} = 160$ км/год, то точність $\pm 10\%$ відповідає похибці ± 16 км/год.

Щоб не приводити номінальну швидкість, розраховується максимальна похибка або найменша точність. У цьому випадку задається максимальна швидкість тепловоза. Нехай $v_{МАХ} = 321$ км/год. Тоді максимальній похибці ± 8 км/год відповідатиме точність: $8 \cdot 100 / 321 = 2,5\%$.

Приклад: система регулювання температури працює в діапазоні від мінус $17,7^{\circ}\text{C}$ до плюс $26,7^{\circ}\text{C}$. Після установки термоселектора на 10°C протягом двогодинного періоду були зроблені наступні відліки показань температури: 9,4; 9,7; 10,6; 10,56; 10,0; 9,8; 9,4; 9,9 $^{\circ}\text{C}$. Укажіть точність системи в градусах Цельсія (абсолютну похибку) і у відсотках від максимуму (приведену похибку).

Рішення: найбільше відхилення від номіналу дають виміри: 10,6 і $9,4^{\circ}\text{C}$, тобто абсолютна похибка складає $\pm 0,6^{\circ}\text{C}$. У заданому максимальному температурному діапазоні, рівному $44,4^{\circ}\text{C}$, приведена похибка дорівнює:

$$d_{\text{ПРИВ}} = \frac{0,6 \cdot 100}{44,4} = 1,35 \%$$

Отже, приведена точність (похибка) - це відношення абсолютної похибки до діапазону зміни вхідної величини, що виражається у відсотках.

Чутливість S - це здатність ЕС реагувати на зміну вхідного параметра.

Чутливість може мати різні інтерпретації, що залежать від конкретної системи. Наприклад, чутливість приймача дорівнює 5 мкВ. Це означає, що при встановленні на його вході сигналу з амплітудою, що дорівнює 5 мкВ, вихідний сигнал буде помітний над рівнем власних шумів приймача.

Приклад: нехай дана ЕС зі зворотним зв'язком, яка називається регулятором швидкості (рис. 2.1).

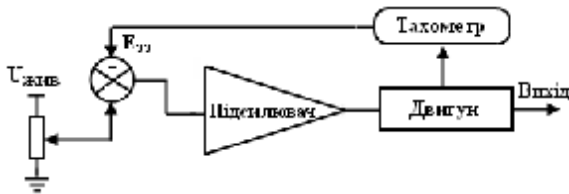


Рисунок 2.1 - Електронна система зі зворотним зв'язком

У функціональній схемі регулятора швидкості є тахометр (це прилад, що перетворює швидкість у напругу) і генератор постійного струму, напруга якого пропорційна швидкості обертання вала.

Нехай при установці вхідного сигналу $E_{уст1} = 5$ В кутова швидкість обертання вала $\omega_1 = 3000$ об/хв. А при установці $E_{уст2} = 6$ В кутова швидкість $\omega_2 = 4000$ об/хв.

$$\text{Тоді чутливість системи } S = \frac{\Delta \omega}{\Delta E_{уст}} = 1000 \text{ (об/хв)/В.}$$

Якщо відома чутливість системи, то можна розрахувати величину вхідного сигналу при заданій бажаній величині вихідного сигналу.

Наприклад, нехай $E_{уст1} = 5$ В, $\omega_1 = 3000$ об/хв, чутливість системи $S = 1000$ (об/хв)/В. Якщо необхідно збільшити швидкість на 4000 об/хв, то величину $E_{уст1}$ для досягнення швидкості 7000 об/хв необхідно збільшити на:

$$\Delta E_{уст} = \Delta \omega \cdot S = 4000/1000 = 4 \text{ В.}$$

$$\text{Тобто } E_{уст2} = E_{уст1} + \Delta E_{уст} = 5 + 4 = 9 \text{ В.}$$

Роздільна здатність – це найменша помітна величина на вході або виході системи.

Роздільна здатність може бути виражена в абсолютних одиницях або у відсотках від максимуму.

Роздільна здатність по вхідному параметру – це найменша зміна вхідного параметра, що помітна системою і впливає на неї, яка приводить до зміни вихідного параметра. Відповідна зміна вихідного параметра – це роздільна здатність по вихідній величині.

Зазначені роздільні здатності зв'язані між собою в такий же спосіб, як вхідний параметр зв'язаний з вихідним параметром.

Приклад: дровотий потенціометр із ковзним контактом може розрізняти як завгодно малу кількісну величину роздільної здатності.

Лінійність. Фізичні системи в заданому діапазоні зміни параметрів у багатьох випадках можуть вважатися лінійними.

Якщо задана залежність між двома параметрами, то ступінь лінійності визначається як максимальна величина, на яку залежність відхиляється від лінійної залежності.

Наприклад, визначити лінійність регульованого опору можна декількома способами (рис. 2.2).

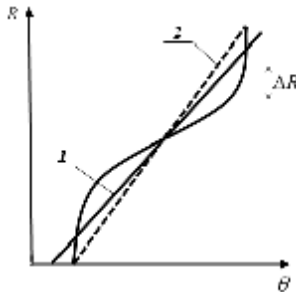


Рисунок 2.2 – Залежність опору регулюючого резистора від кута повороту осевого стрижня

1 спосіб: проводиться пряма 1 з використанням методу найменших квадратів. Для визначення лінійності відшукується найбільше відхилення заданої залежності від проведеної прямої, тобто ΔR .

Такий вид лінійності називають *незалежною лінійністю*. Вона найбільш уживана.

2 спосіб: проводиться пряма лінія 2 між початковою і кінцевою точками залежності. Потім визначається *залежна (кінцева) лінійність*.

Лінійність може бути виражена або в абсолютних одиницях, або у відсотках від максимуму ($\frac{\Delta R}{R_{MAX}} \cdot 100\%$), або у відсотках від конкретної установленної величини ($\frac{\Delta R}{R_x} \cdot 100\%$). Остання формула

дозволяє обчислити лінійність у будь-якій конкретній точці.

Смуга пропускання частот системи – це діапазон між верхньою і нижньою частотами, при якому потужність сигналу зменшується на 3 дБ.

Приклад: нехай вхідний сигнал регулятора швидкості, функціональна схема якого представлена на рис. 2.1, має вигляд:

$$E_{уст} = E_{уст,80} + E_{MAX} \sin(\omega t).$$

З графіка чутливості на рис. 2.3 видно, що $E_{уст,80} = 2$ В. Нехай $E_{MAX} = 1,5$ В, частота $f = 50$ Гц, $\omega = 2\pi f = 314$ рад/с. Тоді

$$E_{уст}' = 2 + 1,5 \cdot \sin(\omega t).$$

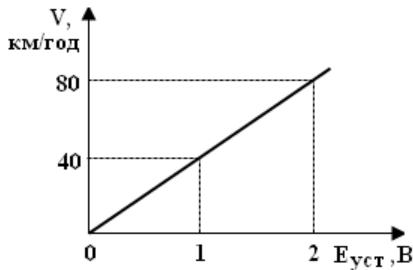


Рисунок 2.3 – Графік чутливості – залежність вихідного параметра (V) від вхідного ($E_{уст}$)

Залежність між вхідним і вихідним параметрами системи лінійна, тому швидкість системи буде змінюватися синусоїдально у відповідності з $E_{уст}'$.

Останнє твердження припускає, що система буде реагувати досить швидко, щоб точно відповідати вхідному синусоїдальному сигналу. Якщо в дійсності система реагує повільніше, то вихідний параметр (швидкість) не буде точно відповідати вхідному.

Швидкість зміни вхідної напруги дорівнює:

$$\frac{d E_{\text{вх}}}{d t} = \omega \cdot E_{\text{MAX}} \cdot \cos(\omega t) = 314 \cdot 1,5 \cdot \cos(314 \cdot t) \text{ В/с.}$$

З наведеної формули видно, що швидкість зміни вхідної напруги прямо пропорційна кутовій частоті.

Максимальне значення швидкості зміни вхідної напруги дорівнює:

$$\left(\frac{d E_{\text{вх}}}{d t} \right)_{\text{MAX}} = \omega \cdot E_{\text{MAX}}.$$

При цьому $\cos(\omega t) = 1$. У цих точках $\sin(\omega t) = 0$.

У прикладі максимальна швидкість зміни вхідної величини, тобто вхідного сигналу регулятора швидкості, складає:

$$\left(\frac{d E_{\text{вх}}}{d t} \right)_{\text{MAX}} = 314 \cdot 1,5 = 471 \text{ В/с.}$$

Для більшості електронних систем, що виконують регулювання, справедлива амплітудно-частотна характеристика, наведена на рис.2.4.

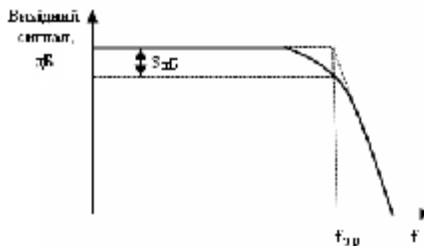


Рисунок 2.4 – Типова частотна характеристика систем регулювання

Тоді максимальна швидкість зміни вихідного параметра складатиме:

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{MAX} = S \cdot \left(\frac{dE_{VCT}}{dt} \right)_{MAX} = 40 \cdot 471 = 18840 \text{ (км/год)/с.}$$

Якщо двигун не зможе змінювати швидкість на 18840 км/год за 1 секунду, то вихідна швидкість буде мати меншу амплітуду, тобто вихідний сигнал буде ослабленим. Щоб цього не відбулося, необхідно обмежувати кутову частоту ω . При цьому її значення не повинно виходити зі смуги пропускання частот.

Частота, при якій рівень вихідного сигналу зменшується до 70,7% від значення вихідного сигналу в середині смуги частот, називається частотою зрізу $f_{зр}$.

Іноді замість смуги частот оперують параметром, що називається часом відгуку.

