

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
(інтегральне числення)
для студентів факультету
інформаційної безпеки та електронних комунікацій
усіх форм навчання

Розрахунково-графічні завдання з вищої математики (інтегральне числення) для студентів факультету інформаційної безпеки та електронних комунікацій усіх форм навчання / Укл. Д. І. Анпілогов. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2026. 31 с.

Укладач: Д.І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Експерт спеціальності: Н.І. Фурманова, доцент, к.т.н.

Рецензент: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Комп'ютерна верстка: Д.І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: Д.І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК
машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 1 від 21.08.2026

Затверджено на засіданні
кафедри «Математика»
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 1 від 18.08.2026

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Завдання для самостійного виконання	5
Перелік джерел посилань	31

ВСТУП

Одним з видів самостійної роботи студентів є виконання розрахунково-графічних завдань. Вони призначені для відпрацювання практичних вмінь та навичок та покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач. Запропоновані розрахунково-графічні завдання відповідають курсу «Вища математика», який викладається для студентів факультету інформаційної безпеки та електронних комунікацій.

Дана збірка задач охоплює практично всі теми змістового модуля «Інтегральне числення». У зв'язку з невеликою чисельністю контингенту в академічних групах зміст обмежений 15 варіантами завдань для самостійної роботи. Також наведено список рекомендованої літератури [1-4].

Розрахунково-графічні завдання виконуються протягом семестру згідно з графіком навчального процесу і у відповідності до термінів, наведених на відповідній сторінці курсу moodle. Номер варіанту студент обирає за номером у списку в журналі. Робота виконується українською мовою в письмовій формі.

1 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Завдання 1.1. Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

1. $\int e^{2x+3} dx$.

2. $\int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) dx$.

3. $\int \frac{dx}{1 + (3x + 2)^2}$.

4. $\int \frac{dx}{2x + 7}$.

5. $\int (5x + 1)^8 dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - 1}}$.

7. $\int \frac{dx}{e^{x-1}}$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

10. $\int \frac{dx}{(3x + 2)^2}$.

11. $\int \sqrt[3]{5x + 7} dx$.

12. $\int \sqrt{2x + 5} dx$.

13. $\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

14. $\int (7x + 1)^4 dx$.

15. $\int \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

Завдання 1.2. Знайти невизначений інтеграл з використанням потрібної заміни змінної. Виконати перевірку.

1. $\int (2x + 3)e^{x^2 + 3x} dx$.

2. $\int \frac{2 - 3x^2}{(x^3 - 2x)^2} dx$.

3. $\int (\cos x + 1)(\sin x + x)^5 dx$.

4. $\int \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}} dx$.

5. $\int (2x + 6)(x^2 + 6x)^7 dx$.

6. $\int \frac{3\sqrt{x}}{2\cos^2(x\sqrt{x})} dx$.

7. $\int 3(e^x + 5)(e^x + 5x)^2 dx$.

8. $\int \frac{6\ln^2(2x + 5)}{(2x + 5)} dx$.

9. $\int \frac{3x^2}{1 + (x^3 + 1)^2} dx$.

10. $\int \frac{5x^4 + 8}{x^5 + 8x} dx$.

11. $\int \frac{3e^x}{2}\sqrt{e^x + 1} dx$.

12. $\int \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$.

13. $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$.

14. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$.

$$15. \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}} dx .$$

Завдання 1.3. Знайти невизначений інтеграл, застосовуючи інтегрування частинами. Виконати перевірку.

$$1. \int (2x + 3) \cos x dx .$$

$$2. \int x \sin 2x dx .$$

$$3. \int (2x + 5) e^x dx .$$

$$4. \int (x^2 + 3x) \cos x dx .$$

$$5. \int (3x + 5) \sin x dx .$$

$$6. \int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx .$$

$$7. \int \sqrt{x} \ln x dx .$$

$$8. \int x \ln x dx .$$

$$9. \int x \operatorname{arctg} 2x dx .$$

$$10. \int (x - x^2) \cos x dx .$$

$$11. \int x \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) dx .$$

$$12. \int (3x - 1) e^{2x} dx .$$

$$13. \int (2x + 5) \cos 3x dx .$$

$$14. \int (4x - 3) \sin 2x dx .$$

$$15. \int (3 - x) e^{3x} dx .$$

Завдання 1.4. Проінтегрувати правильний дріб.

