

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та

КР (для студентів заочної форми навчання)

з вищої математики (скорочена форма навчання).

Розділи **«Диференціальне числення функції однієї змінної»,
«Диференціальне числення функції багатьох змінних».**

Методичні вказівки до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та КР (для студентів заочної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання). Розділи «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Диференціальне числення функції багатьох змінних». /Укл.: Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020 – 58 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Онуфрієнко Л.М., к. ф.-м. н, доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Рецензент: Антоненко Н.М., к.ф.-м.н., доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 7 від 12.02.2020 р.

Рекомендовано НМК Машинобудівного
факультету НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 4 від 25.02.2020 р.

ЗМІСТ

1	Диференціальне числення функції однієї змінної	4
1.1	Границі та неперервність функції однієї змінної	5
1.2	Похідна функції однієї змінної	18
1.3	Застосування похідної функції однієї змінної	28
2	Диференціальне числення функції двох змінних	43
2.1	Частинні похідні та диференціали функції двох змінних	44
2.2	Деякі застосування частинних похідної функції двох змінних	53
	Література	58

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Означення 1.1. Якщо кожному числу x з деякої числової множини D ($x \in D$) за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y з множини E , то кажуть, що задана однозначна функція y від x і позначають $y=f(x)$.

Множина D – область визначення функції, множина E – множина значень функції, x – аргумент функції.

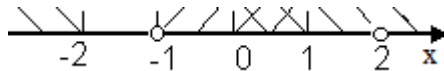
Задача 14. Знайти область визначення $D(y)$ функції

$$y = \arcsin x - \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x - 2}.$$

Розв'язання. Для знаходження області визначення функції запишемо обмеження для кожного доданку, що входить у рівняння функції. Маємо систему нерівностей:

$$D(y): \begin{cases} |x| \leq 1, \\ x^2 + 2x \geq 0, \\ x^2 - x - 2 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \leq -2; x \geq 0, \\ x \neq 2; x \neq -1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему нерівностей методом інтервалів:

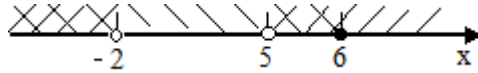


Розв'язок системи нерівностей: $x \in [0;1]$, тому $D(y): x \in [0;1]$;

б) $y = \ln(x^2 - 3x - 10) + \sqrt{18 - 3x}$. Маємо

$$D(y): \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0, \\ 18 - 3x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2, x > 5, \\ x \leq 6. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему нерівностей методом інтервалів:



Розв'язок системи нерівностей: $x \in (-\infty; -2) \cup (5; 6]$, тому $D(y): x \in (-\infty; -2) \cup (5; 6]$.

Відповідь: а) $D(y): x \in [0; 1]$; б) $D(y): x \in (-\infty; -2) \cup (5; 6]$.

1.1 Границі та неперервність функції однієї змінної

Означення 1.2. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Означення 1.3. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

При цьому вважається, що x прямує до x_0 довільним чином.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 .

Означення 1.4. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ *зліва* в точці x_0 , якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A.$$

Означення 1.5. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ справа в точці x_0 , якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A.$$

Ліву і праву границі функції називають *односторонніми границями*.

Означення 1.6. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою функцією*, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Означення 1.7. Число A є *границею функції* $y=f(x)$ в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли справедливо $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція в точці x_0 .

Означення 1.8. Нескінченно малі в точці x_0 функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називають *еквівалентними*, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Деякі еквівалентні нескінченно малі функції ($\alpha(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$):

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arc} \sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$
$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$(1 + \alpha(x))^n - 1 \sim n \cdot \alpha(x), n > 0$

Основні теореми про границі

Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Наслідки: $\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n.$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Введемо «умовні» правила дій над символами $\infty, -\infty, +\infty$:

$$а) (\pm \infty) + a = \pm \infty, \quad a - (\pm \infty) = \mp \infty;$$

$$б) (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty;$$

$$в) (-\infty) + (-\infty) = -\infty - (+\infty) = -\infty;$$

$$г) \infty \cdot a = a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}; \quad \infty \cdot \infty = \infty; \quad \frac{\infty}{a} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases};$$

$$д) \frac{a}{\infty} = 0; \quad \frac{a}{0} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases};$$

$$е) (+\infty)^n = +\infty; \quad (-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & n = 2m \\ -\infty, & n = 2m - 1 \end{cases}; \quad \sqrt[n]{+\infty} = \infty.$$

Знаходження границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0 . Однак, підстановка

може привести до «невизначених виразів», а саме: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[1^\infty]$ та інші. Це вирази, яким не можна поставити у відповідність числовий результат. Знаходження границі в цьому випадку називається *розкриттям невизначеності*.

1) *Невизначеність виду* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ задана відношенням двох

многочленів: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Можна поділити чисельник і знаменник на

x^m і перейти до знаходженні границі, враховуючи «умовні» правила або

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left[\frac{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \right] =$$

$$= \begin{cases} \pm \infty, n > m \\ 0, n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, n = m \end{cases}.$$

Задача 2. Не застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі функцій: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 9x^3 - 5x^4}{4x^2 - 6x - 7}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^5 - 3x + 4}$.

Розв'язання. а) перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на змінну в найвищому степені знаменника, тобто на x^2 . Дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2}}{6 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

або

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left\{ \begin{matrix} n=2 \\ m=2 \\ n=m \end{matrix} \right\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 9x^3 - 5x^4}{4x^2 - 6x - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left\{ \begin{matrix} n=4 \\ m=2 \\ n > m \end{matrix} \right\} = -\infty;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^5 - 3x + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left\{ \begin{matrix} n=2 \\ m=5 \\ n < m \end{matrix} \right\} = 0.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{3}$; б) $-\infty$; в) 0.

2) *Невизначеність виду* $\left[\frac{0}{0} \right]$ задана відношенням двох

многочленів: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Треба чисельник і знаменник поділити на $(x - x_0)$ і перейти до знаходженні границі відношення часток від ділення.

Задача 3. Не застосовуючи правило Лопітала, знайти границі функції: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1}$ при а) $x_0 = -1$, б) $x_0 = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. а) За умовою $x \rightarrow -1$. Значення $x_0 = -1$ є граничним значенням змінної. Підставимо (-1) в чисельник і знаменник дробу замість x . Маємо у чисельнику $2 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) - 5 = -12$ і у знаменнику $6 \cdot (-1)^2 - (-1) - 1 = 6$. Оскільки відношення отриманих значень є величина стала, то вона є границею функції:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \frac{-12}{6} = -2.$$

б) За умовою $x \rightarrow \frac{1}{2}$. Значення $x_0 = \frac{1}{2}$ є граничним значенням змінної. Чисельник і знаменник дробу при цьому значенні дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Виконаємо наступні дії. Ділимо чисельник і знаменник дробу на $x - x_0$, тобто на $x - \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r} \frac{2x^2+9x-5}{2x^2-x} \Big| \frac{x-1/2}{2x+10} \\ \underline{-10x-5} \\ -10x-5 \\ \underline{-10x-5} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{6x^2-x-1}{6x^2-3x} \Big| \frac{x-1/2}{6x+2} \\ \underline{-2x-1} \\ -2x-1 \\ \underline{-2x-1} \\ 0 \end{array}$$

Переходимо до границі відношення часток від ділення. Матимемо

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 10}{6x + 2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 10}{6 \cdot \frac{1}{2} + 2} = \frac{11}{5} = 2,2.$$

Відповідь: а) -2 ; б) $2,2$.

Зауваження. Замість ділення можна розкласти чисельник і знаменник на множники і зробити скорочення однакових виразів.

3) Невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ задана ірраціональними виразами,

тобто многочлени чисельника і знаменника містять ірраціональність або один з них. Необхідно позбутися ірраціональності, застосовуючи формули скороченого множення чи інші, зберігаючи еквівалентність заданого і отриманого виразів під границею. Іноді від ірраціональності можна позбутися введенням нової змінної.

