

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та

КР (для студентів заочної форми навчання)
з вищої математики (скорочена форма навчання).

Розділи **«Подвійний інтеграл», «Потрійний інтеграл»,
«Криволінійні інтеграли», «Поверхневі інтеграли», «Елементи
теорії поля».**

Методичні вказівки до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та КР (для студентів заочної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання). Розділи «Подвійний інтеграл», «Потрійний інтеграл», «Криволінійні інтеграли», «Поверхневі інтеграли», «Елементи теорії поля» / Укл.: Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. - Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020 –74 с.

Укладачі: Килимник І.М., к. т. н., доцент,
Онуфрієнко Л.М., к. ф.-м. н., доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Рецензент: Онуфрієнко В.М., д. ф.-м. н., професор

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики НУ «Запорізька
політехніка»

Протокол № 7 від 12.02.2020 р.

Рекомендовано НМК Машинобудівного
факультету НУ «Запорізька
політехніка»

Протокол № 4 від 25.02.2020 р.

ЗМІСТ

1	Подвійний інтеграл	4
1.1	Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах	5
1.2	Подвійний інтеграл у полярних координатах	6
1.3	Застосування подвійних інтегралів	14
2	Потрійний інтеграл	23
2.1	Потрійний інтеграл у декартових прямокутних координатах	23
2.2	Потрійний інтеграл у циліндричних координатах	25
2.3	Потрійний інтеграл у сферичних координатах	26
2.4	Застосування потрійних інтегралів	30
3	Криволінійні інтеграли	32
3.1	Криволінійні інтеграли першого роду. Обчислення та застосування	34
3.2	Криволінійні інтеграли другого роду. Обчислення та застосування	38
4	Поверхневі інтеграли	48
4.1	Поверхневі інтеграли першого роду. Обчислення та застосування	49
4.2	Поверхневі інтеграли другого роду. Обчислення та застосування	52
5	Елементи теорії поля	58
5.1	Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт скалярного поля	58
5.2	Векторне поле. Дивергенція, ротор, циркуляція векторного поля	59
5.3	Застосування формули Остроградського – Гаусса в теорії поля	61
5.4	Застосування формули Стокса в теорії поля	62
	Література	74

1 ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Подвійний інтеграл у декартових координатах записується $\iint_D f(x, y) dx dy$, де $f(x, y)$ – підінтегральна функція двох змінних x та y , D – область інтегрування.

Основні властивості подвійного інтеграла

$$\text{а) } \iint_D (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm \iint_D f_2(x, y) dx dy.$$

$$\text{б) } \iint_D k f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ де } k = \text{const.}$$

в) Якщо область D розбита на дві області D_1 і D_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Ця властивість справедлива і у випадку, коли область інтегрування D розбита на скінченне число областей D_i , $i = \overline{1, n}$.

г) Якщо в замкнутій області D функції $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ неперервні і задовольняють співвідношенню $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то справедлива нерівність

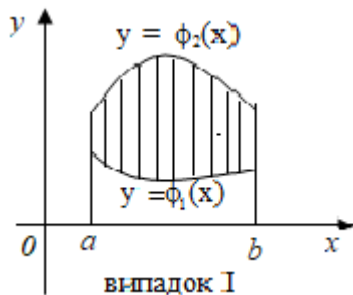
$$\iint_D f_1(x, y) dx dy \leq \iint_D f_2(x, y) dx dy.$$

$$\text{д) } \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

1.1 Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

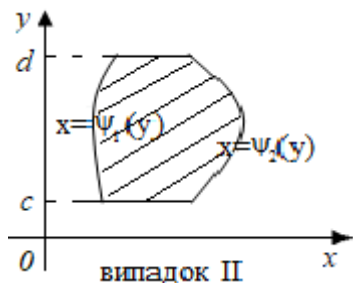
Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою повторних (двократних) інтегралів.

Якщо область інтегрування D обмежена двома прямими $x=a$ та $x=b$ ($a < b$) і двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$, кожна з яких перетинається вертикальною прямою тільки в одній точці, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, то область D називають правильною в напрямі осі Oy (випадок I). В цьому випадку справедлива формула



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.1)$$

Якщо область інтегрування D обмежена двома прямими $y=c$ та $y=d$ ($c < d$) і двома неперервними кривими $x=\psi_1(y)$ і $x=\psi_2(y)$, кожна з яких перетинається горизонтальною прямою лише в одній точці, причому $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, то область D називають правильною в напрямі осі Ox (випадок II). В цьому випадку справедлива формула:



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (1.2)$$

У випадку I інтеграл по y називають внутрішнім, а по x – зовнішнім; у випадку II – навпаки.

Спочатку знаходимо внутрішній інтеграл, враховуючи, що змінна інтегрування зовнішнього інтеграла є сталою, а потім знаходимо зовнішній інтеграл.

Розглянемо порядок дій запису подвійного інтеграла через повторний в прямокутній декартовій системі координат на площині :

- а) рисуємо область інтегрування D ;
- б) з точок перетину ліній, що обмежують область D , опускаємо перпендикуляри на ось Ox (або Oy). Кількість повторних інтегралів по області D буде на одиницю менше числа опущених перпендикулярів;
- в) зміну змінної x розглядаємо зліва направо, а змінної y – знизу вгору. Межі інтегрування для зовнішнього інтеграла знаходимо з рівнянь перпендикулярів, що містять область інтегрування, Межі інтегрування внутрішнього інтеграла – з рівнянь ліній через які в область інтегрування «входимо» і «виходимо», розв'язуючи їх відносно змінної інтегрування

Зауваження: 1) межі інтегрування зовнішнього інтегралу завжди сталі, а межі інтегрування внутрішнього інтегралу у загальному випадку є функціями зовнішньої змінної інтегрування;

2) якщо область D є більш складною, ніж області у випадках I і II, то її необхідно розбити прямими, перпендикулярними до осі Ox (випадок I) або до осі Oy (випадок II) на такі частини, до яких можна застосувати наведені вище формули (3.1) або (3.2) за змістом. Інтеграл по області D буде дорівнювати сумі інтегралів по кожній частині;

3) якщо область D прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то межі інтегрування внутрішнього інтегралу є сталими.

1.2 Подвійний інтеграл у полярних координатах

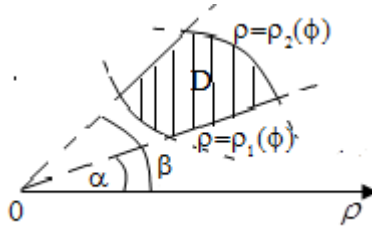
В деяких випадках подвійний інтеграл зручно обчислювати, перейшовши від декартової системи координат до полярної системи координат. Перехід здійснюється за формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi. \quad (1.3)$$

Маємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (1.4)$$

Якщо область інтегрування D обмежена двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) і двома кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$),



то подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Іноколи зручно зовнішній інтеграл знаходити по ρ , а внутрішній по φ :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Задача 1. Знайти інтеграл $\iint_D (x^3 - \sqrt{y}) dx dy$ по прямокутній області інтегрування $D: (0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 4)$.

Розв'язання. Оскільки область D є прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то для знаходження інтегралу можна застосувати формулу (1.1) або (1.2).

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^3 - \sqrt{y}) dx dy = \int_0^1 dx \int_1^4 (x^3 - \sqrt{y}) dy = \int_0^1 \left(x^3 y - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 dx = \\ &= \int_0^1 \left(4x^3 - \frac{2}{8} \cdot 8 - x^3 + \frac{2}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(3x^3 - \frac{14}{3} \right) dx = \left(3 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{14}{3} x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{14}{3} = \frac{9 - 56}{12} = -\frac{47}{12}. \end{aligned}$$

Відповідь: $I = -\frac{47}{12}$.

Задача 2. Знайти інтеграл $\iint_D \frac{x+2}{y^2+4} dx dy$ по прямокутній області інтегрування $D: (1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2)$.

Розв'язання. Оскільки область D є прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то для знаходження інтегралу можна застосувати формулу (1.1) або (1.2). Крім цього підінтегральна функція є добуток двох функцій, кожна з яких залежить від одного аргументу: $f_1(x) = x + 2$ і $f_2(y) = \frac{1}{y^2 + 4}$. У цьому випадку повторний

інтеграл можна записати як добуток двох визначених інтегралів по змінних x та y :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x+2}{y^2+4} dx dy = \int_1^3 (x+2) dx \cdot \int_0^2 \frac{1}{y^2+4} dy = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^3 \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{y}{2} \Big|_0^2 = \\ &= \left(\frac{9}{2} + 6 - \frac{1}{2} - 2 \right) \cdot \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $I = \pi$.

Задача 3. Знайти інтеграл $\iint_D \cos(3x - 2y) dx dy$ по прямокутній

області інтегрування $D: (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2})$.

Розв'язання. Оскільки область D є прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то для знаходження інтегралу застосуємо формулу (1.1).

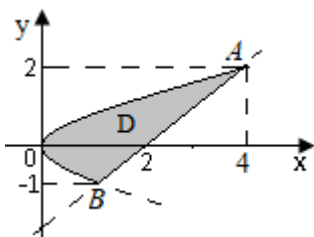
$$\begin{aligned} I &= \iint_D \cos(3x - 2y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x - 2y) dy = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} dx \cdot \sin(3x - 2y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(3x - \pi) - \sin 3x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\sin 3x - \sin 3x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx = \\ &= -\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3} (-1 - 1) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $I = \frac{2}{3}$.

Задача 4. Записати подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ через

повторний, якщо область D обмежена лініями: $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ y^2 = x \end{cases}$.

Розв'язання. Побудуємо область D . Вона обмежена прямою $x - y - 2 = 0$ і параболою $y^2 = x$. Знайдемо координати точок



перетину цих ліній. Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ y^2 = x \end{cases}$. Дістанемо $\begin{cases} x = 4, \\ y = 2 \end{cases}$

та $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases}$. Розв'язками систем є

координати точок $A(4; 2)$ і $B(1; -1)$.

Матимемо три перпендикуляри, опущені на ось Ox з точок A , B і O (кількість повторних інтегралів по області D буде два), а на ось Oy

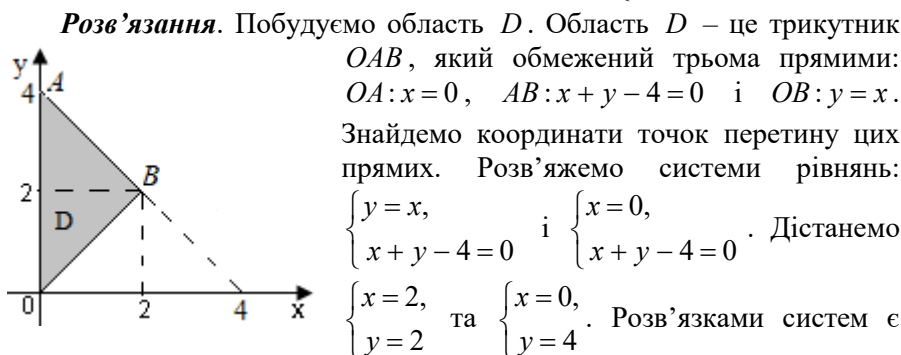
– два, опущені з точок A і B (кількість повторних інтегралів по області D буде один). В цьому випадку застосуємо формулу (1.2).

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx.$$

Відповідь: $I = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx.$

Задача 5. Записати подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ через

повторний, якщо область D обмежена лініями: $\begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ y = x, x = 0 \end{cases}.$

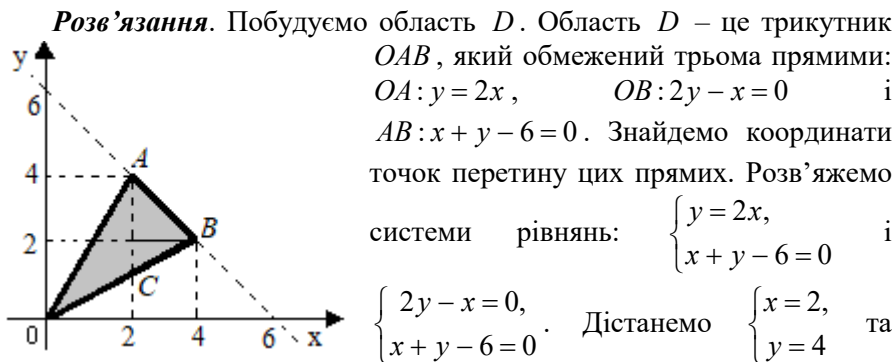


координати точок $A(0;4)$ і $B(2;2)$. Матимемо три перпендикуляри, опущені на ось Oy з точок A , B і O (кількість повторних інтегралів по області D буде два), а на ось Ox – два, опущені з точок A і B (кількість повторних інтегралів по області D буде один, точки A і O лежать на одній прямій). В цьому випадку застосуємо формулу (1.1).