$$1. \text{ а) } \int \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2} dx ; \text{ б) } \int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx ; \text{ в) } \int \frac{4x - 1}{x^2 - 2x + 2} dx .$$

$$2. \text{ а) } \int \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 3} dx ; \text{ б) } \int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx ; \text{ в) } \int \frac{4x + 5}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

$$3. \text{ a) } \int \frac{4x-7}{x^2-5x+4} dx ; \text{ б) } \int \frac{3x-1}{x^2-2x+1} dx ; \text{ в) } \int \frac{4x}{x^2-4x+8} dx .$$

$$4. \text{ a) } \int \frac{-x}{x^2-5x+6} dx ; \text{ б) } \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx ; \text{ в) } \int \frac{2x+10}{x^2+4x+8} dx .$$

$$5. \text{ a) } \int \frac{x-6}{x^2-6x+8} dx ; \text{ б) } \int \frac{3x-2}{x^2-4x+4} dx ; \text{ в) } \int \frac{2x-3}{x^2-6x+18} dx .$$

$$6. \quad \text{a) } \int \frac{5-2x}{x^2-7x+12} dx ; \quad \text{б) } \int \frac{x+6}{x^2+4x+4} dx ; \quad \text{в) }$$

$$\int \frac{2x+18}{x^2+6x+18} dx .$$

$$7. \text{ a) } \int \frac{5x+7}{x^2+x-2} dx ; \text{ б) } \int \frac{2x-2}{x^2-6x+9} dx ; \text{ в) } \int \frac{6x-22}{x^2-8x+17} dx .$$

$$8. \text{ a) } \int \frac{6x+10}{x^2+2x-3} dx ; \text{ б) } \int \frac{7x+24}{x^2+6x+9} dx ; \text{ в) } \int \frac{6x+25}{x^2+8x+17} dx .$$

$$9. \text{ a) } \int \frac{7x+13}{x^2+3x-4} dx ; \text{ б) } \int \frac{2x-11}{x^2-8x+16} dx ; \text{ в) } \int \frac{6x-4}{x^2-2x+5} dx .$$

$$10. \text{ a) } \int \frac{3x+14}{x^2+x-6} dx ; \text{ б) } \int \frac{2x+10}{x^2+8x+16} dx ; \text{ в) } \int \frac{8x+12}{x^2+2x+5} dx .$$

$$11. \text{ a) } \int \frac{2x+20}{x^2+2x-8} dx ; \text{ б) } \int \frac{6x-1}{x^2-2x+1} dx ; \text{ в) } \int \frac{8x-22}{x^2-4x+13} dx .$$

$$12. \text{ a) } \int \frac{x+25}{x^2+x-12} dx ; \text{ б) } \int \frac{5x+9}{x^2+2x+1} dx ; \text{ в) } \int \frac{6x+6}{x^2+4x+13} dx .$$

$$13. \quad \text{a) } \int \frac{9x-29}{x^2-6x+5} dx ; \quad \text{б) } \int \frac{5x-9}{x^2-4x+4} dx ; \quad \text{в) }$$

$$\int \frac{6x-22}{x^2-6x+25} dx .$$

$$14. \quad \text{a) } \int \frac{x+29}{x^2+4x-5} dx ; \quad \text{б) } \int \frac{3x+11}{x^2+4x+4} dx ; \quad \text{в) }$$

$$\int \frac{10x+38}{x^2+6x+25} dx .$$

$$15. \quad \text{а)} \quad \int \frac{4x-5}{x^2-7x+10} dx ; \quad \text{б)} \quad \int \frac{15-4x}{x^2-6x+9} dx ; \quad \text{в)} \quad \int \frac{10x-42}{x^2-8x+17} dx .$$

Завдання 1.5. Проінтегрувати правильний дріб з кратним коренем знаменника.