Час відгуку – це час, затрачуваний системою на відгук, тобто час, затрачуваний на зміну вихідного сигналу від 10 до 90% його кінцевої максимальної величини при встановленні на вході «східчастого» сигналу. Час відгуку визначається за формулою:

$$t_{ВД} = 0,35 / f_{зр}.$$

2.2 Завдання

2.2.1 Система регулювання температури має температурний діапазон від мінус 20 до плюс 80 °С. При установці на шкалі регулятора температури 28 °С обмірювана температура склала 26,5°С. Обчисліть:

- а) точність системи у відсотках від установленної температури;
- б) точність системи у відсотках від температурного діапазону.

2.2.2 Система регулювання за положенням має чутливість, що дорівнює 5 мм/В. Яка зміна вхідної величини приведе до зміни положення на 89 мм? Зобразить графік чутливості.

2.2.3 Згідно технічним даним, потенціометр на 10 кОм має роздільну здатність 0,01% від усього діапазону вимірів і лінійність

± 50 Ом. Визначите: а) роздільну здатність в омах; б) лінійність у відсотках до всієї робочої шкали; в) максимальну точність в омах.

2.2.4 Система регулювання за положенням має чутливість $S = 5$ мм/В, лінійність системи дорівнює $\pm 2,54$ мм, а повний діапазон вимірів складає 0 ... 50,8 мм. Складіть типовий графік чутливості, виходячи з незалежної лінійності.

2.2.5 Система регулювання за положенням має чутливість $S = 5$ мм/В. Діапазон регулювання складає від 0 до 50 мм. Ширина смуги частот дорівнює 0,3 кГц, а максимальна швидкість зміни вхідної напруги складає 1 В/с. Визначите час відгуку.

2.2.6 До входу системи, зазначеної в 2.2.5, прикладений лінійний сигнал, що наростає зі швидкістю 20 В/с. Яка буде помилка в положенні через 0,5 с?

2.3 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити результати розв'язання задач з пунктів 2.2.1÷2.2.6.

2.4 Контрольні запитання

- 1 Чим відрізняється абсолютна похибка від приведенної?
- 2 Що оцінює чутливість ЕС?
- 3 Як визначається чутливість системи?
- 4 Що можна розрахувати, якщо відома чутливість системи?
- 5 Який параметр називається роздільною здатністю? В чому може бути виражена роздільна здатність?
- 6 Чим відрізняється роздільна здатність по вхідному параметру від роздільної здатності по вихідному параметру?
- 7 Якими способами оцінюється лінійність ЕС?
- 8 Чим відрізняється лінійність у відсотках від максимуму величини від лінійності від конкретної величини?
- 9 Який параметр називається частотою зрізу?
- 10 Як визначається смуга пропускання частот системи?
- 11 Який параметр системи називається часом відгуку?

3 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3 ”СПЕКТРИ ПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ”

Мета роботи: закріплення теоретичних відомостей щодо спектрального аналізу періодичних сигналів; розрахунок і побудова лінійчастих спектрів послідовностей періодичних імпульсів заданої форми; виконання порівняльного аналізу отриманих спектрів шляхом визначення впливу параметрів сигналів, що аналізуються, на спектри цих сигналів.

3.1 Основні теоретичні відомості

В залежності від виду функції, що описує сигнал, розрізняють детерміновані та випадкові сигнали.

Детермінований сигнал описується функцією часу у формі аналітичного виразу або графіка, що дозволяє визначити його параметри в будь-який момент часу. До детермінованих сигналів відносяться періодичні сигнали й одиночні сигнали (імпульси).

В реальних умовах періодичні сигнали не існують, оскільки ідеальний періодичний сигнал нескінченний у часі, а реальні сигнали мають початок і кінець. Однак у багатьох випадках кінцівкою дії сигналу можна знехтувати.

Періодичні сигнали описуються функцією виду:

$$x(t) = x(t + nT),$$

де $T = 2\pi/\omega_1$ - період коливань; n – будь-яке додатне або від’ємне ціле число; ω_1 - кругова частота основної (першої) гармоніки.

Така періодична функція може бути представлена у вигляді суми членів ряду інших функцій. Найчастіше з цією метою використовується ряд Фур’є.

Тригонометрична форма розкладання періодичної функції в ряд Фур’є має вигляд:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)], \quad (3.1)$$

$$\text{де} \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(n\omega_1 t) dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(n\omega_1 t) dt.$$

Еквівалентна форма представлення ряду Фур'є має вигляд:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_1 t - j_n)], \quad (3.2)$$

де A_n - амплітуда n -ої гармоніки; j_n - її початкова фаза.

Співвідношення між коефіцієнтами ряду форм (3.1) і (3.2) мають вигляд:

$$a_n = A_n \cos j_n, \quad b_n = A_n \sin j_n,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad j_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

Ряд Фур'є може бути записаний також у комплексній формі:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n \exp(jn\omega_1 t),$$

де $\tilde{A}_n = A_n \exp(-jj_n)$ - комплексна амплітуда n -ої гармоніки; j_n - її початкова фаза.

Сукупність модулів A_n комплексних амплітуд утворюють амплітудно-частотний спектр періодичної функції $x(\omega t)$, а сукупність фаз j_n - фазочастотний спектр.

Амплітудний спектр сигналу, що описується періодичною функцією, є дискретним (лінійчастим), у якому окремі спектральні складові ідуть з інтервалом, що дорівнює частоті основної гармоніки $\omega_1 = 2\pi / T$.

3.2 Завдання

3.2.1 Сигнал є періодичною послідовністю імпульсів прямокутної форми з амплітудою A , тривалістю t і періодом повторення T (рис. 3.1). Аналітичний опис функції має вигляд:

$$Z(x) = \begin{cases} A, & \text{якщо } |x| \leq \alpha \\ 0, & \text{якщо } |x| > \alpha \end{cases},$$

де $x = \omega t$; $\alpha = \tau / T$.

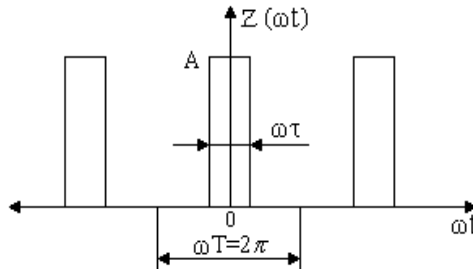


Рисунок 3.1 – Імпульси прямокутної форми

Обчисліть лінійчасті спектри при $A = 1$ та $\alpha = 0,05; 0,1$. Число гармонік N прийняти рівним 20.

Побудуйте лінійчастий спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів $Z(x)$, відклавши по осі абсцис ω / ω_1 (номери гармонік).

За результатами розрахунків зробить висновки щодо:

- пелюсткового характеру огинаючої спектра послідовності прямокутних імпульсів;
- відсутності чи присутності в спектрі гармонік з номерами, кратними щільності послідовності імпульсів $q = T/t$;
- тенденції змінення рівня спектральних складових та ширини основного пелюстка при збільшенні періоду T удвічі;
- наявності прямої чи зворотної залежності між тривалістю сигналу та шириною його спектра;
- відстані за частотою між сусідніми гармоніками (дорівнює вона чи ні частоті проходження імпульсів).

Зауваження: спектральні складові заданої функції можна обчислити також за формулою:

$$A_n = \frac{2A}{p \cdot n} |\sin(p n t / T)|.$$

Вказівка: функція $Z(w t)$ парна, тому синусні складові b_n (формула 3.1) в розкладанні дорівнюють нулю.

3.2.2 Сигнал описується періодичною функцією, що складається з імпульсів косинусоїдальної форми. Функція на ділянці $-p \leq w t \leq p$ описується формулою:

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \cdot \frac{(\cos(x) - \cos(U))}{1 - \cos(U)}, & \text{якщо } |x| \leq U \\ 0 & , \text{якщо } U < |x| \leq p \end{cases},$$

де $x = w t$.

Задано нижній кут відсікання, який може виражатися в градусах (позначається як UG) і в радіанах (позначається як U), причому $U = UG \cdot \pi / 180$. При розрахунку прийняти, що $UG = 60^\circ$, $A = 1$.

Побудуйте графік залежності $\Phi(x)$ в інтервалі зміни аргументу x від мінус π до плюс π .

Розрахуйте постійну складову $a_0/2$ і амплітуди гармонік a_n при $n=1 \div 15$, а також їхні значення, виражені в децибелах відносно першої гармоніки сигналу:

$$AD_n = 20 \lg(a_n / a_1).$$

Побудуйте амплітудно-частотний спектр періодичної функції $\Phi(x)$, відклавши на осі абсцис відношення w/w_1 (інтервал зміни відношення прийняти рівним від 0 до 15).

Вказівки: 1) функція $\Phi(w t)$ парна, тому синусні складові b_n (формула 3.1) в розкладанні дорівнюють нулю;

2) період функції $\Phi(x)$ дорівнює $2p$;

3) програма розрахунку спектра заданої функції наведена у Додатку А.

3.2.3 Сигнал $S(t)$ є періодичною послідовністю трикутних імпульсів (рис. 3.2).

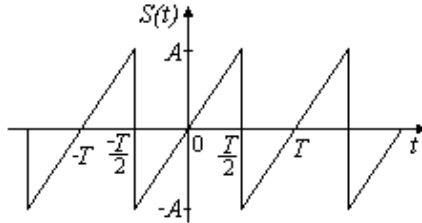


Рисунок 3.2 – Пилкоподібний сигнал

В межах періоду він описується функцією:

$$S(t) = A \left(1 - 4 \frac{|t - nT|}{T} \right), \quad \left(n - \frac{1}{2} \right) T \leq t < \left(n + \frac{1}{2} \right) T.$$

Сигнал $S(t)$ є парною функцією, тому в його спектрі присутні тільки косинусні складові:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \left(1 - 4 \frac{|t|}{T} \right) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt = \frac{4A}{(\pi n)^2} (1 - (-1)^n).$$

Сигнал $X(t)$ є періодичною послідовністю трикутних імпульсів (рис.3.3).