Задача 4. Не застосовуючи правило Лопітала, знайти границі

функцій: а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1}$. Коли $x \rightarrow 1$, то чисельник і знаменник дробу при цьому значенні дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$, якій сприяє ірраціональність. Позбудемося її, доповнюючи до формули $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ вираз у чисельнику. Для цього помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до $(\sqrt{3+x}-2)$, тобто на $(\sqrt{3+x}+2)$, а потім чисельник і знаменник поділимо на $(x-1)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3+x-4}{(x^2-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3+x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{1}{2(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{8}; \end{aligned}$$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$. Коли $x \rightarrow 2$, то чисельник і знаменник

дробу при цьому значенні дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$, якій сприяє ірраціональність. Позбудемося її, доповнюючи до

формули $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ вираз у чисельнику і знаменнику. Для цього помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{8-x}$ і $\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}$, тобто на $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{8-x}$ і $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+1}$, а потім чисельник і знаменник поділимо на $(x-2)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{8 - x}}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{8 - x})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{8 - x})}{(\sqrt{5 - x} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{8 - x})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - (8 - x))(\sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 1})}{(\sqrt{5 - x} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{8 - x})(\sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x - 8)(\sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 1})}{(5 - x - (x + 1))(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{8 - x})(\sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{8 - x}} \cdot \\
&\cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{4 - 2x} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 4)(x - 2)}{-2(x - 2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{-2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{-2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Відповідь: а) $\frac{1}{8}$; б) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3) *Невизначеність* виду $[\infty - \infty]$ зводимо до невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

або $\left[\frac{0}{0} \right]$. Одним з способів є приведення до спільного знаменника.

Задача 5. Не застосовуючи правило Лопітала, знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $[\infty - \infty]$. Вираз під границею приводимо до спільного знаменника:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x + x^2 - 3}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(1 - x) \cdot (1 + x + x^2)} = \\
&= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{(1 - x) \cdot (1 + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1) \cdot (x + 2)}{1 + x + x^2} = \frac{-3}{3} = -1.
\end{aligned}$$

Відповідь: -1 .

4) *Невизначеність виду* $\left[\frac{0}{0} \right]$ задана виразами, що містять тригонометричні функції. Для її розкриття можна застосовувати *першу важливу границю*: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\text{Наслідки: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k \text{ і } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k.$$

Задача 6. Не застосовуючи правило Лопітала, знайти границі функцій: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arcsin^3 5x}{x \cdot \sin^2 3x}$.

Розв'язання.

а) При $x \rightarrow 0$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Застосовуємо першу важливу границю.

Оскільки $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Зауваження. При розв'язуванні можна застосовувати таблицю еквівалентності нескінченно малих функцій.

б) При $x \rightarrow 0$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Застосуємо таблицю еквівалентності нескінченно малих функцій: $\arcsin 5x \sim 5x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \rightarrow 0$. Матимемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arcsin^3 5x}{x \cdot \sin^2 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (5x)^3}{x \cdot (3x)^2} = \frac{4 \cdot 125}{9} = \frac{500}{9}.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{500}{9}$.

5) *Невизначеність виду* $\left[1^\infty \right]$. Для її розкриття застосовують *другу*

важливу границю: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \approx 2,71828$ або $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Наслідки: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Задача 7. Не застосовуючи правило Лопітала, знайти границю

функції $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{4x-7}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow \infty$ маємо невизначеність $\left[\frac{x-5}{x+3} \middle| \frac{x+3}{1} \right] = \left[1^\infty \right]$. Застосуємо *другу важливу границю*. Перетворимо вираз у дужках. Поділимо чисельник на знаменник або виділимо в чисельнику вираз знаменника і перетворений чисельник поділимо на знаменник, щоб мати одним з доданків одиницю. Дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{4x-7} &= \left[1^\infty \right] = \left[\frac{x-5}{x+3} = \frac{x+3-8}{x+3} = 1 + \frac{-8}{x+3} \right] \text{ або} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{x+3} \right)^{4x-7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-8}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-8}} \right]^{\frac{-8}{x+3} \cdot (4x-7)}. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-8}} = e$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8}{x+3} \cdot (4x-7) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-32x + 56}{x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-32}{1 + \frac{3}{x}} = -32, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{4x-7} = e^{-32}.$$

Відповідь: e^{-32} .

Означення 1.9. Функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 , якщо вона визначена в ній, односторонні границі в точці існують і рівні між собою, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

У протилежному випадку точка x_0 є точкою розриву.

Точка x_0 є точкою усувного розриву, якщо функція в точці невизначена, а границя функції в точці існує.

Точка x_0 є точкою розриву першого роду, якщо функція в точці невизначена, односторонні границі в точці існують, але не рівні між собою. В цьому випадку стрибок функції визначається формулою:

$$\delta = \left| \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right|.$$

Точка x_0 є точкою розриву другого роду, якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності.

Задача 8. Дослідити на неперервність функції, установити характер точок розриву, якщо вони існують: а) $y = f(x) = 7 - \frac{2}{x+1}$;

б) $y = f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$; в) $y = f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1 \\ 5 - 4x, & 1 < x < 3 \\ x - 5, & 3 \leq x < \infty \end{cases}$. Зробити

схематичне креслення.

Розв'язання. а) Оскільки дана функція показникова, то вона неперервна при всіх значеннях x , крім $x = -1$. У цій точці функція

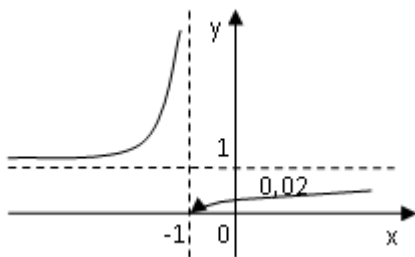
невизначена, тобто має в ній розрив. З'ясуємо характер розриву.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = -1$:

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} 7^{-\frac{2}{x+1}} = \left\{ 7^{\frac{-2}{-0}} = 7^{+\infty} \right\} = \infty,$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} 7^{-\frac{2}{x+1}} = \left\{ 7^{\frac{-2}{+0}} = 7^{-\infty} \right\} = 0.$$

Оскільки одна з границь дорівнює ∞ , то $x = -1$ – точка розриву другого роду. Зробимо схематичне креслення.



б) Задана функція неперервна при всіх значеннях x , крім $x = 1$. У цій точці вона невизначена. Точка $x = 1$ є точкою розриву. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

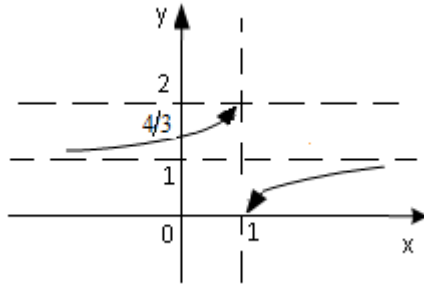
$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = \left\{ \frac{x-1 \rightarrow -0}{\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty} \quad 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0 \right\} = 2,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = \left\{ \frac{x-1 \rightarrow +0}{\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty} \quad 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow \infty \right\} = 0.$$

Оскільки границі існують, але $f(1+0) \neq f(1-0)$, маємо в точці $x = 1$ розрив першого роду. Стрибок δ функції $f(x)$ знаходимо за формулою:

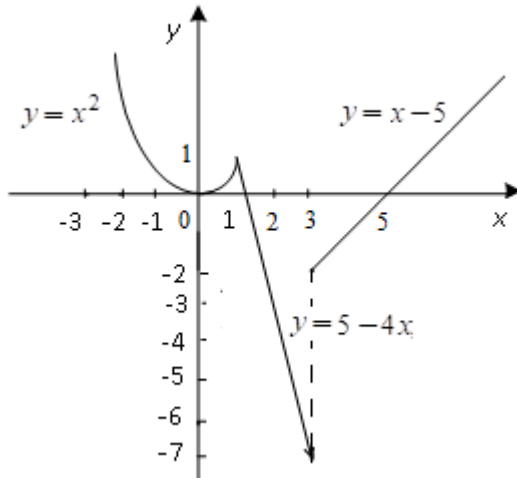
$$\delta = |f(1+0) - f(1-0)| = |2 - 0| = 2.$$

Зробимо схематичне креслення.



в) Область визначення функції $(-\infty; \infty)$. На інтервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; \infty)$ функція неперервна. Розриви можуть бути лише в точках $x = 1$ і $x = 3$. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1 \quad \text{і} \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (5-4x) = 1.$$



Оскільки $f(1-0) = f(1+0) = 1$, то в точці $x = 1$ задана функція неперервна. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 3$:

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (5-4x) = -7 \quad \text{і} \quad f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x-5) = -2.$$

Так як $f(3-0) \neq f(3+0)$, то функція в точці $x=3$ має розрив першого роду. Стрибок функції в точці розриву:

$$\delta = |f(3+0) - f(3-0)| = |-2 - (-7)| = 5.$$

Відповідь: а) $x = -1$ – точка розриву другого роду;

б) $x = 1$ – точка розриву першого роду;

в) в точці $x = 1$ функція неперервна, $x = 3$ – точка розриву першого роду.

