

# МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

## Запорізький національний технічний університет

ЗАТВЕРДЖУЮ  
ректор ЗНТУ  
проф. \_\_\_\_\_ С. Б. Беліков  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 р.

### КОМПЛЕКС

навчально-методичного забезпечення дисципліни

#### «Дослідження операцій в транспортних системах»

для студентів денної та заочної форм навчання  
зі спеціальності 275 «Транспортні технології»

**Частина III. Методичні вказівки до самостійної роботи студента**

**Розділ 2. *Теорія масового обслуговування. Теорія графів. Мережеве планування і управління. Теорія ігор. Теорія прийняття рішень.***

Факультет: Транспортний  
Кафедра: Транспортні технології

2018

Комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 «Транспортні технології» (частина III, розділ 2) / Склали: доц. Кузькін О. Ф., доц. Лашених О. А. — Запоріжжя : ЗНТУ, 2018.— 47 с.

Укладачі: доц., канд. техн. наук Кузькін О. Ф.  
доц., канд. техн. наук Лашених О. А.

Рецензент: проф., д-р техн. наук Турпак С. М.

Відповідальний за випуск: старш. викл. Лебідь Г. О.

Затверджено на засіданні  
Вченої ради Транспортного  
факультету ЗНТУ  
Протокол № \_\_\_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 р.

## САМОСТІЙНА РОБОТА №7

### СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ПРІОРИТЕТАМИ

**Мета роботи:** ознайомлення з системами масового обслуговування, в яких деякі вимоги мають пріоритет у обслуговуванні, та методики розрахунку показників їх функціонування.

#### Стисла теоретична довідка

Системи масового обслуговування з пріоритетами мають наступні особливості функціонування:

система обслуговування складається з обмеженої кількості каналів обслуговування  $n$  ;

кожний канал обслуговування може одночасно обслуговувати тільки одну вимогу;

до системи надходить вхідний потік вимог двох типів — потік вимог *першого* типу з інтенсивністю  $\lambda_1$  та потік вимог *другого* типу з інтенсивністю  $\lambda_2$ ;

вимоги *першого* типу, заставши всі канали обслуговування зайнятими стають до черги та очікують звільнення хоча б одного каналу обслуговування;

вимоги *другого* типу, заставши всі канали обслуговування зайнятими, залишають систему не обслуженними.

Тривалість обслуговування кожної вимоги  $t_{обс}$  є випадковою величиною, яка підлягає експоненціальному закону розподілу з параметром  $\mu$ . Всі канали системи мають однакову продуктивність.

Розрахункові формули, що характеризують процес функціонування системи масового обслуговування, отримані для її стаціонарного стану, наведені у таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 — Розрахункові формули для системи масового обслуговування з пріоритетами

Показник	Значення показника
1. Відносні параметри завантаження системи	$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}; \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}$
2. Імовірність того, що всі канали обслуговування вільні	$P_0 = \frac{n - \alpha_1}{[n - \alpha_1 + \alpha_1 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)] \times N_n(\alpha_1 + \alpha_2)}$ $E_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^n}{N_n n!}; \quad N_n = \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^k}{k!}.$
3. Імовірність того, що $k$ каналів зайняті	$P_k = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^k}{k!} P_0 \quad \text{при } k \leq n$
4. Імовірність відмови в обслуговуванні вимогам другого типу	$P_{\text{відм}} = \frac{n E_n (\alpha_1 + \alpha_2)}{n - \alpha_1 + \alpha_1 E_n (\alpha_1 + \alpha_2)}$
5. Середня тривалість очікування вимогою першого типу початку обслуговування	$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{P_{\text{відм}}}{\mu(n - \alpha_1)}$
6. Середня довжина черги	$M_{\text{оч}} = \bar{t}_{\text{оч}} \lambda_1$
7. Середня кількість вільних каналів обслуговування	$N_0 = \sum_{k=0}^n (n - k) P_k$

### Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Авторемонтні майстерні транспортного цеху підприємства, що мають  $n$  ремонтних боксів, виконують технічне обслуговування автомобілів власного парку та автомобілів приватних осіб. Інтенсивність надходження на обслуговування автомобілів власного парку складає  $\lambda_1$  автомобілів на добу, автомобілів приватних

осіб –  $\lambda_2$  автомобілів на добу. Тривалість обслуговування одного автомобіля підлягає експоненціальному закону розподілу з середнім значення  $\bar{t}_{\text{обс}}$  діб. Визначити показники функціонування майстерень, вважаючи, що автомобілі приватних осіб у випадку зайнятості всіх боксів ремонтуються у іншому місці.

Вихідні дані до виконання роботи по варіантах наведені у таблиці 7.2.

Таблиця 7.2 — Вихідні дані до виконання самостійної роботи

7

Вар.	$n$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\bar{t}_{\text{обс}}$	Вар.	$n$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\bar{t}_{\text{обс}}$
1	5	3,0	2,0	1,2	16	5	4,0	1,0	1,0
2	4	2,0	0,75	1,0	17	3	0,5	1,5	2,0
3	6	3,0	1,5	1,25	18	6	4,5	1,4	0,75
4	5	2,5	1,0	1,5	19	5	2,2	1,75	1,2
5	4	1,8	1,25	1,2	20	4	1,5	1,0	1,5
6	6	3,0	0,5	1,5	21	6	2,75	2,5	1,75
7	5	2,25	1,0	1,25	22	5	3,2	1,25	0,8
8	4	1,5	0,8	2,0	23	3	0,5	1,7	2,5
9	3	1,0	1,25	1,75	24	4	2,0	1,0	1,0
10	3	0,75	0,75	1,8	25	6	4,0	2,5	0,75
11	5	2,4	1,2	1,5	26	5	5,0	0,6	0,75
12	4	1,8	2,0	1,5	27	4	1,25	2,5	1,25
13	6	3,0	1,25	1,25	28	6	3,5	1,25	1,2
14	4	2,0	1,5	1,4	29	4	1,15	1,5	2,0
15	6	2,5	0,85	2,0	30	5	1,75	1,0	2,0

### Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за таких вихідних даних:  $n = 5$ ;  $\lambda_1 = 2$  автомобіля/добу;  $\lambda_2 = 1$  автомобіль/добу;  $\bar{t}_{\text{обс}} = 1,25$  доби.

**Розв'язок.**

1. Визначаємо інтенсивність обслуговування

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}} = \frac{1}{1,25} = 0,8 \text{ автомобілів/добу.}$$

2. Визначаємо відносні параметри завантаження системи

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{2}{0,8} = 2,5; \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{1}{0,8} = 1,25.$$

3. Подальші розрахунки зводимо до таблиці 7.3.

Таблиця 7.3 — Розрахунок СМО з пріоритетами

$k$	$k!$	$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^k}{k!}$	$P_k$	$(n - k)P_k$
0	1	1,00	0,0045	0,0225
1	1	3,75	0,0169	0,0676
2	2	7,03	0,0316	0,0948
3	6	8,79	0,0396	0,0792
4	24	8,24	0,0371	0,0371
5	120	6,18	0,0278	0
		<b>34,99</b>		<b>0,301</b>

4. Розраховуємо коефіцієнти  $N_n$  та  $E_n$ :

$N_n = 34,99$  (сума значень у третьому стовпчику таблиці 7.3);

$$E_n = \frac{(2,5 + 1,25)^5}{5! \cdot 34,99} = 0,177.$$

5. Імовірність того, що всі ремонтні бокси вільні

$$P_0 = \frac{5 - 2,5}{[5 - 2,5 + 2,5 \cdot 0,177(2,5 + 1,25)] \cdot 34,99 \cdot (2,5 + 1,25)} = 0,0045.$$

6. Імовірність відмови в обслуговуванні автомобілям приватних осіб складає

$$P_{\text{відм}} = \frac{5 \cdot 0,177(2,5 + 1,25)}{5 - 2,5 + 2,5 \cdot 0,177(2,5 + 1,25)} = 0,798.$$

7. Середня кількість вільних боксів

$$N_0 = \sum_{k=0}^n (n - k)P_k = 0,301.$$

8. Середня тривалість очікування обслуговування автомобілями власного парку

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0,798}{0,8(5 - 2,5)} = 0,4 \text{ доби.}$$

9. Середня довжина черги автомобілів власного парку

$$M_{\text{оч}} = 0,4 \cdot 2 = 0,8 \text{ автомобіля.}$$

### Контрольні запитання

1. Поясніть особливості функціонування системи масового обслуговування з пріоритетами.

2. Які види пріоритетів існують в системах масового обслуговування?

3. У чому полягає відмінність при обслуговуванні вимог першого та другого типів.

4. Наведіть послідовність розрахунку показників функціонування системи масового обслуговування з пріоритетами.

## САМОСТІЙНА РОБОТА №8

### ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА НА МЕРЕЖІ

**Мета заняття:** вивчення методу рішення транспортної задачі лінійного програмування на мережі методом потенціалів.

#### Стисла теоретична довідка

У мережевій постановці транспортної задачі постачальники з запасами, споживачі з потребами та відстані між ними задані безпосередньо на транспортній мережі.