$$1. \int \frac{4x^3 - 13x^2 + 16x - 9}{(x-1)^3(x-2)} dx .$$

$$2. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x - 5}{(x+1)^3(x-2)} dx .$$

$$3. \int \frac{3x^3 - 4x^2 + 8x + 2}{(x-1)^3(x+2)} dx .$$

$$4. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 12x + 10}{(x+1)^3(x+2)} dx .$$

$$5. \int \frac{4x^3 - 14x^2 + 18x - 12}{(x-1)^3(x-3)} dx .$$

$$6. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 8}{(x+1)^3(x-3)} dx .$$

$$7. \int \frac{2x^3 + 4x + 2}{(x-1)^3(x+3)} dx .$$

$$8. \int \frac{x^3 - 6x - 7}{(x+1)^3(x+3)} dx .$$

$$9. \int \frac{3x^3 - 17x^2 + 32x - 19}{(x-2)^3(x-1)} dx .$$

$$10. \int \frac{2x^3 + 13x^2 + 26x + 13}{(x+2)^3(x-1)} dx .$$

$$11. \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 19x + 11}{(x+2)^3(x+1)} dx .$$

$$12. \int \frac{2x^3 - 11x^2 + 24x - 17}{(x-2)^3(x+1)} dx .$$

$$13. \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 13x - 9}{(x-1)^3(x-4)} dx .$$

$$14. \int \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 7}{(x-1)^3(x+4)} dx .$$

$$15. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 5x - 10}{(x+1)^3(x-4)} dx .$$

Завдання 1.6. Проінтегрувати неправильний дріб.

$$1. \int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3} dx .$$

$$2. \int \frac{x^3 - 2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 4} dx .$$

$$3. \int \frac{2x^3 - 7x^2 - 4x + 18}{x^2 - 5x + 6} dx .$$

$$4. \int \frac{3x^3 - 16x^2 + 13x + 10}{x^2 - 6x + 8} dx .$$

$$5. \int \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 7}{x^2 - 7x + 12} dx .$$

$$6. \int \frac{2x^3 + x^2 + 9}{x^2 + x - 2} dx .$$

$$7. \int \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x + 16}{x^2 + 2x - 3} dx .$$

$$8. \int \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 25}{x^2 + 3x - 4} dx .$$

$$9. \int \frac{4x^3 + 5x^2 - 20x + 8}{x^2 + x - 6} dx .$$

$$10. \int \frac{3x^3 + 5x^2 - 24x + 28}{x^2 + 2x - 8} dx .$$

$$11. \int \frac{2x^3 + 3x^2 - 22x + 13}{x^2 + x - 12} dx .$$

$$12. \int \frac{2x^3 - 13x^2 + 25x - 34}{x^2 - 6x + 5} dx .$$

$$13. \int \frac{3x^3 + 8x^2 - 30x + 49}{x^2 + 4x - 5} dx .$$

$$14. \int \frac{4x^3 - 31x^2 + 65x - 35}{x^2 - 7x + 10} dx .$$

$$15. \int \frac{3x^3 + 8x^2 - 30x - 10}{x^2 + 3x - 10} dx .$$

Завдання 1.7. Знайти невизначений інтеграл.

$$1. \int \sqrt{\frac{9x+1}{x+1}} dx .$$

$$2. \int \sqrt{\frac{4x-1}{x}} dx .$$

$$3. \int \sqrt{\frac{4x+3}{x+2}} dx .$$

$$4. \int \sqrt{\frac{16x-7}{x+1}} dx .$$

$$5. \int \sqrt{\frac{9x-2}{x-3}} dx .$$

$$6. \int \sqrt{\frac{4x+2}{x-1}} dx .$$

$$7. \int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx .$$

$$8. \int \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} dx .$$

$$9. \int \sqrt{\frac{25x-1}{x+2}} dx .$$

$$10. \int \sqrt{\frac{16x+4}{x-1}} dx .$$

$$11. \int \sqrt{\frac{x+3}{x+4}} dx .$$

$$12. \int \sqrt{\frac{4x+1}{x+2}} dx .$$

$$13. \int \sqrt{\frac{4x+7}{x+1}} dx .$$

$$14. \int \sqrt{4 + \frac{2}{x}} dx .$$

$$15. \int \sqrt{9 + \frac{3}{x+2}} dx .$$

Завдання 1.8. Знайти невизначений інтеграл.

