

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет "Запорізька політехніка"

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ
(частина 1)
для студентів інженерно-фізичного факультету
денної форми навчання

2022

Контрольні роботи з вищої математики та методичні вказівки до їх виконання (частина 1) для студентів інженерно-фізичного факультету денної форми навчання / Укл.: Н.В.Сніжко. – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2022. – 47 с.

Укладач: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Експерт спеціальності: О.В.Климов, доцент, к.т.н.

Рецензент: Л.М.Онуфрієнко, доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Рекомендовано до видання НМР
машинобудівного факультету
НУ "Запорізька політехніка"
Протокол № 5 від 12.04.2022

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
НУ "Запорізька політехніка"
Протокол № 7 від 17.03.2022

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Контрольна робота №1 (модуль 1)	6
1.1 Методичні вказівки до виконання контрольної роботи №1 (розв'язання типового варіанту).	6
1.2 Варіанти контрольної роботи №1	10
2 Контрольна робота №2 (модуль 2)	26
2.1 Методичні вказівки до виконання контрольної роботи №2 (розв'язання типового варіанту).	26
2.2 Варіанти контрольної роботи №2	31
Література	43
Додаток А. Таблиця похідних.	44
Додаток Б. Таблиця основних інтегралів	45
Додаток В. Розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій.	47

ВСТУП

Запропоновані завдання до контрольних роботи і методичні вказівки щодо їх виконання відповідають курсу „Вища математика”, який читається для студентів інженерно-фізичного факультету та факультету будівництва та архітектури денної форми навчання у першому семестрі двосеместрового курсу. Дана збірка задач також може використовуватись для студентів інших технічних спеціальностей, на яких вивчається вища математика в обсязі двосеместрового курсу.

Посібник містить завдання для двох модульних контрольних робіт та методичні вказівки до їх виконання (повністю розв'язані типові варіанти з усіма необхідними поясненнями). Кожна контрольна робота складена у тридцяти варіантах.

Контрольна робота №1 охоплює теми першого модуля вивчення курсу, а саме: визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, векторна алгебра, аналітична геометрія на площині та в просторі. Контрольна робота №2 охоплює теми другого модуля вивчення курсу, а саме: диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної, функції багатьох змінних, елементи теорії рядів.

В кінці наведено список рекомендованої літератури для підготовки. В нього включено авторські підручники, а також методичні посібники щодо виконання розрахунково-графічних задач, які виконуються студентами протягом семестру в якості домашньої самостійної роботи.

Студенти виконують кожну контрольну роботу в кінці вивчення відповідного модулю дисципліни. Контрольна робота виконується під час аудиторних занять, вона розрахована на дві академічні години.

Номер варіанту студент обирає за номером у списку в журналі. Робота виконується українською мовою в письмовій формі, бажано в зошиті у клітинку. Необхідно залишати поля для приміток. На титульному аркуші роботи потрібно вказати назву предмету, групу та курс, прізвище, ім'я та по батькові студента.

В контрольній роботі студент повинен розв'язати подані задачі методами, які розглядались на лекційних та практичних заняттях, а також зробити всі необхідні креслення (графічні розв'язки). При цьому студентові необхідно показати набуті теоретичні знання з курсу.

При оцінюванні контрольної роботи показником її якості є, перш за все, те, наскільки студент самостійно і правильно розв'язав поставлені задачі та зрозумів зміст отриманих розв'язків. Результати виконання контрольної роботи оформлюються відповідною кількістю рейтингових балів.

Після перевірки та оцінювання роботи проводиться аналіз розв'язків та їх обговорення. Таким чином, ці контрольні роботи є важливою складовою частиною самостійної аудиторної роботи студентів в рамках практичних занять; вони допомагають студентам оцінити свій поточний рівень знання матеріалу. Окрім того, для викладача ці роботи є методом діагностики та контролю засвоєння навчального матеріалу студентами.