Транспортна мережа складається з окремих елементів. Транспортні пункти називаються *вершинами* мережі, а дуги, що з'єднують їх називаються *ланками* мережі. На схемах зазвичай вершини, що відповідають постачальникам, позначають квадратиками, а вершини, що відповідають споживачам, позначають кружечками. Всередині квадратиків та кружечків записують відповідний запас вантажу чи потребу у ньому. Поруч з ланками мережі записують вартість транспортування одиниці вантажу по даній ланці. Ланки, по яких спрямовується вантажопотік, позначаються подвійними лініями зі стрілками, біля яких у кружечку записується величина вантажопотоку.

У загальному вигляді транспортна задача на мережі формулюється наступним чином.

Задана транспортна мережа  $S$ . Кожній ланці цієї мережі  $(i, j)$  поставлено у відповідність невід'ємне число  $c_{ij}$ , що розглядається як вартість переміщення по цій ланці одиниці вантажу (зокрема, довжина ланки). У деяких вершинах цієї мережі розташовані *постачальники* однорідного продукту (джерела з додатними інтенсивностями). У деяких вершинах мережі розташовані *споживачі* (джерела з від'ємними інтенсивностями). У загальному випадку кожній вершині  $i$  задана інтенсивність  $a_i$ , причому сума інтенсивностей по всім вершинам мережі дорівнює нулю, що означає загальний баланс відправлень та отримань.

Кожною ланкою мережі між вершинами  $i$  та  $j$  може прямиувати невід'ємний потік продукту (вантажопотік)  $x_{ij}$ . Потоки на ланках заздалегідь невідомі, але вони зв'язані у кожній вершині умовою балансу: загальна кількість вантажу, що прибуває до вершини у сумі з інтенсивністю цієї вершини дорівнює загальній кількості вантажу, що відправляється з цієї вершини. Умова балансу у поєднанні з вимогою невід'ємності вантажопотоків визначає множину допустимих планів задачі.

Необхідно знайти такий допустимий план перевезень  $X = \{x_{ij}\}$ , щоб значення цільової функції  $F = \sum c_{ij}x_{ij}$  (транспортних витрат) було найменшим.

Транспортна задача у мережевій постановці може бути закритою та відкритою типів. Задача називається задачею закритого типу, якщо на мережі виконується умова балансу між загальною наявністю продукту та його загальним споживанням, тобто

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j.$$

У задачах відкритого типу умова балансу не виконується, тобто

$$\sum_i a_i > \sum_j b_j \quad \text{чи} \quad \sum_i a_i < \sum_j b_j.$$

Задачі відкритого типу зводяться до задач закритого типу шляхом введення фіктивного постачальника чи споживача. Наприклад, у випадку, якщо  $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ , то передбачається, що до кожної вершини-відправника  $i$  підходить ланка  $(i, q)$ , що зв'яже її з однією для всіх вершин-відправників фіктивною вершиною-споживачем  $q$  з потребою у вантажі  $b_q = \sum_i a_i - \sum_j b_j$ . Довжина ланки  $(i, q)$  в напрямку від вершини  $i$  до вершини  $q$  приймається рівною

нулю, а у зворотному напрямку — достатньо великому додатному числу  $M$ .

Таким чином, в процесі рішення транспортної задачі на мережі визначаються не розміри поставок від постачальників до споживачів, а вантажопотоки на ланках транспортної мережі, які будуть виникати при реалізації оптимального плану перевезень.

Для рішення транспортної задачі на мережі розроблено декілька методів, зокрема **метод потенціалів**.

Системою потенціалів називають систему чисел, що ставлять у відповідність кожній вершині мережі. Потенціал  $i$ -ї вершини позначається як  $v_i$  та записується поруч з вершиною. Сутність методу полягає у побудові такої системи вантажопотоків, щоб виконувалась **умова оптимальності**: для кожної ланки абсолютна величина різниці потенціалів вершин  $i$  та  $j$ , які вона з'єднує, не повинна перевищувати (для ланок з вантажопотоком повинна строго дорівнювати) вартості перевезень між ними:

$$\begin{aligned} |v_i - v_j| &\leq c_{ij} && \text{при} && x_{ij} = 0; \\ |v_i - v_j| &= c_{ij} && \text{при} && x_{ij} > 0. \end{aligned}$$

Рішення транспортної задачі на мережі методом потенціалів полягає у виконанні наступних кроків.

**Крок 1. Знаходження початкового допустимого базисного плану постачань.**

Початковий план постачань складається довільним чином з дотриманням наступних вимог:

а) всі запаси постачальників повинні бути розподілені, а всі потреби споживачів задоволені;

б) до кожної вершини-споживача повинно підходити, а з кожної вершини-постачальника відходити не менше однієї ланки з вантажопотоком;

в) кількість ланок з вантажопотоком повинна бути на одиницю менше загальної кількості постачальників та споживачів на мережі;

г) ланки з вантажопотоком не повинні утворювати замкнений контур.

**Крок 2. Визначення потенціалів вершин мережі.**

Потенціали вершин визначають наступним чином. Будь-якій з вершин  $i$  присвоюють *будь-яке* початкове значення потенціалу  $v_i = d$ . Далі знаходять ланку з вантажопотоком (завантажену ланку), що з'єднає цю вершину з деякою вершиною  $j$ . Величина потенціалу  $v_j$  вершини  $j$  визначається за формулою

$$v_j = v_i \pm c_{ij}.$$

У наведеній вище формулі приймають знак «+» у випадку, якщо вантажопотік прямує у напрямку з вершини  $i$  до вершини  $j$ , і знак «-», якщо вантажопотік прямує у напрямку з вершини  $j$  до вершини  $i$ .

Переглядаючи таким чином послідовно всі вершини мережі визначають їх потенціали.

**Крок 3. Перевірка умови оптимальності для всіх ланок без вантажопотоку (вільних ланок).**

Для всіх вільних ланок розраховують величину оцінок  $\Delta_{ij}$  за формулою

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - |v_i - v_j|.$$

Якщо серед розрахованих таким чином оцінок всі  $\Delta_{ij} \geq 0$ , то при розв'язуванні транспортної задачі на мінімум вартості перевезень даний план є *оптимальним*.

Якщо ж наявне хоча б одне від'ємне значення оцінки, то даний план перевезень не є оптимальним та можна перейти до іншого плану, для якого транспортні витрати будуть менше. Це можна зробити, направивши вантажопотік ланкою, для якої  $\Delta_{ij} < 0$  (крок 4).

**Крок 4. Покращення плану перевезень.**

Для переходу до нового, поліпшеного плану перевезень виконують наступні дії:

а) вибирають ланку з найбільшим за абсолютною величиною значенням від'ємної оцінки  $\Delta_{ij}$ . Ця ланка називається *перспективною ланкою*;

б) цією ланкою направляють вантажопотік від вершини з меншим значенням потенціалу до вершини з більшим значенням потенціалу (*перспективний вантажопотік*);

в) для визначення величини перспективного вантажопотоку будують замкнений контур, що складається з перспективної ланки та завантажених ланок мережі. У цьому контурі переглядаються вантажопотоки, напрямом яких є **протилежним** напрямку перспективного вантажопотоку. З цих вантажопотоків обирається **найменший за величиною**, значення якого і присвоюють перспективному вантажопотоку;

г) у розглядуваному замкненому контурі виконують *перерозподіл вантажопотоків* за наступним правилом: попередньо знайдена величина перспективного вантажопотоку додається до всіх величин вантажопотоків, напрямом яких співпадає з перспективним, та віднімається від всіх величин вантажопотоків, напрямом яких є протилежним перспективному.

При виконанні перерозподілу вантажопотоків необхідно слідкувати за тим, щоб кількість завантажених ланок в результаті не змінювалась. У необхідних випадках слід залишати у плані поставок фіктивні вантажопотоки (завантажені ланки з нульовим значенням вантажопотоку).

Після перерозподілу вантажопотоків повертаються до **кроку 2**.

### **Зміст роботи та вихідні дані до її виконання**

Найти оптимальний план перевезень однорідного вантажу за критерієм мінімуму обсягу транспортної роботи у тонно-кілометрах. Варіанти схем транспортної мережі (довжина ланок задана у кілометрах) наведені на рисунках 8.1–8.4. Дані про наявність вантажу у поставальників та варіант схеми транспортної мережі наведені у таблиці 8.1, про потреби у вантажі споживачів — у таблиці 8.2.