Нагадуємо, що

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$\log_a b^k = k \log_a b, \quad a > 0, b > 0, a \neq 1;$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b \\ \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b \end{array} \right\} a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

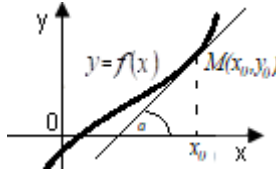
1.2 Похідна функції однієї змінної

Означення 1.10. Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta) - f(x)$ в цій точці до приросту аргумента Δx при умові, що $\Delta x \rightarrow 0$ і позначають

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Також для позначення похідної функції $y=f(x)$ застосовують символи: y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y'_x .

Геометричний зміст похідної. Похідна $f'(x_0)$ в точці $M(x_0, y_0)$ – це кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=f(x)$ в цій точці або тангенс кута α , який утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox : $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.



Правила диференціювання.

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $C - \text{const}$.

$$(C \cdot u)' = C \cdot (u)' \quad (1.1)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (1.2)$$

$$(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v' \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{(v)^2} \quad (1.4)$$

Таблиця похідних для функції $u = u(x)$:

1. $(C)' = 0$	2. $(x)' = 1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	3a). $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a - \text{const}$	4a). $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	5a). $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12. $(\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Для степенєво-показникової функції $(u(x))^{v(x)} = u^v$:

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'. \quad (1.5)$$

Для гіперболічних функцій:

$$\begin{aligned} sh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & ch x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ th x &= \frac{sh x}{ch x} & cth x &= \frac{ch x}{sh x} \end{aligned}$$

похідні мають вигляд:

14. $(sh x)' = ch x$	15. $(ch x)' = sh x$
16. $(th x)' = \frac{1}{ch^2 x}$	17. $(cth x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Означення 1.11. Функція $y(x)$ є неявно заданою, якщо рівняння $F(x, y) = 0$ неможливо розв'язати відносно функції $y(x)$.

Правило диференціювання неяво заданої функції

При знаходженні похідної неявно заданої функції необхідно рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати зліва направо, враховуючи, що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$. Отримане рівняння розв'язують відносно y' .

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно функцію

спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявно заданої функції (логарифмічне диференціювання).

Якщо функція параметрично задана $\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t) \end{cases}$, то похідна знаходиться за формулою:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (1.6)$$

Диференціал функції $y = f(x)$ знаходиться за формулою:

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (1.7)$$

Властивості диференціала функції.

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $C - const$.

1. $d(C \cdot u) = C \cdot du$	1a) $dC = 0$
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$	2a) $d(u \pm C) = du$
3. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$	3a) $du = \frac{1}{C} \cdot d(C \cdot u)$
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{(v)^2}$	5. $df(u) = f'(u) \cdot u'_x dx$

Враховуючи, що перша похідна y' є функцією, то її можна диференціювати. Дістанемо $y'' = (y')'$ і так далі:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \left(y^{(n-1)} \right)'. \quad (1.8)$$

Друга похідна параметрично заданої функції знаходиться за формулою:

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}, \quad (1.9)$$

або

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \quad (1.10)$$

Похідна n -го порядку від параметрично заданої функції знаходиться за формулою:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)'_t \frac{1}{x'_t} \quad (1.11)$$

При знаходженні другої похідної неявно заданої функції необхідно рівняння $F(x, y) = 0$ двічі продиференціювати зліва направо, враховуючи, що $(y)' = y'$, $(y')' = y''$ і $(x)' = 1$. Отримане рівняння розв'язують відносно y'' .

Диференціалом другого порядку від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала першого порядку

$$d^2 y = d(dy) = f''(x) \cdot dx^2. \quad (1.12)$$

Диференціалом n -го порядку від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n. \quad (1.13)$$

Правило Лопіталя дозволяє розкрити невизначеності, застосовуючи похідні. **Наприклад**, для $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ і $\left[\frac{0}{0} \right]$ матимемо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1.14)$$

Невизначеності $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[\infty^n]$, $[1^\infty]$ та інші спочатку зводяться до основних $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ і $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім застосовується правило Лопітала.

Задача 9. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5\right)^3$, б) $y = \ln^2 2x \cdot \arctg(2 - 3x^2)$, в) $y = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{e^{5x}}$,
 г) $y = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x}$, д) $\sin(xy) = \frac{x}{y} + 3$.

Розв'язання. а) Застосовуємо формулу 3 з Таблиці похідних і (1.2):

$$\begin{aligned} y' &= 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5\right)^2 \cdot \left(2x^5 + 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 5\right)' = 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5\right)^2 \cdot \\ &\cdot \left(2 \cdot 5x^4 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{4}{3}}\right) = 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5\right)^2 \cdot \left(10x^4 - x^{-\frac{4}{3}}\right). \end{aligned}$$

б) Застосовуємо формулу (1.3), а також формули 3,5а), 12 з Таблиці похідних:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln^2 2x\right)' \arctg(2 - 3x^2) + \ln^2 2x \cdot \left(\arctg(2 - 3x^2)\right)' = \\ &= 2 \ln 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot \arctg(2 - 3x^2) + \ln^2 2x \cdot \frac{1 \cdot (-6x)}{1 + (2 - 3x^2)^2} = \\ &= \frac{2 \ln 2x}{x} \cdot \arctg(2 - 3x^2) - \frac{6x \cdot \ln^2 2x}{1 + (2 - 3x^2)^2}. \end{aligned}$$

в) Застосовуємо формулу (1.4), а також формули 3а), 4а) з Таблиці

похідних:

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{\left(\sqrt{3x^2 - 2}\right)' e^{5x} - \left(e^{5x}\right)' \sqrt{3x^2 - 2}}{\left(e^{5x}\right)^2} = \\
 &= \frac{\frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} \cdot e^{5x} - 5 \cdot e^{5x} \sqrt{3x^2 - 2}}{e^{10x}} = \frac{3x \cdot e^{5x} - 5 \cdot e^{5x} (3x^2 - 2)}{e^{10x} \sqrt{3x^2 - 2}} = \\
 &= \frac{3x \cdot e^{5x} - 15x^2 e^{5x} + 10e^{5x}}{e^{10x} \sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{-15x^2 + 3x + 10}{e^{5x} \sqrt{3x^2 - 2}}.
 \end{aligned}$$

г) *Перший спосіб.* Застосуємо логарифмічне диференціювання.

Прологарифмуємо рівняння $y = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x}$:

$$\ln y = \ln \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x} = \cos 5x \cdot \ln \sqrt{x^2 + 2x}$$

або
$$\ln y = \frac{\cos 5x}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x).$$

Диференціюємо отримане рівняння, вважаючи, що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$:

$$\begin{aligned}
 (\ln y)' &= \left(\frac{\cos 5x}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x) \right)' \Rightarrow \\
 \frac{1}{y} y' &= \left(\frac{\cos 5x}{2} \right)' \ln(x^2 + 2x) + \frac{\cos 5x}{2} \left(\ln(x^2 + 2x) \right)', \\
 \frac{y'}{y} &= \frac{-\sin 5x \cdot 5}{2} \ln(x^2 + 2x) + \frac{\cos 5x}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x} \cdot (2x + 2) \Rightarrow \\
 y' &= y \cdot \left(-\frac{5}{2} \sin 5x \ln(x^2 + 2x) + \cos 5x \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 2x} \right).
 \end{aligned}$$

Враховуючи, що $y = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x}$, матимемо:

$$y' = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x} \cdot \left(-\frac{5}{2} \sin 5x \ln(x^2 + 2x) + \cos 5x \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x}\right).$$

Другий спосіб. Знайдемо похідну за формулою (5.5):

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x} \cdot \ln \sqrt{x^2 + 2x} \cdot (-\sin 5x \cdot 5) + \cos 5x \cdot \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x - 1} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x}} \cdot (2x + 2) = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^{\cos 5x} \left(-\frac{5}{2} \sin 5x \cdot \ln(x^2 + 2x) + \cos 5x \cdot \right. \\ &\cdot \left. \frac{x+1}{x^2 + 2x}\right). \end{aligned}$$

д) Функція y неявно задана. Диференціюємо рівняння, вважаючи, що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$:

$$(\sin(xy))' = \left(\frac{x}{y} + 3\right)' \Rightarrow \cos(xy) \cdot (y + xy') = \frac{y - xy'}{y^2}.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y' :

$$\begin{aligned} y \cdot \cos(xy) + x \cdot y' \cdot \cos(xy) &= \frac{y}{y^2} - \frac{x \cdot y'}{y^2}, \\ \frac{x \cdot y'}{y^2} + x \cdot y' \cos(xy) &= \frac{1}{y} - y \cdot \cos(xy), \\ y' \cdot \left(\frac{x}{y^2} + x \cdot \cos(xy)\right) &= \frac{1}{y} - y \cdot \cos(xy), \\ y' &= \frac{\frac{1 - y^2 \cdot \cos(xy)}{y}}{\frac{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}{y^2}} = \frac{y \cdot (1 - y^2 \cdot \cos(xy))}{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}. \end{aligned}$$

Таким чином, $y' = \frac{y \cdot (1 - y^2 \cdot \cos(xy))}{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}$.