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$$

Відповідь: $I = \int_0^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$

Задача 6. Записати подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ через повторний, якщо область D обмежена лініями: $y = 2x$, $2y - x = 0$, $x + y - 6 = 0$.



Опустимо перпендикуляри на ось Ox з точок A і B , які розіб'ють область D на дві області: D_1 (трикутник OAC) і D_2 (трикутник CAB).

Область D_1 обмежена лініями: $y = 2x$, $x = 2$, $y = \frac{x}{2}$, а область D_2 обмежена лініями: $x + y - 6 = 0$,

$y = \frac{x}{2}$, $x = 2$. Маємо

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy + \iint_{D_2} f(x,y) dx dy.$$

$$\text{Тоді } I = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} f(x,y) dy + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} f(x,y) dy.$$

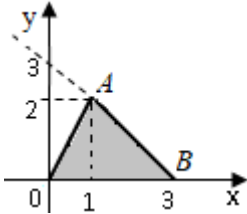
Якщо б опускали перпендикуляри на ось Oy , то дістали би три перпендикуляри і два повторних інтеграли за формулою (1.2).

$$\text{Відповідь: } I = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} f(x,y) dy + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} f(x,y) dy$$

Задача 7. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x, y) dx.$$

Розв'язання. Записуємо рівняння ліній, які обмежують область інтегрування D . Для цього прирівнюємо кожну змінну інтегрування до її меж інтегрування.



Матимемо $D: \begin{cases} y=0, \\ y=2 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x=\frac{y}{2}, \\ x=3-y \end{cases}$. Намалюємо

ці лінії. Область D – це трикутник OAB .

Змінити порядок інтегрування – означає перейти від повторного інтегралу випадку I до повторного інтегралу випадку II і навпаки. Маємо повторний інтеграл випадку II. Область D знаходиться між двома прямими $y_1=0$ та $y_2=2$, перпендикулярними до осі Oy і двома неперервними лініями $x_1=\frac{y}{2}$ та $x_2=3-y$. Щоб перейти до

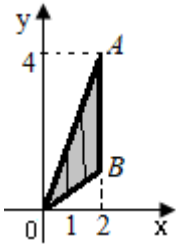
випадку I, необхідно опустити перпендикуляри на вісь Ox з точок перетину ліній, що обмежують область D . Таких перпендикулярів буде три: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$. Вони розіб'ють область D на дві області $D_1: 0 \leq x \leq 1, y_1=0, y_2=2x$ і $D_2: 1 \leq x \leq 3, y_1=0, y_2=3-x$. Для кожної області записуємо повторні інтеграли і додаємо їх. Матимемо

$$I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x, y) dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy.$$

Відповідь: $I = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy.$

Задача 8. Знайти інтеграл $\iint_D (2x + y) dx dy$, де $D: \begin{cases} y=2x, \\ 2y=x, \\ x=2 \end{cases}$.

Розв'язання. Побудуємо область D . Область D – це трикутник OAB . Маємо випадок I, тому що область D знаходиться між двома



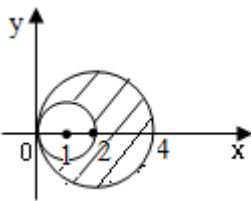
прямими $x=0$, $x=2$, перпендикулярними до осі Ox . Зміну змінної x дивимось зліва направо (від лівого перпендикуляра до правого), а зміну змінної y – знизу вгору (для цього рівняння лінії, через яку “входимо” в область, розв’язуємо відносно змінної y – це нижня межа інтегрування, а рівняння лінії, через яку “виходимо” з області, розв’язуємо відносно змінної y – це верхня межа інтегрування). В нашому випадку $0 \leq x \leq 2$, $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$. Маємо

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (2x+y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} (2x+y) dy = \int_0^2 dx \cdot \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x/2}^{2x} = \\ &= \int_0^2 \left(2x \cdot 2x + \frac{(2x)^2}{2} - 2x \cdot \frac{x}{2} - \frac{(x/2)^2}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(4x^2 + 2x^2 - x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx = \\ &= \int_0^2 \frac{39}{8} x^2 dx = \frac{39}{8} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{39}{8} \cdot \frac{8}{3} = 13. \end{aligned}$$

Відповідь: $I=13$.

Задача 9. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ у полярних координатах, якщо область D обмежена колами: $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Розв’язання. Побудуємо область D . Для цього запишемо рівняння



кіл у канонічному вигляді: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Знайдемо центри і радіуси кіл: $O_1(1;0)$, $R_1=1$ і $O_2(2;0)$, $R_2=2$.

У заданому подвійному інтегралі перейдемо до полярної системи координат за формулами (1.3). Тоді підінтегральна функція матиме

вигляд:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$= \sqrt{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sqrt{\rho^2} = \rho.$$

Рівняння заданих кіл у полярних координатах:

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 2 \cos \varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 4 \cos \varphi.$$

При зміні кута φ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, змінна ρ змінюватиметься

від $\rho_1 = 2 \cos \varphi$ до $\rho_2 = 4 \cos \varphi$. Подвійний інтеграл у полярних координатах матиме вигляд:

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_D \rho^2 d\rho d\varphi.$$

Обчислимо його через повторний інтеграл:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \rho^2 d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \Big|_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (64 \cos^3 \varphi - \\ &\quad - 8 \cos^3 \varphi) d\varphi = \frac{56}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{112}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi = \\ &= \frac{112}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{112}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{224}{9}. \end{aligned}$$

Відповідь: $I = \frac{224}{9}.$

1.3 Застосування подвійних інтегралів

1. Площа плоскої фігури.

Площа плоскої області D в декартових координатах обчислюється за формулою

$$S = \iint_D dx dy, \quad (1.7)$$

а в полярних координатах за формулою

$$S = \iint_D \rho \, d\rho \, d\varphi. \quad (1.8)$$

Якщо область D обмежена лініями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $(\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x))$ і $a \leq x \leq b$, то площа дорівнює

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy. \quad (1.9)$$

Якщо область D обмежена лініями $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $(\psi_1(y) \leq \psi_2(y))$ і $c \leq y \leq d$, то площа дорівнює

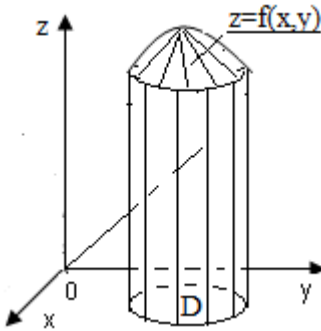
$$S = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx. \quad (1.10)$$

Якщо область D обмежена лініями у полярних координатах $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, то площа дорівнює

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \, d\rho. \quad (1.11)$$

2. Об'єм тіла.

Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D , що лежить на площині xOy , а зверху поверхнею $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$), яка неперервна в області D , знаходиться за формулою:



$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1.12)$$

Якщо циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею $z = f_2(x, y)$, а знизу поверхнею $z = f_1(x, y)$ і проектується на площину xOy в область D , то об'єм обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy. \quad (1.13)$$

3. Площа поверхні тіла.

а) якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$ і проектується на площину xOy в область D , при цьому функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в області D , то площу Q цієї поверхні знаходять за формулою:

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)} dx dy; \quad (1.14)$$

б) якщо поверхня має рівняння виду $x = f(y, z)$, то площа поверхні знаходиться за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_y(y, z) + f'^2_z(y, z)} dy dz; \quad (1.15)$$

де D – проекція поверхні на площину yOz .

в) якщо поверхня має рівняння виду $y = f(x, z)$, то

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, z) + f'^2_z(x, z)} dx dz. \quad (1.16)$$

де D – проекція поверхні на площину xOz ;

4. Маса плоскої пластини.

Нехай на площині xOy пластина має форму замкнутої області D , в кожній точці якої відома густина $\gamma = \gamma(x, y)$. Маса такої пластини визначиться за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy; \quad (1.17)$$

5. Центр мас пластини, статичні моменти.

Центр $(x_c; y_c)$ маси пластини обчислюється за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}, \quad (1.18)$$

де

$$M_x = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy, \quad (1.19)$$

$$M_y = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy \quad (1.20)$$

– статичні моменти пластини відносно осей Ox та Oy відповідно. Якщо пластина однорідна, то густина $\gamma = const$.

6. Моменти інерції пластини.

Моменти інерції I_x та I_y пластини відносно координатних осей Ox і Oy обчислюються відповідно за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy. \quad (1.21)$$

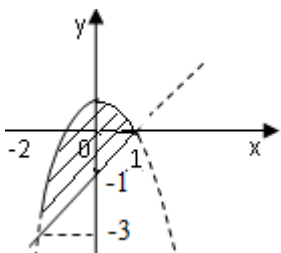
Момент інерції пластини відносно початку координат:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy. \quad (1.22)$$

Зауваження. Якщо в формулах для обчислення моментів інерції покласти $\gamma(x, y) = 1$, то одержимо геометричні моменти інерції.

Задача 10. Обчислити площу плоскої фігури, обмежену лініями:
 $y = 1 - x^2$; $x - y = 1$.

Розв'язання. Побудуємо плоску фігуру, обмежену заданими лініями. Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ x - y = 1 \end{cases}$. Дістанемо $\begin{cases} x = -2, \\ y = -3 \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases}$. Фігура знаходиться між



двома перпендикулярами: $x = -2$ та $x = 1$. В цей час y змінюється від $y_1 = x - 1$ до $y_2 = 1 - x^2$. Площу фігури знайдемо за формулою (1.7), а подвійний інтеграл за формулою (1.1):

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x-1}^{1-x^2} dy = \int_{-2}^1 dx \cdot y \Big|_{x-1}^{1-x^2} = \int_{-2}^1 (1 - x^2 - x + 1) dx = \\ &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 5 - \frac{1}{2} = \\ &= 4,5 \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

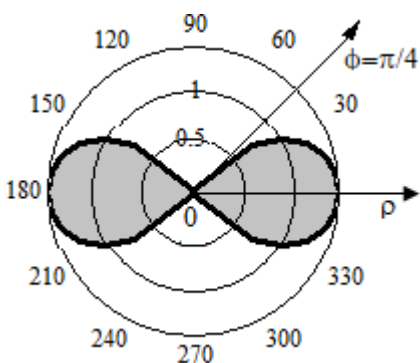
Відповідь: $S = 4,5$ кв. од.

Задача 11. Обчислити площу плоскої фігури D в полярній системі координат, якщо вона обмежена кривою $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (лемніскаата Бернуллі).

Розв'язання. Побудуємо плоску фігуру. Крива розташована симетрично відносно координатних осей, тому що заміна x на $(-x)$ і y на $(-y)$ не змінює рівняння кривої. Тому досить побудувати криву лише в першій чверті, а потім, враховуючи симетрію її відносно координатних осей, побудувати її в трьох інших чвертях. Для

побудови кривої запишемо її рівняння в полярній системі координат, поклавши $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Виконуючи перетворення, одержимо:

$$\begin{aligned}(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 &= 2a^2(\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) \\(\rho^2)^2 &= 2a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Rightarrow \rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi \\ \rho &= a\sqrt{2 \cos 2\varphi}\end{aligned}$$



За областю визначення $\cos 2\varphi \geq 0$. Це означає, що кут 2φ повинен знаходитись або в першій, або в четвертій чверті. З'ясувавши, що досить побудувати криву лише в першій чверті, розглянемо значення 2φ , яке задовольняє

умові $0 \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Звідси випливає,

що для побудови кривої в першій чверті, куту φ необхідно надавати

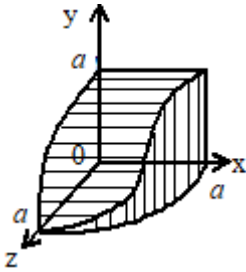
значень від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Площу чверті фігури знайдемо за формулою (1.8), а повторний інтеграл за формулою (1.11) і помножимо на чотири.

$$\begin{aligned}S &= \iint_D \rho \, d\rho \, d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho \, d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \cdot \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi = \\ &= 4a^2 \cdot \left. \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 \sin \frac{\pi}{2} = 2a^2 \text{ (кв. од.)}.\end{aligned}$$

Відповідь: $S = 2a^2$ кв. од.