Матеріали даного посібника можуть бути використані також для практичної ілюстрації теоретичних положень під час викладення лекційного матеріалу, при проведенні практичних занять, а також для проведення модульного контролю (його аудиторної частини).

1 КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1 (МОДУЛЬ 1)

1.1 Методичні вказівки до виконання контрольної роботи №1 (розв'язання типового варіанту)

Варіант 0

1. Знайти методом Крамера значення змінної z :

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 20 \\ 3x - y + z = 9 \end{cases}$$

2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(6;6;5)$, $M_2(4;9;5)$, $M_3(4;6;11)$, $M_4(6;9;3)$.

2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .

5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Розв'язання варіанту 0

1. Спочатку знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 - 20 - 12 + 2 - 10 = -27.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Для знаходження змінної z в даній матриці замінимо третій стовпець стовпцем вільних членів системи і обчислимо утворений визначник:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 20 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 120 - 155 - 93 + 20 - 90 = -189.$$

Значення змінної z знайдемо по правилу Крамера:

$$z = \frac{\Delta_{13}}{\Delta} = \frac{-189}{-27} = 7.$$

Відповідь: $z = 7$.

Зауваження. Якщо за умовою задачі необхідно знайти значення змінної x або y , то в даній матриці замінимо перший (відповідно другий) стовпець стовпцем вільних членів системи і обчислимо утворений визначник:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 20 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 31 + 36 - 80 - 36 + 62 - 40 = -27,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 20 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 20 + 186 + 180 - 240 - 18 - 155 = -27.$$

Значення змінної x або y знайдемо за правилом Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-27}{-27} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-27}{-27} = 1.$$

2. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{M_2M_3}$, $\overrightarrow{M_2M_4}$:

$$\overrightarrow{M_2M_3} = (4 - 4, 6 - 9, 11 - 5) = (0, -3, 6),$$

$$\overrightarrow{M_2M_4} = (6 - 4, 9 - 9, 3 - 5) = (2, 0, -2).$$

Для знаходження площі трикутника $M_2M_3M_4$ скористаємось формулою:

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{M_2 M_3} \times \overrightarrow{M_2 M_4} \right|.$$

Спочатку знайдемо векторний добуток:

$$\overrightarrow{M_2 M_3} \times \overrightarrow{M_2 M_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\vec{i} + 12\vec{j} + 0\vec{k} + 6\vec{k} - 0\vec{i} + 0\vec{j} = 6\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k} = (6; 12; 6).$$

Таким чином, одержуємо:

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{M_2 M_3} \times \overrightarrow{M_2 M_4} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 12^2 + 6^2} = 3\sqrt{6} \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $3\sqrt{6}$ кв.од.

3. Рівняння площини $M_1 M_2 M_3$ знайдемо як рівняння площини, що проходить через три задані точки, за наступною формулою:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Підставимо сюди координати точок M_1 , M_2 , M_3 :

$$\begin{vmatrix} x - 6 & y - 6 & z - 5 \\ 4 - 6 & 9 - 6 & 5 - 5 \\ 4 - 6 & 6 - 6 & 11 - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 6 & y - 6 & z - 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 18(x - 6) + 6(z - 5) + 12(y - 6) = 0.$$

Зводимо подібні в останньому рівнянні і одержуємо рівняння шуканої площини:

$$18x + 12y + 6z - 210 = 0$$

$$3x + 2y + z - 35 = 0.$$

Відповідь: $3x + 2y + z - 35 = 0$.

4. Рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 , знайдемо за формулою.

$$\frac{x - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_4 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_4 - z_1},$$

Маємо:

$$\frac{x - 6}{6 - 6} = \frac{y - 6}{9 - 6} = \frac{z - 5}{3 - 5},$$

$$\frac{x - 6}{0} = \frac{y - 6}{3} = \frac{z - 5}{-2}.$$

Відповідь: $\frac{x - 6}{0} = \frac{y - 6}{3} = \frac{z - 5}{-2}.$

5. Кут φ , який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 , може бути знайдений за формулою

$$\sin \varphi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|},$$

де $\vec{m}$ – напрямний вектор прямої, $\vec{n}$ – нормаль площини.