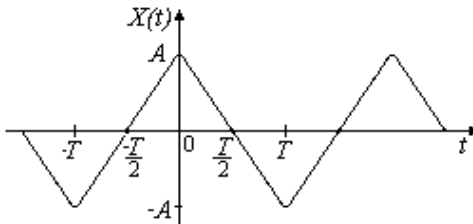


Рисунок 3.3 – Послідовність трикутних імпульсів

В межах періоду він описується функцією:

$$X(t) = \frac{2A}{T}(t - nT), \quad \left(n - \frac{1}{2}\right)T \leq t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T.$$

Сигнал $X(t)$ є непарною функцією, тому в його спектрі присутні тільки синусні складові:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt = \frac{2A}{\pi n} (-1)^n.$$

Побудуйте спектри сигналів $S(t)$ та $X(t)$. Порівняйте швидкості спадання спектрів вказаних сигналів. Зробіть висновок щодо залежності швидкості спадання спектра від ступеня гладкості сигналу.

3.3 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- математичні моделі та графіки часових залежностей сигналів;
- зображення отриманих спектрів сигналів;
- висновки щодо впливу значень параметрів моделей сигналів на форму спектрів;
- висновки щодо порівняльного аналізу форм спектрів різних сигналів.

3.4 Контрольні запитання

- 1 Які сигнали називаються детермінованими?
- 2 На який інтервал часу розповсюджується періодичність функцій, що описують періодичні сигнали?
- 3 Яким умовам повинна задовольняти функція при розкладанні в ряд Фур'є?
- 4 З яким частотним інтервалом ідуть окремі спектральні складові ряду Фур'є?
- 5 Які складові ряду Фур'є утворюють амплітудно-частотний спектр періодичної функції, а які фазочастотний спектр?
- 6 Як впливає амплітуда періодичного сигналу на форму амплітудно-частотного спектра?

4 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4

”СПЕКТРИ ОДИНОЧНИХ ІМПУЛЬСІВ”

Мета роботи: закріплення теоретичних відомостей щодо спектрального аналізу неперіодичних сигналів; розрахунок і побудова неперервних спектрів одиночних імпульсів заданої форми і серії імпульсів; виконання порівняльного аналізу отриманих спектрів і визначення залежності їх форми від параметрів імпульсів.

4.1 Основні теоретичні відомості

Перейти від періодичної функції до одиночного імпульсу можна шляхом збільшення періоду $T \rightarrow \infty$. При цьому проміжки між окремими спектральними складовими $\omega = 2\pi / T \rightarrow 0$ і спектр сигналу з лінійчастого стає неперервним. Відповідно і дискретні значення частоти ω_n замінюються на безперервну величину ω . В результаті ряд Фур'є приймає вид інтегралу:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.1)$$

Функція $S(\omega)$, що входить в (4.1), є спектральною густиною:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.2)$$

Формули (4.1) і (4.2) називаються відповідно зворотним і прямим перетвореннями Фур'є. Вираз (4.1) можна представити в іншому вигляді:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + j(\omega)) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| \sin(\omega t + j(\omega)) d\omega.$$

З парності модуля і непарності фази для дійсних функцій випливає, що підінтегральна функція в першому інтегралі - парна, а в

другому - непарна. Отже, другий інтеграл з урахуванням границь інтегрування дорівнює нулю і тому формула (4.1) приводиться до більш зручного для розрахунків вигляду:

$$f(t) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} |S(w)| \cos(wt + j(w)) dw. \quad (4.3)$$

Комплексний вираз для спектральної густини:

$$S(w) = A(w) - jB(w) = |S(w)| e^{jj(w)},$$

$$\text{де } A(w) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(wt) dt; \quad B(w) = \int_0^{\infty} f(t) \sin(wt) dt.$$

Амплітуда і фаза спектральної густини:

$$|S(w)| = \sqrt{[A(w)]^2 + [B(w)]^2}; \quad j(w) = -\arctan[B(w)/A(w)].$$

Інтеграл Фур'є оперує з неперіодичними функціями, тому з його допомогою можна аналізувати не тільки одиночні імпульси, але і пакет імпульсів.

Розглянемо фізичну суть приведених виразів прямого і зворотного перетворення Фур'є.

Відповідно (4.1) одиночний імпульс довільної форми, що описується дійсною функцією $f(t)$ та відповідає умовам Діріхле, представляється нескінченною сумою синусоїдальних коливань. Ці коливання нескінченно малі за амплітудою і відрізняються за частотою на нескінченно малу величину. Ця різниця за частотою складає dw , а амплітуда складової дорівнює $S(w)dw$, де $S(w)$ - *спектральна густина* розмірністю В/Гц.

За допомогою спектральної густини можна визначити потужність сигналу при навантаженні в 1 Ом в інтервалі частотного спектра в границях від w_1 до w_2 :

$$\Delta P = \frac{1}{2p} \int_{w_1}^{w_2} |S(w)|^2 dw.$$

4.2 Завдання

4.2.1 Одиночний імпульс прямокутної форми займає інтервал часу від 0 до t . Побудуйте два графіка модуля спектральної густини від частоти сигналу (амплітудні спектри) для значень $t = 0,1\text{с}$ та $t = 0,05\text{с}$. Амплітуда сигналу дорівнює: $AM = 1\text{В}$.

Розрахуйте ефективну ширину спектра, якщо при пелюстковому характері спектра за ефективну ширину спектра можна прийняти ширину його основного пелюстка, яка дорівнює $2p/t$, якщо будується амплітудний спектр $S(w)$.

Зробіть висновки щодо:

- збігу форм отриманих амплітудних спектрів і функції виду $\sin(x)/x$;
- однаковості ширини пелюстків амплітудних спектрів;
- прямої чи зворотної залежності ширини спектра від тривалості імпульсу;
- дотримання співвідношення невизначеності, яке стверджує, що база сигналу (добуток ефективних значень тривалості сигналу та ширини його спектра) не може бути менше одиниці;
- рівності значення спектральної функції на нульовій частоті площі імпульсу.

Вказівки:

а) значення спектральної густини розраховуються в N точках частотної осі з кроком DF . Чим більше N , тим вище точність розрахунку, але й час розрахунку збільшується. Тому достатньо прийняти $N=100$;

б) спектр розраховується в частотному діапазоні від мінус fh до плюс fh з центральним значенням частоти $f = 0$ та $fh = k/t$, де $k=5\div 6$. Якщо спектр не спадає суттєво біля країв, то слід підвищити k ;

в) при побудові залежності $S(w)$ слід пам'ятати, що $w = 2\pi f$;

г) тривалість заданого одиночного імпульсу скінченна, тому нескінченні границі інтегрування в формулі (4.3) замінюються на скінченні;

д) функція, що описує заданий імпульс, вводиться в програму за допомогою окремого програмного блоку, який викликається командою Add Line (в пакеті програм "Mathcad");

е) приклад розрахунку приведений у Додатку Б.

4.2.2 Розрахуйте спектральну густину двох прямокутних імпульсів однакової тривалості t , якщо один імпульс займає інтервал часу від 0 до t , а другий - від T до TM . При розрахунках прийняти, що амплітуда імпульсів $AM = 1$, тривалість $t = 0,1$ с, $T = 1$ с.

Побудуйте графік спектральної густини з використанням вказівок до задачі 1. Порівняйте спектр двох прямокутних імпульсів тривалістю $t = 0,1$ с зі спектром одного такого ж імпульсу із задачі 1.

Вказівка: при двох прямокутних імпульсах функція, що описує сигнал, приймає вигляд (представлена у формі, що сприймається пакетом програм "Mathcad"):

$$f(t) := \begin{cases} AM & \text{if } 0 \leq t \leq t \\ AM & \text{if } T \leq t \leq TM \\ 0 & \text{if } t < T \text{ or } t > TM \\ 0 & \text{if } t > TM \end{cases}$$

В іншому програма буде подібна програмі задачі 1 за виключенням границь інтегрування.

4.2.3 Одиночний імпульс має форму трапеції (рис. 4.1).

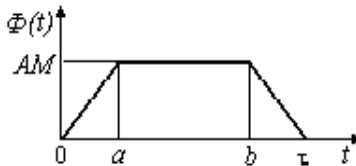


Рисунок 4.1 – Імпульс у формі трапеції

Розрахуйте спектральну густину сигналу при кількості розрахункових точок $N = 100$, початковій частоті розрахункового інтервалу f_h , що дорівнює мінус 50, кроці зміни частоти $DF = 1$, параметрах імпульсу: амплітуді імпульсу $AM = 1$; $a = 0,02$; $b = 0,08$; $t = 0,1$.

Зробіть висновок щодо розмитості спектра.

Вказівка. Функція, що описує сигнал, має вигляд:

$$f(t) := \begin{cases} \left[\left(\left(AM \cdot \frac{t}{a} \right) \right) \right] & \text{if } 0 \leq t \leq a \\ AM & \text{if } a < t \leq b \\ AM \cdot \left[1 - \frac{(t-b)}{(t-b)} \right] & \text{if } b < t \leq t \\ 0 & \text{if } t > t \end{cases} .$$

4.3 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- математичні моделі сигналів;
- зображення отриманих спектрів сигналів;
- висновки щодо впливу значень параметрів моделей сигналів на форму спектрів;
- висновки щодо порівняльного аналізу форм спектрів різних сигналів.

4.4 Контрольні запитання

- 1 Як відрізняються спектри періодичних сигналів та одиночних імпульсів?
- 2 Яка залежність між тривалістю імпульсу та шириною його спектра?
- 3 Амплітуда основного пелюстка спектра одиночного прямокутного сигналу визначається наступним співвідношенням:
 $S_0 = AM \cdot t$, де AM – амплітуда імпульсу, а t – його тривалість. При двох імпульсах це значення подвоюється. Чому?
- 4 Розмитість спектра характеризується кількістю пелюстків та їх амплітудою. Як змінюється форма пелюстків при пологих фронтах імпульсів порівняно з крутими фронтами? Спектр якого сигналу є найбільш розмитим?
- 5 Радіотехнічна система має близьке за частотою розташування каналів радіозв'язку. Які форми сигналів треба вибирати при передачі інформації, щоб радіосигнали, що йдуть по різних каналах, не впливали один на одного та не приводили б до взаємних завад?