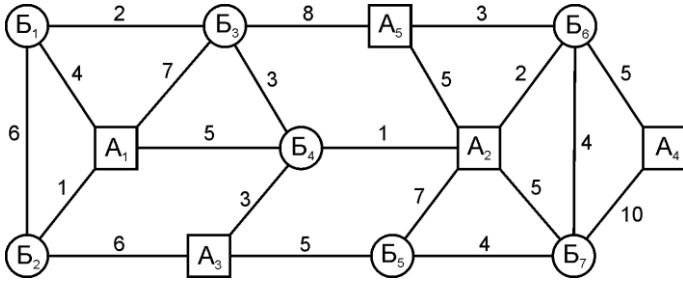


Рисунок 8.1 — Схема транспортної мережі (варіант 1)

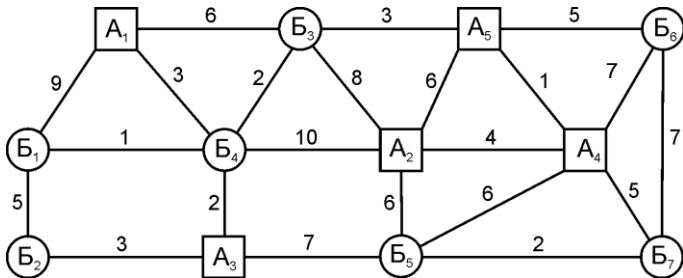


Рисунок 8.2 — Схема транспортної мережі (варіант 2)

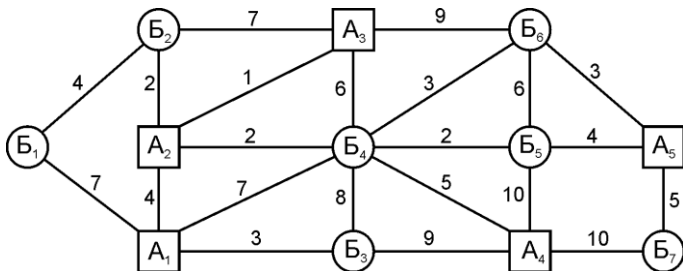


Рисунок 8.3 — Схема транспортної мережі (варіант 3)

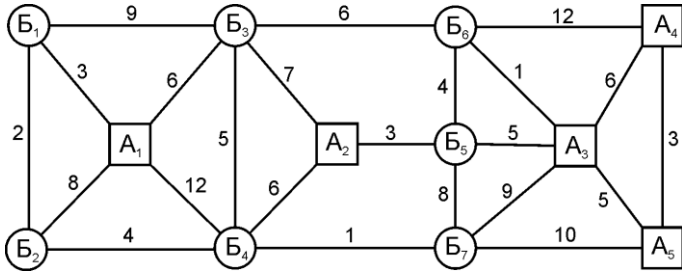


Рисунок 8.4 — Схема транспортної мережі (варіант 4)

Таблиця 8.1 — Варіант схеми транспортної мережі та наявність вантажу у постачальників

Варіанти		Наявність вантажу у постачальників, $m$				
завдання	схеми	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
1	1	100	70	100	50	65
2	2	190	200	160	260	40
3	3	130	150	100	80	90
4	4	50	300	200	150	100
5	1	120	100	400	200	100
6	2	100	200	150	100	200
7	3	250	110	90	300	200
8	4	180	120	150	150	150
9	1	160	130	150	110	90
10	2	90	90	80	70	60
11	3	120	95	180	250	105
12	4	135	135	125	185	140
13	1	65	35	85	65	155
14	2	165	195	240	175	150
15	3	125	60	115	185	140
16	4	75	115	85	120	70
17	1	75	90	140	125	90
18	2	55	90	145	155	45

Продовження таблиці 8.1.

Варіанти		Наявність вантажу у постачальників, $m$				
завдання	схеми	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
19	3	85	95	125	115	80
20	4	45	165	120	110	110
21	1	120	80	140	75	90
22	2	115	275	140	60	140
23	3	130	135	185	140	135
24	4	95	105	120	150	180
25	1	110	120	90	35	80
26	2	35	100	25	20	20
27	3	80	20	80	10	10
28	4	170	5	5	10	10
29	1	5	10	15	20	150
30	2	20	40	60	40	40

Таблиця 8.2 — Потреби у вантажі споживачів

Вари- ант	Потреба у вантажі одержувачів, $m$						
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$
1	55	40	35	95	65	40	55
2	185	95	95	125	125	115	110
3	85	95	135	65	45	65	60
4	140	135	125	130	90	105	75
5	120	95	180	150	105	150	120
6	130	150	110	90	55	95	120
7	120	110	135	165	190	130	100
8	120	110	35	165	90	80	150
9	80	75	90	70	125	120	80
10	65	50	40	75	45	55	60
11	100	110	90	150	120	95	85
12	95	110	140	110	150	80	35
13	75	40	85	35	65	65	40

Продовження таблиці 8.2.

Варіант	Потреба у вантажі одержувачів, $m$						
	Б <sub>1</sub>	Б <sub>2</sub>	Б <sub>3</sub>	Б <sub>4</sub>	Б <sub>5</sub>	Б <sub>6</sub>	Б <sub>7</sub>
14	180	120	95	150	105	155	120
15	90	65	80	50	125	115	100
16	95	80	120	55	35	50	30
17	35	50	55	110	95	85	90
18	80	55	75	40	75	80	85
19	95	65	40	120	95	70	15
20	75	85	50	45	125	90	80
21	85	125	40	40	60	75	80
22	115	90	160	105	145	95	20
23	100	110	90	115	150	100	60
24	115	110	135	85	40	85	80
25	70	80	40	65	55	80	45
26	20	20	20	20	20	20	80
27	15	15	15	15	60	60	20
28	40	30	20	10	20	30	50
29	25	25	25	25	50	25	25
30	160	5	5	10	10	5	5

### Приклад виконання роботи

Розглянемо приклад виконання роботи за вихідних даних, заданих схемою, наведеною на рисунку 8.5.

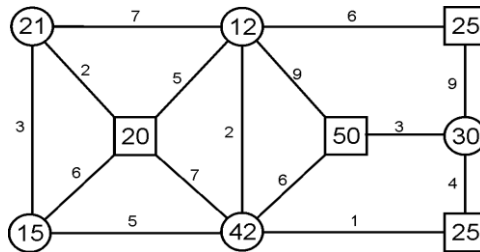


Рисунок 8.5 — Вихідні дані до рішення задачі (приклад)

**Розв'язок.**

Складаємо довільно початковий план розподілу вантажопотоків (рисунок 8.6). Послідовно призначаємо наступні вантажопотоки:

ланкою (9,8) направляємо вантажопотік  $x_{98} = 25$  т;

ланкою (5,6) направляємо вантажопотік  $x_{56} = 30$  т;

ланкою (5,8) направляємо вантажопотік  $x_{58} = 17$  т;

ланкою (5,2) направляємо вантажопотік  $x_{52} = 3$  т;

ланкою (3,2) направляємо вантажопотік  $x_{32} = 25$  т;

ланкою (2,1) направляємо вантажопотік  $x_{21} = 16$  т;

ланкою (4,7) направляємо вантажопотік  $x_{47} = 15$  т;

ланкою (4,1) направляємо вантажопотік  $x_{41} = 5$  т.

У складеному початковому плані всі запаси постачальників вивезені та попит одержувачів задоволено. Кількість ланок з вантажопотоком дорівнює 8, що на одиницю менше загальної кількості постачальників та одержувачів. Ланки з вантажопотоком не утворюють замкнений контур. Таким чином, побудований початковий план є допустимим і базисним.

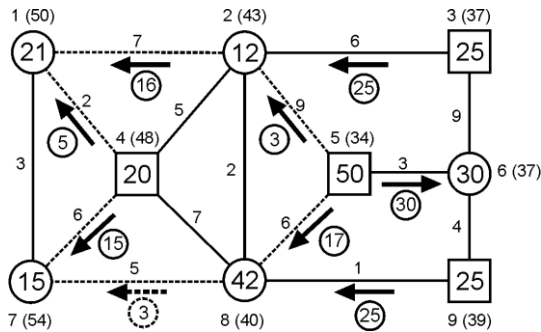


Рисунок 8.6 — Початковий допустимий план перевезень

Розрахуємо транспортну роботу по цьому плану перевезень, склавши добутки вантажопотоків завантажених ланок на їх довжину:

$$W = 16 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 15 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 17 \cdot 6 + 25 \cdot 6 + 30 \cdot 3 + 25 \cdot 1 = 606 \text{ ткм.}$$

Для перевірки цього плану на оптимальність розрахуємо потенціали вершин транспортної мережі (вони записуються біля вершин у дужках поряд з номером вершини). Припишемо вершині 1 початковий потенціал  $v_1 = 50$  (можна взяти будь-яке значення, але рекомендується брати початковий потенціал досить великим, щоб надалі не мати справу з від'ємними значеннями потенціалів інших вершин). Послідовно знаходимо потенціали всіх інших вершин:

$$v_2 = v_1 - c_{12} = 50 - 7 = 43;$$

$$v_3 = v_2 - c_{23} = 43 - 6 = 37;$$

$$v_5 = v_2 - c_{25} = 43 - 9 = 34;$$

$$v_6 = v_5 + c_{56} = 34 + 3 = 37;$$

$$v_4 = v_1 - c_{14} = 50 - 2 = 48;$$

$$v_8 = v_5 + c_{58} = 34 + 6 = 40;$$

$$v_9 = v_8 - c_{89} = 40 - 1 = 39;$$

$$v_7 = v_4 + c_{47} = 48 + 6 = 54.$$

Для всіх вільних ланок знаходимо значення оцінок  $\Delta_{ij}$ :

$$\text{ланка (1,7): } \Delta_{17} = c_{17} - |v_1 - v_7| = 3 - |50 - 54| = -1;$$

$$\text{ланка (2,4): } \Delta_{24} = c_{24} - |v_2 - v_4| = 5 - |43 - 48| = 0;$$

$$\text{ланка (4,8): } \Delta_{48} = c_{48} - |v_4 - v_8| = 7 - |48 - 40| = -1;$$

$$\text{ланка (2,8): } \Delta_{28} = c_{28} - |v_2 - v_8| = 2 - |43 - 40| = -1;$$

$$\text{ланка (7,8): } \Delta_{78} = c_{78} - |v_7 - v_8| = 5 - |54 - 40| = -9;$$

$$\text{ланка (3,6): } \Delta_{36} = c_{36} - |v_3 - v_6| = 9 - |37 - 37| = 9;$$

$$\text{ланка (6,9): } \Delta_{69} = c_{69} - |v_6 - v_9| = 4 - |37 - 39| = 2.$$

Наявність від'ємних значень оцінок свідчать про те, що складений початковий план не є оптимальним і його можна покращити. Для покращення плану обираємо перспективною ланку (7,8) з найбільшим за абсолютною величиною від'ємним значенням  $\Delta_{78} = -9$ . Побудуємо замкнений контур, що утворюють завантажені ланки та

перспективна ланка. Контур утворюють ланки 8–7–4–1–2–5–8 (на рисунку 8.6 позначений пунктирними лініями).

