УДК 539.374.001.8

В.В. Чигиринский, д-р техн.наук, проф., А.М. Бень, асп., К.О. Діброва, маг.
Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя, Україна

РЕАЛЬНЕ ПЛАСТИЧНЕ СЕРЕДОВИЩЕ В УМОВАХ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Предложена технология изготовления детали „седло" методом холодного вытягивания с предварительно профилированных заготовок с последующими пробивкой отверстия и отбортовкой. Методом конечных элементов проведено математическое моделирование холодной вытяжки с предварительно профилированной листовой заготовки из стали 08кп, определены силовые параметры процесса, конечные размеры изделия, напряженно-деформированное состояние заготовки. Спроектирована штамповая оснастка для реализации процесса в производстве.

The technology for manufacturing of detail "saddle" by cold drawing from previously shaped sheet blanks with subsequent hole punching and flanging is proposed. The mathematical modeling of cold drawing from previously shaped sheet blank made from steel 08 is carried out by finite element method. Load parameters of process, final dimensions of detail, mode of deformation of deformed blank were determined. Die tooling for the realization of process in production was developed.

Вступ. При вивченні напруженого стану пластичного середовища часто обмежуються визначенням безмірних значень напруженого стану, наприклад, відношенням нормального напруження до межі плинності. При цьому розподіл реальної границі плинності по осередку не досліджується, що багато в чому обмежує можливості розрахунку. Нині використовуються методи для визначення середньої межі плинності в зоні деформування.

Постановка задачі. В роботі [1] аналітично визначено математичну модель пластичного середовища з використанням замкненого рішення плоскої задачі теорії пластичності. Поля напружень, деформацій, швидкостей деформацій і температур описуються однаковими координатними функціями, що дозволяє зв'язати кінематичні параметри процесу із силовими.

Покажемо можливості методу гармонійних функцій для визначення напруженого стану пластичного середовища з урахуванням багатофакторної аналітичної залежності компонентів тензору напружень.

Постановка задачі включає:

- рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho}+\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_z}{\rho}=0,\ \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{z\rho}}{\rho}=0 \qquad (1.а)$$

- умова пластичності

$$(\sigma_\rho-\sigma_z)^2+4\cdot\tau_{z\rho}{}^2=4\cdot k^2 \qquad (1.б)$$

- рівняння зв'язку напружень та деформацій, швидкостей деформацій

$$\frac{\sigma_\rho-\sigma_z}{2\cdot\tau_{\rho z}}=\frac{\varepsilon_\rho-\varepsilon_z}{\gamma_{\rho z}}=F_1,\ \frac{\sigma_\rho-\sigma_z}{2\cdot\tau_{\rho z}}=\frac{\xi_\rho-\xi_z}{\gamma'_{\rho z}}=F_2 \qquad (1.в)$$

- рівняння нестисливості для деформацій та швидкостей деформацій

$$\varepsilon_\rho+\varepsilon_z=0,\ \xi_\rho+\xi_z=0 \qquad (1.г)$$

- рівняння нерозривності деформацій та швидкостей деформацій

$$\frac{\partial^2\varepsilon_\rho}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial \rho^2}=\frac{\partial^2\gamma_{\rho z}}{\partial z\partial\rho},\ \frac{\partial^2\xi_\rho}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\xi_z}{\partial \rho^2}=\frac{\partial^2\gamma'_{\rho z}}{\partial z\partial\rho} \qquad (1.д)$$

- рівняння теплопровідності для стаціонарної задачі

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \qquad (1.е)$$

Граничні умови приймаються у вигляді [2]

$$\tau_n=-k\cdot\sin\left(A\Phi-2\cdot\alpha\right) \qquad (2)$$

Математична модель складного пластичного середовища

$$k=C_\sigma\cdot(H_i)^{m_1}\cdot(\Gamma_i)^{m_2}\cdot\left(T'\right)^{m_3}\cdot\exp\left(\theta'_4\right) \qquad (3)$$

Рішення задачі. Після перетворень виразів (1.а), (1.б) маємо узагальнене рівняння рівноваги в циліндричних координатах [1]:

© В.В. Чигиринский, А.М. Бень, К.О. Діброва, 2011

$$\frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial z^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \cdot \sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \tag{4}$$

Для задоволення граничних умов (2) треба мати [3]

$$\tau_{\rho z} = k \cdot sin A\Phi \tag{5}$$

Опір пластичному деформуванню k розглядається як змінна функція осередку деформації [3]:

$$k = C_\sigma \cdot \exp\theta \tag{6}$$

де $A\Phi$ і θ - функції координат осередку деформації ρ і z, які необхідно ще визначити.