$$1. \text{ а) } \int (2x+3)\sqrt{x^2-4x+5} dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{8-2x-x^2}} .$$

$$2. \text{ а) } \int (5x+1)\sqrt{x^2-6x+10} dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}} .$$

$$3. \text{ а) } \int (x+3)\sqrt{x^2-6x+13} dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{7+6x-x^2}} .$$

$$4. \text{ a) } \int (3x-1)\sqrt{x^2-2x+17} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{5+4x-x^2}} .$$

$$5. \text{ a) } \int (x+4)\sqrt{x^2-4x+29} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{15+2x-x^2}} .$$

$$6. \text{ a) } \int (2x-1)\sqrt{x^2-8x+17} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{5+4x-x^2}} .$$

$$7. \text{ a) } \int (2x-3)\sqrt{x^2-8x+25} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{x\sqrt{3+2x-x^2}} .$$

$$8. \text{ a) } \int (3x+1)\sqrt{x^2-10x+41} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{15+2x-x^2}} .$$

$$9. \text{ a) } \int (4x+1)\sqrt{x^2-8x+41} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{35+2x-x^2}} .$$

$$10. \text{ a) } \int (4x-3)\sqrt{x^2+4x+40} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{32+4x-x^2}} .$$

$$11. \text{ a) } \int (2x+5)\sqrt{x^2-6x+45} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{12+4x-x^2}} .$$

$$12. \text{ a) } \int (5x+3)\sqrt{x^2-8x+52} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{60+4x-x^2}} .$$

$$13. \text{ a) } \int (4x-1)\sqrt{x^2-10x+29} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{24+2x-x^2}} .$$

$$14. \text{ a) } \int (4x-3)\sqrt{x^2-6x+18} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{20+8x-x^2}} .$$

$$15. \text{ a) } \int (2x+5)\sqrt{x^2-10x+26} \, dx ; \text{ б) } \int \frac{dx}{x\sqrt{8+2x-x^2}} .$$

Завдання 1.9. Знайти невизначений інтеграл.

$$1. \text{ a) } \int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x} ; \text{ б) } \int \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{\sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x} dx .$$

$$2. \text{ a) } \int \cos^2 x \sin 2x \, dx ; \text{ б) } \int \frac{5 \operatorname{tg} x - 7}{\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x} dx .$$

$$3. \text{ a) } \int \frac{\sin 2x \, dx}{1 + \sin^2 x} ; \text{ б) } \int \frac{3 \operatorname{tg} x - 7}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x} dx .$$

$$4. \text{ a) } \int \frac{\cos x \, dx}{4 + \sin^2 x} ; \text{ б) } \int \frac{4 \operatorname{tg} x - 7}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x} dx .$$

$$5. \quad \text{a) } \int (\sin^2 x + 1)^2 \cos x \, dx ; \quad \text{б) } \int \frac{-\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x} dx .$$

$$6. \quad \text{a) } \int \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) \cos x \, dx ; \quad \text{б) } \int \frac{\operatorname{tg} x - 6}{\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x} dx .$$

$$7. \quad \text{a) } \int \frac{(3 \sin^2 x + 1) \cos x \, dx}{\sin^3 x} ; \quad \text{б) } \int \frac{5 - 2 \operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 12 \cos^2 x} dx .$$

$$8. \text{ a) } \int (1 - \sin x)^3 \cos x \, dx ; \text{ б) } \int \frac{5 \operatorname{tg} x + 7}{\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x} dx .$$

$$9. \text{ a) } \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x - \sin x} ; \text{ б) } \int \frac{6 \operatorname{tg} x + 10}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x} dx .$$

$$10. \text{ a) } \int \sin^2 \frac{x}{2} \sin x \, dx ; \text{ б) } \int \frac{7 \operatorname{tg} x + 13}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x} dx .$$

$$11. \quad \text{a) } \int \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x \, dx ; \quad \text{б) } \int \frac{3 \operatorname{tg} x + 14}{\sin^2 x + \sin x \cos x - 6 \cos^2 x} dx .$$

$$12. \text{ a) } \int \frac{\cos x \, dx}{3 \sin x + 5} ; \text{ б) } \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 20}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 8 \cos^2 x} dx .$$

$$13. \text{ a) } \int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^2 x} ; \text{ б) } \int \frac{\operatorname{tg} x + 25}{\sin^2 x + \sin x \cos x - 12 \cos^2 x} dx .$$

$$14. \text{ a) } \int \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \cos x \, dx ; \text{ б) } \int \frac{9 \operatorname{tg} x - 29}{\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} dx .$$

$$15. \text{ a) } \int \frac{\sin 2x \, dx}{\sin^2 x + 5} ; \text{ б) } \int \frac{\operatorname{tg} x + 29}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x} dx .$$

Завдання 1.10. Знайти визначений інтеграл.