Задача 12. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = a^2$ та $x^2 + z^2 = a^2$.

Розв'язання. Тіло обмежено циліндром $x^2 + y^2 = a^2$, твірні якого



паралельні осі Oz і циліндром $x^2 + z^2 = a^2$, твірні якого паралельні осі Oy . Розглянемо восьму частину заданого тіла. Зробимо рисунок цієї частини тіла. Поверхня, яка обмежує її зверху проєкується в площину xOy у чверть кола радіуса a з центром в точці O .

Об'єм восьмої частини заданого тіла знаходимо за формулою (1.12). У нашому

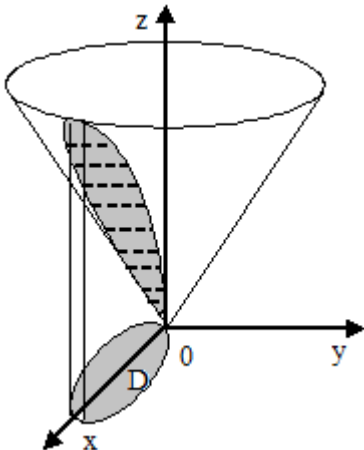
випадку $f_2(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$, а $f_1(x, y) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}V &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} \, dx dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \\ &= \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3. \quad V = 8 \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{16}{3} a^3 \text{ (куб. од.)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $V = \frac{16}{3} a^3$ куб. од.

Задача 13. Знайти площу частини конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що міститься в середині циліндру $x^2 + y^2 = 2x$.

Розв'язання. Зробимо рисунок поверхні.



Площу поверхні обчислимо за формулою (1.13). D – проєкція даної поверхні на площину xOy . Це круг, обмежений колом: $x^2 + y^2 = 2x$.

З рівняння конуса маємо $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Частинні похідні по x

та y : $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Знайдемо підінтегральну функцію. Матимемо

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2$$

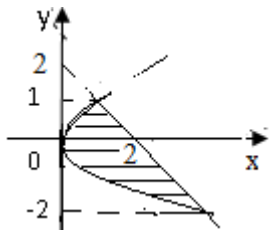
і $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}$. Шукана площа $Q = \iint_D \sqrt{2} dx dy$. Так як область інтегрування D є круг, то подвійний інтеграл $\iint_D dx dy$ є площею цього круга радіуса $R=1$ і дорівнює $S_{\text{кр}} = \pi$. Тоді $Q = \pi\sqrt{2}$ (кв. од.).

Відповідь: $Q = \pi\sqrt{2}$ кв. од.

Задача 14. Знайти масу матеріальної пластини, що має форму замкнутої області D , обмеженої лініями: $x = y^2$, $x + y = 2$ а густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$, неперервною в області D .

Розв'язання. Побудуємо область D . Масу пластини знайдемо за формулою (1.17). Маємо

$$-2 \leq y \leq 1, \quad x = y^2, \quad x = 2 - y.$$



$$\begin{aligned} m &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} (x^2 + y^2) dx = \\ &= \int_{-2}^1 dy \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{y^2}^{2-y} = \int_{-2}^1 \left(\frac{(2-y)^3}{3} + y^2(2-y) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y^6}{3} - y^4 \right) dy = \int_{-2}^1 \left(-\frac{1}{3}(y-2)^3 + 2y^2 - y^3 - \frac{1}{3}y^6 - y^4 \right) dy = \left(-\frac{1}{3} \frac{(y-2)^4}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{21} - \frac{1}{5} + \frac{64}{3} + \frac{16}{3} + 4 - \end{aligned}$$

$$-\frac{128}{21} - \frac{32}{5} = \frac{639}{35} \text{ (од. маси).}$$

Відповідь: $m = \frac{639}{35}$ од. маси.

Задача 15. Знайти центр маси однорідної пластини, обмеженої кривою $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$ та віссю Ox .

Розв'язання. Зробимо рисунок пластини.



Координати $(x_c; y_c)$ центра маси пластини обчислюється за формулами (1.18). Так як пластина однорідна, то $\gamma(x, y) = \text{const}$. В цьому випадку матимемо:

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

Обчислимо інтеграли:

$$\iint_D dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi dx \cdot y \Big|_0^{\sin x} = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2,$$

$$\iint_D x dx dy = \int_0^\pi x dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi x dx \cdot y \Big|_0^{\sin x} = \int_0^\pi x \sin x dx =$$

$$= \left[u = x, dv = \sin x dx \right] = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^\pi = \pi + 0 = \pi,$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y dy = \int_0^\pi dx \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sin x} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Маємо $x_c = \frac{\pi}{2}$, $y_c = \frac{\pi}{8}$.

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$.

2 ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір.

Потрійний інтеграл у декартових прямокутних координатах записується

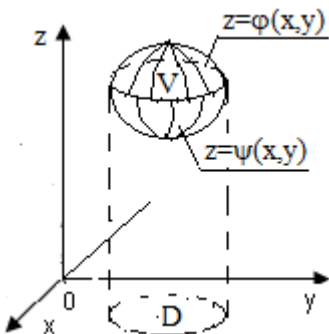
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

де $f(x, y, z)$ – підінтегральна функція трьох змінних x , y та z , V – область інтегрування.

Властивості потрійного інтеграла аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

2.1 Потрійний інтеграл у декартових прямокутних координатах

Обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення повторних інтегралів, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо. Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна в замкнутій області $V \in R_3$.



1) Якщо область V така, що кожна «вертикальна» пряма, перетинаючи границю області V , має з нею не більше двох спільних точок, а область D – проекція області V на площину xOy і рівняння поверхонь, що обмежують область V зверху і знизу $z = \varphi(x, y)$ та $z = \psi(x, y)$ відповідно, то потрійний інтеграл записується формулою:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z) dz. \quad (2.1)$$

2) Якщо область D обмежена лініями: $D: \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$, то потрібний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D dx dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z) dz. \quad (2.2)$$

3) Якщо область D обмежена лініями: $D: \begin{cases} c \leq y \leq d, \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$, то потрібний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D dx dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z) dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z) dz. \quad (2.3)$$

Зауваження. Таким чином, для обчислення потрібного інтеграла потрібно послідовно обчислити три визначених інтеграла.

Обчислюються ці інтеграли від самого внутрішнього (по змінній z) до самого зовнішнього (по змінній x – формула (2.2) або по змінній y – формула (2.3)).

4) Якщо область V є прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям координат, а саме $V: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ e \leq z \leq k \end{cases}$, то потрібний

інтеграл обчислюється за формулою:

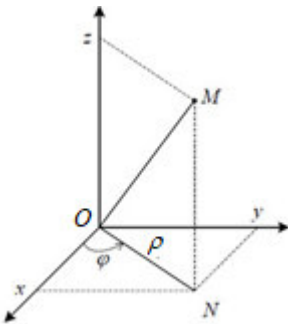
$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^k f(x,y,z) dz \quad (2.4)$$

Порядок інтегрування в правій частині формули може бути будь яким.

На практиці найбільш вживаними у просторі є циліндричні та сферичні координати.

2.2 Потрійний інтеграл у циліндричних координатах

Якщо проєкцією області V інтегрування на будь-яку з координатних площин є круг або частина круга, то потрійний інтеграл простіше обчислити, перейшовши до циліндричних координат. Циліндрична система координат є узагальненням полярної системи координат на простір. У системі циліндричних координат точка M характеризується трьома величинами (ρ, φ, z) , де ρ – відстань від початку координат до проєкції N точки M на площину xOy , φ – кут між вектором ON і додатним напрямом осі Ox , z – апліката точки M .



Перехід від прямокутних координат x, y, z до циліндричних координат ρ, φ, z здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \\ dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq \rho \leq +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\infty \leq z \leq \infty \end{cases} \quad (2.5)$$

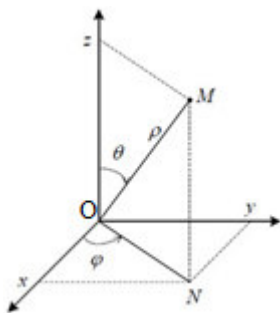
Для того, щоб в потрійному інтегралі перейти до циліндричних координат, потрібно підінтегральну функцію виразити у вигляді функції змінних ρ, φ, z : $f(x, y, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) = F(\rho, \varphi, z)$.

Добуток $\rho d\rho d\varphi dz$ визначає елемент об'єму в циліндричній системі координат. Потрійний інтеграл у циліндричних координатах обчислюється так само як і в декартових прямокутних координатах, шляхом перетворення в послідовності трьох визначених інтегралів.

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz &= \iiint_{V_1} F(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} F(\rho, \varphi, z) dz \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3 Потрійний інтеграл у сферичних координатах

Якщо область інтегрування в потрійному інтегралі є куля або частина кулі, то простіше обчислити потрійний інтеграл в сферичних координатах. У сферичних координатах точку M характеризують три величини (ρ, φ, θ) , де ρ – відстань від точки M до початку координат точки O , φ – кут між вектором ON і додатним напрямом осі Ox (N – проєкція точки M на площину xOy), θ – кут між вектором OM і додатним напрямом осі Oz .



Перехід від прямокутних координат x , y , z до сферичних координат ρ , φ , θ здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \\ dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq \rho \leq +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (2.7)$$

Для того, щоб в потрійному інтегралі перейти до сферичних координат, потрібно підінтегральну функцію виразити у вигляді функції змінних ρ , φ , θ :

$$f(x,y,z) = f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) = F(\rho, \varphi, \theta).$$

Добуток $\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$ визначає елемент об'єму в сферичній системі координат. Потрійний інтеграл у сферичних координатах обчислюється так само як і в декартових прямокутних координатах та

циліндричних координатах, шляхом перетворення в послідовності трьох визначених інтегралів.

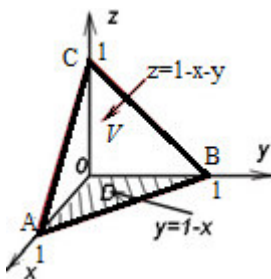
$$\begin{aligned} \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz &= \iiint_{V_1} F(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} \rho^2 F(\rho, \varphi, \theta) d\rho. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Зауваження. Слід пам'ятати, що
$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \\ \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \end{cases}$$

Задача 16. Обчислити $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, якщо область V

обмежена площинами: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання. Область V – піраміда, область D в площині xOy – прямокутний трикутник AOB . Зробимо рисунок області V :



$$I = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz =$$

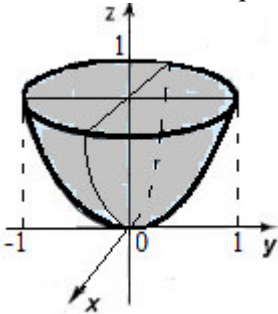
$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \bigg|_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dy = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{6} \right) \bigg|_0^{1-x} dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6} \right) dx = \left(\frac{1}{6}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{(1-x)^4}{24} \right) \bigg|_0^1 = \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $I = \frac{1}{8}$.

Задача 17. Обчислити $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, якщо область V

обмежена поверхнями: $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

Розв'язання. Зробимо рисунок області V .



Так як область V проєктується на площину xOy у круг $x^2 + y^2 \leq 1$, то знайдемо інтеграл перейшовши до циліндричних координат: координата φ змінюється в межах від 0 до 2π , а координата ρ – від $\rho = 0$ до $\rho = 1$. Постійному значенню ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) у просторі відповідає циліндр $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Розглядаючи перетин цього циліндра з областю V , отримуємо зміну ординати z від $z = \rho^2$ до $z = 1$. Переходимо до циліндричних координат і отримуємо:

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_{V_1} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^1 dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot z \Big|_{\rho^2}^1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot (1 - \rho^2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^3 - \rho^5) d\rho = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) d\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{12} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $I = \frac{\pi}{6}$.