Відповідь: а) $y' = 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^2 \cdot \left(10x^4 - x^{-\frac{4}{3}} \right)$;

б) $y' = \frac{2 \ln 2x}{x} \cdot \operatorname{arctg}(2 - 3x^2) - \frac{6x \cdot \ln^2 2x}{1 + (2 - 3x^2)^2}$;

в) $y' = \frac{-15x^2 + 3x + 10}{e^{5x} \sqrt{3x^2 - 2}}$;

г) $y' = \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right)^{\cos 5x} \cdot \left(-\frac{5}{2} \sin 5x \ln(x^2 + 2x) + \cos 5x \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x} \right)$;

д) $y' = \frac{y \cdot (1 - y^2 \cdot \cos(xy))}{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}$

Задача 10. Знайти першу і другу похідні функції:

1) $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{tg} x$, 2) а) $\begin{cases} x = 5t^2 - t, \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 2t + \sin 2t \end{cases}$.

Розв'язання. 1) Маємо явно задану функцію. Знайдемо y' за формулою (1.3), а потім $y'' = (y')'$:

$$\begin{aligned} y' &= (1 + x^2)' \cdot \operatorname{tg} x + (1 + x^2) \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2x \cdot \operatorname{tg} x + (1 + x^2) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= 2x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1 + x^2}{\cos^2 x}, \\ y'' &= (y')' = (2x)' \cdot \operatorname{tg} x + 2x \cdot (\operatorname{tg} x)' + \frac{(1 + x^2)' \cos^2 x - (1 + x^2)(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \\ &= 2 \operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cos^2 x - (1 + x^2) 2 \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \end{aligned}$$

$$= 2tgx + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cos^2 x + (1 + x^2) \sin 2x}{\cos^4 x}.$$

2) Маємо параметрично задані функції.

а) Для знаходження першої похідної застосуємо формулу (1.6).

Знайдемо $x'_t = 10t - 1$ і $y'_t = 3 + 3t^2$. Матимемо

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3 + 3t^2}{10t - 1}.$$

Для знаходження другої похідної застосуємо формулу (1.9).

Знайдемо $x''_{tt} = 10$ і $y''_{tt} = 6t$. Тоді друга похідна

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{(10t - 1) \cdot 6t - 10 \cdot (3 + 3t^2)}{(10t - 1)^3} = \\ &= \frac{60t^2 - 6t - 30 - 30t^2}{(10t - 1)^3} = \frac{30t^2 - 6t - 30}{(10t - 1)^3} = \frac{6 \cdot (5t^2 - t - 5)}{(10t - 1)^3}. \end{aligned}$$

б) Для знаходження першої похідної застосуємо формулу (1.6).

Знайдемо $y'_t = 2 + 2 \cos 2t = 2(1 + \cos 2t) = 4 \cos^2 t$, $x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Тоді

перша похідна

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4 \cos^2 t}{1 / \cos^2 t} = 4 \cos^4 t.$$

Для знаходження другої похідної застосуємо формулу (1.10).

Знайдемо $(y'_x)'_t = 16 \cos^3 t (-\sin t)$. Тоді друга похідна

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-16 \cos^3 t \sin t}{1 / \cos^2 t} = -16 \cos^5 t \cdot \sin t.$$

Відповідь: 1) $y' = 2x \cdot tgx + \frac{1 + x^2}{\cos^2 x},$

$$y'' = 2tgx + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cos^2 x + (1 + x^2) \sin 2x}{\cos^4 x};$$

$$2) \text{ а) } y'_x = \frac{3 + 3t^2}{10t - 1}, \quad y''_{xx} = \frac{6 \cdot (5t^2 - t - 5)}{(10t - 1)^3};$$

$$\text{б) } y'_x = 4 \cos^4 t, \quad y''_{xx} = -16 \cos^5 t \cdot \sin t.$$

Задача 11. Знайти границю, застосувавши правило Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right), \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \sin 5x}{e^{3x} - 3x - 1}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x}.$$

Розв'язання. а) Маємо невизначеність виду $[\infty - \infty]$. Зведемо цю невизначеність до виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ (приведемо до спільного знаменника вираз під границею), а потім застосуємо правило Лопіталя (1.14):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1 - \ln x)'}{((x-1) \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x + x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x + x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2} = 0,5. \end{aligned}$$

б) Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Застосуємо правило Лопіталя (1.14):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \sin 5x}{e^{3x} - 3x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x \sin 5x)'}{(e^{3x} - 3x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 5x + 20x \cos 5x}{3e^{3x} - 3} = \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 \sin 5x + 20x \cos 5x)'}{(3e^{3x} - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20 \cos 5x + 20 \cos 5x - 100x \sin 5x}{9e^{3x}} = \\ &= \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

в) Маємо невизначеність виду $\left[1^{\infty}\right]$. Зведемо цю невизначеність до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ (застосуємо формулу з елементарної математики $a^b = e^{b \cdot \ln a}$). У нашому випадку

$$(1 - 2 \sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x} = e^{\operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 - 2 \sin 5x)}.$$

$$\text{Матимемо } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 - 2 \sin 5x)}.$$

Знайдемо границю, перейшовши від невизначеності $[\infty \cdot 0]$ до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, застосувавши правило Лопіталя (5.14):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 - 2 \sin 5x) &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2 \sin 5x)}{\operatorname{tg} 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1 - 2 \sin 5x))'}{(\operatorname{tg} 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2 \cos 5x}{1 - 2 \sin 5x} \cdot 5}{\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3} = -\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin 5x)^{\operatorname{ctg} 3x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln(1 - 2 \sin 5x)} = e^{-\frac{10}{3}}.$$

Відповідь: а) 0,5 ; б) $\frac{40}{9}$; в) $e^{-\frac{10}{3}}$.

1.3 Застосування похідної функції однієї змінної

Диференціальне числення застосовують для знаходження рівнянь дотичної та нормалі до графіка функції в заданій точці, знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку, дослідження функцій та побудови її графіка.

Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці дотику

Означення 1.12. Дотичною до кривої називають пряму, яка має з

графіком кривої одну спільну точку.

Маємо криву, задану функцією $y = f(x)$, і точку $M(x_0, y_0)$, що належить кривій. Дотична до цієї кривої проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і утворює з додатним напрямом осі Ox кут α . З геометричного змісту похідної маємо $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Підставимо $k = f'(x_0)$ в формулу $y - y_0 = k(x - x_0)$. Матимемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (1.15)$$

Якщо функція $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ має нескінченну похідну, то дотична в цій точці паралельна осі Oy , а її рівняння $x = x_0$.

Означення 1.13. *Нормаллю* до кривої називають пряму, яка проходить перпендикулярно до дотичної через точку дотику.

З умова перпендикулярності прямих маємо, що для нормалі $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Тоді рівняння нормалі до графіка кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ матиме вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (1.16)$$

Екстремум функції $y = f(x)$, інтервали монотонності

Теорема 1.1. *Необхідна умова локального екстремуму.* Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то в цій точці похідна функції $f'(x_0)$ або не існує, або дорівнює нулю $f'(x_0) = 0$.

У цьому випадку точку x_0 називають *критичною* або *точкою*

можливого екстремуму.

Теорема 1.2. Перша достатня умова екстремуму. Якщо в околі критичної точки x_0 похідна функції $y = f(x)$ змінює знак, то точка x_0 є екстремальною.

У цьому випадку при зміні знака похідної з "+" на "-" точка x_0 є точкою локального максимуму, а при зміні знака похідної з "-" на "+" точка x_0 є точкою локального мінімуму. Якщо знак похідної в околі критичної точки x_0 не змінюється, то точка не є екстремальною.

Теорема 1.3. Друга достатня умова екстремуму. Якщо $f'(x_0) = 0$ і в околі точки x_0 існує неперервна друга похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$, то при умові $f''(x_0) > 0$ точка x_0 є точкою локального мінімуму, а при $f''(x_0) < 0$ – точкою локального максимуму.

Теорема 1.4. Якщо в кожній внутрішній точці проміжку (a, b) справедливо, що $f'(x_0) > 0$, то функція $y = f(x)$ на цьому проміжку зростає, якщо $f'(x_0) < 0$, то функція $y = f(x)$ на цьому проміжку спадає.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ є неперервною. На цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка при $x = a$ чи $x = b$, або у критичних точках, що належать на відрізку $[a, b]$, які знайдені з умови: похідна функції $f'(x_0)$ або не існує, або дорівнює нулю $f'(x_0) = 0$.

Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції необхідно впевнитись, що вона неперервна на заданому відрізку. Знайти критичні точки. Визначити, які з них належать заданому відрізку. Знайти значення функції в них та на кінцях відрізка. Серед отриманих значень вибрати найбільше і найменше.

Опуклість і вгнутість кривої $y = f(x)$, точки перегину

Означення 1.14. Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі (a, b) , якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі, тобто $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$.

Означення 1.15. Крива $y = f(x)$ називається *вгнутою* на інтервалі (a, b) , якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі, тобто $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$.

Означення 1.16. *Точкою перегину* називається точка кривої, що відділяє її опуклу частину від вгнутої.

Теорема 1.5. *Необхідна умова існування точки перегину.* Якщо функція $y = f(x)$ двічі диференційовна і точка x_0 є точкою перегину, то в цій точці друга похідна функції $f''(x_0)$ або не існує, або дорівнює нулю $f''(x_0) = 0$.

У цьому випадку точку x_0 називають *критичною точкою другого роду*.

Теорема 1.6. *Достатня умова існування точки перегину.* Якщо в околі критичної точки другого роду x_0 функції $y = f(x)$ друга похідна $f''(x_0)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину кривої $y = f(x)$.

Асимптоти кривої

Означення 1.17. *Асимптотою кривої* називається пряма до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько, але не перетинає її.

Асимптоти поділяють на вертикальні, похилі (горизонтальні) асимптоти.

Означення 1.18. Графік функції $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = x_0$, якщо границя функції, коли $x \rightarrow x_0$, нескінченна, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$.

Крім цього точка $x = x_0$ є точкою розриву II роду.

Означення 1.19. Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту

$$y = kx + b, \quad (1.17)$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx) \quad (1.18)$$

при умові, що обидві границі існують і скінченні.

У протилежному випадку похилих асимптот немає. Слід окремо розглядати випадки, коли змінна прямує до плюс нескінченності ($x \rightarrow +\infty$) та мінус нескінченності ($x \rightarrow -\infty$).

Означення 1.20. Графік функції $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$ тільки в тому випадку, коли границя функції при $x \rightarrow +\infty$ або $x \rightarrow -\infty$ існує, скінченна і дорівнює сталій: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

або $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Знаходження границь в деяких випадках спрощується, якщо застосовувати правило Лопітала.

Схема дослідження функції та побудова її графіка

Необхідно:

1. Знайти область визначення функції. Це дає змогу визначити ті точки осі абсцис, над якими пройде чи не пройде графік функції.

2. Знайти точки перетину графіка з координатними осями. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y = f(x), \\ x = 0. \end{cases}$$

Перша система дає точки перетину з віссю Ox , друга – з віссю Oy .

3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. Якщо $f(x+T)=f(x)$, $T \neq 0$, то функція $y=f(x)$ періодична функція з періодом T . Якщо $f(-x)=f(x)$, то функція $y=f(x)$ парна і графік функції симетричний відносно осі Oy . Якщо $f(-x)=-f(x)$, то функція $y=f(x)$ непарна і графік функції симетричний відносно початку координат. Якщо жодна з умов не справджується, то функція є ні парною, ні непарною і графік функції не буде мати ніякої симетрії.

4. Знайти асимптоти графіка функції.

5. Знайти екстремум функції та інтервали монотонності функції.

6. Знайти інтервали вгнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції. Знайти точки перетину.

7. Побудувати графік функції.

Задача 12. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{x+2}{x-3}$

в точці перетину його з віссю абсцис та рівняння нормалі в точці перетину його з віссю ординат.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ знаходиться за формулою (1.15): $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$, а рівняння нормалі за формулою

(1.16): $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x)} \cdot (x - x_0)$. Знайдемо точки перетину графіка

функції з осями координат:

а) з віссю OX : $y = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$; $x = -2 \Rightarrow A(-2; 0)$;

б) з віссю OY : $x = 0 \Rightarrow y = -2/3$; $\Rightarrow B(0; -2/3)$.

$$\begin{aligned} \text{Знайдемо похідну } y' &= \left(\frac{x+2}{x-3} \right)' = \frac{(x+2)' \cdot (x-3) - (x+2) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot (x-3) - (x+2) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-2}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Обчислимо похідну в точках A і B :

$$y'(x_A) = \frac{-5}{(-2-3)^2} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}, \quad y'(x_B) = \frac{-5}{(-3)^2} = -\frac{5}{9}.$$

Запишемо рівняння дотичної в точці A :

$$y - y_A = y'(x_A) \cdot (x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{5}(x + 2); \quad x + 5y + 2 = 0.$$

Запишемо рівняння нормалі в точці B :

$$y - y_B = -\frac{1}{y'(x_B)}(x - x_B) \Rightarrow y + \frac{2}{3} = -\frac{1}{-5/9}(x - 0); \quad y = \frac{9}{5}x - \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $x + 5y + 2 = 0$, $y = \frac{9}{5}x - \frac{2}{3}$.

Задача 13. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на відрізку $[-1; 2]$.

Розв'язання. Функція на відрізку $[-1; 2]$ неперервна. Знайдемо критичні точки. Перша похідна функції $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$. Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Звідки $x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$. Корені цього рівняння: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Виберемо ті, що належать заданому відрізку: $x_1 \in [-1; 2]$; $x_2 \in [-1; 2]$; $x_3 \notin [-1; 2]$. Знайдемо значення функції в критичних точках $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$ і на кінцях відрізка при $x = -1$ і $x = 2$:

$$f(0)=1; f(1)=2; f(-1)=-10; f(2)=-7.$$

Виберемо серед цих значень найбільше та найменше. Отже,

$$f_{\text{найб}} = \max_{[-1;2]} f(x) = f(1) = 2 \text{ і } f_{\text{найм}} = \min_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -10.$$

Відповідь: $f_{\text{найб}} = 2$, $f_{\text{найм}} = -10$.

Задача 14. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$ на відрізку $[-1;1]$.

Розв'язання. Функція на відрізку $[-1;1]$ неперервна. Знайдемо критичні точки. Запишемо функцію у вигляді $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 1$ і знайдемо першу похідну функції:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - 5 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Звідки $x-1=0 \Rightarrow x_1=1$. Перша похідна $f'(x)$ не існує, тобто $f'(x) = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$. Обидві критичні точки належать відрізку $[-1;1]$. Знайдемо значення функції в критичних точках $x_1=1$ та $x_2=0$ і $x=-1$:

$$f(1)=-2; f(0)=1; f(-1)=-6.$$

Виберемо серед цих значень найбільше та найменше. Отже,

$$f_{\text{найб}} = \max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1 \text{ і } f_{\text{найм}} = \min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = -6.$$

Відповідь: $f_{\text{найб}} = 1$, $f_{\text{найм}} = -6$.

Задача 15. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Функція на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ неперервна. Знайдемо

критичні точки. Знайдемо першу похідну функції:

$$f'(x) = -2 \cdot \sin x - 2 \cos 2x.$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Звідки $-2 \cdot \sin x - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin x + 2 \cos 2x = 0$. Оскільки $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то матимемо рівняння: $2 \cdot \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Зробимо заміну: $\sin x = t$, $|t| \leq 1$. Тоді $2 \cdot t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -\frac{1}{2}$. Маємо

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Зі знайдених коренів відрізка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ належать: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = \frac{\pi}{6}$.

Знайдемо значення функції в критичних точках $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$ і

$$x = -\frac{\pi}{2}:$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5\sqrt{3}; f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Виберемо серед цих значень найбільше та найменше. Отже,

$$f_{\text{найб}} = \max_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5\sqrt{3} \text{ і}$$

$$f_{\text{найм}} = \min_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Відповідь: $f_{\text{найб}} = 0,5\sqrt{3}$, $f_{\text{найм}} = 0$.

Задача 16. Дослідити за допомогою диференціального числення

функцію $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $D(y): x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

2. Точки перетину графіка функції з осями координат:
з віссю OX : $y = 0 \Rightarrow x = 0$, з віссю OY : $x = 0 \Rightarrow y = 0$.

3. Перевіряємо виконання однієї із рівностей: $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$. Жодна з рівностей не виконується, тому функція є ні парна, ні непарна. Графік функції не буде мати ніякої симетрії.

4. Знайдемо асимптоти графіка функції. У точці $x = -1$ функція має нескінченний розрив:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty \text{ і } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Отже, $x = -1$ – рівняння вертикальної асимптоти.

Знаходимо похилі асимптоти за формулою (1.17): $y = k \cdot x + b$ і визначаємо за формулами (1.18) значення k і b :

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2 \cdot x} = \frac{1}{2}, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x(x^2 + 2x + 1)}{2(x+1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x+1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1. \end{aligned}$$

Маємо рівняння похилої асимптоти $y = \frac{1}{2}x - 1$.