Підставляючи (6) в рівняння (4), з урахуванням (5), отримаємо:

$$\sin A\Phi \cdot \left[\left(A\Phi_z + \theta_\rho \right)^2 - \left(A\Phi_\rho - \theta_z \right)^2 + \theta_{\rho\rho} - \theta_{zz} + 2A\Phi_{\rho z} \right] +$$
$$+ \cos A\Phi \cdot \left[2\left(A\Phi_\rho - \theta_z \right) \cdot \left(A\Phi_z + \theta_\rho \right) + A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz} - 2\theta_{\rho z} \right] = 0 \tag{7}$$

Оператори у квадратних дужках при тригонометричних функціях мають однакові вирази $\left(A\Phi_z + \theta_\rho \right)$ та $\left(A\Phi_\rho - \theta_z \right)$. Прирівнюючи їх до нуля, отримуємо співвідношення Коші - Рімана, які перетворюють рівняння (7) в тотожність. При цьому

$$\theta_\rho = -A\Phi_z, \; \theta_z = A\Phi_\rho \tag{8}$$

Можна показати, що функції θ і $A\Phi$ є гармонійними і задовольняють рівняння Лапласа:

$$\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} = 0, \; A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} = 0 \tag{9}$$

Вирішуючи рівняння (1. *д*) з урахуванням (1. *г*) та (1. *в*) для швидкостей деформацій та деформацій маємо:

$$\xi_\rho = -\xi_z = C_\xi \cdot exp\theta_1'' \cdot \cos B_1\Phi = C_\xi \cdot exp\left(-B_1\theta\right) \cdot \cos B_1\Phi$$

$$\gamma_{\rho z}' = C_\xi \cdot \exp\theta_1'' \cdot \sin B_1\Phi = C_\xi \cdot \exp(-B_1\theta) \cdot \sin B_1\Phi \tag{10}$$

$$H_i = 2 \cdot C_\xi \cdot \exp\theta_1'' = 2 \cdot C_\xi \cdot \exp(-B_1\theta)$$

$$\varepsilon_\rho = -\varepsilon_z = C_\varepsilon \cdot exp\theta_2'' \cdot \cos B_2\Phi = C_\varepsilon \cdot exp\left(-B_2\theta\right) \cdot \cos B_2\Phi$$

$$\gamma_{\rho z} = C_\varepsilon \cdot \exp\theta_2'' \cdot \sin B_2\Phi = C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2\theta) \cdot \sin B_2\Phi \tag{11}$$

$$\Gamma_i = 2 \cdot C_\varepsilon \cdot \exp\theta_2'' = 2 \cdot C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2\theta)$$

Перетворюючи рівняння (1.*в*) - (1. *д*), отримаємо два рівняння другого порядку в частинних похідних, неоднорідних, гіперболічного типу:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \rho^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \varepsilon_\rho, \; \frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial \rho^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \cdot \frac{1}{F_2} \cdot \xi_\rho \tag{12}$$

Підставляючи залежності (10), (11) в рівняння (12), отримаємо:

$$\cos B_1\Phi \cdot \left[-\left(B_1\Phi_z + \theta_{1\rho}'' \right)^2 + \left(B_1\Phi_\rho - \theta_{1z}'' \right)^2 + \theta_{1zz}'' - \theta_{1\rho\rho}'' - 2 \cdot B_1\Phi_{\rho z} \right] +$$
$$+ \sin B_1\Phi \left[2 \cdot \left(B_1\Phi_z + \theta_{1\rho}'' \right) \cdot \left(B_1\Phi_\rho - \theta_{1z}'' \right) + B_1\Phi_{\rho\rho} - B_1\Phi_{zz} - 2 \cdot \theta_{1\rho z}'' \right] = 0$$