$$1. \int_0^{\pi/2} 3 \sin^2 x \cos x \, dx .$$

$$2. \int_0^{1/\sqrt{2}} 4x e^{2x^2} \, dx .$$

$$3. \int_0^1 \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} .$$

$$4. \int_0^{\frac{\sqrt{13}-1}{2}} \frac{(2x+1)dx}{2\sqrt{x^2+x+1}} .$$

$$5. \int_0^1 (x^2+3x)^3 (2x+3) dx .$$

$$6. \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x} \, dx .$$

$$7. \int_{-2}^{-1} \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2} .$$

$$8. \int_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2+3x} \, dx .$$

$$9. \int_0^{\sqrt[3]{e-1}} \frac{3x^2 dx}{x^3 + 1}.$$

$$10. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{e - 1 + \sin x} dx.$$

$$11. \int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{2x dx}{1 + x^4}.$$

$$12. \int_0^{\pi/6} 18 \sin^5 3x \cos 3x dx.$$

$$13. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$14. \int_0^1 \frac{3x^2 dx}{(x^3 + 1)^2}.$$

$$15. \int_0^1 \frac{(2x^3 + x) dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

Завдання 1.11. Знайти площу фігури, обмеженої на площині Oxy наступними умовами. Побудувати креслення.

$$1. \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y = \frac{2x}{x^2 + 1}, \\ y = 0, \\ x = \sqrt{e - 1}. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = xe^{-x^2}, \\ y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y = \sin^2 x, \\ y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y = \frac{\ln x}{x^2 + 1}, \\ y = 0, \\ x \in [1; e]. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y = \sqrt{x+1}, \\ x = \frac{x+1}{2}. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ y = x-1, \\ x \in [1; 2]. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y = e^{-x}, \\ y = 0, \\ x \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y = \frac{1}{x^2 + 1}, \\ y = 0, \\ x \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y = \frac{1}{x^2 + 1}, \\ x = 0, \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 - 2x. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} y = 2 \cos x, \\ y = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}x, \\ x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} y = \operatorname{ch} x, \\ y = 0, \\ x \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = y^2, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Завдання 1.12. Розв'язати задачу з фізичним змістом.

1. Тіло у формі чверті кола ($x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$) виготовлено з однорідного листового матеріалу. Знайти момент інерції цього тіла при обертанні навколо осі Ox , якщо його маса дорівнює m .

2. Тіло у формі чверті кола $x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$) виготовлено з однорідного листового матеріалу. Знайти абсцису центру мас тіла.

3. Електрична напруга лінійно збільшується за законом $U(t) = \frac{U_0}{T} \cdot t$, в момент часу $t = T$ стрибкоподібно зменшується до нуля і далі періодично повторюється. Знайти середньоквадратичне значення напруги на періоді.

4. Конденсатор ємністю C зарядили до напруги U_0 і з'єднали з резистором опором R . Як відомо, розрядний струм у ланцюгу за цих умов згасатиме за законом $I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$. Обчислити заряд Q , який пройде через поперечний переріз ланцюга за час $\tau = RC$. Врахувати, що за означенням сила струму $I(t) = \frac{dQ}{dt}$.

5. Плоский виток площею S зі сталим струмом I розташовано в однорідному магнітному полі індукцією B , перпендикулярному площині витка. Яку роботу треба виконати для подолання моменту сил Ампера, щоб зорієнтувати площину витка паралельно магнітному полю? Момент сил Ампера обчислюють за формулою $M(\varphi) = ISB \sin \varphi$, φ – кут між вектором індукції і нормаллю до площини витка; елементарну роботу моменту сил при повороті на кут $d\varphi$ обчислюють за формулою $dA = M(\varphi)d\varphi$.

6. Тонкий діелектричний стержень довжиною L рівномірно заряджений електричним зарядом Q . З якою силою відштовхується від нього точковий заряд q , розташований на уявному продовженні стержня на відстані a від найближчого кінця? Вказівка. Розбити заряд стержня на елементарні заряди dQ і скористатись законом Кулона:

$dF = \frac{kq dQ}{x^2}$, x – відстань між зарядами q і dQ . Перевірити

отриманий результат на відповідність до закону Кулона у граничному випадку при $L \ll a$.