5 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5

”ЧАСТОТНА МОДУЛЯЦІЯ”

Мета роботи: ознайомлення з методами частотної модуляції; отримання спектрів модульованих сигналів при частотній модуляції; порівняльний аналіз спектрів сигналів при різних значеннях індексу частотної модуляції.

5.1 Основні теоретичні відомості

5.1.1 Модуляція

Модуляцією називається процес керування одним або декількома параметрами коливань високої частоти відповідно до закону повідомлення, що передається.

Модуляцію широко використовують у різних галузях техніки, зв'язаних з передачею та перетворенням сигналів (повідомлень), наприклад, у техніці зв'язку і автоматичного керування, в обчислювальній техніці тощо.

Розрізняють модуляцію з *гармонічною* та *імпульсною* несучою.

При модуляції з гармонічною несучою функція-переносчик

$$u_H(t) = U_H \sin(\omega_H t + q_H) \quad (5.1)$$

повністю визначається трьома параметрами: амплітудою U_H , круговою частотою ω_H і початковою фазою q_H . В залежності від того, який параметр з перелічених підлягає модуляції, розрізняють *амплітудну* (АМ), *частотну* (ЧМ) і *фазову* (ФМ) модуляції.

Нехай $q_H = p / 2$. Тоді функція-переносчик прийме вигляд:

$$u_H(t) = U_H \cos \omega_H t.$$

Математично процес модуляції можна представити як множення модулюемого параметра на змінну величину

$$1 + m u_M(t), \quad (5.2)$$

де m – постійний коефіцієнт, що характеризує міру модулюючого впливу, і який називається *глибиною модуляції*.

5.1.2 Частотна модуляція аналогових повідомлень

Частотна модуляція є домінуючою в сучасних системах передачі інформації НВЧ діапазону, наприклад, супутнико-космічних системах радіозв'язку та телебаченні. При ЧМ забезпечується висока завадозахищеність та висока якість передачі інформації, допускається можливість одночасної роботи у спільному каналі зв'язку великого числа кореспондентів.

При частотній модуляції модулюючий сигнал змінює частоту несучого коливання, а амплітуда останнього залишається незмінною.

Нехай гармонічний тестовий сигнал, що передається, який є модулюючим, описується функцією:

$$u_M(t) = U_M \cos(w_M t). \quad (5.3)$$

Тоді при ЧМ кругова частота модульованого коливання відповідно (5.2) дорівнює:

$$w_{qM}(t) = w_H (1 + m U_M \cos w_M t).$$

Оскільки миттєва кругова частота $\omega(t)$ пов'язана з повною фазою $q(t)$ співвідношенням $q(t) = \int_0^t w(t) dt$, то частотно-модульований сигнал прийме вигляд:

$$\begin{aligned} u_{qM}(t) &= U_H \cos q_{qM}(t) = U_H \cos \int_0^t w_{qM}(t) dt = U_H \cos(w_H t + \frac{w_H m U_M}{w_M} \sin w_M t) = \\ &= U_H \cos(w_H t + m_f \sin w_M t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

де $m_f = w_H m U_M / w_M$ - *індекс частотної модуляції*, який визначається як:

$m_f = w_d / w_M = f_d / f_M$ - відношення девіації частоти до частоти модуляції;

девіація частоти (frequency deviation) $w_d = \max |w_{qM} - w_H|$ - максимальне відхилення миттєвої частоти модульованого сигналу від частоти несучого коливання.

Девіація частоти прямо пропорційна амплітуді сигналу, що модулює: $w_d = w_H m U_M = k_f U_M$, де k_f - коефіцієнт пропорційності, аналогічний коефіцієнту чутливості, він задає девіацію частоти на 1 В.

Отже, девіація частоти w_d не залежить від частоти модулюючого сигналу, а індекс частотної модуляції обернено пропорційний вказаній частоті.

5.1.3 Спектр сигналу з гармонічною частотною модуляцією

Тригонометричним перетворенням вираз для ЧМ-сигналу (5.4) представляється у вигляді

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_H \cos(m_f \sin w_M t) \cdot \cos w_H t - U_H \sin(m_f \sin w_M t) \cdot \sin w_H t. \quad (5.5)$$

Розклавши періодичні функції (5.5) у ряд Фур'є, отримаємо:

$$\begin{aligned} u(t) = & U_H J_0(m_f) \cos w_H t + U_H J_1(m_f) [\cos(w_H + w_M)t - \cos(w_H - w_M)t] + \\ & + U_H J_2(m_f) [\cos(w_H + 2w_M)t - \cos(w_H - 2w_M)t] + \dots \\ & + U_H J_n(m_f) [\cos(w_H + nw_M)t - \cos(w_H - nw_M)t] + \dots, \end{aligned} \quad (5.6)$$

де $J_n(m_f)$ - Бесселева функція першого роду n -порядку від аргумента m_f .

Згідно (5.6) при ЧМ спектр високочастотного сигналу має нескінченне число спектральних складових, розташованих симетрично щодо частоти несучої через інтервали, рівні w_M . Частоти цих спектральних складових дорівнюють $w_H \pm nw_M$, а амплітуди - $U_H J_n(m_f)$.

Теоретично спектр ЧМ-сигналу безмежний. Однак більша частина енергії ЧМ-сигналу зосереджена в смузі частот:

$$\Delta f_{\text{СП}} = 2(1 + m_f + \sqrt{m_f}) F,$$

де F - найвища частота в спектрі сигналу, що модулює.

На цю величину слід розраховувати смуги пропускання високочастотних трактів передавачів та приймачів. При $m_f \ll 1$ ширина спектра ЧМ-сигналу: $\Delta f_{\text{СП}} = 2F$.

Частотна модуляція з індексом $m_f < 1$ є вузькосмуговою, з індексом $m_f > 2 \div 3$ - широкосмуговою. Переваги частотної модуляції в повній мірі реалізуються при $m_f > 1$.

Для неспотвореного прийому модульованого сигналу смуга пропускання усіх високочастотних трактів передавача і приймача повинна дорівнювати або бути більше ширини спектра випромінюваного сигналу.

Випромінювання, що лежать за межами виділеної смуги пропускання, називаються позасмуговими. Їхній рівень не повинний перевищувати визначеної, точно нормованої величини. У протилежному випадку даний канал зв'язку буде створювати завади іншим каналам.

5.1.4 Частотна модуляція цифрових повідомлень

При сучасних способах передачі інформації сигнали представляються у цифровому вигляді. Тому передається не неперервний аналоговий сигнал, а послідовність цілих чисел, які можуть приймати значення з деякої кінцевої фіксованої множини. Ці числа називаються символами. Вони надходять від джерела інформації з періодом T , а частота, що відповідає цьому періоду, називається символьною швидкістю $f_T = 1/T$.

При передачі дискретної послідовності символів кожному з можливих значень символу відповідає деякий набір параметрів несучого коливання. Ці параметри не змінюються протягом інтервалу T , тобто до приходу наступного символу.

Такий спосіб модуляції, коли параметри несучого коливання змінюються стрибкоподібно, називається *маніпуляцією*.

При частотній маніпуляції (ЧМн; англійський термін FSK – frequency shift keying) кожному можливому значенню символу, що передається, зіставляється своя частота. На протязі кожного символьного інтервалу передається гармонічне коливання з частотою, що відповідає поточному символу.

Для підвищення завадостійкості ЧМн бажано, щоб посилки, що відповідають різним символам, були некорельовані. Для виконання цієї умови потрібно, щоб мінімальне значення відстані між частотами складало:

$$\Delta w_{\min} = \frac{p}{T}, \quad \Delta f_{\min} = \frac{1}{2T} = \frac{f_T}{2}. \quad (5.7)$$

Двопозиційна (бінарна) ЧМн, частоти якої вибрані відповідно (5.7), отримала назву *мінімальної частотної маніпуляції* (МЧМн, англійський термін MSK – minimum shift keying).

Двійкові системи енергетично більш ефективні порівняно з багаторівневими системами, але ефективність використання смуги частот у них менша.

Ефективність використання смуги частот виражається питомою швидкістю передачі, тобто кількістю переданих бітів в секунду на один герц [біт/(с·Гц)]. Ця нормована величина є важливим параметром системи.

Частотна маніпуляція виконується за допомогою генератора напруги, що керується напругою. Логічному стану 1 відповідає частота передачі f_1 , а логічному 0 – частота f_2 . Девіація частоти для когерентної FSK (такої, що допускає когерентну демодуляцію, при якій частота опорної несучої демодулятора повинна бути синхронною з модульованою несучою):

$$f_d = 2\Delta f = f_1 - f_2 = 1/(2T_b), \quad (5.8)$$

де $T_b = T$ – тривалість біта вхідної послідовності даних.

Частотно-маніпульований сигнал – це синусоїдальний сигнал, частота якого приймає два значення:

$$f_1 = f_H + \Delta f; \quad f_2 = f_H - \Delta f, \quad (5.9)$$

де f_H – частота несучого коливання.

5.2 Завдання

5.2.1 За допомогою пакета програм Mathcad обчисліть значення бесселевої функції 1-го роду n – порядку при $n = 0, 1, 2, \dots, 8$.

Діапазон зміни індексу частотної модуляції m_f прийняти рівним $0 \div 20$.