Аналогічно для деформацій:

$$\cos B_2\Phi \cdot \left[-\left(B_2\Phi_z + \theta_{2\rho}'' \right)^2 + \left(B_2\Phi_\rho - \theta_{2z}'' \right)^2 + \theta_{2zz}'' - \theta_{2\rho\rho}'' - 2 \cdot B_2\Phi_{\rho z} \right] +$$
$$+ \sin B_2\Phi \left[2 \cdot \left(B_2\Phi_z + \theta_{2\rho}'' \right) \cdot \left(B_2\Phi_\rho - \theta_{2z}'' \right) + B_2\Phi_{\rho\rho} - B_2\Phi_{zz} - 2 \cdot \theta_{2\rho z}'' \right] = 0$$

Функції θ_1'' і $B_1\Phi$ та функції θ_2'' і $B_2\Phi$ також гармонічні і відповідають співвідношенням Коші – Рімана [2]:

$$(\theta_1'')_\rho = -B_1\Phi_z, \; (\theta_1'')_z = -B_1\Phi_\rho, \; (\theta_2'')_\rho = -B_2\Phi_z, \; (\theta_2'')_z = B_2\Phi_\rho$$

Рішення температурної задачі може визначатися вказаними вище залежностями:

$$T = \exp\left(\theta_3''\right)\cdot\left(C_T'\cdot\sin B_3\Phi + C_T''\cdot\cos B_3\Phi\right) \tag{13}$$

Дійсно, підставляючи похідні (13) в рівняння теплопровідності (1.е), після спрощень отримаємо диференціальне рівняння:

$$\left(C_T'\cdot\sin B_3\Phi + C_T''\cdot\cos B_3\Phi\right)\cdot\left[\left(\theta_3''\right)_\rho^2 + \left(\theta_3''\right)_{\rho\rho}^2 - B_3\Phi_\rho^2 + \left(\theta_3''\right)_z^2 + \left(\theta_3''\right)_{zz}^2 - B_3\Phi_z^2\right] +$$

$$+\left(C_T'\cdot\cos B_3\Phi - C_T''\cdot\sin B_3\Phi\right)\cdot\left[2\cdot\left(\theta_3''\right)_\rho\cdot B_3\Phi_\rho + B_3\Phi_{\rho\rho} + 2\cdot\left(\theta_3''\right)_z\cdot B_3\Phi_z + B_3\Phi_{zz}\right] = 0$$

яке перетворюється на тотожність за умови

$$\left(\theta_3''\right)_\rho = -B_3\Phi_z\,,\ \left(\theta_3''\right)_z = -B_3\Phi_\rho \tag{14}$$

Вирази (14) відповідають співвідношенню Коші – Рімана. Отже, прийняті до розгляду функції гармонічні і в температурних залежностях присутні ті ж змінні, що і для напружень, швидкостей деформацій та деформацій. Для температурної задачі $\theta_3'' = -B_3\theta$.

Аналіз отриманих результатів. Інтенсивності і температура параметрично задаються від однакових координатних функцій. Деформаційні параметри і температуру виразимо математично через єдину залежність. Таким чином:

$$\exp(-\theta) = \left(\frac{H_i}{2\cdot C_\xi}\right)^{\frac{1}{B_1}} = \left(\frac{\Gamma_i}{2\cdot C_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{B_2}} = \left(\frac{T}{C_T\cdot(\sin B_3\Phi + \cos B_3\Phi)}\right)^{\frac{1}{B_3}} \tag{15}$$

Опір пластичному деформуванню k можна представити у вигляді:

$$k = C_\sigma\cdot\exp\theta = C_\sigma\cdot\exp\theta_1'\cdot\exp\theta_2'\cdot\exp\theta_3'\cdot\exp\theta_4'\cdot\exp\theta_5' = C_\sigma\cdot\exp\left(-A\theta'\right) \tag{16}$$

$$\theta = \theta_1' + \theta_2' + \theta_3' + \theta_4' + \theta_5' = -A\theta' = -\left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5\right)\theta'$$

Звідси, вираз для k отримаємо після спрощень

$$k = C_\sigma\cdot\left(H_i\right)^{\frac{A_1'}{B_1}}\cdot\left(\Gamma_i\right)^{\frac{A_2'}{B_2}}\cdot\left(T'\right)^{\frac{A_3'}{B_3}}\cdot\exp\left(\theta_4'\right)\cdot\exp\left(\theta_5'\right),$$

де C_σ - постійна величина. При цьому

$$m_1 = \frac{A_1'}{B_1}\,,\ m_2 = \frac{A_2'}{B_2}\,,\ m_3 = \frac{A_3'}{B_3}$$

Маємо $k = C_\sigma\cdot\left(H_i\right)^{m_1}\cdot\left(\Gamma_i\right)^{m_2}\cdot\left(T'\right)^{m_3}\cdot\exp\left(\theta_4'\right)\cdot\exp\left(\theta_5'\right)$.