Напрямний вектор прямої, що проходить через точки M_1 , M_4 , – це вектор $\overrightarrow{M_1 M_4}$:

$$\vec{m} = \overrightarrow{M_1 M_4} = (6 - 6, 9 - 6, 3 - 5) = (0, 3, -2).$$

Рівняння площини $M_1 M_2 M_3$: $3x + 2y + z - 35 = 0$ (див. задачу 3). Тоді нормаль площини $\vec{n} = (3; 2; 1)$

Маємо:

$$\sin \varphi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{\frac{2}{91}}.$$

Тоді

$$\varphi = \arcsin 2\sqrt{\frac{2}{91}} \approx 17^\circ.$$

$$\text{Відповідь: } \arcsin 2\sqrt{\frac{2}{91}} \approx 17^\circ.$$

1.2 Варіанти контрольної роботи №1

Варіант 1

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x - 3y + z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(3; 4; 6)$, $M_2(3; -2; -3)$, $M_3(6; 3; 2)$, $M_4(5; 2; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 2

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ 4x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(2; 3; 0)$, $M_2(1; 2; 2)$, $M_3(-1; 0; -3)$, $M_4(-6; 1; 3)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 3

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -1 \\ -x - 3y + 4z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(3; 4; 2)$, $M_2(4; 5; 2)$, $M_3(7; 3; -2)$, $M_4(6; 1; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 4

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(5; 4; 3)$, $M_2(8; 1; 1)$, $M_3(4; 0; 5)$, $M_4(7; 4; 5)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 5

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 6z = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(-4; 3; -1)$, $M_2(3; 2; 2)$, $M_3(7; -1; 1)$, $M_4(2; 0; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 6

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(4; 6; 4)$, $M_2(6; 4; 0)$, $M_3(7; 5; 0)$, $M_4(4; 0; -5)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 7

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x - 3y + z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(3; 4; 6)$, $M_2(5; 2; 2)$, $M_3(6; 3; 2)$, $M_4(3; -2; -3)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 8

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ 4x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$
- 2,3,4,5. Дано чотири точки $M_1(2; 3; 0)$, $M_2(-6; 1; 3)$, $M_3(-1; 0; -3)$, $M_4(1; 2; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 9

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -1 \\ -x - 3y + 4z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(3; 4; 2)$, $M_2(6; 1; 2)$, $M_3(7; 3; -2)$, $M_4(4; 5; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 10

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(5; 4; 3)$, $M_2(7; 4; 5)$, $M_3(4; 0; 5)$, $M_4(8; 1; 1)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 11

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 6z = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(-4; 3; -1)$, $M_2(2; 0; 2)$, $M_3(7; -1; 1)$, $M_4(3; 2; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 12

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(4; 6; 4)$, $M_2(4; 0; -5)$, $M_3(7; 5; 0)$, $M_4(6; 4; 0)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 13

1. Знайти методом Крамера значення змінної z :
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x - 3y + z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(3; 4; 6)$, $M_2(3; -2; -3)$, $M_3(5; 2; 2)$, $M_4(6; 3; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 14

1. Знайти методом Крамера значення змінної z :
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ 4x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(2; 3; 0)$, $M_2(1; 2; 2)$, $M_3(-6; 1; 3)$, $M_4(-1; 0; -3)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 15

1. Знайти методом Крамера значення змінної z :
$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -1 \\ -x - 3y + 4z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(3; 4; 2)$, $M_2(4; 5; 2)$, $M_3(6; 1; 2)$, $M_4(7; 3; -2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 16

1. Знайти методом Крамера значення змінної z :
$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(3; 4; 2)$, $M_2(4; 5; 2)$, $M_3(7; 3; -2)$, $M_4(6; 1; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 17