За допомогою отриманих графіків побудуйте два амплітудних спектри при двох заданих значеннях m_f відповідно до номера варіанта (табл. 5.1) та $U_H = 1$ В.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані до пунктів 5.2.1 і 5.2.2

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m_f	1,2 5,4	3,5 6,0	1,5 10	4,0 5,5	2,0 6,0	3,0 6,5	1,5 7,0	1,0 4,5	2,5 8,0	0,5 14	4,4 12
№ вар.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
m_f	0,5 12	2,5 5,0	3,0 13	2,0 11	3,5 6,0	2,5 6,5	1,5 7,0	15 4,5	2,5 12	0,5 10	4,0 6,0

Вказівки. 1) при обчисленні бesselевих функцій необхідно використовувати оператори типу: $I0(x):=J0(x)$; $I1(x):=J1(x)$; $I2(x):=Jn(2,x)$; $I7(x):=Jn(7,x)$; приклад розрахунку бesselевих функцій приведений у Додатку В;

2) спектрограми є лінійчастими та симетричними відносно w_H . На осі абсцис відкладається відносна частота w / w_H . Приклад побудови спектрограми приведений на рис. 5.1. По осі ординат відкладено відношення амплітуди складової до амплітуди немодульованого сигналу.

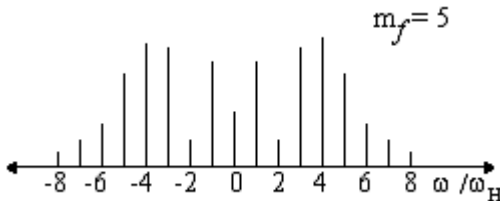


Рисунок 5.1 – Амплітудний спектр сигналу з гармонічною частотною модуляцією

5.2.2 Розрахуйте смугу пропускання високочастотного тракту радіопередавача, якщо найвища частота F у спектрі сигналу, що модулює, складає 2 кГц. Значення індексу частотної модуляції взяти з таблиці 5.1 (перша задана таблична величина).

5.2.3 Девіація частоти в ЧМ-радіомовленні обмежена величиною до +75 кГц. Сигнал, що модулює, має максимальну частоту 15 кГц. Розрахуйте індекс частотної модуляції.

5.2.4 Задане кодове слово (табл. 5.2) передається послідовним кодом, починаючи з молодшого розряду. Символьна швидкість f_T задана у таблиці 5.2. За допомогою програми EWB і схеми, показаної

на рис. 5.2, отримайте модульований сигнал з використанням викочастотної когерентної маніпуляції з мінімальним частотним зсувом (MSK).

Таблиця 5.2 – Вихідні дані до пункту 5.2.4

№ вар.	Кодове слово	Симв. швидкість f_T , кбіт/с	№ вар.	Кодове слово	Симв. швидкість f_T , кбіт/с
1	01011100	1000	12	01101100	500
2	11010110	32	13	10010100	300
3	01000110	500	14	01010001	100
4	11101011	2000	15	10010010	200
5	10001010	100	16	00110101	1000
6	00101011	700	17	10101110	400
7	01001011	200	18	00100101	500
8	01101000	400	19	10111000	600
9	10011001	1000	20	10100011	64
10	01110010	600	21	11101001	300
11	11010111	300	22	10001101	100

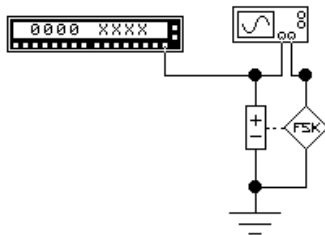


Рисунок 5.2 – Частотний модулятор цифрових повідомлень

Вказівки: 1) відповідно до формул (5.8) та (5.9) необхідно розрахувати девіацію частоти f_d , а також вибрати частоти f_1 та f_2 , які є параметрами генератора FSK (рис. 5.2), що керується напругою. Значення частоти f_2 бажано вибрати близькою до символної швидкості f_T таким чином, щоб в інтервал тривалості імпульсу вміщувалося ціле число півперіодів модульованого коливання;

2) виконайте моделювання роботи схеми (рис. 5.2) з розрахованими параметрами генератора FSK.

5.3 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- мету роботи;
- амплітудні спектри модульованих сигналів відповідно пункту 5.2.1;
- рішення задач із завдань з пунктів 5.2.2 і 5.2.3;
- часову залежність ЧМн-сигналу, отриману відповідно завданню пункту 5.2.4;
- висновки.

5.4 Контрольні запитання

- 1 Яка модуляція називається частотною?
- 2 За яким законом змінюється частота модульованого сигналу при ЧМ?
- 3 Що означають поняття: глибина модуляції, індекс частотної модуляції, девіація частоти?
- 4 Від яких параметрів залежать значення девіації частоти та індексу частотної модуляції?
- 5 Чи є спектр ЧМ-сигналу обмеженим?
- 6 Які умови треба виконати для неспотвореного прийому ЧМ-сигналу?
- 7 При якій умові в повній мірі реалізуються переваги частотної модуляції?
- 8 Що таке частотна маніпуляція?
- 9 Чим відрізняється мінімальна частотна маніпуляція від ЧМн?
- 10 За якої умови посилки, що відповідають різним символам при ЧМн, будуть некорельованими?
- 11 Яким параметром характеризується ефективність використання смуги частот?
- 12 Як визначається символна швидкість?
- 13 Яка ЧМн називається когерентною?
- 14 Чи можна стверджувати, що двопозиційна ЧМн енергетично більш ефективна порівняно з багаторівневими системами?
- 15 Якою величиною обмежена девіація частоти в ЧМ-радіомовленні?
- 16 З якими методами частотної модуляції Ви ознайомились?

6 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6 ”ВИПАДКОВІ СИГНАЛИ”

Мета роботи: ознайомлення з характеристиками і параметрами випадкових процесів; розрахунок кореляційних функцій і енергетичних спектрів випадкових процесів; визначення взаємозалежностей між шириною спектра випадкового сигналу і видом кореляційної функції.

6.1 Основні теоретичні відомості

У випадкових сигналах один або кілька параметрів випадково залежать від часу, тому вони відносяться до класу випадкових процесів. При рішенні різноманітних практичних задач найчастіше зустрічаються стаціонарні випадкові процеси.

В стаціонарному випадковому процесі відсутня тенденція до зростання або спадання в часі, він однорідний, характеристики різних реалізацій випадкового процесу близькі.

Приклад випадкового сигналу $y(t)$, що відноситься до класу стаціонарного, представлений на рис. 6.1,а.

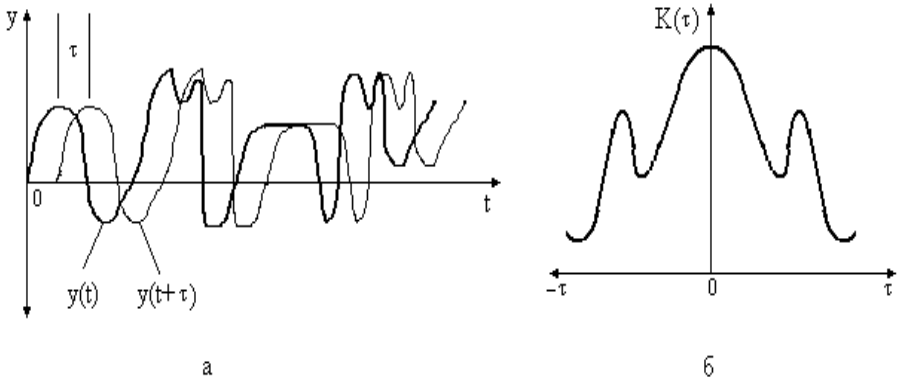


Рисунок 6.1 – Стаціонарний випадковий сигнал (а) і його кореляційна функція (б)

Основні властивості стаціонарного випадкового процесу описуються за допомогою кореляційної функції та енергетичного спектра.

Кореляційна функція - це середнє значення в часі добутку $y(t) \cdot y(t+t)$, де t - зсув в часі:

$$K(t) = \overline{y(t) \cdot y(t+t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) \cdot y(t+t) dt. \quad (6.1)$$

Функція $K(t)$ показує, як залежать одне від одного значення випадкової величини в моменти часу, що відстоять на t . Обчислити функцію $K(t)$ згідно (6.1) при середньому значенні функції $[y(t)]_{\text{сеп}} = 0$ можна в такий спосіб. Необхідно побудувати два графіки – заданий $y(t)$ і зсунутий на t : $y(t+t)$ (рис 6.1,а). Далі варто перемножити ординати цих двох кривих, що відповідають тим самим значенням часу t . В результаті вийде графік, що залежить від t . Площа, обмежена цим графіком і віссю абсцис у межах $-T$ до $+T$, розділена на довжину інтервалу $2T$, визначить одну точку кореляційної функції при обраному значенні t . Причому точність результату збільшується зі збільшенням T . Зробивши аналогічні побудови й обчислення при інших значеннях t , можна по точках побудувати кореляційну функцію $K(t)$ (рис. 6.1,б).

До основних властивостей кореляційної функції відносяться:

- парність відносно t : $K(t) = K(-t)$;
- рівність функції $K(0) = [y^2(t)]_{\text{сеп}}$ при $t=0$, тобто середньому значенню квадрата випадкової функції $y(t)$;
- максимум функції при $t=0$ і справедливості нерівності $K(t) < K(0)$.

Іншою важливою характеристикою стаціонарного випадкового процесу є енергетичний спектр, що розраховується за виразом:

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|S_T(jf)|^2}}{T}, \quad (6.2)$$

де $S_T(jf)$ - комплексний спектр часового відрізка тривалістю T деякої реалізації випадкової функції $y(t)$.

Кореляційна функція та енергетичний спектр зв'язані наступними залежностями:

$$G(f) = 4 \int_0^{\infty} K(t) \cos(2\pi f t) dt ; \quad K(t) = \int_0^{\infty} G(f) \cos(2\pi f t) df . \quad (6.3)$$

При $\tau = 0$ на підставі (6.3) обчислюється дисперсія випадкового процесу:

$$\sigma^2 = K(0) = \int_0^{\infty} G(f) df . \quad (6.4)$$

Розмірність кореляційної функції – B^2 ; енергетичного спектра – $B^2/\text{Гц}$ при τ у секундах.