Направляємо перспективний вантажопотік від вершини 8 до вершини 7 (оскільки  $v_7 > v_8$ ), позначаючи його пунктирною стрілкою. Після цього у замкненому контурі переглядаємо завантажені ланки, напрямом вантажопотоку на яких *протилежний* перспективному. Це ланки: (7,4) з вантажопотоком  $x_{47} = 15$ ; (1,2) з вантажопотоком  $x_{21} = 16$ ; (2,5) з вантажопотоком  $x_{52} = 3$ . Серед цих значень найменшим є вантажопотік  $x_{52} = 3$ , значення якого і приймаємо в якості перспективного (в поліпшеному плані  $x_{87} = 3$ ). У розглядуваному замкненому контурі вантажопотоки  $x_{41}$  та  $x_{58}$  збільшуємо на 3, оскільки вони направлені так же як і перспективний. Вантажопотоки  $x_{47}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{52}$  зменшуємо на 3, оскільки вони направлені протилежно перспективному. Після виконаного перерозподілу вантажопотоків ланка (7,8) стає завантаженою, а ланка (5,2) стає вільною (рисунок 8.7).

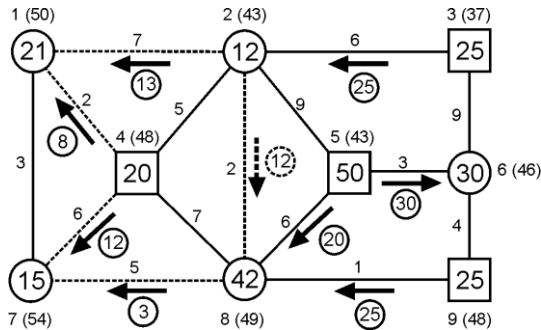


Рисунок 8.7 — План перевезень після першої ітерації

Транспортна робота за цим планом перевезень дорівнює  $W = 579$  ткм, що на  $\Delta = 27$  ткм менше ніж у попереднього плану. Це зменшення можна розрахувати, помноживши оцінку перспективної ланки на перспективний вантажопотік, тобто

$$\Delta = \Delta_{78} \cdot x_{78} = (-9) \cdot 3 = -27.$$

Для отриманого плану знов розраховуємо потенціали вершин та оцінки вільних ланок мережі (рисунок 8.7). План не є оптимальним, оскільки від'ємні значення оцінок мають ланки (1,7)  $\Delta_{17} = -1$  та (2,8)  $\Delta_{28} = -4$ . Обираємо перспективною ланку (2,8). Перспективний вантажопотік направляємо від вершини 2 до вершини 8. Замкнений контур утворюють ланки 2–8–7–4–1–2. Найменше значення з вантажопотоків, спрямованих протилежно перспективному, має ланка (4,7) з  $x_{47} = 12$ . Призначаємо перспективний вантажопотік  $x_{28} = 12$ , вантажопотоки  $x_{87}$  та  $x_{41}$  збільшуємо на 12, а вантажопотоки  $x_{47}$  та  $x_{21}$  зменшуємо на 12. Переходимо до поліпшеного плану перевезень (рисунок 8.8).

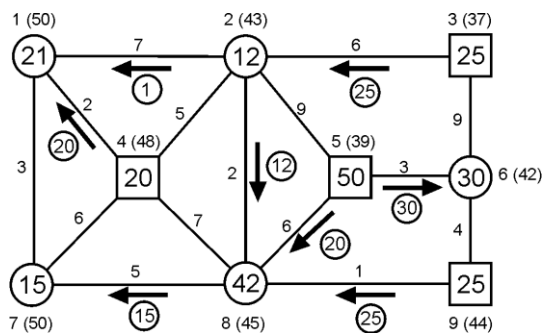


Рисунок 8.8 — Оптимальний план перевезень

Перевірка отриманого плану перевезень показує, що він є оптимальним, оскільки всі оцінки вільних ланок мережі невід'ємні. Транспортна робота оптимального плану  $W = 531$  ткм. Зазначимо, що нульове значення оцінки вільної ланки  $\Delta_{24} = 0$  вказує на те, що задача має, крім знайденого, ще безліч оптимальних планів, які можна знайти, направивши ланкою (2,4) вантажопотік (не обов'язково цілочисловий), та перерозподіливши вантажопотоки по замкненому контуру з ланок 2–4–1–2.

## Контрольні запитання

1. Дайте постановку транспортної задачі лінійного програмування у сітковій постановці.
2. Яким вимогам повинен задовольняти початковий допустимий базисний план перевезень?
3. Як розраховуються потенціали вершин мережі?
4. Сформулюйте умову оптимальності плану транспортної задачі у сітковій постановці.
5. Як виконується покращення неоптимального плану транспортної задачі у сітковій постановці?

## САМОСТІЙНА РОБОТА №9

### ЗАДАЧА ЛИСТОНОШІ

**Мета роботи:** вивчення алгоритму Фльорі пошуку ейлеревих циклів на графі та алгоритму пошуку найменшого паросполучення алгоритму для розв'язування задачі листоноші.

#### Стисла теоретична довідка

Задача листоноші у теорії графів пов'язана з пошуком найкоротшого циклу у графі, який проходить кожним ребром графа щонайменше один раз.

Будемо розглядати зважений орієнтований граф. Зрозуміло, що якщо всі його вершини мають парну степінь, то задача є тривіальною і зводиться до пошуку ейлерева циклу. Знайти його можна, наприклад, за допомогою алгоритму Фльорі.

#### *Алгоритм Фльорі.*

1. Розпочати побудови циклу з довільної вершини.
2. Кожне пройдене ребро та утворені при цьому ізольовані вершини закреслюються.

3. У випадку можливості продовження руху декількома ребрами не вибирати ребро, закреслення якого призводить до розбиття графу з не закреслених вершин на декілька незв'язних компонент.

Якщо ж у графі наявні вершини з непарними ступенями (кількість таких вершин завжди є парною), то ейлерів цикл у ньому не існує і деякими ребрами доведеться проходити більш ніж один раз. Нижче наведений алгоритм Крістофідеса для пошуку найкоротшого циклу, що проходить кожним ребром графа з непарними степенями вершин щонайменше один раз.

**Крок 1.** Нехай  $[c_{ij}]$  — матриця довжин ребер вихідного графа  $G$ . Використовуючи алгоритм пошуку найкоротших шляхів (наприклад, алгоритм Дейкстри) побудувати матрицю  $D = [d_{ij}]$ , де  $d_{ij}$  — довжина найкоротшого шляху між вершинами  $i$  та  $j$ , причому розглядаються тільки вершини, з непарними степенями.

**Крок 2.** Для матриці найкоротших шляхів  $D$  відшукати паросполучення з найменшою сумарною довжиною. За невеликої кількості напарних вершин таке паросполучення можна знайти шляхом перебору варіантів. У супротивному випадку застосовують спеціальні алгоритми.

**Крок 3.** Додати додаткові штучні ребра до кожного ребра вздовж найкоротших шляхів, що увійшли до мінімального паросполучення.

**Крок 4.** У отриманому таким чином графі (всі степені його вершин є парними) відшукати ейлерів цикл за допомогою алгоритму Фльорі.

### Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Знайти оптимальний (найкоротший) маршрут збирання сміття автомобілем-сміттевозом на заданій мережі міських вулиць (рисунок 9.1). Довжина вулиць по варіантах наведена у таблиці 9.1.

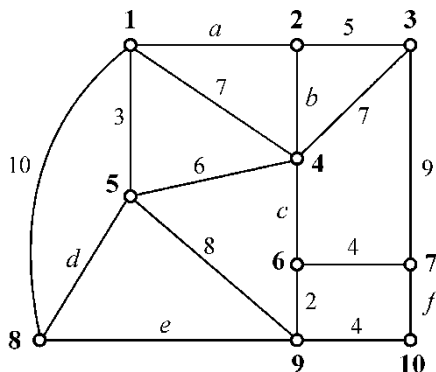


Рисунок 9.1 — Схема мережі вулиць

Таблиця 9.1 — Вихідні дані до виконання самостійної роботи

9

Вар.	Довжина вулиць, км					
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
1	6	7	9	11	8	5
2	5	5	9	10	9	5
3	3	4	4	8	9	5
4	7	3	5	8	9	3
5	5	3	7	12	3	4
6	7	7	3	9	10	3
7	7	6	9	11	11	6
8	3	7	9	8	5	6
9	7	6	8	8	4	6
10	3	3	2	12	4	3
11	3	5	2	8	3	8
12	7	6	5	12	11	8
13	5	6	5	10	12	4
14	5	5	6	12	8	5
15	5	4	9	10	8	8
16	3	5	3	9	5	4

Продовження таблиці 9.1.