1. Знайти методом Крамера значення змінної z :
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 6z = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(-4; 3; -1)$, $M_2(3; 2; 2)$, $M_3(2; 0; 2)$, $M_4(7; -1; 1)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 18

1. Знайти методом Крамера значення змінної z :
$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(4; 6; 4)$, $M_2(4; 0; -5)$, $M_3(6; 4; 0)$, $M_4(7; 5; 0)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 19

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x - 3y + z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(6; 3; 2)$, $M_2(3; -2; -3)$, $M_3(3; 4; 6)$, $M_4(5; 2; 2)$
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 20

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ 4x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(-1; 0; -3)$, $M_2(1; 2; 2)$, $M_3(2; 3; 0)$, $M_4(-6; 1; 3)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 21

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -1 \\ -x - 3y + 4z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(7;3;-2)$, $M_2(4;5;2)$, $M_3(3;4;2)$, $M_4(6;1;2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 22

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(4;0;5)$, $M_2(8;1;1)$, $M_3(5;4;3)$, $M_4(7;4;5)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 23

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 6z = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(7; -1; 1)$, $M_2(3; 2; 2)$, $M_3(-4; 3; -1)$, $M_4(2; 0; 2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 24

1. Знайти методом Крамера значення змінної x :
$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(7; 5; 0)$, $M_2(6; 4; 0)$, $M_3(4; 6; 4)$, $M_4(4; 0; -5)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 25

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x - 3y + z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(5; 2; 2)$, $M_2(3; -2; -3)$, $M_3(6; 3; 2)$, $M_4(3; 4; 6)$
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 26

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ 4x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(-6; 1; 3)$, $M_2(1; 2; 2)$, $M_3(-1; 0; -3)$, $M_4(2; 3; 0)$..
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 27

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -1 \\ -x - 3y + 4z = -4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(6;1;2)$, $M_2(4;5;2)$, $M_3(7;3;-2)$, $M_4(3;4;2)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 28

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(7;4;5)$, $M_2(8;1;1)$, $M_3(4;0;5)$, $M_4(5;4;3)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 29

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 6z = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(2;0;2)$, $M_2(3;2;2)$, $M_3(7;-1;1)$, $M_4(-4;3;-1)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

Варіант 30

1. Знайти методом Крамера значення змінної y :
$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$
- 2, 3, 4, 5. Дано чотири точки $M_1(4;0;-5)$, $M_2(6;4;0)$, $M_3(7;5;0)$, $M_4(4;6;4)$.
2. Використовуючи векторну алгебру, обчислити площу трикутника $M_2M_3M_4$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .
4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 , M_4 .
5. Знайти кут, який утворює пряма, що проходить через точки M_1 , M_4 , з площиною, що проходить через точки M_1 , M_2 , M_3 .

2. КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2 (МОДУЛЬ 2)

2.1 Методичні вказівки до виконання контрольної роботи №2 (розв'язання типового варіанту)

Варіант 0

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 10x - 7}{7x^2 - x + 11}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = \frac{x^3}{(x-3)^2}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = x^3 + \frac{3}{2}y^2 + 3xy - 12x - 6y + 17$.

5. Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{5}{2-9x}$.

Розв'язання варіанту 0

1. При $x \rightarrow \infty$ чисельник та знаменник дробу прямують до нескінченності, тобто маємо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Для того, щоб розкрити цю невизначеність, поділимо чисельник та знаменник дробу, який стоїть під знаком границі, на старший степінь змінної x , тобто на x^2 . Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 10x - 7}{7x^2 - x + 11} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{10x}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{11}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{10}{x} - \frac{7}{x^2}}{7 - \frac{1}{x} + \frac{11}{x^2}} = \frac{4 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{4}{7}.$$

Відповідь: $\frac{4}{7}$.