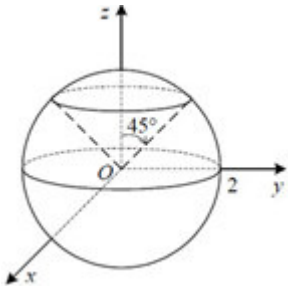
Задача 18. Обчислити $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, якщо область V

обмежена поверхнями: $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ і $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Розв'язання. Знизу область інтегрування V обмежена конічною

поверхнею $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, а зверху – сферою

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. Зробимо рисунок області V .



Так як область інтегрування є частиною кулі, то знайдемо інтеграл перейшовши до сферичних координат: координата θ

змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{4}$, координата

φ змінюється в межах від 0 до 2π , а

координата ρ – від $\rho=0$ до $\rho=2$. Підінтегральна функція матиме

вигляд: $z \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cos \theta \sqrt{(\rho \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \varphi)^2} =$

$$= \rho \cos \theta \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \rho \cos \theta \rho \sin \theta = \rho^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Враховуючи, що $dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$, матимемо

$$I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{V_1} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{V_1} \rho^4 \cos \theta \sin^2 \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^4 d\rho = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{64}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = \\
&= \frac{64}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d \sin \theta = \frac{64}{5} \pi \cdot \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{64}{15} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{64}{15} \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $I = \frac{16\pi\sqrt{2}}{15}$.

2.4 Застосування потрійних інтегралів

1. Обчислення об'ємів.

Якщо деяке тіло є обмеженою і замкнутою областю G , що має об'єм V , то

$$V = \iiint_G dx dy dz. \quad (2.8)$$

2. Застосування в механіці.

Нехай G – обмежена замкнута область простору R_3 , яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ – неперервна функція в цій області, а dv – диференціал об'єму області. Тоді:

а) маса тіла:

$$m = \iiint_G \gamma dv; \quad (2.9)$$

б) статичні моменти тіла відносно координатних площин xOy , xOz , yOz обчислюються відповідно за формулами:

$$M_{xy} = \iiint_G z \gamma dv, \quad M_{xz} = \iiint_G y \gamma dv, \quad M_{yz} = \iiint_G x \gamma dv; \quad (2.10)$$

в) моменти інерції тіла відносно координатних осей Ox , Oy , Oz обчислюються відповідно за формулами:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_G (y^2 + z^2) \gamma dv, \\ I_y &= \iiint_G (x^2 + z^2) \gamma dv, \\ I_z &= \iiint_G (x^2 + y^2) \gamma dv. \end{aligned} \quad (2.11)$$

г) моменти інерції тіла відносно координатних площин xOy , xOz , yOz обчислюються відповідно за формулами:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \gamma dv, \quad I_{xz} = \iiint_G y^2 \gamma dv, \quad I_{yz} = \iiint_G x^2 \gamma dv; \quad (2.12)$$

д) момент інерції відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \gamma dv; \quad (2.13)$$

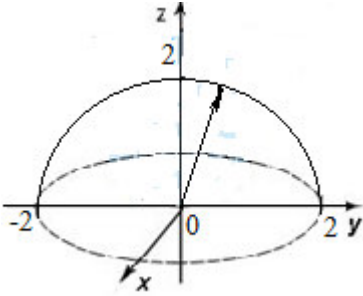
е) координати центра маси $(x_c; y_c; z_c)$ тіла:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \quad (2.14)$$

Задача 19. Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідної півкулі, обмеженої поверхнями $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = 0$

Розв'язання. Зробимо рисунок. Так як півкуля однорідна, то покладемо $\gamma = 1$. Момент інерції однорідної півкулі відносно осі Oz знайдемо за формулою

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) dv.$$



Для обчислення інтеграла перейдемо до сферичної системи координат за формулами (2.7): координата θ змінюється в межах від

0 до $\frac{\pi}{2}$, координата φ змінюється в межах від 0 до 2π , а координата ρ – від $\rho=0$ до $\rho=2$. Підінтегральна функція матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 = (\rho \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \varphi)^2 = \rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2 \sin^2 \theta.$$

$$dv = dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

$$I_z = \iiint_{G_1} \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^4 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \cdot$$

$$\cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 = -\frac{32}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = -\frac{64\pi}{5} \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{64\pi}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{128\pi}{15}.$$

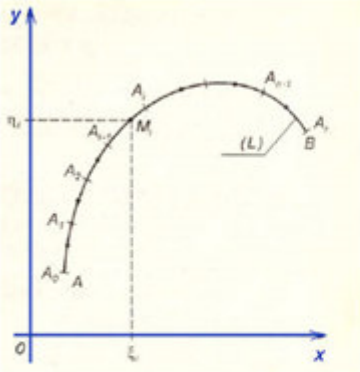
$$\text{Відповідь: } I_z = \frac{128\pi}{15}.$$

3 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

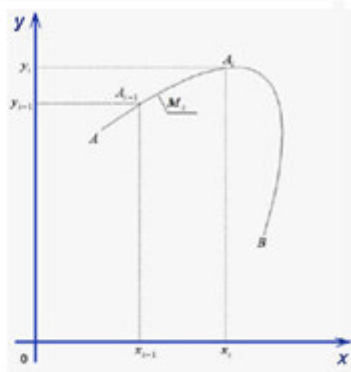
Криволінійні інтеграли є узагальненням поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є відрізок деякої кривої, що лежить в площині. Загальний запис криволінійного інтеграла наступний:

$$\int_L f(x, y) dl$$

де $f(x, y)$ – функція двох змінних, а L – крива, по відрізку AB якої відбувається інтегрування. Якщо підінтегральна функція дорівнює одиниці, то криволінійний інтеграл дорівнює довжині дуги AB . Нехай на площині розташований відрізок AB деякої кривої L , а функція двох змінних $f(x, y)$ визначена в точках кривої L .



Випадок криволінійного інтеграла першого роду



Випадок криволінійного інтеграла другого роду

Нехай ми виконуємо з цим відрізком кривої наступні дії.

1. Розділити криву AB на частини точками.
2. У кожній частині довільно вибрати точку M .
3. Знайти значення функції у вибраних точках.
4. Значення функції помножити на

- довжини частин у разі *криволінійного інтеграла першого роду*;
- проекції частин на вісь координат у разі *криволінійного інтеграла другого роду*.

5. Знайти суму всіх добутків.

6. Знайти границю знайденої інтегральної суми при умові, що довжина найдовшої частини кривої прямує до нуля.

Якщо згадана границя існує, то ця границя інтегральної суми і називається криволінійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по кривій AB .

3.1 Криволінійні інтеграли першого роду. Обчислення та застосування

Означення 3.1. Криволінійним інтегралом першого роду (по довжині дуги кривої) називається границя інтегральної суми, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття кривої L на частини і вибору довільних точок в них

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i, \eta_i) \Delta l_i = \int_L f(x, y) dl, \quad (3.1)$$

де $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta l_i$, функція $f(x, y)$ визначена і обмежена на кривій L .

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду.

а) Криволінійний інтеграл першого роду має всі властивості, якими володіє визначений інтеграл. Однак криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку шляху інтегрування $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$.

$$\text{б) } \int_L (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dl = \int_L f_1(x, y) dl \pm \int_L f_2(x, y) dl.$$

$$\text{в) } \int_L k f(x, y) dl = k \int_L f(x, y) dl, \text{ де } k = \text{const}.$$

г) Якщо крива $L = L_1 + L_2$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl.$$

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.

Криволінійний інтеграл першого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу.

а) Якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (3.2)$$

Зауваження. При цьому треба враховувати, що межі інтегрування у визначеному інтегралі завжди «беруть» від «меншої» до «більшої», незалежно від заданого напрямку інтегрування:

б) Якщо крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$,
 $t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.3)$$

в) Якщо крива L задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, при цьому $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi. \quad (3.4)$$

г) У випадку просторової кривої, яка має рівняння $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$,

$t \in [t_1, t_2]$, матимемо

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (3.5)$$

Зауваження. При застосуванні формули (5.5) слід звертати увагу на те, щоб при зміні параметра t від t_1 до t_2 диференціали dl і dt були невід'ємними, оскільки вираз $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$ задає елемент довжини дуги, який від'ємним бути не може.

Застосування криволінійного інтеграла першого роду.

1. Застосування в геометрії.

Якщо у площині xOy задано криву AB і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x, y)$ то

а) довжина кривої AB :

$$L_{AB} = \int_{AB} dl ; \quad (3.6)$$

б) площа циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі Oz і вона опирається на криву L у площині xOy , при цьому зверху обмежена поверхнею $z = f(x, y)$:

$$Q = \int_L f(x, y) dl ; \quad (3.7)$$

2. Застосування в механіці.

а) маса матеріальної кривої:

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl , \quad (3.8)$$

де $\gamma(x, y)$ – лінійна густина;

б) координати $(x_c; y_c)$ центра маси кривої L :

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_l x \gamma(x, y) dl}{\int_l \gamma(x, y) dl} \quad \text{і} \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_l y \gamma(x, y) dl}{\int_l \gamma(x, y) dl} , \quad (3.9)$$

де M_x, M_y – статичні моменти кривої відносно осей Ox і Oy . У випадку, коли розглядається однорідна матеріальна крива, слід покласти $\gamma(x, y) = 1$;

в) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої L відносно осей Ox, Oy і початку координат:

$$I_x = \int_l y^2 \gamma(x, y) dl , \quad (3.10)$$

$$I_y = \int_l x^2 \gamma(x, y) dl , \quad (3.11)$$

$$I_0 = \int_l (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl . \quad (3.12)$$

Задача 20. Знайти криволінійний інтеграл першого роду $\int_L x^2 y dl$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = 4$, розміщена в першій чверті ($x \geq 0, y \geq 0$).

Розв'язання. Напишемо рівняння кола у вигляді $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$. Знайдемо $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$. Маємо $y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$. Тоді

$$dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$$

$$I = \int_L x^2 y dl = \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} \frac{2 dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Відповідь: $I = \frac{16}{3}$.

Задача 21. Знайти криволінійний інтеграл першого роду $\int_{AB} (x^2 + 3y) dl$, де AB – відрізок прямої між точками $A(2;1)$ і $B(1;-1)$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої AB , використовуючи формулу $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (рівняння прямої, яка проходить через дві

точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$): $\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 1}{-1 - 1} \Rightarrow \frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 1}{-2}$. З рівняння

прямої виразимо y через x : $y = 2x - 3$. Знайдемо $y' = 2$. Тоді $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + 4} dx = \sqrt{5} dx$. Обчислимо інтеграл:

$$I = \int_{AB} (x^2 + 3y) dl = \int_1^2 (x^2 + 3(2x - 3)) \sqrt{5} dx = \sqrt{5} \int_1^2 (x^2 + 6x - 9) dx =$$

$$= \sqrt{5} \left(\frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 9x \right) \Big|_1^2 = \sqrt{5} \left(\frac{8}{3} + 12 - 18 - \frac{1}{3} - 3 + 9 \right) = \sqrt{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{3}.$$

Відповідь: $I = \frac{7\sqrt{5}}{3}$

Задача 22. Знайти масу дроту, що має форму кола $x^2 + y^2 = 1$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;1)$ з густиною $\gamma(x, y) = xy$.

Розв'язання. Коло радіуса $R=1$ з центром у початку координат описується параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$, де параметр $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді маса даного шматка дроту обчислюється за формулою (3.8), де $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

Маємо $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$;
 $dl = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = dt$ і $\gamma(x, y) = xy = \cos t \cdot \sin t$.

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d \sin t = \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,5 \text{ (од.маси)}.$$

Відповідь: $m = 0,5$ од.маси.

3.2 Криволінійні інтеграли другого роду. Обчислення та застосування

Означення 5.2. Криволінійним інтегралом другого роду (по координатах) називається границя інтегральної суми, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття кривої L на частини і вибору довільних точок в них

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i, \eta_i) \Delta x_i = \int_L f(x, y) dx, \quad (3.13)$$

де $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$, функція $f(x, y)$ визначена і обмежена на кривій L .