5. Знайдемо екстремум функції та інтервали монотонності (зростання і спадання) функції.

Перша похідна функції:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x+1)(3(x+1) - 2x)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(3x+3-2x)}{(x+1)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3 + 3 \cdot x^2}{(x+1)^3}.$$

Знаходимо критичні точки: $y' = 0$ при $x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ і $x_2 = -3$; y' не існує при $(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$, однак ця точка не належить області визначення функції. Складемо таблицю.

x	$(-\infty; -3]$	-3	$[-3; -1)$	$(-1; 0]$	0	$[0; \infty)$
y'	+	0	-	+	0	+
y	зростає	max	спадає	зростає	extr немає	зростає

Для кожного інтервалу з'ясовуємо знак першої похідної y' і результат заносимо в таблицю. Точка $x = -3$ є точкою максимуму.

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{(-3)^3}{2(-3+1)^2} = -\frac{27}{8}.$$

6. Знайдемо точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції.

Друга похідна:

$$y'' = (y')' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 + 6x) \cdot (x+1)^3 - (x^3 + 3x^2) \cdot 3 \cdot (x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x+2)(x+1)^3 - 3x^2(x+3)(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x+1)^2((x+2)(x+1) - x(x+3))}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x^2 + 2x + x + 2 - x^2 - 3x)}{(x+1)^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x \cdot 2}{(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

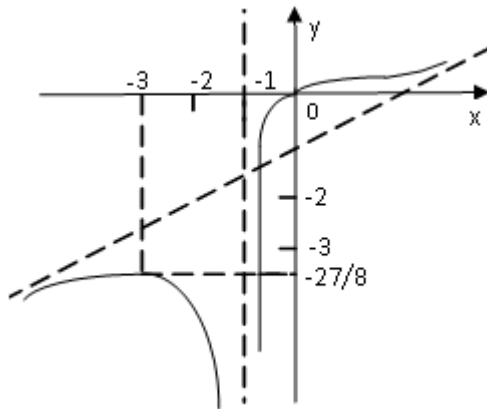
Знаходимо критичні точки: $y'' = 0$ при $x = 0$; y'' не існує при

$x = -1$, однак ця точка не належить області визначення. Складемо таблицю.

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0]$	0	$[0; \infty)$
y''	$-$	$-$	0	$+$
y	$\cap$	$\cap$	перегин	$\cup$

Для кожного інтервалу з'ясуємо знак другої похідної y'' і результат заносимо в таблицю. Точка $x = 0$ є точкою перегину графіка функції. Значення функції в точці перегину $y(0) = 0$.

7. За результатами дослідження будуємо графік функції.



Задача 17. Дослідити за допомогою диференціального числення функцію $y = \frac{e^x}{x-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення функції : $D(y) : x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Точки перетину графіка функції з вісями координат:

з віссю OX : $y = 0 \Rightarrow \emptyset$, з віссю OY : $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

3. Перевіряємо виконання однієї із рівностей: $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$. Жодна з рівностей не виконується, тому функція є ні парна, ні непарна. Графік функції не буде мати ніякої симетрії.

4. Знайдемо асимптоти графіка функції. У точці $x = 1$ функція має нескінченний розрив:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{e^x}{x-1} = -\infty \text{ і } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{e^x}{x-1} = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ – рівняння вертикальної асимптоти.

Знаходимо похилі асимптоти за формулою (1.17): $y = k \cdot x + b$ і визначаємо за формулами (1.18) значення k і b :

Розглянемо випадок, коли $x \rightarrow -\infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - x} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x-1} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Маємо рівняння горизонтальної асимптоти $y = 0$, коли $x \rightarrow -\infty$.

Розглянемо випадок, коли $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \{ \text{За правилом Лопіталя} \} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \infty. \end{aligned}$$

З цього випливає, що похилих і горизонтальних асимптот немає, коли $x \rightarrow +\infty$.

5. Знайдемо екстремум функції та інтервали монотонності (зростання і спадання) функції.

Перша похідна функції:

$$y' = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Знаходимо критичні точки: $y' = 0$ при $x-2=0 \Rightarrow$; y' не існує при $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1$, однак ця точка не належить області визначення функції. Складемо таблицю.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 2]$	2	$[2; \infty)$
y'	-	-	0	+
y	спадає	спадає	extr min	зростає

Для кожного інтервалу з'ясовуємо знак першої похідної y' і результат заносимо в таблицю. Точка $x=2$ є точкою мінімуму.

$$y_{\min} = y(2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2 \approx 2,7^2 \approx 7,4.$$

6. Знайдемо точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції.

Друга похідна:

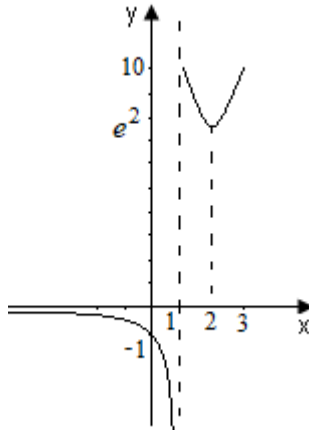
$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= \frac{(e^x(x-2) + e^x) \cdot (x-1)^2 - e^x(x-2) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{e^x(x-1)(x^2 - 2x + 1 - 2x + 4)}{(x-1)^4} = \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Знаходимо критичні точки: $y'' = 0$ при $e^x(x^2 - 4x + 5) = 0 \Rightarrow \emptyset$;

y'' не існує при $(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x=1$, однак ця точка не належить області визначення. Точок перегину графіка функції немає. Складемо таблицю.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
y''	-	+
y	$\cap$	$\cup$

7. За результатами дослідження будуюмо графік функції. З метою уточнення графіка функції знайдемо $y(3) = \frac{e^3}{2} \approx 10$.



2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення 2.1. Якщо кожній впорядкованій парі чисел (x, y) , що належать множині D , поставлено у відповідність за деяким законом певне число z , то кажуть, що на множині D визначено функцію двох змінних x і y і позначають $z = f(x, y)$.

Означення 2.2. Множину D пар значень (x, y) , для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення функції*, а множину значень z – *областю значень функції* і позначають E .

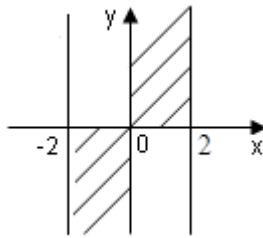
x і y – незалежні змінні. Якщо функція $z = f(x, y)$ задана за допомогою формули, то областю визначення функції є множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст. Областю визначення функції може бути вся площина або частина площини, обмежена певними лініями.

Задача 18. Знайти і побудувати область визначення функції:

$$z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

Розв'язання. Функція z є сумою двох функцій. Функція $\arcsin \frac{x}{2}$ визначена при $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ або $-2 \leq x \leq 2$. Функція $\sqrt{xy}$ існує, якщо $xy \geq 0$, тобто у двох випадках: при $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ і при $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$ Звідки область визначення всієї функції: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ y \geq 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} -2 \leq x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$

Побудуємо область визначення функції.



2.1 Частині похідні та диференціали функції двох змінних

Означення 2.3. Стала величина A називається *границею функції* $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо кожному довільно малому числу $\varepsilon > 0$ можна поставити у відповідність число $\delta > 0$ таке, що для всіх

точок $M(x, y) \in D$, які задовольняють умову $\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta, \\ 0 < |y - y_0| < \delta, \end{cases}$

виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ і записують $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

Для функції двох змінних справедливі основні теореми про границі, розглянуті для функції однієї змінної.

Означення 2.4. Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо кожному довільно малому числу $\varepsilon > 0$ можна поставити у відповідність число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок

$M(x, y) \in D$, які задовольняють умову
$$\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta, \\ 0 < |y - y_0| < \delta, \end{cases} \quad \text{виконується}$$
 нерівність $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ і записують $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Означення 2.5. 1. Частинним приростом $\Delta_x z$ по змінній x (або частинним приростом $\Delta_y z$ по змінній y) функції $z = f(x, y)$ при переході від точки $(x, y) \in D$ до точки $(x + \Delta x, y) \in D$ (або $(x, y + \Delta y) \in D$) називають

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad \text{або} \quad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2. Повним приростом Δz функції $z = f(x, y)$ при переході від точки $(x, y) \in D$ до точки $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$ (або $(x, y + \Delta y) \in D$) називають

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Означення 2.6. Якщо існує границя
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$
 то її називають *частинною похідною функції $z = f(x, y)$ в точці $(x, y) \in D$ по змінній x* і позначають одним із символів: $z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогічно визначається *частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній y* : $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ і позначається одним

із символів: $z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Зауваження. При знаходженні частинних похідних функції $z = f(x, y)$ правила диференціювання і таблиця похідних такі ж самі, як для функції однієї змінної. 2. При знаходженні частинної похідної по певній змінній всі інші змінні вважаємо сталими.