2. Область визначення функції $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Знайдемо похідну функції:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3}{(x-3)^2} \right)' = \frac{(x^3)'(x-3)^2 - x^3((x-3)^2)'}{((x-3)^2)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x-3)^2 - x^3 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{x^2(x-3)(3(x-3) - 2x)}{(x-3)^4} = \frac{x^2(x-9)}{(x-3)^3}. \end{aligned}$$

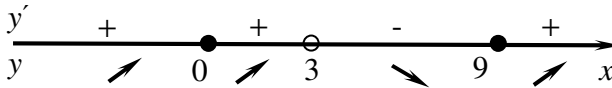
Знайдемо критичні точки функції:

$y'(x) = 0$, якщо $x^2(x-9) = 0$, тобто $x_1 = 0$, $x_2 = 9$;

$y'(x)$ не існує, якщо $(x-3)^3 = 0$, тобто $x-3 = 0$, $x_3 = 3$.

Отже, маємо три критичні точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, $x_3 = 3$.

Визначимо знаки y' на кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції.



Інтервали монотонності:

$y' > 0$ при $x \in (-\infty; 3) \cup (9; +\infty)$, тому задана функція на цих інтервалах зростає;

$y' < 0$ при $x \in (3; 9)$, тому задана функція спадає на цьому інтервалі.

Точки екстремуму:

$x = 9$ – точка локального мінімуму; $y_{\min} = y(9) = \frac{9^3}{(9-3)^2} = 20,25$.

Відповідь: інтервали зростання $x \in (-\infty; 3) \cup (9; +\infty)$;

інтервал спадання $x \in (3; 9)$;

$x = 9$ – точка локального мінімуму.

3. Зобразимо дані криві в одній декартовій системі координат (рис. 2.1).

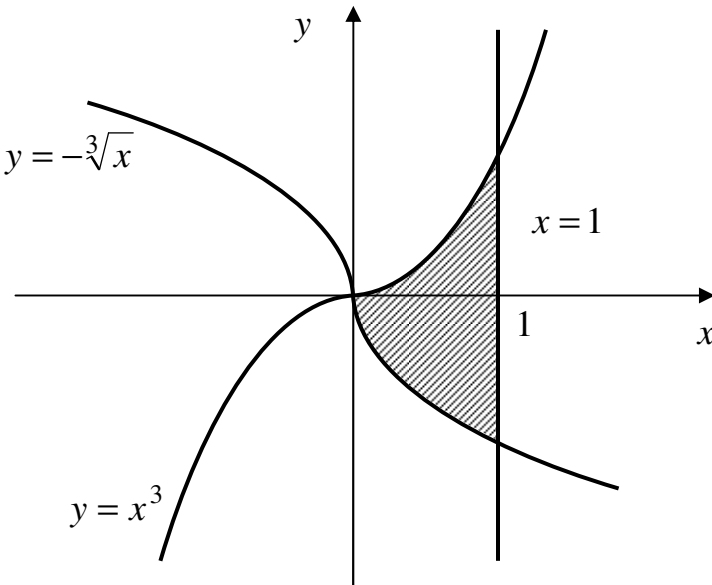


Рисунок 2.1

Площу фігури, обмежену даними лініями, знайдемо за наступною формулою:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

У нас $f(x) = x^3$ (крива, яка обмежує область зверху), $g(x) = -\sqrt[3]{x}$ (крива, яка обмежує область знизу), $a = 0$, $b = 1$ (межі зміни x).
Маємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^3 - (-\sqrt[3]{x})) dx = \int_0^1 \left(x^3 + x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right) \bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 0 = 1 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: 1 кв. од.

4. Знаходимо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 12, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y + 3x - 6.$$

Знаходимо стаціонарні точки заданої функції з системи:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y - 12 = 0 \\ 3y + 3x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 4 \\ y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 4 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (2 - x) = 4 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Отримали дві стаціонарні точки: $M_1(-1; 3)$ та $M_2(2; 0)$.