З урахуванням розмірності енергетичного спектра $B^2/\text{Гц}$ вираз (6.4) можна трактувати як середню потужність, виділювану сигналом на опорі в 1 Ом. Вибравши границі інтегрування від f_1 до f_2 , одержимо потужність, що виділяється сигналом за рахунок спектральних складових, які знаходяться у даному частотному діапазоні.

6.2 Завдання

6.2.1 Кореляційна функція описується експонентною функцією з показником степеня, зведеним у степінь γ :

$$K(t) = B \cdot \exp(-b \cdot (|t|)^{\gamma}) .$$

Розрахуйте енергетичний спектр згідно (6.3) при трьох значеннях параметра b : 20; 1; 0,02. Прийміть: $B = 1$; $\gamma = 2$. Побудуйте графіки кореляційних функцій і енергетичних спектрів.

6.2.2 Кореляційна функція має вигляд трикутника й описується формулою:

$$K(t) = A \cdot \left(1 - \frac{|t|}{x} \right), \text{ якщо } |t| \leq x ; \quad K(t) = 0, \text{ якщо } |t| > x .$$

Розрахуйте кореляційну функцію й енергетичний спектр при $x = 0,1$ та при $x = 1$. Параметр $A = 1$.

6.2.3 В результаті вимірювань отримана осцилограма випадкового процесу $y(t)$. На підставі осцилограми сформована матриця U , перший стовпець якої відповідає значенням часової координати, а другий – відповідним значенням $y(t)$. Отримайте сплайн-функцію, що відповідає заданій залежності, потім інтерполуйте її. На основі отриманої інтерполяційної залежності розрахуйте кореляційну функцію та енергетичний спектр випадкового процесу. Результати вимірювань задаються викладачем.

Вказівки: 1) для отримання сплайн- та інтерполяційної функцій використовуйте оператори: $X:=U^{<0>}$, $Y:=U^{<1>}$, $Q:=\text{cspline}(X,Y)$, $Z:=\text{interp}(Q,X,Y,t)$. Побудуйте графіки $Y(X)$, $Z(t)$; 2) для розрахунку енергетичного спектра $G(f)$ необхідно мати аналітичний вираз кореляційної функції, який можна отримати за допомогою апроксимації; побудуйте графіки $R(t)$, $G(f)$.

6.3 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- мету роботи;
- графіки отриманих кореляційних функцій і енергетичних спектрів;
- висновки по роботі.

6.4 Контрольні запитання

- 1 Чи можна використовувати спектральний підхід до випадкових сигналів?
- 2 Який випадковий процес називається стаціонарним?
- 3 Чим характеризується випадковий процес у часовій і частотній областях?
- 4 Які основні властивості має кореляційна функція випадкового процесу?
- 5 Як змінюється ширина спектра випадкового сигналу при розширенні кореляційної функції?
- 6 Як змінюється амплітуда спектра при його розширенні?

7 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

”КІЛЬКІСТЬ ІНФОРМАЦІЇ ТА ЕНТРОПІЯ”

Мета роботи: ознайомлення з поняттями кількості інформації та ентропії, а також освоєння методик виконання розрахунків цих величин.

7.1 Основні теоретичні відомості

7.1.1 Ансамблі та джерела повідомлень

Будь-який матеріальний об'єкт разом із спостерігачем утворює систему, яка називається *джерелом повідомлень*. Природа спостерігача може бути різною, наприклад, спостерігачем може бути прилад. Спостерігач перетворює відомості про стан спостережуваного об'єкта на форму, зручну для прийняття інформації одержувачем повідомлень.

Джерело повідомлень є дискретним, якщо воно передає повідомлення з певного дискретного набору значень.

Якщо кожного проміжку часу дискретне джерело повідомлень вибирає одне з n можливих повідомлень $x_1, x_2, \dots, x_n$, то кажуть, що $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ є дискретною множиною повідомлень, або просто множиною повідомлень.

Як правило, для кожного повнішого опису джерела повідомлень на множині X визначають її ймовірнісну міру, тобто з кожним дискретним повідомленням x_k пов'язують ймовірність p_k його вибору джерелом.

Отже, множині $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ зіставляється ймовірнісна міра у вигляді множини $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, на яку накладено обмеження у

вигляді
$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Дві множини X і P дають достатньо повний опис дискретного джерела повідомлень у вигляді його ймовірнісної моделі, а тому разом вони утворюють ансамбль повідомлень дискретного джерела. Це означає, що кожного проміжку часу дискретним джерелом вибирається певне повідомлення $x_k \in X$ з ймовірністю $p(x_k) = p_k \in P$.

7.1.2 Поняття кількості інформації у конкретному повідомленні

Нехай X і Y - дві залежні випадкові величини: X приймає значення $x_1, \dots, x_n$ з імовірностями $p(x_1), \dots, p(x_n)$; Y приймає значення $y_1, \dots, y_m$ з імовірностями $p(y_1), \dots, p(y_m)$.

Нехай у деякому досліді випадкова величина Y приймає значення y_l . Оскільки X і Y залежні, поява значення y_l змінює ймовірність значення x_k випадкової величини X : апіорна ймовірність x_k дорівнює безумовній ймовірності $p(x_k)$, у той час як апостеріорна ймовірність дорівнює умовній ймовірності $p(x_k / y_l)$. Отже, значення y_l містить деяку кількість інформації щодо x_k .

Зазначена кількість інформації називається *кількістю інформації в індивідуальному повідомленні* і позначається через $i(x_k, y_l)$.

Функція, що описує кількість інформації в індивідуальному повідомленні, має вигляд:

$$i(x_k, y_l) = \log_a \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)}, \quad (7.1)$$

де a – основа логарифма, який береться за будь-якою зручною основою.

Використовуючи різноманітні представлення для спільної ймовірності $p(x_k, y_l)$, із формули (7.1) отримаємо

$$i(x_k, y_l) = \log_a \frac{p(x_k, y_l)}{p(x_k) p(y_l)} = \log_a \frac{p(y_l / x_k)}{p(y_l)} = i(y_l, x_k). \quad (7.2)$$

Тобто кількість інформації, що міститься в y_l щодо x_k , дорівнює кількості інформації, що міститься в x_k щодо y_l . Тому

величину $i(x_k, y_l)$ можна назвати *кількістю взаємної інформації* між x_k і y_l .

Функція $i(x_k, y_l)$ обертається в нуль, коли значення x_k і y_l незалежні, тобто коли:

$$p(x_k / y_l) = p(x_k).$$

При фіксованому значенні апіорної ймовірності $p(x_k)$ кількість взаємної інформації максимальна, якщо апостеріорна ймовірність $p(x_k / y_l)$ дорівнює одиниці:

$$\max i(x_k, y_l) = -\log_a p(x_k) = i(x_k) \quad (7.3)$$

(при фіксованій ймовірності $p(x_k)$).

Величина $i(x_k)$ визначає кількість власної інформації, що міститься в значенні x_k .

Нехай усі значення $x_1, \dots, x_n$ випадкової величини X мають однакову ймовірність $1/n$. Тоді формула (7.3) для кількості власної інформації в x_k приймає вигляд:

$$i(x_k) = \log_a n \quad (k = 1, \dots, n). \quad (7.4)$$

Кількістю власної умовної інформації називається величина $i(x_k / y_l)$, яка описує кількість *додаткової інформації*, що міститься в повідомленні x_k (відносно x_k), якщо y_l відомо:

$$i(x_k / y_l) = -\log_a p(x_k / y_l) \quad (7.5)$$

Середня кількість інформації $I(X, y_l)$, що міститься в y_l відносно значення X :

$$I(X, y_l) = \sum_k p(x_k / y_l) \log_a \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)} \quad (7.6)$$

Кількість інформації, що міститься в заданому значенні деякої випадкової величини відносно іншої випадкової величини, завжди додатна або дорівнює нулю, тобто $I(X, y_l) \geq 0$.

Для середньої кількості інформації, що міститься в значенні x_k , можна записати:

$$I(x_k, Y) = \sum_l p(y_l / x_k) \log_a \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)} \geq 0. \quad (7.7)$$

7.1.3 Одиниці вимірювання кількості інформації

Якщо в формулі (7.1) основа логарифма $m = 2$, то кількість інформації вимірюється в двійкових одиницях:

$$i(x_k, y_l) = \log_2 \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)} = \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)} \text{ дв.од.} \quad (7.8)$$

Звідси одну двійкову одиницю (біт) можна інтерпретувати так само, як кількість інформації, одержуваної у випадку, коли апостеріорна ймовірність в два рази більше апіорної або дорівнює кількості власної інформації в тому випадку, коли є вибір між двома рівноймовірними значеннями.

Аналогічно можна ввести десяткову одиницю кількості інформації, або хартлі; 1 дес. од. дорівнює кількості інформації, одержуваної в тому випадку, коли апостеріорна ймовірність у 10 разів більше апіорної або дорівнює кількості власної інформації в тому випадку, коли є вибір між десятима рівноймовірними значеннями:

$$i(x_k, y_l) = \lg \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)} \text{ дес.од.}$$

При проведенні математичних розрахунків зручно користуватися натуральними одиницями. Натуральна одиниця дорівнює кількості інформації, одержуваної у випадку, коли ймовірність зростає в e разів:

$$i(x_k, y_l) = \ln \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)} \text{ нат. од.}$$

7.1.4 Середня кількість інформації

Кількість інформації в конкретному повідомленні $i(x_k, y_l)$ є випадковою величиною. Для того, щоб цілком охарактеризувати випадкову величину i , потрібно задати множину всіх її значень $\{i_s\}$ і ймовірності цих значень $p(i_s)$. Важливою числовою характеристикою випадкової величини i є її математичне очікування, або середня кількість інформації, що міститься в Y відносно X :

$$I(X, Y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m p(x_k, y_l) \log_a \frac{p(x_k / y_l)}{p(x_k)}. \quad (7.9)$$

Величина $I(X, Y)$ називається також просто *кількістю інформації*.

