

УДК 539.3

Антоненко Н.М.¹, Харитонов І.А.², Шевченко М.О.²

¹ канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

² студ. гр. Е-410 НУ «Запорізька політехніка»

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ПЛИТИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Розглянемо шарувату плиту, що складається з n пружних, однорідних та невагомих шарів. На спільних межах шарів виконуються умови неідеального теплового контакту. На верхній та нижній межах плити задано температуру. Необхідно знайти розподіли температури в точках плити.

Шари нумеруватимемо зверху вниз. У кожному шарі введемо локальну циліндричну систему координат так, як показано на рис. 1.

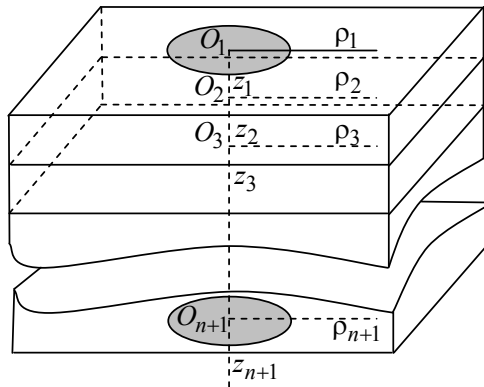


Рисунок 1 – Шарувата плита.

Крайові умови задачі:

$$T_1(\rho, 0) = f(\rho), \quad T_n(\rho, h_n) = \tilde{f}(\rho),$$

де $f(\rho)$, $\tilde{f}(\rho)$ – відомі функції.

Умови на спільних межах шарів плити:

$$k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho, h_k) = \frac{1}{R_k} [T_{k+1}(\rho, 0) - T_k(\rho, h_k)],$$

$$k_{T_{k+1}} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(\rho, 0) = k_{T_k} \frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho, h_k), \quad k = \overline{1, n-1},$$

де R_k – коефіцієнт теплового опору, k_{T_k} – коефіцієнти теплопровідності шарів.

У просторі трансформант Ганкеля вираз для визначення температури в точках k -го шару можна представити у вигляді лінійної комбінації допоміжних

$$\text{функцій} \quad [1] \quad \eta_k = \bar{T}_k(p, 0), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}_k}{dz}(p, 0):$$

$\bar{T}_k(\xi, z) = \text{ch} p z \eta_k + \text{sh} p z \varepsilon_k$. Увівши допоміжний шар з номером $(n+1)$, вважаючи, що на спільній межі n -го та $(n+1)$ -го шарів виконуються умови ідеального теплового контакту, отримано рекурентні формули для знаходження допоміжних функцій:

$$\varepsilon_k = -r_k \eta_k + F_k \eta_{n+1},$$

$$\eta_{k+1} = (C_k + L_k p S_k - r_k (S_k + L_k p C_k)) \eta_k + (S_k + L_k p C_k) \eta_{n+1},$$

$$\text{де} \quad \Delta_k = \frac{k_{T_k}}{k_{T_{k+1}}}, \quad S_k = \text{sh } p_k, \quad C_k = \text{ch } p_k, \quad p_k = p h_k, \quad L_k = R_k k_{T_k},$$

$$r_n = \text{cth } p_n, \quad F_n = \frac{1}{S_n}, \quad r_k = \frac{\Delta_k S_k + r_{k+1} (C_k + L_k p S_k)}{\Delta_k C_k + r_{k+1} (S_k + L_k p C_k)},$$

$$F_k = \frac{F_{k+1}}{\Delta_k C_k + r_{k+1} (S_k + L_k p C_k)}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Функції η_1 та η_{n+1} знаходять з крайових умов задачі, а решту функцій знаходять за наведеними вище формулами. Після підстановки отриманих допоміжних функцій у вирази для трансформант температури та застосування до них оберненого перетворення Ганкеля, отримаємо шукані розподіли температури в точках шарів плити.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Величко І. Г. Осесиметрична мішана задача термoprужності для багатшарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Динамические системы. – 2009. – Вып. 26. – С. 3–12.