При складанні інтегральної суми криволінійного інтеграла другого роду значення функції $f_1(\zeta_i, \eta_i)$ можна множити також на проекції частин відрізка кривої на вісь Oy . Тоді отримаємо інтеграл

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f_1(\zeta_i, \eta_i) \Delta y_i = \int_L f_1(x, y) dy. \quad (3.14)$$

де $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta y_i$, функція $f_1(x, y)$ визначена і обмежена на кривій L .

На практиці зазвичай використовується об'єднання криволінійних інтегралів другого роду, тобто дві функції $f(x, y) = P(x, y)$ та $f_1(x, y) = Q(x, y)$ і інтеграли $I_1 = \int_L P(x, y) dx$, $I_2 = \int_L Q(x, y) dy$, а сума цих інтегралів

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (3.15)$$

називається *загальним криволінійним інтегралом другого роду*.

Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду.

а) Криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy.$$

Інші властивості аналогічні властивостям криволінійного інтеграла першого роду.

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.

Криволінійний інтеграл другого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу.

а) Якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x))dx. \quad (3.16)$$

б) Якщо крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt. \quad (3.17)$$

в) У випадку просторової кривої, яка має рівняння $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$,

$t \in [t_1, t_2]$, матимемо

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + R(x(t), y(t), z(t))z'_t)dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

Теорема 3.1. Якщо функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ і їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D і в точках цієї області $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то криволінійний інтеграл $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежить від шляху інтегрування по лінії $L \in D$.

$$\text{Якщо в інтегралі } \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

маємо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то значення інтеграла не залежить від форми кривої AB , а залежить тільки від початкової точки A і кінцевої точки B та

позначається $\int_A^B P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. При цьому вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$:

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Знаходження функції за її повним диференціалом.

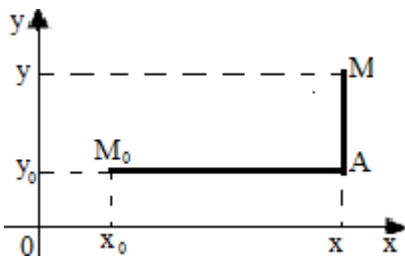
Якщо вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. В цьому випадку можна поновити функцію $u(x, y)$ по її повному диференціалу з точністю до константи.

Для цього інтегруємо вираз $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ від фіксованої точки $M_0(x_0, y_0)$ до довільної точки $M(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C. \quad (3.19)$$

Точку M_0 вибираємо так, щоб функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ були визначені в ній. Зручно за точку (x_0, y_0) брати точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ або $(1, 1)$. Виберемо шлях інтегрування від точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$ по ламаній M_0AM . Точка A має координати (x, y_0) . Тоді

$$u(x, y) = \int_{M_0A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{AM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C.$$



Знайдемо інтеграли правої частини.

1) Пряма M_0A має рівняння $y = y_0$, $dy = 0$, $x_0 \leq x \leq x$:

$$\int_{M_0 A} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx.$$

2) Пряма AM має рівняння $x = \text{const}$, $dx = 0$, $y_0 \leq y \leq y$:

$$\int_{AM} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

Остаточнo маємо

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C. \quad (3.20)$$

Аналогічно можна отримати, що

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C. \quad (3.21)$$

Зауваження. У разі функції трьох змінних і просторової кривої L , умови незалежності інтеграла $\int_L P dx + Q dy + R dz$ від шляху

інтегрування (або того, що $P dx + Q dy + R dz$ є диференціал деякої

функції) мають вигляд: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$.

Інтеграл по замкнутому контуру, формула Гріна.

Розглянемо замкнуту криву L , будемо називати її *замкнутим контуром*. Орієнтацію на цій кривій виберемо таким чином: якщо при русі точки M уздовж контуру L обмежена цим контуром область D залишається зліва, то напрямок руху (орієнтацію на кривій L) будемо вважати *додатним*, в іншому випадку (область D праворуч) – *від'ємним*.

Якщо дано криволінійний інтеграл (3.15), а крива L , по якій відбувається інтегрування – замкнута, то такий інтеграл називається *інтегралом по замкнутому контуру* і позначається наступним чином:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Нехай L – замкнутий контур, який обмежує область D і функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутій області D і $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Для будь-якого замкнутого контуру $L \in D$

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Теорема 3.2. Нехай L – додатно орієнтована замкнута крива, що обмежує область D і функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутій області D і на її межі L . Тоді має місце рівність

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (3.22)$$

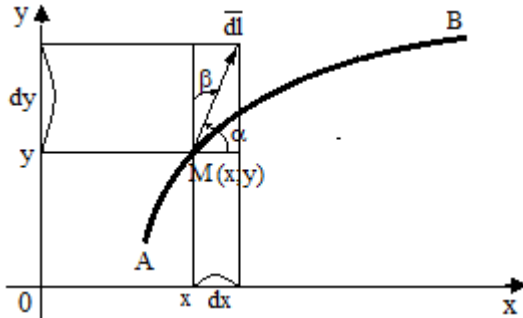
Цю рівність називають *формулою Гріна*. Вона встановлює зв'язок криволінійного інтеграла другого роду з подвійним інтегралом.

Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.

Позначивши через α і β кути, що утворюються з осями координат Ox і Oy відповідно векторним елементом $\overline{dl}$ дотичної до кривої AB в точці $M(x, y)$, отримаємо:

$$dx = dl \cos \alpha, \quad dy = dl \sin \alpha = dl \cos \beta,$$

де $\sin \alpha$, $\cos \beta$ – напрямні косинуси вектора $\overline{dl}$.



Криволінійний інтеграл другого роду можна звести до криволінійного інтеграла першого роду:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} P \cos \alpha dl + Q \cos \beta dl, \quad (3.23)$$

Зауваження. За додатний напрямок векторного елемента дотичної приймається той, що відповідає напрямку руху точки по кривій від A до B .

Застосування криволінійного інтеграла другого роду.

а) Площа плоскої фігури D , обмеженої кривою L , обчислюється за формулою:

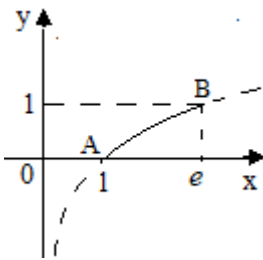
$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (3.24)$$

б) Робота сили $\vec{F} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L визначається формулою:

$$A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (3.25)$$

Задача 23. Знайти криволінійний інтеграл $\int_L \frac{y^2}{x} dx + x^2 dy$, де L – дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

Розв'язання. Зауважимо, що область визначення підінтегральної функції $x \neq 0$, тому лінія інтегрування L не має перетинати ось Oy .



У нашому випадку крива $y = \ln x$ розташована праворуч від осі Oy .

За властивістю б) інтеграл можна записати як суму двох інтегралів:

$$\int_L \frac{y^2}{x} dx + x^2 dy = \int_L \frac{y^2}{x} dx + \int_L x^2 dy.$$

Обчислимо кожний з них окремо.

$$\begin{aligned} 1) \int_L \frac{y^2}{x} dx &= [y = \ln x] = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \ln^2 x d \ln x = \\ &= \frac{\ln^3 x}{3} \Big|_1^e = \frac{1}{3} (\ln^3 e - \ln^3 1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$2) \int_L x^2 dy = \left[y = \ln x, dy = \frac{1}{x} dx \right] = \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^e x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2} (e^2 - 1).$$

$$\text{Тоді } I = \int_L \frac{y^2}{x} dx + x^2 dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} (e^2 - 1) = \frac{3e^2 - 1}{6}.$$

$$\text{Відповідь: } I = \frac{3e^2 - 1}{6}.$$

Задача 24. Знайти інтеграл $\int_L (6x^2 + y) dx + (x - 2y) dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

Розв'язання. Оскільки L – дуга параболи $y = x^2$, то $dy = 2x dx$. Тоді за формулою (3.16) матимемо

$$\begin{aligned} I &= \int_L (6x^2 + y) dx + (x - 2y) dy = \int_0^1 (6x^2 + x^2 + (x - 2x^2) \cdot 2x) dx = \\ &= \int_0^1 (9x^2 - 4x^3) dx = (3x^3 - x^4) \Big|_0^1 = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

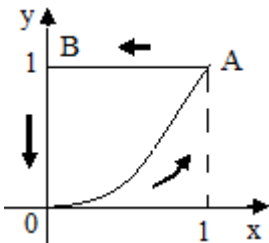
Відповідь: $I = 2$.

Задача 25. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L xy dx + dy$, де L – замкнутий контур, утворений лініями: $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$.

Розв'язання. Для замкнутого контуру існує лише два напрями обходу: проти руху стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за рухом стрілки годинника (від'ємна орієнтація контуру). При додатній орієнтації контуру він завжди залишається зліва при його обході.

$$\text{Маємо: } \oint_L xy dx + dy = \int_{OA} xy dx + dy + \int_{AB} xy dx + dy + \int_{BO} xy dx + dy$$

1) рівняння OA : $y = x^2$, $dy = 2x dx$, $0 \leq x \leq 1$. Тоді



$$\int_{OA} xy dx + dy = \int_0^1 x^3 dx + 2x dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{4};$$

2) рівняння AB : $y = 1$, $dy = 0$, x змінюється від 1 до 0. Тоді

$$\int_{AB} xy dx + dy = \int_1^0 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{1}{2};$$

3) рівняння BO : $x = 0$, $dx = 0$, y змінюється від 1 до 0. Тоді

$$\int_{BO} xy dx + dy = \int_1^0 dy = y \Big|_1^0 = -1.$$

$$\text{Матимемо } I = \oint_L xy dx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Оскільки область інтегрування замкнута, то зручно при обчисленні інтеграла застосувати формулу Гріна. Маємо $P(x, y) = xy$ і $Q(x, y) = 1$. Тоді $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x$ і $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - x = -x$. За формулою

Гріна (3.22) матимемо

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_L xy dx + dy = \iint_{OAB} -x dx dy = - \int_0^1 x dx \int_{x^2}^1 dy = - \int_0^1 x dx \cdot y \Big|_{x^2}^1 = - \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \\
 &= - \int_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $I = -\frac{1}{4}$.

Задача 26. Впевнитись, що заданий вираз du є повним диференціалом деякої функції і знайти цю функцію за допомогою криволінійного інтегралу:

$$du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy.$$

Розв'язання. З даного виразу випливає, що $P(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ і $Q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то вираз $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy$ дійсно є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$. Функцію знаходимо за формулою (3.20). В якості точки (x_0, y_0) можна взяти точку $(0, 0)$: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_0^x (x^2 + 2x \cdot 0 - 0) dx + \int_0^y (x^2 - 2xu + y^2) dy + C = \\
 &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + \left(x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^y + C = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} + C.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} + C$.

Задача 27. Знайти інтеграл $\oint_L (x + 2y) dx + (3x - y) dy$ за формулою

Гріна, якщо L – контур трикутника AOB , де $A(1; 2)$, $O(0; 0)$, $B(1; 0)$

Розв'язання. З даного виразу випливає, що $P(x, y) = x + 2y$ і $Q(x, y) = 3x - y$. Оскільки $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$ і $\frac{\partial P}{\partial y} = 2$, то

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 - 2 = 1. \quad \text{За формулою Гріна (3.22)}$$

матимемо

$$I = \oint_L (x + 2y)dx + (3x - y)dy = \iint_{AOB} 1 \cdot dxdy = \iint_{AOB} dxdy = S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Відповідь: $I = 1$.

Задача 28. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + \vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої $L: x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$ від точки $A(2; 0)$ до точки $B(-2; 0)$.

Розв'язання. Роботу сили знайдемо за формулою (3.25): $A = \int_L (x - y)dx + dy$. Запишемо рівняння кривої L у параметричному вигляді: $x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$. Тоді $dx = -2 \sin t dt, \quad dy = 2 \cos t dt$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi ((2 \cos t - 2 \sin t)(-2 \sin t) + 2 \cos t) dt = 2 \int_0^\pi (-2 \sin t \cos t + 2 \sin^2 t + \\ &+ \cos t) dt = 2 \int_0^\pi (-\sin 2t + 1 - \cos 2t + \cos t) dt = (\cos 2t + 2t - \sin 2t + 2 \sin t) \Big|_0^\pi = \\ &= \cos 2\pi + 2\pi - \sin 2\pi + 2 \sin \pi - \cos 0 - 0 + \sin 0 - 2 \sin 0 = 2\pi \text{ (од.роботи)} \end{aligned}$$

Відповідь: $A = 2\pi$ од. роботи.