Кількість інформації можна представити в одному із таких виглядів:

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= \sum_{k,l} p(x_k, y_l) \log_a \frac{p(x_k, y_l)}{p(x_k) p(y_l)} = \\ &= \sum_{k,l} p(x_k, y_l) \log_a \frac{p(y_l / x_k)}{p(y_l)} = \sum_{l=1}^m p(y_l) I(X, y_l), \end{aligned}$$

де $I(X, y_l)$ - середня кількість інформації, що міститься в значенні y_l .

Якщо випадкова величина Y однозначно визначає випадкову величину X , то в цьому випадку кількість інформації $I(X, Y)$ є функцією тільки розподілу $p(x_1), \dots, p(x_n)$:

$$\max I(X, Y) = I(X),$$

$$\text{де} \quad I(X) = -\sum_{k=1}^n p(x_k) \cdot \log_a p(x_k) \quad (7.10)$$

(формула Шеннона). Величина $I(X)$ визначає кількість інформації, що міститься в X , або середню кількість власної інформації в X та називається *мірою Шеннона*.

Середня кількість інформації досягає максимуму при рівномірному розподілі, коли $p(x_k) = 1/n$ для всіх $k = 1, \dots, n$ та

$$I(X) = \log_a n. \quad (7.11)$$

Така міра кількості інформації називається *мірою Хартлі*.

У загальному випадку маємо:

$$I(X) \leq \log_a n.$$

Величина $I(X/Y)$ описує середню кількість власної умовної інформації, що міститься в X , чи просто кількість умовної інформації, що визначається за формулою:

$$I(X/Y) = -\sum_{k,l} p(x_k, y_l) \cdot \log_a p(x_k, y_l).$$

7.1.5 Ентропія як міра невизначеності

Ентропія – кількісна міра невизначеності ситуації. Термін і поняття ентропії по-різному вводиться в фізиці та теорії інформації.

В теорію інформації ентропію ввів американський математик К.Е.Шеннон. В теорії інформації *ентропія* – кількісна міра невизначеності випадкової величини.

Формули для визначення кількості інформації та ентропії подібні. Наприклад, ентропія системи, яка описується дискретною випадковою величиною X із заданим рядом розподілу ймовірностей $p(x_1), \dots, p(x_n)$, визначається з виразу

$$H(X) = - \sum_{k=1}^n p(x_k) \cdot \log_a p(x_k).$$

Поняття ентропії відіграє фундаментальну роль в теоремах Шеннона, що встановлюють основні закономірності оптимального кодування інформації реальних повідомлень при передачі їх по каналам зв'язку.

Ентропія має наступні властивості:

- ентропія – величина дійсна та невід'ємна;
- ентропія залежить від розподілу $p(x_k)$ та не залежить від алфавіту $\{x_k\}$ (змісту повідомлень);
- ентропія мінімальна та дорівнює нулю, якщо $X = \text{const}$, тобто всі значення ймовірностей $p(x_k)$ дорівнюють нулю, крім одного, що дорівнює 1;
- ентропія максимальна і дорівнює $\log_a n$, якщо всі ймовірності $p(x_k) = 1/n$.

7.1.6 Приклади розрахунків

7.1.6.1 Приклад 1. Розрахунок кількості інформації.

Нехай розподіли $P(x_k)$, $P(y_l / x_k)$ задані таблицями 7.1 і 7.2.

Таблиця 7.1

k	$P(x_k)$
1	1/4
2	1/2
3	1/4

Таблиця 7.2

$P(y_l / x_k)$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0
x_2	1/4	1/2	1/4
x_3	1/4	1/4	1/2

Треба знайти кількість інформації:

$$i(x_k, y_l), i(x_k), i(y_k), I(x_k, y), I(x, y_l).$$

Використовуючи співвідношення теорії ймовірностей:

$$P(x_k, y_l) = P(x_k) P(y_l / x_k), \quad P(y_l) = \sum_k P(x_k, y_l), \quad P(x_k / y_l) = \frac{P(x_k, y_l)}{P(y_l)},$$

побудуємо таблиці 7.3, 7.4, 7.5 значень величин: $P(x_k, y_l)$, $P(y_l)$, $P(x_k / y_l)$.

Таблиця 7.3

$P(x_k, y_l)$	y_1	y_2	y_3
x_1	$1/4$	0	0
x_2	$1/8$	$1/4$	$1/8$
x_3	$1/16$	$1/16$	$1/8$

Таблиця 7.4

l	$P(y_l)$
1	$7/16$
2	$5/16$
3	$1/4$

Таблиця 7.5

$P(x_k / y_l)$	x_1	x_2	x_3
y_1	$4/7$	$2/7$	$1/7$
y_2	0	$4/5$	$1/5$
y_3	0	$1/2$	$1/2$

За допомогою формул (7.3), (7.7), (7.6) побудуємо таблиці значень шуканих величин в двійкових одиницях (таблиці 7.6 і 7.7).

Значення кількості інформації:

$$i(x_k) = i(x_k, y_l) + i(x_k / y_l),$$

$$\text{де } i(x_k / y_l) = -\log_2 P(x_k / y_l) = -\frac{\ln p(x_k / y_l)}{\ln 2}.$$

Таблиця 7.6

$i(x_k, y_l)$	y_1	y_2	y_3
x_1	1,194	$-\infty$	$-\infty$
x_2	-0,806	0,678	0
x_3	-0,806	-0,322	1

Таблиця 7.7

k, l	$i(x_k)$	$i(y_l)$	$I(x_k, y)$	$I(x, y_l)$
1	2	1,194	1,194	0,337
2	1	1,678	1,137	0,478
3	2	2	0,218	0,500

Значення " $-\infty$ " для $i(x_1, y_2)$, $i(x_1, y_3)$ утворюється в результаті формальної підстановки нульового значення апостеріорної ймовірності у формулі (7.7) і означає, що поява відповідних пар (x_1, y_2) , (x_1, y_3) неможлива. У зв'язку з цим і можливість появи значення "

∞ " дорівнює нулю. Значення "0" для $i(x_2, y_3)$ визначається тим, що значення x_2 і y_3 статистично незалежні:

$$P(y_3 / x_2) = P(y_3) \quad \text{та} \quad P(x_2 / y_3) = P(x_2).$$

Крім того, $i(x_1, y_1) = i(y_1)$ і в той же час $i(x_1, y_1) < i(x_1)$. Це пов'язано з тим, що $P(y_1 / x_1) = 1$, але $P(x_1 / y_1) < 1$.

Функція $i(x_k, y_l)$ визначена на множині пар (x_k, y_l) і приймає на цій множині з ненульовими ймовірностями ряд значень від - 0,806 до 1,194. Становить інтерес розподіл імовірностей цих значень. Шуканий розподіл поданий у таблиці 7.8.

Таблиця 7.8 – Розподіл імовірностей

i	-0,806	-0,322	0	0,678	1	1,194
$P(i)$	3/16	1/16	2/16	4/16	2/16	4/16

Знайдемо математичне очікування величини $i(x_k, y_l)$:

$$I(x, y) = \sum_{k,l} P(x_k, y_l) i(x_k, y_l).$$

Значення $I(x, y)$ може бути знайдено також шляхом усереднення:

$$I(x, y) = \sum_k P(x_k) I(x_k, y) = \sum_l P(y_l) I(x, y_l),$$

а також за допомогою даних, приведених у таблиці 7.8:

$$I(x, y) = 0,4221 \text{ дв.од.}$$

7.1.6.2 Приклад 2. Дискретне джерело A виробляє статистично незалежні повідомлення з розподілом імовірностей $P_A = \{0,4; 0,3; 0,15; 0,1; 0,03; 0,02\}$. Знайти ентропію даного джерела повідомлень.

Рішення. Ентропія $H(A)$ визначається за формулою:

$$H(A) = -\sum_i p(a_i) \log_2 p(a_i) = 0,4 \cdot 1,322 + 0,3 \cdot 1,737 + 0,15 \cdot 2,737 + 0,1 \cdot 3,322 +$$

+0,03 \cdot 5,059 + 0,02 \cdot 5,644 = 2,0573 \text{ біт/повідомлення.}

7.2 Завдання

7.2.1 Розрахуйте кількість інформації при заданих розподілах безумовної ймовірності $P(x_k)$ і умовної ймовірності $P(x_k/y_l)$ двох залежних випадкових величин X і Y (табл. 7.9, 7.10).

Таблиця 7.9 – Дані для розрахунку завдання 7.2.1

	Номер варіанту										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k	$P(x_k)$										
1	1/8	1/4	1/4	3/8	1/4	1/4	1/2	1/4	1/8	3/8	1/8
2	1/2	1/4	1/8	1/8	1/8	1/2	1/8	3/8	1/2	1/4	1/8
3	1/4	3/8	1/2	3/8	1/2	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8	1/2
4	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/4	1/4

	Номер варіанту										
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
k	$P(x_k)$										
1	1/4	1/4	1/4	1/2	1/8	1/4	1/8	3/8	1/4	1/2	1/4
2	1/2	3/8	1/4	1/8	3/8	1/2	1/8	1/8	1/8	1/8	1/2
3	1/8	1/8	1/4	1/4	1/8	1/8	1/4	1/8	1/2	1/8	1/8
4	1/8	1/4	1/4	1/8	3/8	1/8	1/2	3/8	1/8	1/4	1/8

Таблиця 7.10 - Дані для розрахунку завдання 7.2.1

Варіант 1					Варіант 2				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1/2	1/2	0	0	x_1	1/2	1/4	1/8	1/8
x_2	1/8	1/2	1/8	1/4	x_2	1/8	0	3/8	1/2
x_3	1/4	0	1/4	1/2	x_3	0	1/2	1/4	1/4
x_4	1/4	1/4	1/4	1/4	x_4	1/8	1/8	3/4	0