Задача 19. Знайти частинні похідні першого порядку для функції

$$z = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}} + e^{2x+3y}.$$

Розв'язання. При знаходженні похідної по змінній x змінну y вважаємо сталою:

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{(x+y)'_x \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot (\sqrt[3]{x})'_x}{(\sqrt[3]{x})^2} + (e^{2x+3y})'_x = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}}{\sqrt[3]{x^2}} + e^{2x+3y} \cdot 2 = \frac{3x - x - y}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2e^{2x+3y} = \\ &= \frac{2x-y}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

При знаходженні похідної по змінній y змінну x вважаємо сталою:

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{(x+y)'_y \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot (\sqrt[3]{x})'_y}{(\sqrt[3]{x})^2} + (e^{2x+3y})'_y = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot 0}{\sqrt[3]{x^2}} + e^{2x+3y} \cdot 3 = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

Відповідь: $z'_x = \frac{2x-y}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2e^{2x+3y}$, $z'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3e^{2x+3y}$.

Нехай функція $z = f(x, y)$ має скінчену частинну похідну по змінній x : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x, y)$. Тоді $\Delta_x z = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де $\alpha \rightarrow 0$, коли $\Delta x \rightarrow 0$. Вираз $f'_x(x, y) \cdot \Delta x$ називається *головною частиною* частинного приросту $\Delta_x z$ по змінній x функції $z = f(x, y)$.

Означення 2.7. Частинним диференціалом по змінній x функції $z = f(x, y)$ називається головна частина частинного приросту $\Delta_x z$, пропорційна приросту змінної x .

Позначають $d_x z = f'_x(x, y) \cdot dx$. Аналогічно визначається частинний диференціал по змінній y функції $z = f(x, y)$, тобто $d_y z = f'_y(x, y) \cdot dy$.

Означення 2.8. Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається головна частина повного приросту функції, лінійна щодо Δx та Δy : $dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y$.

Враховуючи, що $\Delta x = dx$ і $\Delta y = dy$, матимемо

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy. \quad (2.1)$$

Задача 20. Знайти повний диференціал функції

$$z = 5x^2y^3 - 4x + 2y - 3.$$

Розв'язання. Повний диференціал функції знаходимо за формулою (2.1). Знайдемо перші частинні похідні: $z'_x = 10xy^3 - 4$, $z'_y = 15x^2y^2 + 2$. Тоді повний диференціал функції

$$dz = (10xy^3 - 4)dx + (15x^2y^2 + 2)dy.$$

Відповідь: $dz = (10xy^3 - 4)dx + (15x^2y^2 + 2)dy$.

Нехай задано рівняння $F(x, y, z) = 0$.

Теорема 2.1 (про існування та диференційовність неявної функції двох змінних).

Якщо виконуються такі умови:

1) Функція $F(x, y, z)$ і її похідні $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ визначені та неперервні в паралелепіпеді:

$$G = \{(x, y, z) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b; z_0 - c \leq z \leq z_0 + c\};$$

$$2) F(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

$$3) F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то існує окіл точки (x_0, y_0, z_0) , в якому рівняння $F(x, y, z) = 0$ визначає неявну функцію $z = f(x, y)$, неперервну та диференційовну в околі точки (x_0, y_0) і таку, що $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Тоді частинні похідні неявної функції $z = f(x, y)$ визначаються за формулами:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (2.2)$$

Аналогічні формули можна застосувати для неявної функції $y = f(x)$, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$. Матимемо

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (2.3)$$

Задача 21. Знайти для функції, що задана неявно: а) похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, б) похідну першого порядку $\frac{dy}{dx}$.

$$а) \sin(xyz) + \sqrt{x + y + z} = 0, \quad б) xy^3 + \ln y + x^2 = 0.$$

Розв'язання. а) Частинні похідні функції заданої неявно знаходимо за формулами (2.2). Маємо рівняння $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z) = \sin(xyz) + \sqrt{x + y + z}$. Знайдемо похідні функції $F(x, y, z)$

по змінних x, y, z і підставимо у формулу:

$$F'_x = \cos(xyz) \cdot (yz) + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}} = \frac{2yz \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}{2\sqrt{x+y+z}},$$

$$F'_y = \cos(xyz) \cdot (xz) + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}} = \frac{2xz \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}{2\sqrt{x+y+z}},$$

$$F'_z = \cos(xyz) \cdot (xy) + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}} = \frac{2xy \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}{2\sqrt{x+y+z}}.$$

Тоді частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = -\frac{2yz \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}, \quad z'_y = -\frac{2xz \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}.$$

б) Похідну функції заданої неявно знаходимо за формулою (6.3).

Маємо рівняння $F(x, y) = 0$, де $F(x, y) = xy^3 + \ln y + x^2$. Знайдемо похідні функції $F(x, y)$ по змінних x, y і підставимо у формулу:

$$F'_x = y^3 + 2x, \quad F'_y = 3xy^2 + \frac{1}{y} = \frac{3xy^3 + 1}{y}.$$

$$y'_x = -\frac{y^3 + 2x}{\frac{3xy^3 + 1}{y}} = -\frac{y^4 + 2xy}{3xy^3 + 1}$$

Відповідь: а) $z'_x = -\frac{2yz \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1},$

$$z'_y = -\frac{2xz \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cos(xyz)\sqrt{x+y+z} + 1};$$

б) $y'_x = -\frac{y^4 + 2xy}{3xy^3 + 1}.$

Розглянемо знаходження похідних першого порядку для складеної функції двох змінних.

а) Нехай функція $z = f(x, y)$ залежить від двох змінних x та y , кожна з яких, в свою чергу, є функцією змінної t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}; \quad (2.4)$$

б) Нехай функція $z = f(x, y)$ і $y = y(x)$. Тоді

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}; \quad (2.5)$$

в) Нехай функція $z = f(x, y)$ і $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{і} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2.6)$$

Задача 22. Знайти першу похідну складної функції а) $z = \cos \frac{x}{y}$,

де $x = t^2 - 3t$, $y = \sqrt[5]{t^2 + 1}$; б) $z = x^3 y - 4xy^2 + \sqrt{xy}$, $y = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$;

в) $z = x^2 y - xy^3$, $x = u^2 v + 4$, $y = uv^3 - 3$.

Розв'язання. а) Для знаходження похідної застосуємо формулу (2.4). Знайдемо похідні:

$$z'_x = -\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}, \quad z'_y = -\sin \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \frac{x}{y^2} \cdot \sin \frac{x}{y}, \quad x'_t = 2t - 3 \quad \text{і}$$

$$y'_t = \frac{1}{5} (t^2 + 1)^{-4/5} \cdot 2t. \text{ Підставимо їх у формулу:}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{y} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot (2t - 3) + \frac{x}{y^2} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{2}{5} t \cdot (t^2 + 1)^{-4/5}.$$

б) Для знаходження похідної застосуємо формулу (2.5). Знайдемо похідні:

$$z'_x = 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \quad z'_y = x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}, \quad y'_x = \frac{1}{3}(3x^2 + 4)^{-2/3} 6x.$$

Підставимо їх у формулу:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \left(x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{1}{3}(3x^2 + 4)^{-2/3} 6x = \\ &= 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + 2x \cdot \left(x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right) \cdot (3x^2 + 4)^{-2/3}. \end{aligned}$$

в) Для знаходження похідної застосуємо формулу (2.6). Знайдемо похідні:

$$z'_x = 2xy - y^3, \quad z'_y = x^2 - 3xy^2, \quad x'_u = 2uv, \quad x'_v = u^2, \quad y'_u = v^3 \text{ і } y'_v = 3uv^2.$$

Підставимо їх у формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^3) \cdot 2uv + (x^2 - 3xy^2) \cdot v^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (2xy - y^3) \cdot u^2 + (x^2 - 3xy^2) \cdot 3uv^2.$$

Відповідь: а) $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{y} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot (2t - 3) + \frac{x}{y^2} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{2}{5} t \cdot (t^2 + 1)^{-4/5};$

б) $\frac{dz}{dx} = 3x^2y - 4y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + 2x \cdot \left(x^3 - 8xy + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right) \cdot (3x^2 + 4)^{-2/3};$

в) $\frac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^3) \cdot 2uv + (x^2 - 3xy^2) \cdot v^3,$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (2xy - y^3) \cdot u^2 + (x^2 - 3xy^2) \cdot 3uv^2.$$

Частинні похідні першого порядку z'_x, z'_y функції двох змінних $z = f(x, y)$ в свою чергу є функціями двох змінних. Їх можна диференціювати. Дістанемо другі частинні похідні: $z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

При цьому $z''_{xy} = z''_{yx}$, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Ці похідні називають мішаними похідними другого порядку.