4 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Поверхневий інтеграл – узагальнення поняття криволінійного інтеграла на випадки, коли інтегрування відбувається не по відрізку кривої, а по обмеженій поверхні. Як і криволінійні інтеграли, поверхневі інтеграли бувають першого роду і другого роду.

4.1 Поверхневі інтеграли першого роду. Обчислення та застосування

Означення 4.1. Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно.

Розглянемо гладку поверхню S , яка обмежена гладким або кусково-гладким контуром L . Нехай у точках цієї поверхні визначена обмежена функція $F(M) = f(x, y, z)$.

Означення 4.2. Поверхневим інтегралом першого роду називається границя інтегральної суми, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття поверхні S на частини і вибору довільних точок в них

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y, z) dS, \quad (4.1)$$

де $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n} \text{diam} \Delta S_i$.

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в точках поверхні S , то вона інтегрована по цій поверхні.

Основні властивості поверхневого інтегралу першого роду повторюють властивості подвійного інтегралу. Відмітимо лише, що поверхневий інтеграл першого роду не залежить від орієнтації поверхні S .

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду.

Обчислення поверхневого інтегралу першого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу.

Якщо гладка поверхня S задана рівнянням $z = z(x, y)$ і однозначно проєктується на площину xOy в область D , то поверхневий інтеграл 1-го роду зводиться до подвійного інтегралу:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy, \quad (4.2)$$

де функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ неперервні в області D .

Поверхню S можна проєктувати на будь-яку координатну площину, залежно від умов. Якщо поверхня S задається рівнянням $y = y(x, z)$ або $x = x(y, z)$, то

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz, \quad (4.3)$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz, \quad (4.4)$$

де D_{xz} та D_{yz} є проєкціями поверхні на координатні площини xOz та yOz відповідно.

Застосування поверхневого інтеграла першого роду.

1. Якщо покласти $f(x, y, z) = 1$ на поверхні S , то формула

$$P = \iint_S dS \quad (4.5)$$

є формулою обчислення **площі поверхні**.

2. Якщо на кусково-гладкій поверхні S розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то:

а) маса матеріальної поверхні:

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z) dS; \quad (4.6)$$

б) координати центра маси поверхні:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{1}{m} M_{yz} = \frac{1}{m} \iint_S xy dS, \\
 y_c &= \frac{1}{m} M_{xz} = \frac{1}{m} \iint_S yz dS, \\
 z_c &= \frac{1}{m} M_{xy} = \frac{1}{m} \iint_S zx dS,
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

де M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статичні моменти поверхні S відносно осей Ox, Oy, Oz ;

в) моменти інерції поверхні відносно осей координат і початку координат:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_S (y^2 + z^2) dS, \\
 I_y &= \iint_S (x^2 + z^2) dS, \\
 I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) dS, \\
 I_o &= \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS.
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Задача 29. $\iint_S (x + 2y - z) dS$, де S – частина площини $x + 2y + z = 2$ в першому октанті.

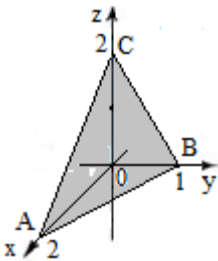
Розв'язання. Записуємо рівняння площини у відрізках та

побудуємо її: $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. Проектуємо площину

$S_{\triangle ABC}$ на площину xOy . Розв'язуємо рівняння площини відносно z : $z = 2 - x - 2y$. Знаходимо

$z'_x = -1$, $z'_y = -2$. Тоді

$$\begin{aligned}
 dS &= \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \\
 &= \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2} dx dy = \sqrt{6} dx dy.
 \end{aligned}$$



Заданий інтеграл знаходимо за формулою (4.2). Підінтегральна функція

$$f(x, y, z(x, y)) = x + 2y - (2 - x - 2y) = 2x + 4y - 2.$$

Матимемо

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x + 2y - z) dS = \iint_{\Delta AOB} (2x + 4y - 2) \sqrt{6} dx dy = \\ &= \left[\begin{array}{l} AB: x + 2y = 2, 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2} \end{array} \right] = \sqrt{6} \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} (2x + 4y - 2) dy = \\ &= \sqrt{6} \int_0^2 dx \left(2xy + 2y^2 - 2y \right) \Big|_0^{1-\frac{x}{2}} = \sqrt{6} \int_0^2 \left(2x \left(1 - \frac{x}{2} \right) + 2 \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 - \right. \\ &\left. - 2 \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right) dx = \sqrt{6} \int_0^2 \left(2x - x^2 + 2 \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 - 2 + x \right) dx = \sqrt{6} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} - \right. \\ &\left. - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^3 - 2x \right) \Big|_0^2 = \sqrt{6} \left(6 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{4}{3} \right) = \sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

4.2 Поверхневі інтеграли другого роду. Обчислення та застосування

Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M , проведемо в ній нормаль $\vec{n}$ певного напрямку і розглянемо на поверхні σ довільний замкнутий контур L , який виходить з точки M і повертається в точку M , не перетинаючи при цьому межі поверхні σ . Переміщатимемо точку M по замкнутому контуру разом з вектором $\vec{n}$ так, щоб вектор $\vec{n}$ весь час залишався нормальним до σ . При обході заданого контуру ми можемо повернутися в точку M з тим самим або з протилежним напрямком нормалі.

Означення 4.3. Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкнутого контуру L , розміщеного на поверхні σ , який не перетинає її межу, повертаємося з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхню називають *двосторонньою*.

Означення 4.4. Якщо при обході деякого контуру напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхню називають *односторонньою*.

Прикладами двосторонніх поверхонь є площина, сфера, довільна замкнута поверхня без самоперетинів, довільна поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$ де $f(x, y), f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ – функції, неперервні в деякій області D площини xOy .

Прикладом односторонньої поверхні є так званий лист Мебіуса.



поверхні.

Двостороння поверхня є орієнтована поверхня (вибрано сторону). Будемо вважати за *додатний* той напрям обходу контуру L , коли обхід відбувається проти руху годинникової стрілки, а він залишається зліва. Протилежний напрям обходу називається *від'ємним*.

Поверхневий інтеграл другого роду існує у випадку двосторонньої

Нехай σ – гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $R(x, y, z)$ – обмежена функція, визначена в точках поверхні σ . Зорієнтуємо поверхню σ . Розіб'ємо її довільно на n частин: σ_i . Позначимо через D_i проєкцію i -ї частини поверхні σ_i на площину xOy , а через ΔS_i – площу D_i , взяту із знаком плюс, якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ , та із знаком мінус, якщо обрана внутрішня сторона поверхні σ . Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M_i(\zeta_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо інтегральну суму

$\sum_{i=1}^n R(\zeta_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$. Нехай $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n} \text{diam } \sigma_i$ – максимальний діаметр поверхонь σ_i .

Означення 4.5. Якщо існує границя інтегральної суми при $\lambda \rightarrow 0$ і не залежить від способу розбиття поверхні σ на частини і вибору довільних точок в них, то вона називається *поверхневим інтегралом другого роду* від функції $R(x, y, z)$ по вибраній стороні поверхні σ і позначається

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n R(\zeta_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy \quad (4.9)$$

З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що при зміні сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак, бо змінює знак ΔS_i .

Поверхню σ можна також проектувати на координатні площини xOz та yOz . Тоді матимемо ще два поверхневі інтеграли $\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz$, $\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz$, де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ визначені та обмежені в точках поверхні σ .

На практиці найпоширенішим є поверхневий інтеграл другого роду

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz + \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтеграла першого роду:

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{\sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.11)$$

де α, β, γ – кути між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ у довільній її точці та осями Ox, Oy, Oz відповідно.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, де область D_{xy} – проєкція поверхні σ на площину xOy . Тоді

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (4.12)$$

Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz . Якщо кут тупий, то беремо "-". Аналогічно, якщо поверхня σ задана рівняннями $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ і D_{yz} ,

D_{xz} проєкції поверхні σ відповідно на площини yOz та xOz матимемо

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz, \quad (4.13)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz. \quad (4.14)$$

Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Ox , Oy відповідно, а "-" – коли кут тупий.

Якщо поверхня σ задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то одиничний вектор нормалі до поверхні обчислюється за формулою

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{(F'_x, F'_y, F'_z)}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}. \quad (4.15)$$

Знак " $\pm$ " відповідає двом сторонам поверхні σ .

Формула Остроградського-Гаусса.

Вона встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкнутій поверхні σ і потрійним інтегралом по просторовій області G , обмеженій цією поверхнею:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy, \quad (4.16)$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ та їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ неперервні в області G .

За допомогою формули Остроградського-Гаусса зручно обчислювати поверхневі інтеграли по замкнутих поверхнях.

Формула Стокса.

Вона встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами.

Якщо поверхня σ , яка обмежена замкнутим контуром L , задана рівнянням $z = z(x, y)$ і функції $z = z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ неперервні в області D , яка є проєкцією поверхні σ на площину xOy , то:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.17)$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ та їх частинні похідні першого порядку неперервні на поверхні σ

З формули Стокса випливає, що коли виконуються рівності $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, то криволінійний інтеграл по довільному просторовому замкнутому контуру L дорівнює нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Це означає, що в даному випадку криволінійний інтеграл не залежить від форми контура інтегрування.

За допомогою формули Стокса зручно обчислювати криволінійні інтеграли по замкнутих контурах.

Задача 30. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_{\sigma} (z + xy) dx dz$, де σ – нижня сторона площини $x + 2y + z = 1$, яка обмежена координатними площинами.

Розв'язання. Записуємо рівняння площини у «відрізках» та побудуємо її: $\frac{x}{1} + \frac{y}{0,5} + \frac{z}{1} = 1$. Проектуємо площину $\sigma_{\triangle ABC}$ на площину xOz . Заданий інтеграл знаходимо за формулою (4.14). За умовою задачі розглядаємо нижню сторону $\triangle ABC$. Тому в правій частині формули (4.14) беремо знак "-" (нормаль до верхньої сторони $\triangle ABC$ з віссю Oy утворює гострий кут, а з нижньою стороною – тупий кут). Розв'язуємо рівняння площини відносно y : $y = \frac{1}{2}(1 - x - z)$. Підінтегральна функція

$$Q(x, y(x, z), z) = z + \frac{x}{2}(1 - x - z) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + z - \frac{xz}{2}.$$

Матимемо

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma} (z + xy) dx dz = - \iint_{\triangle AOC} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + z - \frac{xz}{2} \right) dx dz = \left[\begin{array}{l} AC: x + z = 1, 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - x \end{array} \right] = \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + z - \frac{xz}{2} \right) dz = - \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2}(-x^2 + x)z + \frac{z^2}{2} \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right) \Bigg|_0^{1-x} = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 \left((-x^2 + x)(1-x) + (1-x)^2 \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right) dx = - \frac{1}{2} \int_0^1 (-x^2 + x + x^3 - x^2 + \\ &+ (1-x)^2 - \frac{1}{2}(x - 2x^2 + x^3)) dx = - \frac{1}{2} \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \right. \\ &\left. + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right) \Bigg|_0^1 = - \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \right) = - \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Відповідь: $I = -\frac{3}{16}$.

5 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

5.1 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт скалярного поля

Скалярне поле задано, якщо кожній точці M поставлено у відповідність певне число $u(M)$. В прямокутній декартовій системі координат у просторі скалярне поле може бути задано функцією $u(M) = u(x, y, z)$.