Вар.	Довжина вулиць, км					
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
17	5	3	5	10	3	6
18	4	4	6	9	7	5
19	7	4	7	7	11	8
20	6	4	2	9	11	6
21	7	7	2	9	10	4
22	4	3	7	7	11	6
23	3	7	5	12	9	8
24	3	3	10	12	7	6
25	3	5	9	10	6	8
26	6	3	7	10	12	5
27	6	7	10	9	4	3
28	7	6	4	9	3	4
29	4	3	6	10	4	3
30	3	7	9	7	11	3

### Приклад виконання роботи

Розглянемо приклад виконання роботи для схеми маршрутної мережі, наведеної на рисунку 9.2.

Спочатку перевіряємо наявність у мережі вершин з непарними степенями. Таких вершин на мережі шість:  $d(2) = 3$ ,  $d(3) = 3$ ,  $d(4) = 5$ ,  $d(6) = 3$ ,  $d(7) = 3$  та  $d(8) = 3$ .

Використовуючи алгоритм Дейкстри знаходимо *найкоротші відстані* та *шляхи* між всіма парами вершин з непарними степенями. В результаті отримуємо матрицю D (таблиця 9.2). По діагоналі цієї матриці проставляємо знаки безкінечності.

У таблиці 9.3 наведені найкоротші шляхи, які відповідають знайденим найкоротшим відстаням.

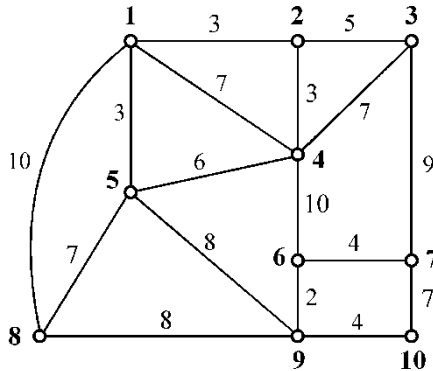


Рисунок 9.2 — Схема мережі вулиць (приклад)

Таблиця 9.2 — Матриця найкоротших відстаней між вершинами з непарними степенями

	2	3	4	6	7	8
2	$+\infty$	5	3	13	14	13
3	5	$+\infty$	7	13	9	18
4	3	7	$+\infty$	10	14	13
6	13	13	10	$+\infty$	4	10
7	14	9	14	4	$+\infty$	14
8	13	18	13	10	14	$+\infty$

Таблиця 9.3 — Матриця найкоротших шляхів між вершинами з непарними степенями

	2	3	4	6	7	8
2	$+\infty$	2-3	2-4	2-4-6	2-3-7	2-1-8
3	3-2	$+\infty$	3-4	3-7-6	3-7	3-2-1-8
4	4-2	4-3	$+\infty$	4-6	4-6-7	4-5-8
6	6-4-2	6-7-3	6-4	$+\infty$	6-7	6-9-8
7	7-3-2	7-3	7-6-4	7-6	$+\infty$	7-6-9-8
8	8-1-2	8-1-2-3	8-5-4	8-9-6	8-9-6-7	$+\infty$

Розглянемо всі можливі паросполучення непарних вершин та підрахуємо їх сумарну довжину:

- 1) (2,3); (4,6); (7,8) :  $5+10+14 = 29$  км;
- 2) (2,3); (4,7); (6,8) :  $5+14+10 = 29$  км;
- 3) **(2,3); (4,8); (6,7) :  $5+13+ 4 = 22$  км;**
- 4) (2,4); (3,6); (7,8) :  $3+13+14 = 30$  км;
- 5) **(2,4); (3,7); (6,8) :  $3+ 9+ 10 = 22$  км;**
- 6) (2,4); (3,8); (6,7) :  $3+18+ 4 = 25$  км;
- 7) (2,6); (3,4); (7,8) :  $13+7+14 = 34$  км;
- 8) (2,6); (4,7); (3,8) :  $13+14+18 = 45$  км;
- 9) (2,6); (4,8); (3,7) :  $13+13+9 = 35$  км;
- 10) (2,7); (4,6); (3,8) :  $14+10+18 = 42$  км;
- 11) (2,7); (3,4); (6,8) :  $14+7+10 = 31$  км;
- 12) (2,7); (4,8); (3,6) :  $14+13+13 = 40$  км;
- 13) (2,8); (4,6); (3,7) :  $13+10+9 = 32$  км;
- 14) (2,8); (4,7); (3,6) :  $13+14+13 = 40$  км;
- 15) (2,8); (3,4); (6,7) :  $13+7+4 = 24$  км.

Таким чином, маємо два паросполучення з мінімальною довжиною (3 та 5, позначені напівжирним шрифтом). Візьмемо, наприклад, паросполучення (2,3); (4,8); (6,7). У відповідності до таблиці найкоротших шляхів 9.3 додаємо до вихідного графа додаткові ребра, які відповідають найкоротшим шляхам отриманого мінімального паросполучення (показані пунктирними лініями). Отриманий після цієї операції вихідний граф наведено на рисунку 9.3.

Тепер ми маємо ейлерів граф, тобто граф, всі степені вершин якого є парними. Використовуючи алгоритм Фльорі знаходимо у ньому ейлерів цикл, починаючи, наприклад, з вершини 1:

1 - 8 - 9 - 10 - 7 - 6 - 9 - 5 - 8 - 5 - 4 - 6 - 7 - 3 - 4 - 5 - 1 - 2 - 3 - 2 - 4 - 1

Довжина цього маршруту дорівнює сумі довжин всіх ланок мережі 115 км та суми довжин доданих ребер з найменшого паросполучення (22), тобто  $115+22 = 137$  км.

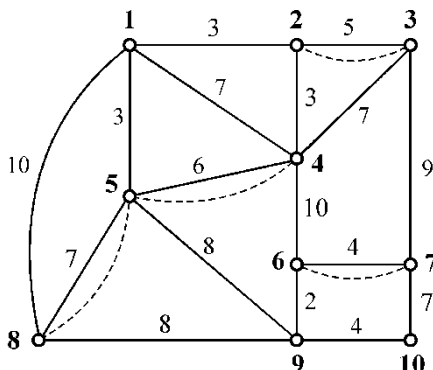


Рисунок 9.3 — Вихідний граф, розширений фіктивними ребрами

### Контрольні запитання

1. Дайте визначення ейлерового циклу у графі.
2. У якому випадку граф називають ейлеревим? півейлеревим?
2. За яких умов у графі існує ейлерів цикл?
3. Дайте формулювання задачі листоноші.
4. Наведіть алгоритм Фльорі для побудови ейлерова циклу у ейлеревому графі.
5. Що таке найменше паросполучення у графі і як воно відшукується?

## САМОСТІЙНА РОБОТА №10

### ОПТИМІЗАЦІЯ МЕРЕЖЕВИХ ГРАФІКІВ ЗА ЧАСОМ І РЕСУРСАМИ

**Мета роботи:** вивчення методів розподілу обмежених ресурсів з метою виконання комплексу робіт, заданих мережевою моделлю, у найкоротший термін послідовним та паралельним методами.

## Стисла теоретична довідка

Методи аналізу та управління на мережах дозволяють упорядковувати роботи комплексу таким чином, щоб комплекс робіт був завершений у заданий термін за умови дотримання заданої послідовності робіт.

При виконанні реальних проектів ресурси, як правило, обмежені, внаслідок чого на послідовність виконання робіт накладаються додаткові обмеження, пов'язані з наявністю вільних ресурсів у даний момент часу.

Процедура розподілу ресурсів полягає в плануванні початку виконання робіт у відповідності з умовами слідування та наявності вільних ресурсів. Для реалізації цієї процедури існують декілька методів, до яких відносяться *послідовний* та *паралельний*.

### ***Послідовний метод.***

Суть методу полягає в тому, що ресурси, виділені для виконання роботи, закріплюються за цією роботою до її закінчення. Обмеженість ресурсів призводить до того, що не всі роботи, початок яких є можливим, можуть бути розпочаті одночасно. У таких ситуаціях використовують наступні ***правила переваги***:

- 1) спрямувати ресурси на виконання роботи, що має найменший повний резерв часу (за рівних умов);
- 2) спрямувати ресурси на виконання роботи, що потребує найбільшу загальну кількість ресурсів (за рівних умов);
- 3) спрямувати ресурси на виконання роботи, що має найбільшу інтенсивність споживання ресурсів (за рівних умов);
- 4) спрямувати ресурси на виконання роботи з найменшим номером.

Послідовність розподілу ресурсів полягає у наступному.

1. Формується список робіт, що можуть бути розпочаті за умов послідовності.
2. У відповідності до правил переваги для цих робіт визначаються пріоритети, що вказують, в якій послідовності розподіляються вільні ресурси.

3. Роботи, для яких були виділені ресурси, фіксуються як виконувані, та серед них знаходиться та, яку буде закінчено раніше всіх інших. Час закінчення цієї роботи визначає новий характерний момент часу (момент прийняття рішення), а вільні ресурси поповнюються за рахунок вивільнених ресурсів.

4. Виконується коригування часових параметрів робіт, після чого множина робіт, які можуть бути розпочаті, поповнюється за рахунок робіт, ранні терміни яких дорівнюють поточному часу, а з множини виконуваних робіт виключається виконана.

Таку процедуру виконують доти, доки всі роботи не будуть виконані. Час закінчення останньої роботи визначає тривалість виконання всього комплексу робіт.