Диференціал другого порядку – це диференціал від диференціала першого порядку: $d^2 z = d(dz) = d(z'_x dx + z'_y dy)$. Тоді

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2. \quad (2.7)$$

Аналогічно можна дістати формулу для диференціала n -го порядку:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (2.8)$$

Задача 23. Довести, що функція $z = xy + \ln(x + y)$ задовольняє рівнянню $z''_{xy} - z''_{yy} = 1$.

Розв'язання. Знайдемо перші частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = y + \frac{1}{x+y} \quad \text{і} \quad z'_y = x + \frac{1}{x+y}. \quad \text{Тоді} \quad z''_{xy} = 1 - \frac{1}{(x+y)^2} \quad \text{і}$$

$z''_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2}$. Підставимо знайдені похідні другого порядку в задане рівняння:

$$1 - \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = 1 \Rightarrow 1 = 1.$$

Отримали тотожність. Функція задовольняє заданому рівнянню. Відповідь: функція задовольняє заданому рівнянню.

2.2 Деякі застосування частинних похідної функції двох змінних

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Нехай задано поверхню $F(x, y, z) = 0$. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить цій поверхні і функція $F(x, y, z)$ диференційовна в ній, причому частинні похідні функції в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ одночасно не дорівнюють нулю.

Розглянемо дотичну площину до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці M_0 . Нормальний вектор дотичної площини в точці M_0 має координати: $\vec{n} = (F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0))$. Тоді рівняння дотичної площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці M_0 обчислюється за формулою:

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (2.9)$$

Означення 2.9. Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають пряму, яка проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної площини в точці M_0 .

Рівняння нормалі, яка проходить через точку M_0 , має вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (2.10)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі: $z = f(x, y)$, то поклавши $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, можна застосувати наведені вище формули.

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0), \quad F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0), \quad F'_z(M_0) = -1.$$

Тоді рівняння дотичної площини в точці M_0 матиме вигляд

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0, \quad (2.11)$$

а рівняння нормалі в точці M_0

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (2.12)$$

Екстремум функції двох змінних

Означення 2.10. Точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою локального максимуму функції $z = f(x, y)$, якщо значення функції в цій точці є найбільшим у деякому околі точки M_0 .

Означення 2.11. Точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою локального мінімуму функції $z = f(x, y)$, якщо значення функції в цій точці є найменшим у деякому околі точки M_0 .

Теорема 2.2 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних x та y дорівнюють нулю або не існують.

Точки, що задовольняють цим умовам, називається *критичними точками*.

Теорема 2.3 (достатні умови екстремуму). Нехай функція $z = f(x, y)$ в деякому околі критичної точки $M_0(x_0, y_0)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Якщо

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

то функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0, y_0)$, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ не екстремальна. У випадку, коли $\Delta(x_0, y_0) = 0$, необхідне додаткове дослідження.

Задача 24. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1; -2; 2,5)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини в неявному вигляді: $F(x, y, z) = 0$. У нашому випадку $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$.

Знайдемо частинні похідні в точці M_0 :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} = 2x|_{M_0} = 2, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} = 2y|_{M_0} = -4, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} = -2.$$

Підставимо в рівняння (6.9) знайдені значення похідних. Матимемо рівняння дотичної площини:

$$2(x-1) - 4(y+2) - 2(z-2,5) = 0 \Rightarrow 2x - 4y - 2z - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі за формулою (6.10):

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2,5}{-2}.$$

Відповідь: дотична площина $2x - 4y - 2z - 5 = 0$,

$$\text{нормаль } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2,5}{-2}.$$

Задача 24. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + 20y^2 + z^2 - 28 = 0$ при $x_0 = 2, y_0 = 1$.

Розв'язання. Знайдемо z_0 , підставивши $x_0 = 2, y_0 = 1$ у рівняння площини: $4 + 20 + z_0^2 - 28 = 0 \Rightarrow z_0^2 = 4, z_0 = \pm 2$. Маємо дві точки $M_1(2; 1; 2)$ і $M_2(2; 1; -2)$. У нашому випадку

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z = 0$. Знайдемо частинні похідні в точках M_1 і

M_2 . Маємо $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 40y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$. Тоді

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_1} = 4, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_1} = 40, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_1} = 4,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_2} = 4, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_2} = 40, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_2} = -4.$$

Для точки $M_1(2; 1; 2)$ дотична площина і нормаль мають вигляд:

$$4(x-2) + 40(y-1) + 4(z-2) = 0 \Rightarrow x + 10y + z - 14 = 0,$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-2}{1}.$$

Для точки $M_2(2; 1; -2)$ дотична площина і нормаль мають вигляд:

$$4(x-2) + 40(y-1) - 4(z+2) = 0 \Rightarrow x + 10y - z - 14 = 0,$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z+2}{-1}.$$

Відповідь: для $M_1(2; 1; 2)$ дотична площина $x + 10y + z - 14 = 0$,

$$\text{нормаль } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-2}{1};$$

для $M_2(2; 1; -2)$ дотична площина $x + 10y - z - 14 = 0$,

$$\text{нормаль } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z+2}{-1}.$$

Задача 25. Дослідити на екстремум функцію $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 5$.

Розв'язання. Область визначення функції – вся площина $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Щоб знайти екстремум функції необхідно знайти критичні точки, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Знаходимо частинні похідні функції: $z'_x = 24x^2 - 6y$,

$$z'_y = 3y^2 - 6x. \text{ Розв'яжемо систему: } \begin{cases} 24x^2 - 6y = 0, \\ 3y^2 - 6x = 0. \end{cases}$$

Розв'язком будуть $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_2 = 0,5, \\ y_2 = 1. \end{cases}$ Маємо дві точки: $M_1(0; 0)$

і $M_2(0,5; 1)$. Обидві точки належать області визначення.

У кожній точці знайдемо

$$\Delta(x_0, y_0) = z_{xx}''(x_0, y_0) \cdot z_{yy}''(x_0, y_0) - (z_{xy}''(x_0, y_0))^2.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції:

$$z_{xx}'' = 48x; z_{xy}'' = -6; z_{yy}'' = 6y.$$

Досліджуємо на екстремум точку $M_1(0;0)$. Обчислимо значення других частинних похідних у цій точці:

$$z_{xx}''(0;0) = 0, z_{xy}''(0;0) = -6, z_{yy}''(0;0) = 0.$$

Тоді $\Delta(0,0) = 0 - (-6)^2 = -36 < 0$. В точці $M_1(0;0)$ екстремуму немає.

Досліджуємо на екстремум точку $M_2(0,5;1)$. Обчислимо значення других частинних похідних у цій точці:

$$z_{xx}''(0,5; 1) = 24, z_{xy}''(0,5; 1) = -6, z_{yy}''(0,5; 1) = 6.$$

Тоді $\Delta(0,5; 1) = 24 \cdot 6 - (-6)^2 = 108 > 0$. У точці $M_2(0,5;1)$ екстремум існує. Так як $z_{xx}''(0,5; 1) > 0$, то в точці $M_2(0,5;1)$ функція має мінімум.

Обчислимо значення заданої функції в точці $M_2(0,5;1)$

$$z_{\min} = z(0,5; 1) = 8 \cdot (0,5)^3 + 1^3 - 6 \cdot 0,5 \cdot 1 + 5 = 4.$$

Відповідь: $z_{\min} = z(0,5; 1) = 4$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – С.Пб.: Лань, Специальная литература, 2002. – 448 с. – ISBN 5-8114-0107-8.
2. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн.1. Основні розділи / Призва Г.Й., Плахотник В.В Гординський Л.Д. та інш.; За ред. Кулініча Г.Л. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 1: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век, 2002. – 304 с.
4. Дубовик В.П. Вища математика: навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.1. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Х.: Веста, 2008. – 200с., іл.
5. Дубовик В.П. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.2./ В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Х.: Веста, 2008. – 240с., іл.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. –М.: Высш. шк., 1964. – 479 с.
7. Каплан И.А.. Практические занятия по высшей математике / И.А. Каплан. Харьков, 1967. –946 с.
8. Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.1. / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 416 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 1: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А .В .Ефимова и А.С. Поспелова. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. – 288 с. – ISBN 5-94052-034-0 (Ч. 1).
11. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Учеб. пособие для втузов / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1993. – 480 с. – ISBN 5-02-01433-9.