Похідна скалярного поля $u(M)$ за напрямом l , заданому вектором $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (5.1)$$

де $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Якщо в просторі вибрана декартова система координат і задано скалярне поле функцією $u(M)$, то **градієнт скалярного поля** обчислюється за формулою

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (5.2)$$

Між похідною поля $u(M)$ за напрямом l і градієнтом існує наступний зв'язок:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{a}^o \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u = |\overrightarrow{\text{grad}} u| \cdot \cos \theta = n_{\vec{a}^o} \overrightarrow{\text{grad}} u, \quad (5.3)$$

де $\vec{a}^o = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ – одиничний вектор напрямку l , а θ – кут між градієнтом $\overrightarrow{\text{grad}} u$ та вектором $\vec{a}^o$. З попередньої

формули випливає, що максимальне значення похідної за напрямом досягається в напрямі градієнта і її значення дорівнює модулю градієнта

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = \left| \overrightarrow{\text{grad}} u \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}. \quad (5.4)$$

Якщо у тривимірному просторі поверхня задана рівнянням $\varphi(x,y,z)=c$, то градієнт буде перпендикулярний до цієї поверхні в довільній її точці. Тобто нормальний вектор $\vec{n}$ до поверхні може бути записаний у вигляді $\vec{n} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$, а нормальний одиничний вектор буде дорівнювати $\vec{n}^o = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi}{\left| \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \right|}$.

5.2 Векторне поле. Дивергенція, ротор, циркуляція векторного поля

Якщо кожній точці M деякої області V поставлено у відповідність векторну функцію $\vec{F}(M)$, то кажуть, що в області V задано **векторне поле**. У прямокутній декартовій системі координат у просторі векторне поле визначається векторною функцією точки:

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(\vec{r}) = P(x,y,z) \vec{i} + Q(x,y,z) \vec{j} + R(x,y,z) \vec{k},$$

де $M(x, y, z)$ – точка простору, а $\vec{r} = (x, y, z)$ – її радіус-вектор.

Означення 5.1 Дивергенцією (розбіжністю) векторного поля $\vec{F}(M)$ в точці M називається об'ємна густина потоку векторного поля:

$$\text{div } \vec{F}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{1}{v} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}^o d\sigma, \quad (5.5)$$

де v – об'єм, обмежений замкнутою поверхнею σ , яка містить точку M .

В декартовій системі координат дивергенція обчислюється за формулою:

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}. \quad (5.6)$$

Означення 5.2 Векторне поле $\vec{F}(M)$ називається соленоїдальним, якщо $\operatorname{div} \vec{F}(M) = 0$.

Векторному полю $\vec{F}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ можна поставити у відповідність інше векторне поле, яке називається **ротором поля** $\vec{F}(M)$ і визначається рівністю:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Означення 5.3 Векторне поле $\vec{F}(M)$ називається **потенціальним** в однозв'язній області тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{rot} \vec{F}(M) = 0$.

Гradient скалярного поля, дивергенція і ротор векторного поля можуть бути записані за допомогою **оператора набла** (оператора Гамільтона):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (5.8)$$

Тоді $\vec{\operatorname{grad}} u = \nabla u$, $\operatorname{div} \vec{F}(M) = \nabla \cdot \vec{F}(M)$, $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

Означення 5.4 Лінійним інтегралом векторного поля $\vec{F}(M)$ вздовж лінії l називається криволінійний інтеграл $\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_l F_s \cdot ds$, де F_s – проекція вектора $\vec{F}$ на дотичну до l .

Лінійний інтеграл – це робота векторного поля $\vec{F}(M)$ вздовж лінії l . Враховуючи, що $d\vec{r} = d(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ лінійний інтеграл можна записати:

$$\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_l P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (5.9)$$

Означення 5.5 Циркуляцією векторного поля $\vec{F}(M)$ називається лінійний інтеграл вздовж замкнутого контуру l : $\Pi = \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

5.3 Застосування формули Остроградського – Гаусса в теорії поля

Задано векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

Якщо функції $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку в замкнутій області V простору, яка обмежена замкнутою гладкою поверхнею S , то справедлива формула Остроградського – Гаусса

$$\oint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (5.10)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S .

Формулі Остроградського – Гаусса можна надати векторний зміст

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^o \cdot ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV,$$

де $\vec{n}^o = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – зовнішній нормальний одиничний вектор до поверхні S . За допомогою формули Остроградського – Гаусса зручно обчислювати потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнуту поверхню S

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV. \quad (5.11)$$

5.4 Застосування формули Стокса в теорії поля

Задано векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$.

Якщо функції $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку на поверхні S і L – замкнутий контур, який обмежує поверхню S , то справедлива формула Стокса

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } \vec{a}} \cdot \vec{n}^0 dS = \\ = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS$$

Цій формулі можна надати векторний зміст:

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } \vec{F}} \cdot \vec{n}^0 dS.$$

Маємо, що циркуляція по замкнутому контуру l дорівнює потоку ротора через поверхню S , яка натягнута на контур l :

$$\Pi = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } \vec{F}} \cdot \vec{n}^0 dS. \quad (5.12)$$

Задача 31. Знайти похідну функції $u(x, y, z) = \frac{\sqrt{x}}{z} - \frac{\sqrt{y}}{x} + 2xyz$ у напрямі вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ в т. M_1 та $\overrightarrow{\text{grad } u}(M_1)$, якщо $M_1(1, 1, -1)$, $M_2(-2, -1, 1)$.

Розв'язання. Похідну функції $u = u(x, y, z)$ у напрямі вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ в точці M_1 обчислюємо за формулою:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_1} \cos \gamma,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1 M_2} = (-3, -2, 2)$, довжина якого $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$. Напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$: $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{17}}$, $\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{17}}$, $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{17}}$.

Обчислимо частинні похідні першого порядку функції

$$u = u(x, y, z) \text{ в точці } M_1: \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2z\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{x^2} + 2yz, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_1} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2x\sqrt{y}} + 2xz, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_1} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\sqrt{x}}{z^2} + 2xy, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_1} = 1.$$

Маємо:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = -\frac{3}{2} \left(-\frac{3}{\sqrt{17}} \right) - \frac{5}{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{17}} \right) + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{23}{2\sqrt{17}} = \frac{23\sqrt{17}}{34}.$$

Гradient функції $u = u(x, y, z)$ в точці M_1 знайдемо за формулою: $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_1) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_1} \bar{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_1} \bar{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_1} \bar{k}$.

$$\text{Маємо } \overrightarrow{\text{grad}} u(M_1) = -\frac{3}{2} \bar{i} - \frac{5}{2} \bar{j} + \bar{k}.$$

$$\text{Відповідь: } \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_1} = -\frac{3}{2}; \quad \overrightarrow{\text{grad}} u(M_1) = -\frac{3}{2} \bar{i} - \frac{5}{2} \bar{j} + \bar{k}.$$

Задача 32. Знайти $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0)$, $|\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0)|$ та $\text{div } \vec{a}(M_0)$ для векторного поля $\vec{a} = x y^2 z^2 \vec{i} + x^2 y z^2 \vec{j} + x y z \vec{k}$, де точка $M_0(2, -1, 1)$.

Розв'язання. За означенням ротор векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ в довільній точці $M(x, y, z)$ знаходиться за формулою (5.7)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial z} \right) - \\ &- \vec{j} \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial y} \right) = \\ &= (xz - 2x^2yz) \vec{i} - (yz - 2xy^2z) \vec{j} + (2xyz^2 - 2xyz^2) \vec{k}. \end{aligned}$$

Знайдемо ротор в точці M_0 і його модуль: $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0) = 10\vec{i} + 5\vec{j}$,
 $\left| \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0) \right| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$.

Дивергенцію векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в довільній точці $M(x, y, z)$ знаходимо за формулою (5.6).. В нашому випадку

$$\text{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = y^2z^2 + x^2z^2 + xy.$$

Дивергенція в точці M_0 : $\text{div} \vec{a}(M_0) = 4$.

Відповідь: $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0) = 10\vec{i} + 5\vec{j}$; $\left| \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0) \right| = 5\sqrt{5}$; $\text{div} \vec{a}(M_0) = 4$.

Задача 33. Обчислити потік векторного поля

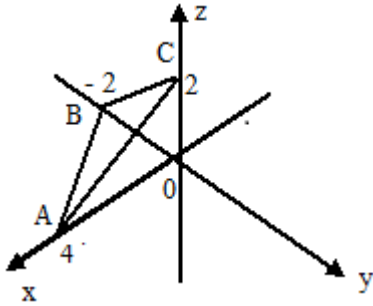
$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною $x - 2y + 2z = 4$ та координатними площинами, двома способами: а) за означенням; б) за допомогою формули Остроградського - Гаусса.

Розв'язання. а) Запишемо рівняння площини у відрізках:

$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$ і побудуємо її. Маємо піраміду $OABC$. Обчислимо

потік за допомогою поверхневого інтеграла $\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^o dS$, де S –

зовнішня поверхня піраміди $OABC$. Обчислимо потік через кожен грань піраміди:



1) ΔAOC лежить у площині xOz і має рівняння $y = 0$.

Нормальний вектор $\vec{n} = (0; 1; 0)$,

$$\vec{n}^o = j, \quad dS = dx \, dz.$$

$$AC: x + 2z = 4; \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Знайдемо

$$\vec{a} \cdot \vec{n}^o = 2y - x, \quad \vec{a} \cdot \vec{n}^o \Big|_{y=0} = -x.$$

Потік через ΔAOC :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= - \iint_{\Delta AOC} x \, dS = - \iint_{\Delta AOC} x \, dx \, dz = - \int_0^4 x \, dx \int_0^{2-\frac{x}{2}} dz = - \int_0^4 x \left(2 - \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= - \left(x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^4 = - \frac{16}{3}; \end{aligned}$$

2) ΔAOB лежить у площині xOy і має рівняння $z = 0$.

Нормальний вектор $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Оскільки мова йде про зовнішню сторону, то $\vec{n} = (0; 0; -1)$. $\vec{n}^o = -k$, $dS = dx \, dy$.

$$AB: x - 2y = 0, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

$$\text{Знайдемо } \vec{a} \cdot \vec{n}^o = -z, \quad \vec{a} \cdot \vec{n}^o \Big|_{z=0} = 0. \quad \text{Потік через } \Delta AOB:$$

$$\Pi_2 = \iint_{\Delta AOB} 0 \cdot dx \, dy = 0;$$

3) ΔBOC лежить у площині yOz і має рівняння $x = 0$.

Нормальний вектор $\vec{n} = (1; 0; 0)$. Так як мається на увазі зовнішня сторона, то $\vec{n} = (-1; 0; 0)$, $\vec{n}^o = -i$, $dS = dy \, dz$.

$$BC: -2y + 2z = 4, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

$$\text{Знайдемо } \vec{a} \cdot \vec{n}^o = -(x + z), \quad \vec{a} \cdot \vec{n}^o \Big|_{x=0} = -z. \quad \text{Потік через } \Delta BOC:$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= - \iint_{\Delta BOC} z \, dy \, dz = - \int_0^2 z \, dz \int_{z-2}^0 dy = - \int_0^2 z(-z+2) \, dz = \\ &= - \left(-\frac{z^3}{3} + z^2 \right) \Big|_0^2 = -\frac{4}{3}; \end{aligned}$$

4) ΔABC належить площині $x - 2y + 2z - 4 = 0$. Нормальний вектор площини $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Знайдемо орт нормального вектора:

$$\vec{n}^o = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}. \text{ Диференціал поверхні визначається}$$

формулою: $dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} \, dx \, dy$. Маємо $z = -\frac{1}{2}x + y + 2$ і

$$z'_x = -\frac{1}{2}, \quad z'_y = 1. \text{ Тоді } dS = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} \, dx \, dy = \frac{3}{2} \, dx \, dy.$$

Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^o = \frac{1}{3}(x + z - 2(2y - x) + 2z) = \frac{1}{3}(3x - 4y + 3z)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{n}^o \Big|_{z = -\frac{1}{2}x + y + 2} = \frac{1}{3} \left(3x - 4y - \frac{3}{2}x + 3y + 6 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right).$$

Слід площини ABC на площину xOy – це пряма $x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow x = 2y + 4, -2 \leq y \leq 0$. Потік через ΔABC :

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \iint_{\Delta ABC} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right) \cdot \frac{3}{2} \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \int_0^{2y+4} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \left(\frac{3}{4}x^2 + (6-y)x \right) \Big|_0^{2y+4} = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (y^2 + 20y + 36) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} + 10y^2 + 36y \right) \Big|_{-2}^0 = \frac{52}{3}. \end{aligned}$$

Потік через повну поверхню піраміди $OABC$:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3};$$

б) оскільки піраміда $OABC$ – замкнута поверхня, то за формулою Остроградського – Гаусса (5.11) знаходимо потік через цю поверхню. Знайдемо дивергенцію за формулою (5.6). Частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2y-x)}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

Тоді $\operatorname{div} \vec{a} = 1 + 2 + 1 = 4$. Маємо $\Pi = 4 \iiint_V dx dy dz$. Інтеграл $\iiint_V dx dy dz$

дорівнює об'єму піраміди $OABC$. Маємо:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{AOB} \cdot CO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot CO = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

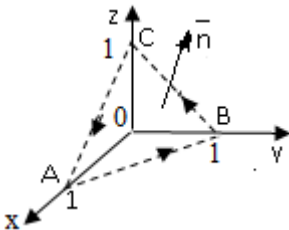
$$\text{Тоді } \Pi = 4 \iiint_V dx dy dz = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

Відповідь: $\Pi = \frac{32}{3}$.