Знаходимо похідні другого порядку A , B , C та дискримінант Δ для заданої функції:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3,$$

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = 18x - 9.$$

$\Delta(M_1) = 18 \cdot (-1) - 9 = -27 < 0$, тому в точці $M_1(-1; 3)$ екстремуму немає.

$\Delta(M_2) = 18 \cdot 2 - 9 = 27 > 0$. Оскільки $A(M_2) = 12 > 0$, то точка $M_2(2; 0)$ є точкою локального мінімуму:

$$z_{\min} = z(2; 0) = 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0 - 12 \cdot 2 - 6 \cdot 0 + 17 = 1.$$

Відповідь: $z_{\min} = z(2; 0) = 1$.

5. Запишемо задану функцію у вигляді

$$f(x) = \frac{5}{2-9x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{9x}{2}}.$$

У відомому ряді Маклорена (див. [5], додаток Д)

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1; 1),$$

покладемо $t = \frac{9x}{2}$, отримаємо

$$\frac{1}{1-\frac{9x}{2}} = 1 + \frac{9x}{2} + \left(\frac{9x}{2}\right)^2 + \left(\frac{9x}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{9x}{2}\right)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{2^n} x^n.$$

Остаточно маємо:

$$f(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{9x}{2}} = \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{2^n} x^n.$$

Знайдемо область збіжності заданого ряду. Область збіжності ряду $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ $t \in (-1; 1)$, тобто $|t| < 1$. Для заданого ряду $t = \frac{9x}{2}$, тому $\left| \frac{9x}{2} \right| < 1$, $|x| < \frac{2}{9}$, тобто $x \in \left(-\frac{2}{9}; \frac{2}{9} \right)$.

Відповідь: $f(x) = \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{2^n} x^n$; $x \in \left(-\frac{2}{9}; \frac{2}{9} \right)$.

2.2 Варіанти контрольної роботи №2

Варіант 1

- Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 15x + 3}{2x^2 + 25x - 3}$.
- Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 2x + \frac{50}{x}$.
- Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x$.
- Знайти екстремуми функції:
 $z = 5x^2 - 5xy + 5y^2 - 25x - 25y + 130$.
- Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{4+x}$.

Варіант 2

- Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + x^2 + x}{x^4 - 5x - 2}$.
- Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 9x + \frac{36}{x}$.
- Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 + 2$, $y = 4 - x$.
- Знайти екстремуми функції: $z = 4x^2 - 4xy + 4y^2 - 16x - 16y + 68$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{5+x}$.

Варіант 3

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 9x + 3}{x^2 - 3x + 4}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 5x + \frac{20}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 + 3$, $y = 5 - x$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 10x + 20y - 70$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{3+x}$.

Варіант 4

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 4x + \frac{16}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 + 4$, $y = 6 - x$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 8x + 16y - 44$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{2+x}$.

Варіант 5

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3 - x^2 + 10}{10x^3 + 5x + 1}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 3x + \frac{48}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 + 1$, $y = 3 + x$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = 3x^2 - 3xy + 3y^2 - 9x - 9y + 30$.

5. Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{4-x}$.

Варіант 6

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 2x + \frac{32}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 + 2$, $y = 4 + x$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 6x + 12y - 24$.

5. Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{5-x}$.

Варіант 7

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x + 1}{6x^4 - x^3 + 2x}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 3x + \frac{27}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 + 3$, $y = 5 + x$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 10$.

5. Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{3-x}$.

Варіант 8

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 2x + \frac{18}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 + 4$, $y = 6 + x$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 4x + 8y - 10$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{2 + 3x}$.

Варіант 9

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x - 7}{5x^2 + 3x + 1}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 3x + \frac{12}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = x^2 - xy + y^2 - x - y + 2$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{2 - x}$.

Варіант 10

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 2}{3x^3 - x - 4}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = 2x + \frac{8}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 - 2$, $y = -x$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = x^2 - 2y^2 + 2x + 4y - 2$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{3+2x}$.