Вираз отримано аналітично і фактично він співпадає з (3). Значення H_i, Γ_i, T, що входять у (3), приймаються для кожної точки осередку деформації і є змінними величинами. У літературі відомі аналогічні моделі, але отримані на підставі експериментальних досліджень в умовах однорідного напруженого й деформованого станів [4]. Для різних марок сталі границя текучості σ_T залежно від інтегральних параметрів: швидкості деформації U, степені деформації ε, температури T, має вигляд:

$$\sigma_T = S\cdot\sigma_o\cdot U^a\cdot\left(10\cdot\varepsilon\right)^b\cdot\left(\frac{T_0}{1000}\right)^c \tag{17}$$

Із граничних умов можна одержати

$$C_\sigma = \frac{k_0}{\exp\theta_0\cdot\cos A\Phi_0}$$

З урахуванням всіх змін запишемо для k

$$k = \frac{S\cdot\sigma_o}{\sqrt{3}\cdot\exp\theta_0\cdot cosA\Phi_0}\cdot\left(U\cdot\alpha_\xi\right)^a\cdot\left(10\cdot\varepsilon\cdot\alpha_\varepsilon\right)^b\cdot\left(\frac{T}{1000}\cdot\alpha_T\right)^c\cdot\exp\left(\theta_4'\right)\cdot\exp\left(\theta_5'\right) \tag{18}$$

$$\alpha_\xi = \frac{\exp(-\theta_1'')}{I_1}\,,\ \alpha_\varepsilon = \frac{\exp(-\theta_2'')}{I_2}\,,\ \alpha_T = \frac{\exp(-\theta_3'')}{I_3}\,,$$

де I_1, I_2, I_3 - відповідні інтеграли по об'єму експонент.

Перетворимо останній вираз

$$\left(\frac{T}{1000}\cdot\alpha_T\right)^c\cdot\exp\left(\theta_5'\right)=\left(\frac{T}{1000}\right)^c\cdot\left(\frac{\exp\left(-\theta_3''\right)}{I_3}\right)\cdot\exp\left(\theta_5'\right)$$

Аналіз показує, що в першому наближенні можна прийняти

$$\left(\frac{\exp\left(-\theta_3''\right)}{I_3}\right)\cdot\exp\left(\theta_5'\right)=\exp\left(-\theta_3'\right)$$

Тоді остання складова функції запишеться

$$\left(\frac{T}{1000}\right)^c\cdot\left(\frac{\exp\left(-\theta_3'\right)}{I_3}\right)\cdot\exp\left(\theta_5'\right)=\left(\frac{T}{1000}\right)^c\cdot\alpha_T$$

Отримаємо (18) у вигляді

$$k=\frac{S\cdot\sigma_o}{\sqrt{3}\cdot\exp\theta_0\cdot cosA\Phi_0}\cdot\left(U\cdot\alpha_\xi\right)^a\cdot\left(10\cdot\varepsilon\cdot\alpha_\varepsilon\right)^b\cdot\left(\frac{T}{1000}\cdot\alpha_T\right)^c\cdot\alpha_T\cdot\exp\left(\theta_4'\right) \tag{19}$$

Використовуючи вираз (19), з рівнянь рівноваги можна одержати формули для визначення нормальних напружень σ_ρ і σ_z, дійсно

$$\sigma_\rho=k'\cdot\exp\left(\theta_4'\right)\cdot\cos A\Phi+C_\sigma\cdot\frac{1}{\rho}\cdot I_3+\sigma_0+f(z)+C \tag{20}$$

$$\sigma_z=-k'\cdot\exp\left(\theta_4'\right)\cdot\cos A\Phi+C_\sigma\cdot\frac{1}{\rho}\cdot I_4+\sigma_0+f(\rho)+C$$

$$\tau_{\rho z}=k'\cdot\exp\left(\theta_4'\right)\cdot\sin A\Phi,$$

де $k'=\frac{S\cdot\sigma_o}{\sqrt{3}\cdot\exp\theta_0\cdot cosA\Phi_0}\cdot\left(U\cdot\alpha_\xi\right)^a\cdot\left(10\cdot\varepsilon\cdot\alpha_\varepsilon\right)^b\cdot\left(\frac{T}{1000}\cdot\alpha_T\right)^c\cdot\alpha_T$