При розподілі ресурсів слід враховувати два важливих моменти: *по-перше*, наявна кількість ресурсів повинна бути цілим числом, оскільки ресурси (робітники, машини) вимірюються, як правило, тільки цілими числами; *по-друге*, середня кількість необхідних ресурсів повинна бути не менше, ніж потреба у них для будь-якої роботи, інакше деякі роботи ніколи не зможуть бути виконані.

#### ***Паралельний метод.***

Відрізняється від послідовного тим, що розподіл ресурсів планується щоденно (щогодини, щорічно). В розрахунок приймаються тільки роботи, що можуть виконуватися у поточний день, а також ресурси, що наявні на цей день: ***ресурси розподіляються тільки на один день***. На наступний день можна не використовувати ресурси на попередніх роботах, навіть якщо вони не завершені (вони будуть завершені у наступні дні).

При розподілі ресурсів між роботами використовують наступні ***правила переваги***:

- 1) спрямувати ресурси на виконання роботи, що має найменший повний резерв часу (за рівних умов);
- 2) спрямувати ресурси для роботи, що виконання роботи якої вже розпочалося (за рівних умов);
- 3) спрямувати ресурси на виконання роботи, що потребує найбільшу загальну кількість ресурсів (за рівних умов);

4) спрямувати ресурси на виконання роботи, що має найбільшу інтенсивність споживання ресурсів (за рівних умов);

5) спрямувати ресурси на виконання роботи з найменшим номером.

На початку кожного робочого дня всі ресурси вважаються вільними. У перший робочий день пріоритет визначається повним резервом часу. У наступні дні порядок розподілу ресурсів визначається правилами переваги.

### Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Для заданого мережевого графіка та інтенсивності використання ресурсів роботами визначити:

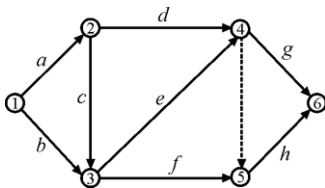
1) термін виконання комплексу робіт без обмежень на використання ресурсів та повні резерви часу робіт;

2) мінімально необхідну щоденну кількість ресурсів для виконання комплексу робіт;

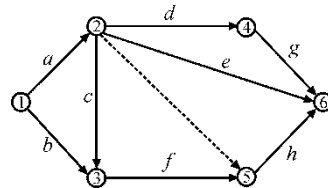
3) виконати розподіл ресурсів *послідовним* методом і визначити термін виконання комплексу робіт за умови наявності кількості ресурсів, що дорівнює їх мінімально необхідній кількості;

4) виконати розподіл ресурсів *паралельним* методом і визначити термін виконання комплексу робіт за умови наявної кількості ресурсів, що на одиницю більше ніж їх мінімальна необхідна кількість.

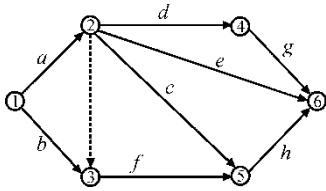
Схеми мережевих графіків комплексу робіт по варіантах наведені на рисунку 10.1, тривалості виконання робіт та потреба у ресурсах робіт наведені у таблиці 10.1.



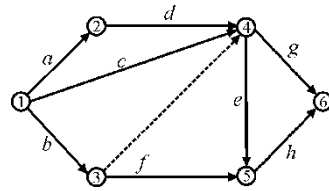
a)



б)



в)



з)

Рисунок 10.1 — Варіанти схем сітьового графіка

Таблиця 10.1 — Вихідні дані до виконання самостійної роботи 9

Варіант	Схема	Тривалість виконання роботи (чисельник) та щоденна потреба у ресурсах (знаменник)							
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
1	<i>a</i>	5/2	8/3	6/4	4/6	6/2	9/3	5/5	8/1
2	<i>б</i>	7/3	5/1	6/2	6/3	7/5	6/4	2/6	1/5
3	<i>в</i>	3/6	4/2	7/3	8/4	9/5	4/3	5/2	10/2
4	<i>з</i>	1/5	4/1	9/3	7/4	8/2	9/2	5/6	6/3
5	<i>a</i>	7/2	5/2	8/1	6/4	3/3	8/4	7/5	6/6
6	<i>б</i>	9/1	8/3	4/3	3/6	6/1	6/2	8/4	2/5
7	<i>в</i>	6/6	4/6	8/3	6/1	9/5	4/4	7/2	6/3
8	<i>з</i>	6/5	7/1	8/4	9/3	5/6	6/3	6/2	8/5
9	<i>a</i>	4/4	6/2	8/3	5/5	4/6	7/3	9/3	6/1
10	<i>б</i>	1/6	4/2	2/4	6/5	3/3	8/2	7/1	9/3
11	<i>в</i>	8/1	6/3	7/5	8/2	1/6	5/4	4/5	3/3
12	<i>з</i>	7/5	5/1	4/2	1/5	6/3	3/6	1/4	2/2
13	<i>a</i>	5/2	7/4	6/3	3/5	8/1	5/2	4/6	5/3
14	<i>б</i>	2/3	5/3	4/1	3/6	8/5	9/2	7/4	3/5
15	<i>в</i>	3/5	2/5	3/3	4/1	6/2	2/5	3/6	8/4
16	<i>з</i>	9/4	3/5	5/2	7/4	2/6	4/1	8/5	5/2
17	<i>a</i>	8/3	3/5	1/6	2/2	5/5	2/1	9/3	9/2

Продовження таблиці 10.1.

Варіант	Схема	Тривалість виконання роботи (чисельник) та щоденна потреба у ресурсах (знаменник)							
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
18	<i>б</i>	2/4	5/2	3/5	8/1	9/3	6/2	4/4	2/4
19	<i>в</i>	8/2	7/4	4/1	1/6	1/5	2/1	9/3	3/3
20	<i>г</i>	7/2	6/1	1/3	2/5	4/6	3/3	8/4	6/5
21	<i>а</i>	3/5	4/6	8/3	7/1	2/2	9/4	5/6	5/1
22	<i>б</i>	4/1	8/3	3/6	5/5	8/4	9/2	7/3	5/5
23	<i>в</i>	4/2	2/6	4/5	5/3	3/3	7/1	9/2	8/4
24	<i>г</i>	3/6	4/5	5/4	8/2	9/2	7/3	6/5	5/3
25	<i>а</i>	8/2	2/6	1/5	4/4	9/3	6/4	7/1	6/3
26	<i>б</i>	2/3	5/3	7/4	9/3	9/2	7/5	8/8	3/1
27	<i>в</i>	2/5	3/6	2/2	5/3	4/1	4/4	5/1	1/5
28	<i>г</i>	4/1	8/5	5/5	2/3	5/3	2/5	3/6	7/4
29	<i>а</i>	5/2	2/5	3/6	7/4	3/3	4/1	8/5	2/2
30	<i>б</i>	2/5	4/1	8/5	2/2	9/3	9/2	2/3	5/3

### Приклад виконання роботи

Розглянемо приклад виконання роботи за вихідних даних, наведених на рисунку 10.2.

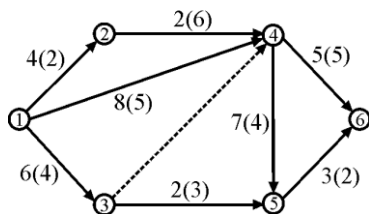


Рисунок 10.2 — Схема мережевого графіка (приклад)

Числа біля стрілок, що позначають роботи, визначають тривалість виконання роботи. Числа у дужках поруч — щоденну потребу у ресурсах для виконання роботи.

**Розв'язок.**

Розраховуємо мережевий графік та визначаємо повні резерви часу робіт (рисунок 10.3).

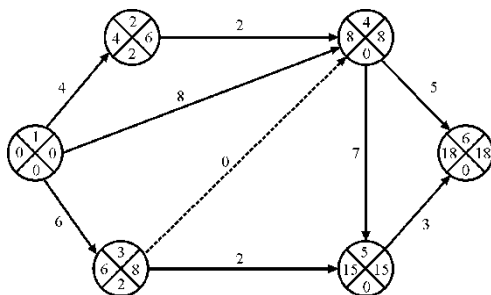


Рисунок 10.3 — Розрахунок сітьового графіка

Визначаємо ресурсо-дні для кожної роботи та сумуємо отримані величини (таблиця 10.2).

Таблиця 10.2 — Повні резерви часу робіт та потреба у ресурсах

Робота $i-j$	Тривалість виконання $t_{ij}$	Ресурси	Ресурсо-дні	Повний резерв часу $R_{ij}$
1-2	4	2	8	2
1-3	6	4	24	2
1-4	8	5	40	0
2-4	2	6	12	2
3-5	2	3	6	7
4-5	7	4	28	0
4-6	5	5	25	5
5-6	3	2	6	0
			<b>149</b>	



Приймаємо рішення спрямувати 2 одиниці ресурсу, що залишились, на виконання роботи 1–2, оскільки роботу 1–3 розпочати немає можливості (вона потребує 4 одиниці ресурсу).

*Другий етап.* На четвертий день буде закінчено роботу 1–2. Подія 2 відбулася, тому можна було б розпочати роботу 2–4, однак вона потребує 6 одиниць ресурсу, а в наявності тільки 3, тобто, розпочати роботу 2–4 немає можливості.