Варіант 11

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 2}{3x^3 - x - 4}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = x + \frac{4}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 - 3$, $y = -1 - x$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 12x + 24y - 102$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{4+2x}$.

Варіант 12

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 12x^2 + 2}{3x^4 + 8x - 3}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = x + \frac{9}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 - 4$, $y = -2 - x$.

4. Знайти екстремуми функції:
 $z = 6x^2 - 6xy + 6y^2 - 36x - 36y + 222$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{5+2x}$.

Варіант 13

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x - 5}{2x^2 - 3x + 2}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = x + \frac{16}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 - 1$, $y = 1 + x$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 14x + 28y - 140$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

Варіант 14

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - x^2 + 5}{4x^4 + 1}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = x + \frac{25}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 - 2$, $y = x$.

4. Знайти екстремуми функції:
 $z = 7x^2 - 7xy + 7y^2 - 49x - 49y + 350$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{3-2x}$.

Варіант 15

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 + 3x + 1}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = x + \frac{36}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 - 3$, $y = x - 1$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 16x + 32y - 184$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{4-2x}$.

Варіант 16

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 14x}{10x^3 + 3x^3 + x - 1}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -2x - \frac{50}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = x^2 - 4$, $y = x - 2$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = 8x^2 - 8xy + 8y^2 - 64x - 64y + 520$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{5 - 2x}$.

Варіант 17

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - x^2 + 4x}{7x^3 + 5}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -9x - \frac{36}{x}$.
- 3 Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 - 1$, $y = x - 3$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 18x + 36y - 234$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{2 + 4x}$.

Варіант 18

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -5x - \frac{20}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 - 2$, $y = x - 4$.

4. Знайти екстремуми функції:

$$z = 9x^2 - 9xy + 9y^2 - 81x - 81y + 738.$$

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{3+4x}.$

Варіант 19

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x}{10x^3 - x^2 + 5}.$

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -4x - \frac{16}{x}.$

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 - 3, \quad y = x - 5.$

4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 20x + 40y - 290.$

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{4+3x}.$

Варіант 20

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}.$

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -3x - \frac{48}{x}.$

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 - 4, \quad y = x - 6.$

4. Знайти екстремуми функції:

$$z = 10x^2 - 10xy + 10y^2 - 100x - 100y + 1010.$$

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{5+3x}.$

Варіант 21

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^3 + x}{2x^3 - 3x + 2}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -2x - \frac{32}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 + 1$, $y = x - 1$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 22x + 44y - 352$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{3 - 4x}$.

Варіант 22

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 4x - 2x^4}{x + 3x^2 + 6x^4}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -3x - \frac{27}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 + 2$, $y = x$.
4. Знайти екстремуми функції:
 $z = 11x^2 - 11xy + 11y^2 - 121x - 121y + 1342$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{4 - 3x}$.

Варіант 23

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -2x - \frac{18}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 + 3$, $y = x + 1$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 24x + 48y - 420$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{2-4x}$.

Варіант 24

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 14x^2}{1 + x + 2x^2}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -3x - \frac{12}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 + 4$, $y = x + 2$.

4. Знайти екстремуми функції:

$$z = 12x^2 - 12xy + 12y^2 - 144x - 144y + 1740.$$

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{5-3x}$.

Варіант 25

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$.

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -2x - \frac{8}{x}$.

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 - 1$, $y = -x - 3$.

4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 26x + 52y - 494$.

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{2+5x}$.

Варіант 26

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - x^2 - 7}{8x^4 + x + 5}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -x - \frac{36}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 - 2$, $y = -x - 4$.
4. Знайти екстремуми функції:
 $z = 13x^2 - 13xy + 13y^2 - 169x - 169y + 2210$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{2 - 5x}$.