Слід зазначити, що співвідношення Коші - Рімана визначають тип функцій θ і $A\Phi$, які є гармонічними та задовольняють рівнянню Лапласа. У цьому випадку маємо

$$A\Phi=AA_6\cdot\rho\cdot z,\ \theta'=-\frac{1}{2}\cdot AA_6\cdot\left(\rho^2-z^2\right) \tag{21}$$

З умови пластичності й граничних умов можна одержати

$$\sigma_0=-2\cdot C_\sigma\cdot\exp\theta\cdot\cos A\Phi-C_\sigma\cdot\frac{1}{\rho}\cdot I_3,\ f(x)=f(y)=0$$

Підставляючи граничні умови для контактного тертя

$$AA_6=\frac{2\cdot A\Phi_0}{R\cdot h},\ A\Phi_0=arctg\left[f\cdot\left(1-f\right)\right],\ \theta_0=-\frac{1}{2}AA_6\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)$$

Постійна AA_6 залежить від коефіцієнта тертя f, який входить до аргументу тригонометричної функції $A\Phi$ і до показника експоненти θ. Отже, припущення про однорідність пластичної деформації при відсутності тертя підтверджується.

Використання останніх залежностей дозволяє вирішити багатофакторну задачу і досліджувати напруги в об'ємі і на контакті залежно від різних технологічних чинників, включаючи коефіцієнт тертя, фактор форми, хімічний склад, температуру, степінь і швидкість деформації.

На наведених графіках показано вплив коефіцієнту тертя (рис. 1-2), температури на значення напружень (рис. 3-4). Визначено, що зі збільшенням температури напруження зменшуються. Зміна ступеня деформації також впливає на зміну напружень - зі збільшенням ступеня деформації збільшуються і напруження (рис. 5-6).

Значне збільшення напружень відбувається при збільшенні швидкості деформації (рис. 7-8). Розглянуто розподіл нормальних напружень для різних марок сталі (рис. 11-12). Значення S, σ, m_1, m_2, m_3 були взяті із [4].

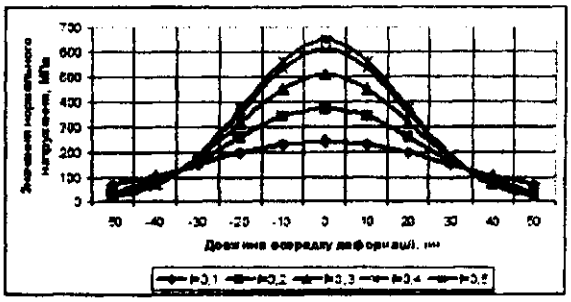

Рис. 1. Значення нормального напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях коефіцієнта тертя
$T = 1100$, $U = 8$, $d/h = 10$, $\varepsilon = 0.2$

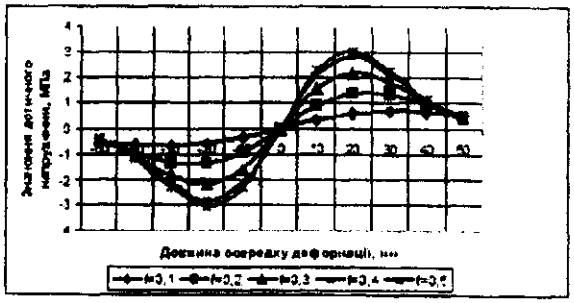

Рис. 2. Значення дотичного напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях коефіцієнта тертя
$T = 1100$, $U = 8$, $d/h = 10$, $\varepsilon = 0.2$

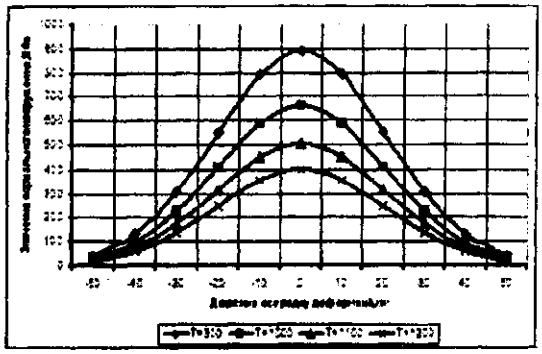

Рис. 3. Значення нормального напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях температури
$d/h = 10$, $f = 0.3$, $U = 8$, $\varepsilon = 0.2$