*Третій етап.* На восьмий день буде закінчено роботу 1–4. Подія 4 не настала (не виконано роботу 2–4). В наявності 8 вільних одиниць ресурсу. Є можливість розпочати роботи 2–4 та 1–3. Перша з них потребує 6 одиниць ресурсу, а друга — 4 одиниці ресурсу. Обидві роботи мають однаковий повний резерв часу (2). Використовуємо друге правило переваги та приймаємо рішення розпочати роботу 1–3, що потребує більше ресурсо-днів (24 проти 12 у роботи 2–4).

*Четвертий етап.* На чотирнадцятий день закінчено виконання роботи 1–3. Відбулася подія 3. В наявності 8 вільних одиниць ресурсу. Є можливість розпочати роботи 2–4 та 3–5. Згідно першого правила переваги приймаємо рішення розпочати виконання роботи 2–4, що має менший ніж у роботи 3–5 повний резерв часу ( $2 < 7$ ).

*П'ятий етап.* На шістнадцятий день закінчено роботу 2–4. Відбулася подія 4. В наявності 8 вільних одиниць ресурсу. Є можливість розпочати роботи 3–5, 4–5 та 4–6. Найменший повний резерв часу має робота 4–5 (0). Виконання роботи 4–5 потребує 4 одиниці ресурсу. Залишок у 4 одиниці ресурсів не дає можливості розпочати роботу 4–6 (вона потребує 5 одиниць ресурсу), тому приймаємо рішення розпочати роботу 3–5 (потребує 3 одиниці ресурсу).

*Шостий етап.* На вісімнадцятий день закінчено роботу 3–5. Однак, подія 5 ще не відбулася, оскільки не закінчено виконання роботи 4–5. Роботу 4–6 не можна розпочати, оскільки вона потребує 5 одиниць ресурсу (у наявності 4 вільних одиниці ресурсу).

*Сьомий етап.* На двадцять третій день закінчено роботу 4–5. В наявності 8 вільних одиниць ресурсу. Подія 5 відбулася. Є можливість розпочати роботи 4–6 та 5–6. Сумарна потреба у ресурсах для виконання цих робіт дозволяє розпочати їх одночасно.

Остаточний графік виконання робіт та використання ресурсів наведені у таблиці 10.3. З них видно, що для виконання всього комплексу робіт необхідно 28 днів, що перевищує на 10 днів термін, який визначається тільки технологічними умовами. Використання ресурсів на протязі виконання комплексу робіт є досить нерівномірним. Крім того, як видно з графіку використання ресурсів, восьма одиниця ресурсу в процесі виконання робіт не задіяна.

### ***Паралельний метод.***

Рішення проводимо за наявної кількості ресурсів у 9 одиниць. Передбачаємо, що на початок кожного дня всі ресурси є вільними.

*Перший етап.* У перший день маємо можливість виконувати роботи 1–2, 1–3, 1–4. Згідно правил переваги розпочинаємо виконання роботи 1–4 (вона має найменший повний резерв часу та потребує 5 одиниць ресурсу). Роботи 1–2 та 1–3 мають однаковий повний резерв часу, тому згідно третього правила переваги приймаємо рішення розпочати виконання роботи 1–3 (вона потребує більше ресурсо-днів на виконання ніж робота 1–2).

Аналогічним чином діємо для кожного дня до шостого.

*Другий етап.* На шостий день закінчено виконання роботи 1–3. Є можливість виконувати роботи 1–2, 1–4, 3–5. Згідно правил переваги виконуємо роботу 1–4 (5 одиниць ресурсу) та роботу 1–2 (2 одиниці ресурсу).

Аналогічним чином діємо для кожного дня до восьмого.

*Третій етап.* На восьмий день закінчено виконання роботи 1–4. Є можливість виконувати роботи 1–2 та 3–5. Загальна потреба у ресурсах для цих робіт не перевищує наявної, тому приймаємо рішення по одночасне виконання цих робіт.

Аналогічним чином діємо для кожного дня до десятого.

*Четвертий етап.* На десятий день закінчено виконання робіт 1–2 та 3–5. Є можливість виконувати єдину роботу 2–4.

Аналогічно діємо на одинадцятий день.

*П'ятий етап.* На дванадцятий день закінчено роботу 2–4. Відбулася подія 4. Є можливість виконувати роботи 4–5 та 4–6. Сумарна потреба у ресурсах для цих робіт дозволяє виконувати їх одночасно.

Аналогічним чином діємо для кожного дня до сімнадцятого.

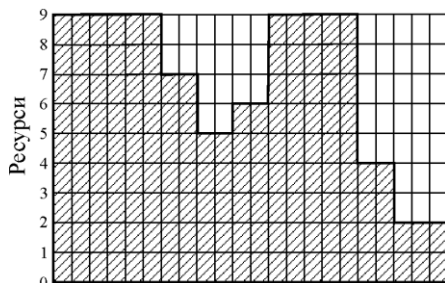
*Шостий етап.* На сімнадцятий день закінчено виконання роботи 4–6. Однак, подія 6 (завершальна) ще не відбулася. Не відбулася досі подія 5 (роботу 4–5 не закінчено). Розпочати виконання роботи 5–6 немає можливості. Тому продовжуємо виконання роботи 4–5 на вісімнадцятий та дев'ятнадцятий дні.

*Сьомий етап.* Закінчено виконання роботи 4–5. Відбулася подія 5. Є можливість розпочати останню роботу 5–6 з потребою в ресурсах у 2 одиниці.

Графік виконання робіт і використання ресурсів наведений у таблиці 10.4.

Таблиця 10.4 — Розподіл ресурсів паралельним методом

Робота $i-j$	$t_{i,j}$	Ресурси	Ресурсо- дні	$R_{i,j}$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1–2	4	2	8	2				2	2	2				
1–3	6	4	24	2	4	4	4	4	4					
1–4	8	5	40	0	5	5	5	5	5	5				
2–4	2	6	12	2						6	6			
3–5	2	3	6	7				3	3					
4–5	7	4	28	0							4	4	4	4
4–6	5	5	25	5							5	5	5	5
5–6	3	2	6	0										2 2 2



Таким чином бачимо, що збільшення наявної кількості ресурсів з 8 до 9 дозволяє прискорити виконання комплексу робіт з 28 днів до 22, але все ж не забезпечує технологічний термін його виконання у 18 днів.

### Контрольні запитання

1. Поясніть, чому обмеження у ресурсах може зробити неможливим виконання комплексу робіт запланованих згідно їх технологічної послідовності?

2. У чому полягає різниця між послідовним та паралельним методом розподілу ресурсів на мережевих графіках?

3. Сформулюйте суть послідовного методу розподілу ресурсів та правила переваги при виборі робіт для виділення ресурсів за цим методом.

4. Сформулюйте суть паралельного методу розподілу ресурсів та правила переваги при виборі робіт для виділення ресурсів за цим методом.

## САМОСТІЙНА РОБОТА №11

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ІГОР

**Мета роботи:** вивчення зв'язку між лінійним програмуванням та теорією ігор; вивчення методу розв'язування задач лінійного програмування за допомогою ітеративних наближених методів розв'язування матричних ігор.

### Стисла теоретична довідка

Будь-яку матричну парну гру можна розв'язати методами лінійного програмування. Справедливе і зворотне твердження — кожній парі двоїстих задач лінійного програмування можна поставити у відповідність матричну гру, ціна та оптимальні стратегії якої

дозволяють обчислити оптимальні плани двоїстих задач (якщо вони існують). При цьому слід зауважити, що у той час, як матричні ігри завжди мають оптимальні стратегії, задачі лінійного програмування можуть і не мати рішень.

Розглянемо пару двоїстих задач лінійного програмування

$$\begin{array}{l|l}
 (1) & (2) \\
 Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow \max; & F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \Rightarrow \min; \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i; & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j; \\
 x_j \geq 0. & y_i \geq 0.
 \end{array}$$

Позначимо як

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad C = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n).$$

Побудуємо гру з платіжною матрицею

$$P = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{array} \right\|,$$

де  $T$  є знак транспонування матриці.

Справедлива наступна теорема: пара двоїстих задач лінійного програмування (1)–(2) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли гра з платіжною матрицею  $P$  має таку оптимальну змішану стратегію  $S_A^* = S_B^* = (p_1^*; p_2^*; \dots; p_{m+n}^*; p_{m+n+1}^*)$ , що  $p_{m+n+1}^* > 0$ , при цьому

$$y_i^* = \frac{p_i^*}{p_{m+n+1}^*}, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_j = \frac{p_{m+j}^*}{p_{m+n+1}^*}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким чином, рішення пари двоїстих задач лінійного програмування зводиться до визначення оптимальних стратегій гри з симетричною платіжною матрицею порядку  $m + n + 1$ .

У випадку, коли всі елементи матриці  $A$  є невід'ємними, а всі компоненти векторів  $B$  і  $C$  є додатними, можна побудувати еквівалентну матричну гру з платіжною матрицею  $n \times m$ . Зауважимо, що задача лінійного програмування, для якої виконані ці умови, завжди має розв'язок. Елементи платіжної матриці  $P$  еквівалентної гри обчислюються за формулою

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot c_j}{b_i}.$$

Якщо  $S_A^* = (p_1; p_2; \dots; p_m)$  — оптимальна стратегія гравця  $A$  у цій грі,  $S_B^* = (q_1; q_2; \dots; q_n)$  — оптимальна стратегія гравця  $B$  у цій грі, а  $\gamma > 0$  — ціна гри, то оптимальні компоненти розв'язку вихідної задачі лінійного програмування обчислюються за формулами

$$x_j^* = \frac{q_j \cdot c_j}{\gamma}, \quad j = \overline{1, n}; \quad y_i^* = \frac{p_i \cdot b_j}{\gamma}, \quad i = \overline{1, m}.$$

### Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Розв'язати задачу *практичного заняття 2* (вихідні дані до виконання роботи по варіантах наведені у таблиці 2.3 частини II розділу 1), звівши розв'язання задачі лінійного програмування до розв'язання еквівалентної матричної парної гри. Наближений розв'язок гри знайти за допомогою ітеративного методу Брауна-Робінсон (виконати 15 ітерацій за методом).