Варіант 27

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - 5x^2 - 5x^5}{x^5 + 6x + 8}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -x - \frac{25}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 - 3$, $y = -x - 5$.
4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 28x + 56y - 574$.
- 5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область збіжності: $f(x) = \frac{1}{3 + 5x}$.

Варіант 28

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 8x^2 + 3}{5 + 2x - x^3}$.
2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -x - \frac{16}{x}$.
3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 + 1$, $y = -x - 1$.

4. Знайти екстремуми функції:

$$z = 14x^2 - 14xy + 14y^2 - 196x - 196y + 2758.$$

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{3-5x}.$

Варіант 29

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{x^3 + 5x^2 + 2}.$

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -x - \frac{9}{x}.$

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 + 2, \quad y = -x.$

4. Знайти екстремуми функції: $z = -x^2 - 2y^2 + 30x + 60y - 660.$

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{4+5x}.$

Варіант 30

1. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}.$

2. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми: $y = -x - \frac{4}{x}.$

3. Обчислити площу, обмежену лініями: $y = -x^2 + 3, \quad y = -x + 1.$

4. Знайти екстремуми функції:

$$z = 15x^2 - 15xy + 15y^2 - 225x - 225y + 3390.$$

5 Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати його область

збіжності: $f(x) = \frac{1}{4-5x}.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Анпілогов, Д.І. Диференціальне числення [Текст]: навч. посібник / Д.І.Анпілогов, Н.В.Сніжко. – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2021. – 308 с.
2. Анпілогов, Д.І. Інтегральне числення [Текст]: навч. посібник / Д.І.Анпілогов, Н.В.Сніжко. – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2021. – 254 с.
3. Анпілогов, Д.І. Ряди [Текст]: навч. посібник / Д.І.Анпілогов, Н.В.Сніжко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 124 с.
4. Розрахунково-графічні завдання з вищої математики (частина 1) для студентів інженерно-фізичного та транспортного факультетів усіх форм навчання / Укл.: В.М.Онуфрієнко, Н.В.Сніжко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018 – 46 с.
5. Практикум з вищої математики (частина 1) для студентів інженерно- фізичного факультету денної форми навчання / Укл.: Н.В.Сніжко, Н.М.Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 74 с.

Додаток А
Таблиця похідних

В таблиці $u = u(x)$ – дифенційовна функція

1. $(C)' = 0, C = const$;	11. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
2. $(x)' = 1$;	12. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;	13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;	14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
5. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a = const$;	15. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;	16. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;	17. $(shu)' = chu \cdot u'$;
8. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;	18. $(chu)' = shu \cdot u'$;
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;	19. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;	20. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.

Додаток Б
Таблиця основних інтегралів

В таблиці $u = u(x)$ – диференційовна функція

1. $\int du = u + C ;$	13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C ;$
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C ,$ $\alpha \neq -1 ;$	14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C ;$
3. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C ;$	15. $\int shu du = chu + C ;$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C ;$	16. $\int chu du = shu + C ;$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C ;$	17. $\int \frac{du}{ch^2 u} = th u + C ;$
6. $\int e^u du = e^u + C ;$	18. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth u + C ;$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C ;$	19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C ;$
8. $\int \cos u du = \sin u + C ;$	20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C ;$
9. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C ;$	21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} =$ $= \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C ;$

10. $\int ctgu \, du = \ln \sin u + C ;$	22. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C ;$
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg \, u + C ;$	23. $\int \sqrt{a^2 - u^2} \, du =$ $= \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} +$ $+ \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C ;$
12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg \, u + C ;$	24. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} \, du =$ $= \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \frac{1}{2} a^2 \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C .$

Додаток В

Розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty),$$

$$3. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty),$$

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

$$x \in (-1; 1),$$

$$5. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in \begin{cases} [-1; 1], \alpha \geq 0, \\ (-1; 1], -1 < \alpha < 0, \alpha \in R; \\ (-1, 1), \alpha \leq -1. \end{cases}$$

$$6. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1),$$

$$7. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1).$$