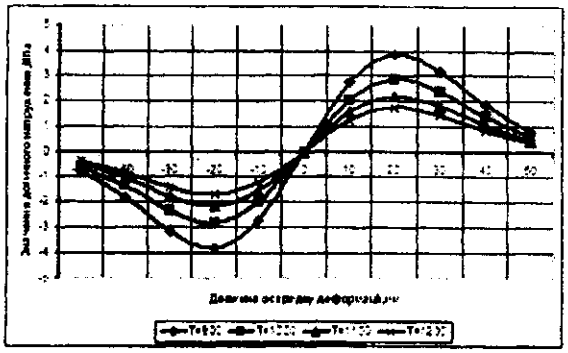

Рис. 4. Значення дотичного напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях температури
$d/h = 10$, $f = 0.3$, $U = 8$, $\varepsilon = 0.2$

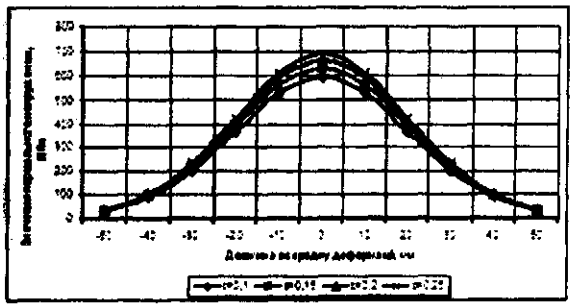

Рис. 5. Значення нормального напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях ступеня деформації
$d/h = 10$, $T = 1100$, $U = 8$, $f = 0.3$

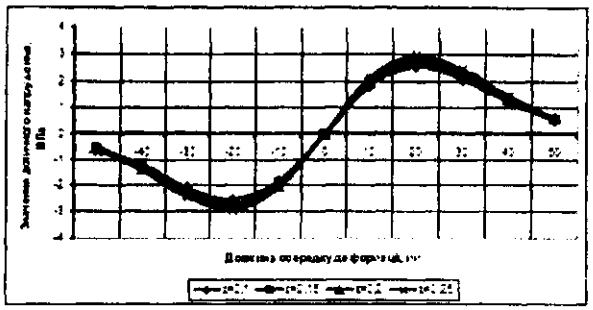

Рис. 6. Значення дотичного напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях ступеня деформації
$d/h = 10$, $T = 1100$, $U = 8$, $f = 0.3$

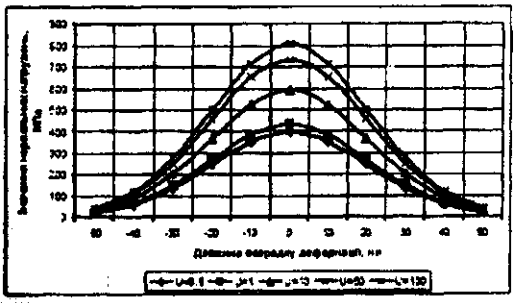

Рис. 7. Значення нормального напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях швидкості деформації
$d/h = 10$, $T = 1100$, $f = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$

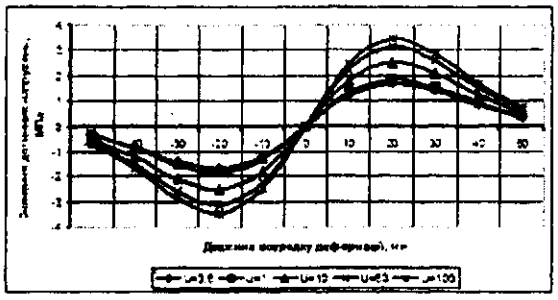

Рис. 8. Значення дотичного напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях швидкості деформації
$d/h = 10$, $T = 1100$, $f = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$