### Приклад виконання роботи

Розв'язати наступну задачу лінійного програмування за допомогою методів теорії ігор:

максимізувати  $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \Rightarrow \max$   
при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10;$$

$$2x_1 + 4x_3 \leq 5;$$

$$6x_2 + 9x_3 \leq 8.$$

#### Розв'язок.

Оскільки всі коефіцієнти при невідомих є невід'ємними, а їх праві частини та коефіцієнти при невідомих у цільовій функції є додатними, складемо платіжну матрицю еквівалентної гри розміром  $3 \times 3$ :

$$P = \begin{vmatrix} \frac{3 \cdot 2}{10} & \frac{1 \cdot 4}{10} & \frac{5 \cdot 1}{10} \\ \frac{2 \cdot 2}{5} & \frac{0 \cdot 4}{5} & \frac{4 \cdot 1}{5} \\ \frac{0 \cdot 2}{8} & \frac{6 \cdot 4}{8} & \frac{9 \cdot 1}{8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,8 \\ 0 & 3 & 1,125 \end{vmatrix}.$$

Розв'язуючи цю гру з платіжною матрицею  $P$  методом Брауна-Робінсон отримаємо наближені оптимальні стратегії гравців:

$$S_A^* = (0; 0,789; 0,211); \quad S_B^* = (0,790; 0,210; 0); \quad \gamma \approx 0,6316.$$

Таким чином, наближене оптимальне рішення вихідної задачі лінійного програмування має вигляд

$$x_1 = \frac{q_1 \cdot c_1}{\gamma} = \frac{0,790 \cdot 2}{0,6316} = 2,5; \quad x_2 = \frac{q_2 \cdot c_2}{\gamma} = \frac{0,210 \cdot 4}{0,6316} = 1,33; \quad x_3 = 0.$$

## Контрольні запитання

1. Наведіть зміст теореми, що відбиває зв'язок між теоріями лінійного програмування та ігор?
2. Як побудувати платіжну матрицю еквівалентної гри для довільної задачі лінійного програмування?
3. Яким чином з розв'язку гри отримати оптимальні значення змінних задачі лінійного програмування?
4. За яких умов задача лінійного програмування може бути зведена до еквівалентної гри зменшеного розміру? Яким чином розраховуються елементи платіжної матриці цієї гри? Як знайти оптимальні значення змінних задачі лінійного програмування у цьому випадку?

## САМОСТІЙНА РОБОТА №12

### ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

**Мета роботи:** вивчення методів прийняття рішень в умовах ризику за критерієм очікуваного значення.

#### Стисла теоретична довідка

Використання критерію очікуваного значення при прийнятті рішень в умовах ризику зумовлено прагненням максимізувати очікуваний прибуток (мінімізувати очікувані витрати). Використання очікуваних величин припускає можливість багаторазового рішення однієї і тієї ж задачі, поки не будуть отримані досить точні розрахункові формули. Математично це виглядає наступним чином.

Нехай  $X$  — випадкова величина з математичним очікуванням  $M_x$  і дисперсією  $D_x$ . Якщо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — значення випадкової величини  $X$ , то середнє арифметичне (вибіркове середнє) значень  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  має дисперсію  $\frac{D_x}{n}$ . Таким чином, коли  $n \rightarrow \infty$

то  $\frac{D_x}{n} \rightarrow 0$  і  $\bar{x} \rightarrow M_x$ .

Інакше кажучи, при досить великому обсязі вибірки різниця між середнім арифметичним і математичним очікуванням наближається до нуля (так звана, гранична теорема теорії імовірності). Отже, використання критерію очікуваного значення справедливе тільки у випадку, коли одне і теж рішення доводиться застосовувати досить велику кількість разів. Вірне і зворотне: орієнтація на очікування буде призводити до невірних результатів для рішень, що доводиться приймати невелику кількість разів.

### **Зміст роботи та вихідні дані до її виконання**

Парк навантажувально-розвантажувальних машин (НРМ) підприємства складається з  $N$  однотипних механізмів. Імовірність виходу з ладу кожної НРМ за  $t$  місяців роботи дорівнює  $p_t$ . Якщо НРМ виходить з ладу, її ремонтують індивідуально, при цьому середні витрати на ремонт складають  $C_1$  грн. Керівництво підприємства приймає рішення про проведення планово-попереджувального профілактичного ремонту всіх НРМ через кожні  $T$  місяців на протязі року, при цьому середні витрати на профілактичний ремонт однієї НРМ складають  $C_2$  грн.

Необхідно визначити, через скільки місяців проводити профілактичний ремонт всіх НРМ, щоб мінімізувати загальні витрати на утримання парку НРМ у робочому стані.

Побудувати також графік очікуваних середніх витрат на утримання парку НРМ в залежності від періоду виконання профілактичних ремонтів  $T$ .

Вихідні дані до виконання роботи по варіантах наведені у таблиці 12.1.



### Приклад виконання роботи

Розглянемо приклад виконання роботи за таких вихідних даних:

N, од.	Імовірність виходу НРМ з ладу $p_t$ в залежності від $t$												$C_1$ , грн.	$C_2$ , грн.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
120	0,05	0,09	0,12	0,16	0,24	0,30	0,32	0,40	0,45	0,50	0,54	0,56	90	25

#### Розв'язок.

Зрозуміло, що якщо профілактичні ремонти НРМ проводити рідко, річні витрати на їх проведення будуть невеликі, натомість зростають витрати від ремонту НРМ, що виходять з ладу. І навпаки, якщо профілактичні ремонти проводити часто, витрати на їх проведення будуть значними, але зменшаться витрати від ремонту НРМ, що вийшли з ладу.

Нехай  $T$  — період часу, через який проводиться профілактичний ремонт всіх НРМ. Тоді очікувані середні витрати на поточний і профілактичний ремонт НРМ в розрахунку на один період часу складуть

$$C(T) = \frac{C_1 \sum_{t=0}^{T-1} M(N_t) + C_2 n}{T},$$

де  $M(N_t)$  — математичне очікування кількості НРМ, що вийшли з ладу на  $t$ -й місяць періоду часу.

Через те, що випадкова величина  $N_t$  має біноміальний розподіл з параметрами  $(N, p_t)$  маємо  $M(N_t) = N \cdot p_t$ .

Тоді очікувані середні витрати

$$C(T) = \frac{N \left( C_1 \sum_{t=0}^{T-1} p_t + C_2 \right)}{T}.$$

Для розрахунку оптимального періоду проведення профілактичного ремонту складемо розрахункову таблицю (таблиця 12.2). У першому стовпчику записуємо поточне значення  $T$ , що змінюється від 1 до 12 місяців; у другому стовпчику — задані імовірності  $p_t$ ; у третьому — накопичену суму значень  $p_t$ ; у четвертому — очікувані середні витрати  $C(T)$ .

Таким чином бачимо, що найменші очікувані середні витрати на утримання парку НРМ досягаються при  $T = 4$ . Отже, профілактичний ремонт всіх НРМ необхідно проводити через кожні чотири місяці.

По результатам розрахунків будуємо графік залежності  $C = f(T)$  (рисунок 12.1).

Таблиця 12.2 — Розрахункова таблиця

$T$	$p_t$	$\sum_{t=0}^{T-1} p_t$	$C(T)$
1	0,05	0	3000,0
2	0,09	0,05	1770,0
3	0,12	0,14	1504,0
<b>4</b>	<b>0,16</b>	<b>0,26</b>	<b>1452,0</b>
5	0,24	0,42	1507,2
6	0,30	0,66	1688,0
7	0,32	0,96	1909,7
8	0,40	1,28	2103,0
9	0,45	1,68	2349,3
10	0,50	2,13	2600,4
11	0,54	2,63	2854,9
12	0,56	3,17	3103,0

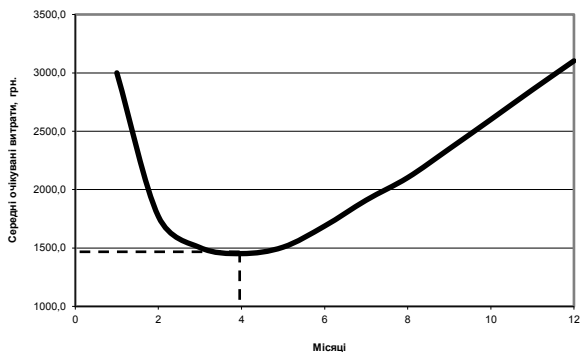


Рисунок 12.1 — Графік залежності  $C = f(T)$

### Контрольні запитання

1. Чим ситуація прийняття рішення в умовах ризику відрізняється від ситуації прийняття рішення в умовах невизначеності?
2. Поясніть, у чому полягає сутність критерію очікуваного значення?
3. За яких умов використання критерію очікуваного значення є справедливим і коли не є прийнятним?