Варіант 3					Варіант 4				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	3/8	1/2	0	1/8	x_1	1/4	0	1/2	1/4
x_2	0	3/8	1/2	1/8	x_2	1/4	1/2	1/8	1/8
x_3	1/2	1/4	0	1/4	x_3	1/8	3/8	0	1/2
x_4	1/8	1/4	1/2	1/8	x_4	0	1/2	0	1/2

Продовження таблиці 7.10

Варіант 5					Варіант 6				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1/2	1/4	1/4	0	x_1	1/8	1/4	1/2	1/8
x_2	0	1/2	0	1/2	x_2	1/8	0	3/8	1/2
x_3	1/8	1/4	1/2	1/8	x_3	1/2	1/2	0	0
x_4	1/2	0	1/4	1/4	x_4	0	3/4	1/8	1/8
Варіант 7					Варіант 8				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1/2	1/4	1/8	1/8	x_1	3/4	0	1/4	0
x_2	0	1/4	1/2	1/4	x_2	1/2	1/4	1/8	1/8
x_3	3/8	1/8	0	1/2	x_3	1/2	1/4	0	1/4
x_4	0	1/8	3/4	1/8	x_4	3/4	0	1/4	0
Варіант 9					Варіант 10				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	1/4	1/4	1/2	x_1	0	1/4	1/4	1/2
x_2	1/8	1/2	1/8	1/4	x_2	1/2	1/8	3/8	0
x_3	3/4	0	0	1/4	x_3	1/4	0	0	3/4
x_4	3/4	1/8	1/8	0	x_4	1/8	1/4	1/2	1/8
Варіант 11					Варіант 12				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	1/4	1/2	1/4	x_1	3/4	0	1/4	0
x_2	1/4	0	3/4	0	x_2	1/8	3/8	1/2	0
x_3	1/4	1/8	1/2	1/8	x_3	3/8	1/2	0	1/8
x_4	1/4	1/4	0	1/2	x_4	0	1/2	0	1/2
Варіант 13					Варіант 14				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	3/8	0	1/8	1/2	x_1	3/4	1/8	1/8	0
x_2	1/8	3/8	0	1/2	x_2	1/2	0	1/4	1/4
x_3	0	1/4	3/4	0	x_3	3/4	1/4	0	0
x_4	3/4	1/8	0	1/8	x_4	1/2	1/8	1/4	1/8
Варіант 15					Варіант 16				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1/4	0	1/2	1/4	x_1	3/8	1/2	0	1/8
x_2	0	1/8	1/2	3/8	x_2	1/4	1/8	1/8	1/2
x_3	3/8	1/8	0	1/2	x_3	0	3/4	1/8	1/8
x_4	1/8	1/4	1/8	1/2	x_4	1/4	1/4	1/4	1/4

Продовження таблиці 7.10

Варіант 17					Варіант 18				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1/8	1/2	1/8	1/4	x_1	1/4	1/2	1/8	1/8
x_2	1/4	1/4	1/4	1/4	x_2	1/4	0	1/2	1/4
x_3	1/2	1/2	0	0	x_3	0	1/2	0	1/2
x_4	1/4	0	1/4	1/2	x_4	1/8	3/8	0	1/2
Варіант 19					Варіант 20				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1/8	0	0	1/2	x_1	3/4	0	1/4	0
x_2	1/8	1/4	1/8	1/2	x_2	0	1/2	1/2	0
x_3	0	1/4	3/4	0	x_3	3/8	1/2	0	1/8
x_4	3/4	1/8	0	1/8	x_4	0	1/2	0	1/2
Варіант 21					Варіант 22				
$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$P(y_l/x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	1/4	1/4	1/2	x_1	1/2	1/4	1/8	1/8
x_2	1/8	1/2	1/8	1/4	x_2	1/8	1/8	1/4	1/2
x_3	3/4	0	0	1/4	x_3	0	1/2	1/8	1/4
x_4	3/4	1/8	1/8	0	x_4	1/8	1/8	3/4	0

7.2.2 Джерела A і B мають розподіли ймовірностей повідомлень $P_A = \{0,1; 0,1; 0,15; 0,125; 0,125, 0,1; 0,15; 0,15\}$ і $P_B = \{0,5; 0,3; 0,1; 0,025; 0,025; 0,02; 0,015; 0,015\}$. Ентропія якого джерела більша? Яка максимальна ентропія цього джерела та за якої умови?

7.3 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

- результати розрахунків;
- висновки.

7.4 Контрольні запитання

- 1 Що таке джерело повідомлень?
- 2 Яке джерело повідомлень називається дискретним?
- 3 Як визначається кількість інформації в одному повідомленні?
- 4 Що таке ентропія та які її властивості?

- 5 Як визначається кількість інформації на одне повідомлення двох статистично взаємозв'язаних джерел?
- 6 За яких умов ентропія джерела стає максимальною?
- 7 В яких одиницях виражається кількість інформації?
- 8 Що таке кількість інформації в індивідуальному повідомленні та як вона визначається?
- 9 Чим відрізняється середня кількість інформації від кількості інформації в конкретному повідомленні?
- 10 Чи можна стверджувати, що середня кількість інформації є не випадковою величиною?
- 11 За яких умов може використовуватись формула Шеннона?
- 12 Чи можна стверджувати, що $i(x_k, y_l) = i(y_l, x_k)$?

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1 **Баскаков, С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов [Текст] /С.И.Баскаков. –М.: Высш. шк., 2000.- 462 с.
- 2 **Каганов, В.И.** Радиотехника + компьютер + Mathcad [Текст] /В.И.Каганов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001. – 416 с.
- 3 **Жураковський, Ю.П.** Теорія інформації та кодування: Підручник [Текст] /Ю.П.Жураковський, В.П.Полторак. – К.: Вища шк., 2001. – 255 с.
- 4 **Сергиенко, А.Б.** Цифровая обработка сигналов [Текст] / А.Б.Сергиенко. – СПб.: Питер, 2002.- 208 с.
- 5 **Феер, К.** Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра [Текст] /К.Феер. – М.: Радио и связь, 2000.- 520 с.

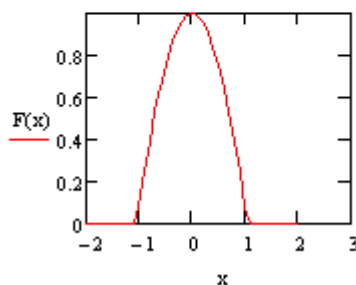
Додаток А

Приклад розрахунку спектра періодичної функції

$$u := 60 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$x := -2, -1.9 \dots 2$$

$$F(x) := \begin{cases} \frac{(\cos(x) - \cos(u))}{1 - \cos(u)} & \text{if } |x| \leq u \\ 0 & \text{if } u < |x| \leq \pi \end{cases}$$



$$k := 0, 1 \dots 10$$

$$Ak(k) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cdot \cos(k \cdot x) \, dx$$

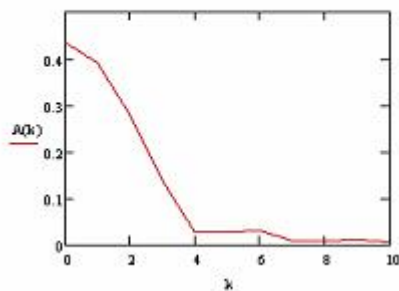
$$A0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \, dx \quad A0 = 0.436$$

k =	Ak(k) =
0	0.436
1	0.391
2	0.276
3	0.138
4	0.028
5	-0.028
6	-0.032
7	-9.845·10 ⁻³
8	9.684·10 ⁻³
9	0.014
10	5.012·10 ⁻³

$$AD_k(k) := 20 \cdot \log\left(\frac{|Ak(k)|}{0.436}\right)$$

$AD_k(k) =$	$k =$
$-1.768 \cdot 10^{-4}$	0
-0.946	1
-3.982	2
-10.003	3
-23.982	4
-23.99	5
-22.822	6
-32.925	7
-33.06	8
-30.003	9
-38.79	10

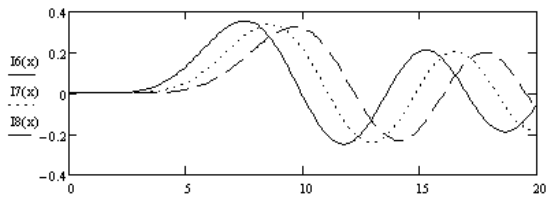
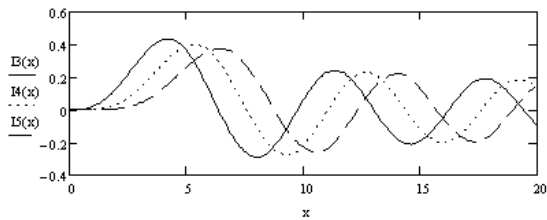
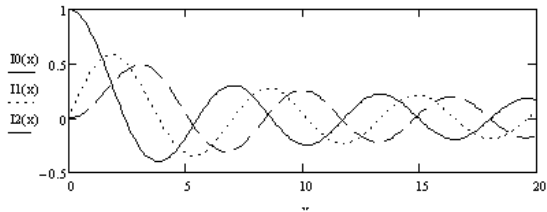
$$A(k) := |Ak(k)|$$



Додаток В

Приклад розрахунку бesselевих функцій

$$x := 0, 0.1 \dots 20 \quad I_0(x) := J_0(x) \quad I_1(x) := J_1(x) \quad I_3(x) := J_3(x) \quad I_5(x) := J_5(x) \quad I_2(x) := J_2(x)$$

$$I_4(x) := J_4(x) \quad I_6(x) := J_6(x) \quad I_7(x) := J_7(x) \quad I_8(x) := J_8(x)$$


$$x := 4.4 \quad |I_0(x)| = 0.342 \quad |I_1(x)| = 0.203 \quad |I_2(x)| = 0.25 \quad |I_3(x)| = 0.43$$

$$|I_4(x)| = 0.336 \quad |I_5(x)| = 0.182 \quad |I_6(x)| = 0.076 \quad |I_7(x)| = 0.026 \quad |I_8(x)| = 7.827 \times 10^{-3}$$