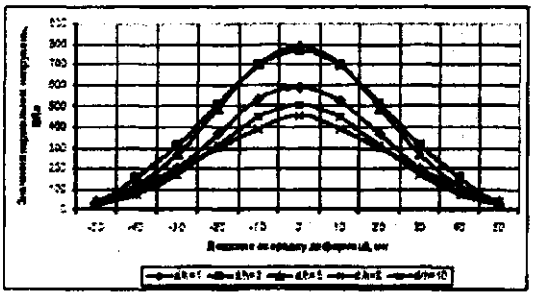

Рис. 9. Значення нормального напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях фактора форми
$T = 1100,\ f = 0.3,\ \varepsilon = 0.2,\ U = 8$

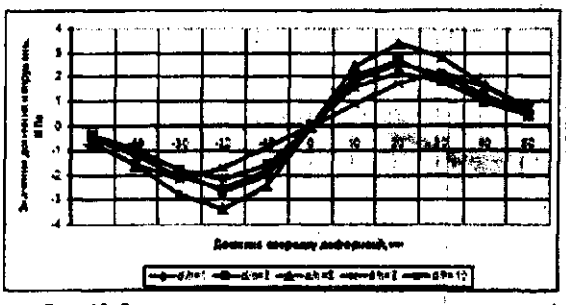

Рис. 10. Значення дотичного напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різних значеннях фактора форми
$T = 1100,\ f = 0.3,\ \varepsilon = 0.2,\ U = 8$

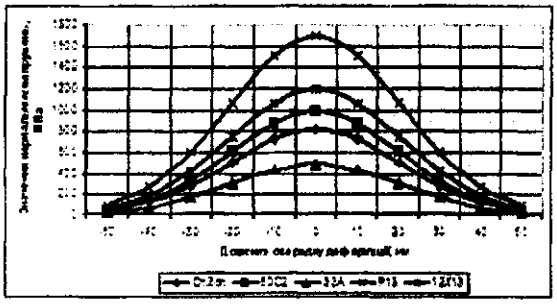

Рис. 11. Значення нормального напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різному хімічному складі
$T = 1000,\ f = 0.3,\ d/h = 10,\ U = 8$

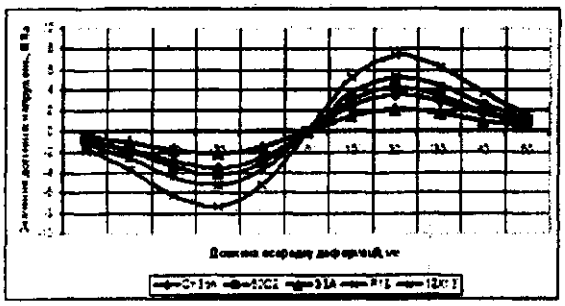

Рис. 12. Значення дотичного напруження по довжині осередку деформації (при $z = h/2$) для осадки при різному хімічному складі
$T = 1000,\ f = 0.3,\ d/h = 10,\ U = 8$

Висновки.

1. Отримано замкнене рішення осесиметричної плоскої задачі теорії пластичності в циліндричних координатах.

2. Отримано математичну модель складного пластичного середовища для осесиметричної плоскої задачі.

3. З використанням експериментальних залежностей Андрєюка – Тюленєва, як частинний випадок запропонованого рішення теоретичної задачі, отримано математичну модель реального пластичного середовища для 66 марок сталей.

4. Представлені рішення показують багатофакторність розв'язаної задачі в залежності від контактного тертя, фактора форми, степені, швидкості деформації, температури та хімічного складу матеріалу.

Список літератури

1. Чигиринский В.В. Плоская задача теории пластичности в цилиндрических координатах// «Прогрессивные технологии пластической деформации».- М.: МИСиС, 2009.-С.345-351.

2. Чигиринский В.В., Качан А.Я., Бень А.Н. Обобщенная теория пластичности. Модель сложной пластической среды // Вестник национального технического университета Украины. Политехнический институт. Машиностроение. – 2008. - №54. – С. 141-148.

3. Чигиринский В.В., Обдул В.Д., Обдул Д.В., Диброва Е.А. Разработка математической модели осадки тел вращения в условиях плоского деформированного состояния // Вестник национального технического университета Украины. Политехнический институт. Машиностроение. – 2010.

4. Андрєюк Л.В., Тюленєв Г.Г. Аналитическая зависимость сопротивления деформации метала от температуры, степени и скорости деформации // Сталь. – 1972 . - №9. – С. 825-828.