Задача 34. Обчислити циркуляцію векторного поля

$\vec{a}(M) = (x-2z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$ по контуру трикутника, який з'являється внаслідок перетину площини $x+y+z=1$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (1, 1, 1)$ цієї площини двома способами: а) за означенням; б) за формулою Стокса.

Розв'язання. Побудуємо площину $x+y+z=1$. Маємо $\triangle ABC$.



а) за означенням циркуляція

$$\begin{aligned} \Pi = \oint_{ABCA} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{BC} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \\ &+ \int_{CA} \vec{a} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Знайдемо інтеграли.

1) на відрізку AB маємо: $z=0$, $x+y=1$, $y=1-x$, $dy=-dx \Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + (x+3y)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$, $d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy$, $\vec{a} \cdot d\vec{r} = x dx + (x+3y) dy$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_1 &= \int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{dr} = \int_{AB} x dx + (x + 3y) dy = \int_0^1 (x - x - 3(1 - x)) dx = \\
 &= \int_1^0 (3x - 3) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 - 3x \right) \Big|_1^0 = \frac{3}{2};
 \end{aligned}$$

2) на відрізку BC маємо: $x = 0$, $y + z = 1$, $z = 1 - y$, $dz = -dy \Rightarrow$
 $\vec{a} = -2z \vec{i} + (3y + z) \vec{j} + y \vec{k}$, $\vec{dr} = \vec{j} dy + \vec{k} dz$,
 $\vec{a} \cdot \vec{dr} = (3y + z) dy + y dz$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_2 &= \int_{BC} \vec{a} \cdot \vec{dr} = \int_{BC} (3y + z) dy + y dz = \int_1^0 (3y + 1 - y - y) dy = \\
 &= \int_0^1 (y + 1) dy = \frac{(y + 1)^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{3}{2};
 \end{aligned}$$

3) на відрізку CA маємо: $y = 0$, $x + z = 1$, $dz = -dx \Rightarrow$
 $\vec{a} = (x - 2z) \vec{i} + (x + z) \vec{j} + 5x \vec{k}$, $\vec{dr} = \vec{i} dx + \vec{k} dz$,
 $\vec{a} \cdot \vec{dr} = (x - 2z) dx + 5x dz$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_3 &= \int_{CA} \vec{a} \cdot \vec{dr} = \int_{CA} (x - 2z) dx + 5x dz = \int_0^2 (x - 2 + 2x - 5x) dx = \\
 &= \int_0^1 (-2x - 2) dx = \left(-x^2 - 2x \right) \Big|_0^1 = -3.
 \end{aligned}$$

$$\text{Маємо } \mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.$$

б) Обчислимо циркуляцію векторного поля за формулою Стокса (5.12), а ротор векторного поля – за формулою (5.7):

$$\overrightarrow{rot a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = -7\vec{j} + \vec{k}.$$

Якщо поверхня S проєкується у площину xOy , то

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

У нашому випадку поверхня S – частина площини, обмеженої $\triangle ABC$, який лежить у площині $x + y + z = 1$. Нормальний вектор площини $\vec{n} = (1; 1; 1)$ забезпечує потрібний напрям орієнтації поверхні.

Орт цього вектора $\vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(1; 1; 1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; 1)$. Знайдемо

$$\overrightarrow{rot a}(M) \cdot \vec{n}^o = \frac{1}{\sqrt{3}}(-7 + 1) = -\frac{6}{\sqrt{3}}. \text{ З рівняння площини маємо:}$$

$$z = 1 - x - y, \quad z'_x = -1, \quad z'_y = -1, \quad dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \\ = \sqrt{1 + 1 + 1} dx dy = \sqrt{3} dx dy. \text{ Тоді}$$

$$I = \iint_S \frac{-6}{\sqrt{3}} dS = \iint_{\triangle AOB} \frac{-6}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dx dy = -6 \iint_{\triangle AOB} dx dy.$$

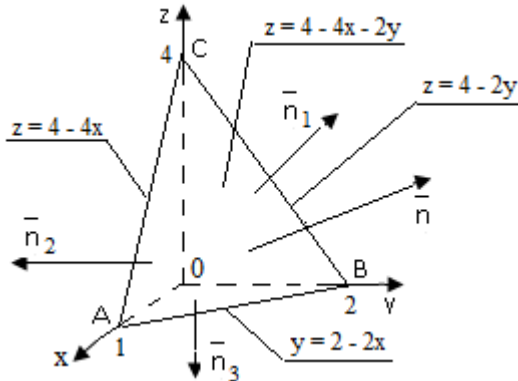
Інтеграл $\iint_{\triangle AOB} dx dy$ дорівнює площі $\triangle AOB$:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ і } I = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3.$$

Відповідь: $I = -3$

Задача 35. а) Обчислити за формулою Остроградського – Гаусса потік векторного поля $\vec{F} = (x^2 - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ через повну зовнішню поверхню трикутної піраміди, яка обмежена поверхнями $4x + 2y + z - 4 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. б) Обчислити за формулою Стокса циркуляцію векторного поля по сторонах трикутника ABC в додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця нормального вектора).

Розв'язання. Запишемо рівняння площини $4x + 2y + z - 4 = 0$ у відрізках $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ і побудуємо її. Маємо піраміду $OABC$ з вершинами у точках $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 4)$.



а) Обчислимо потік через повну поверхню користуючись формулою Остроградського – Гаусса (5.11). Для цього знайдемо дивергенцію для векторного поля:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 0 + 0 = 2x.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V 2x \, dx \, dy \, dz = 2 \int_0^1 x \, dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{4-4x-2y} dz = \\ &= 2 \int_0^1 x \, dx \int_0^{2-2x} z \Big|_0^{4-4x-2y} dy = 2 \int_0^1 x \, dx \int_0^{2-2x} (4-4x-2y) dy = \\ &= 2 \int_0^1 x \cdot \left((4-4x)y - y^2 \right) \Big|_0^{2-2x} dx = 2 \int_0^1 x \cdot \left((4-4x) \cdot (2-2x) - (2-2x)^2 \right) dx = \\ &= 2 \int_0^1 x \cdot (4x^2 - 8x + 4) dx = 2 \int_0^1 (4x^3 - 8x^2 + 4x) dx = 2 \cdot \left(x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 \right) \Big|_0^1 = \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3}.$$

б) Знайдемо циркуляцію користуючись формулою Стокса (5.12).

За поверхню S візьмемо поверхню, яка складається з трикутників ABO, BOC, AOC . Напрямок нормалей на цих трикутниках буде співпадати з напрямком осей координат. Знайдемо вектор $\overrightarrow{\text{rot } F}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot } F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2z & 3z - 4x & 5x + y \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial(5x+y)}{\partial y} - \frac{\partial(3z-4x)}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial(5x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2-2z)}{\partial z} \right) + \\ &+ \vec{k} \left(\frac{\partial(3z-4x)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2-2z)}{\partial y} \right) = \vec{i} (1-3) - \vec{j} (5+2) + \vec{k} (-4) = \\ &= -2\vec{i} - 7\vec{j} - 4\vec{k}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_S \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}^o dS = \iint_{BOC+AOC+AOB} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}^o dS = \iint_{BOC} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}_1^o dS + \\ &+ \iint_{AOC} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}_2^o dS + \iint_{AOB} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}_3^o dS \end{aligned}$$

На поверхні BOC нормальний одиничний вектор $\vec{n}_1^o = \vec{i}$, елемент поверхні $dS = dy dz$. Тому

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \iint_{BOC} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}_1^o dS = -2 \iint_{D_{yz}} dy dz = -2 \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} dz = -2 \int_0^2 z \Big|_0^{4-2y} dy = \\ &= -2 \int_0^2 (4-2y) dy = \frac{1}{2} (4-2y)^2 \Big|_0^2 = -8. \end{aligned}$$

На поверхні AOC нормальний одиничний вектор $\vec{n}_2^o = \vec{j}$,
елемент поверхні $dS = dx dz$. Тому

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \iint_{AOC} \vec{\text{rot}} \vec{F} \cdot \vec{n}_2^o dS = -7 \iint_{D_{xz}} dx dz = -7 \int_0^1 dx \int_0^{4-4x} dz = -7 \int_0^1 z \Big|_0^{4-4x} dx = \\ &= -7 \int_0^1 (4-4x) dy = \frac{7}{8} (4-4x)^2 \Big|_0^1 = -14. \end{aligned}$$

На поверхні AOB нормальний одиничний вектор $\vec{n}_3^o = \vec{k}$,
елемент поверхні $dS = dx dy$. Тому

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &= \iint_{BOC} \vec{\text{rot}} \vec{F} \cdot \vec{n}_3^o dS = -4 \iint_{D_{yz}} dx dy = -4 \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy = -4 \int_0^1 y \Big|_0^{2-2x} dx = \\ &= -4 \int_0^1 (2-2x) dx = (2-2x)^2 \Big|_0^1 = -4. \end{aligned}$$

Таким чином маємо: $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = -8 - 14 - 4 = -26$.

Можна спростити обчислення циркуляції, якщо врахувати
 $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$ і контур l – це трикутник ABC , який
належить площині $4x + 2y + z - 4 = 0$. Нормальний вектор площини
 $\vec{n} = (4; 2; 1)$ забезпечує потрібний напрям орієнтації поверхні.

$$\text{Орт цього вектора } \vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(4; 2; 1)}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}} (4; 2; 1).$$

$$\text{Знайдемо } \vec{\text{rot}} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^o = \frac{1}{\sqrt{21}} (-8 - 14 - 4) = -\frac{26}{\sqrt{21}}.$$

З рівняння площини матимемо: $z = 4 - 4x - 2y$. Тоді $z'_x = -4$,
 $z'_y = -2$.

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + 16 + 4} dx dy = \sqrt{21} dx dy.$$

$$I = \iint_S \frac{-26}{\sqrt{21}} dS = \iint_{\Delta AOB} \frac{-26}{\sqrt{21}} \sqrt{21} dx dy = -26 \iint_{\Delta AOB} dx dy .$$

Інтеграл $\iint_{\Delta AOB} dx dy$ дорівнює площі ΔAOB :

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 .$$

Тоді $I = -26 \cdot 1 = -26$.

Відповідь: $\Pi = \frac{2}{3}$; $I = -26$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – С-П.: Лань, 2010. – 608 с.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. Том 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Я.С. Бугров, С.М., Никольский. – М.: Дрофа, 2004. – 512с.
3. Вища математика [Текст]: Збірник задач: Навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навч. закладів / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко; За ред.:В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К. : А.С.К., 2001. – 478с. : іл. – (Університетська бібліотека). – ISBN 966-539-321-9 : 16.80.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 2: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век, 2006. – 416 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика Навч. посібник. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001. – 648с. : іл. – (Університетська бібліотека). – Бібліогр.: с. 632-633.
6. Индивидуальные задания по высшей математике. Учебное пособие в 4 частях. Ч. 3. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля, Ряды /Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юреть И. Е. – Вышэйшая школа. 2013. – 368с.
7. Корнілович Є Ю., Петрусенко В. П., Трофименко В. І. Вища математика. Модуль 7. Кратні, криволінійні інтеграли та елементи теорії поля: Навч. посібник. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2006. – 148 с.
8. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. — М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2001. — 656 с.: ил
9. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2003. — 792 с. — ISBN: 966-575-153-0.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.2. / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.