7. Тонкий діелектричний стержень довжиною L рівномірно заряджений електричним зарядом Q . З якою силою відштовхується від нього точковий заряд q , розташований на серединному перпендикулярі стержня на відстані h від середини стержня? Вказівка. Розбити заряд стержня на елементарні заряди dQ і скористатись законом Кулона: $dF = \frac{kq dQ}{x^2}$, x – відстань між зарядами q і dQ . З міркувань симетрії до інтегральної суми включити лише компоненту сили, перпендикулярну до стержня.

8. Тонкий дріт довжиною $\frac{\pi R}{2}$ і масою m зігнули у формі чверті кола $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Обчислити момент інерції дроту при обертанні навколо осі Ox .

9. Тонкий дріт довжиною $\frac{\pi R}{2}$ зігнули у формі чверті кола $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Знайти абсцису центру мас дроту.

10. Знайти роботу, яку виконують ν молів ідеального газу, ізотермічно розширюючись від об'єму V_1 до об'єму V_2 при абсолютній температурі T . Використати рівняння стану ідеального газу (Менделєєва-Клапейрона) $pV = \nu RT$, де R – універсальна газова стала. Елементарна робота розширення газу дорівнює $dA = p(V)dV$.

11. Тонкий круглий диск радіусу R розташували вертикально і повністю занурили під воду так, що його центр опинився на глибині H . Обчислити силу тиску води на один бік диску. Тиск води на глибині h дорівнює $p(h) = p_0 + \rho gh$, де p_0 – атмосферний тиск, ρ – густина води, g – прискорення вільного падіння. Елементарну силу обчислюють за формулою $dF = p dS$.

12. Тонкий круглий діелектричний диск радіусу R рівномірно заряджений електричним зарядом Q . З якою силою він діє на точковий заряд q , розташований на осі диску на відстані h від його площини? Вказівка. Розбити заряд диску на концентричні кільця.

13. Тонке кругле діелектричне кільце з зовнішнім і внутрішнім радіусами r , R нерівномірно заряджене електричним зарядом з поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{x-r}{R-r}\right)$, де x – відстань від центру. Знайти напруженість магнітного поля в центрі кільця при обертанні з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через центр кільця перпендикулярно його площині. Вказівка. Розбити кільце на диференціально тонкі концентричні кільця зарядами $dQ = \sigma dS$. Кожному кільцю поставити у відповідність струм $dI = \frac{dQ}{T}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – період обертання. Врахувати, що в центрі витка радіусом x зі струмом dI створюється магнітне поле напруженістю $dH = \frac{dI}{2x}$.

14. Обчислити роботу, яку порібно виконати для збільшення напруги на конденсаторі ємністю C від значення U_1 до значення U_2 . Вказівка. За означенням електричною ємністю конденсатора називають коефіцієнт пропорційності між напругою та зарядом: $Q = CU$. Робота по переносу порції dQ заряду з однієї обкладинки на другу при сталій напрузі U дорівнює $dA = U dQ$.

15. Якщо тіло падає без початкової швидкості з деякої висоти H , то в момент падіння його кінетична енергія дорівнює роботі сили тяжіння. Зокрема, якщо висота H настільки мала, що

змінною сили тяжіння можна знехтувати, то $\frac{mv^2}{2} = mg \cdot H$, звідки

$v = \sqrt{2gH}$. На скільки відсотків ця відповідь відрізняється від точної при падінні з висоти $H = 3R$, де R – радіус Землі? Вказівка. Врахувати, що на висоті x сила тяжіння дорівнює

$$F = \frac{GMm}{(R+x)^2} = \frac{GMm}{R^2} \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2} = mg \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2}, \quad x \in [0; H].$$

Завдання 1.13. Розв'язати задачу з геометричним змістом.

1. Обчислити довжину кривої $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ в інтервалі $\varphi \in [0; \frac{2\pi}{3}]$.

2. Обчислити довжину кривої $\rho = ae^{\varphi}$ в інтервалі $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

3. Знайти площу одного пелюстка «трипелюсткової троянди» $\rho = a \cos 3\varphi$.

4. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої графіком, заданим параметрично:
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

5. Обчислити довжину частини кривої $y = \ln x$, обмежену інтервалом $x \in [\sqrt{3}; \sqrt{15}]$.

6. Крива $\rho = a^3 \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$, обертається навколо полярної осі. Знайти об'єм тіла обертання.

7. Знайти об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні сегменту параболи $y = 4x - x^2$, $x \in [0; 4]$, навколо осі Ox .

8. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного при обертанні кривої $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0; 1]$, навколо осі Ox .

9. Крива $\rho = R = \operatorname{const}$, $\varphi \in [0; \varphi_0]$, обертається навколо полярної осі. Обчислити площу поверхні тіла обертання і переконатись, що при $\varphi_0 = \pi$ відповідь збігається з формулою площі поверхні сфери радіуса R .

10. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox прямої, заданої параметрично:
$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t, \end{cases} \quad t \in [1; 2].$$

11. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного при обертанні кривої $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ навколо полярної осі.

12. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої кривою, заданою в полярних координатах: $\rho = a(1 + 2 \cos \varphi)$.

13. Обчислити довжину частини кривої $y = e^x$, обмежену інтервалом $x \in [\ln \sqrt{15}; \ln \sqrt{24}]$.

14. Обчислити довжину частини кривої, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

15. Криву задано параметрично:
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Обчислити площу поверхні тіла, утвореного при обертанні цієї кривої навколо осі Ox .

Завдання 1.14. Обчислити невластний інтеграл або довести його розбіжність.

1. а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$.

2. а) $\int_0^{+\infty} \frac{2x \, dx}{(1+x^2)^2}$; б) $\int_0^1 \ln x \, dx$.

3. а) $\int_1^{+\infty} \frac{(5 + \cos 3x)dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x} \, dx}{x^3 + 1}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

5. а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

6. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{ctg} x \, dx$.

7. а) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \, dx$; б) $\int_0^1 \ln \frac{1}{x} \, dx$.

8. а) $\int_1^{+\infty} \frac{(3 - \sin 2x)dx}{x}$; б) $\int_0^1 \frac{e^{-1/x^2} \, dx}{x^3}$.

$$9. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{3x^2 dx}{1+x^6}; \text{ б) } \int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}.$$

$$10. \text{ a) } \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \text{ б) } \int_0^1 x \ln x dx.$$

$$11. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{\sqrt{x^7+1}} dx; \text{ б) } \int_0^1 \frac{e^{1/x} dx}{x^2}.$$

$$12. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}; \text{ б) } \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x-1}.$$

$$13. \text{ a) } \int_1^{+\infty} \arcsin \frac{1}{x} dx; \text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 dx}{\sin 2x}.$$

$$14. \text{ a) } \int_e^{+\infty} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}; \text{ б) } \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$15. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{(x-2x^2)dx}{x^3+5x^2+3x+2} dx; \text{ б) } \int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \frac{1}{x} dx}{x^2}.$$

Завдання 1.15. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж прямої в напрямку від точки A до точки B .

$$1. \int_{AB} (2x+y) d\ell, A(2;1), B(-1;5).$$

$$2. \int_{AB} (2x-y) d\ell, A(3;0), B(0;4).$$

$$3. \int_{AB} (2x-y) d\ell, A(4;4), B(1;0).$$

$$4. \int_{AB} (2x-2y) d\ell, A(5;5), B(2;1).$$

$$5. \int_{AB} (2x+4y) d\ell, A(-1;2), B(2;-2).$$

6. $\int_{AB} (2x + 2y) d\ell$, $A(2; 0)$, $B(5; -4)$.
7. $\int_{AB} (4x - 2y) d\ell$, $A(4; 2)$, $B(0; -1)$.
8. $\int_{AB} (2x - 2y) d\ell$, $A(3; 1)$, $B(0; 5)$.
9. $\int_{AB} (2x + y) d\ell$, $A(5; 3)$, $B(2; -1)$.
10. $\int_{AB} (4x + 2y) d\ell$, $A(-4; 1)$, $B(0; 4)$.
11. $\int_{AB} (2x + y) d\ell$, $A(4; 1)$, $B(1; -3)$.
12. $\int_{AB} (x + 2y) d\ell$, $A(-5; 1)$, $B(-1; 4)$.
13. $\int_{AB} (4x + 2y) d\ell$, $A(-6; -2)$, $B(6; 3)$.
14. $\int_{AB} (x + 4y) d\ell$, $A(2; 1)$, $B(-2; 4)$.
15. $\int_{AB} (x + 6y) d\ell$, $A(7; -2)$, $B(3; 1)$.

Завдання 1.16. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду в напрямку від точки A до точки B вздовж кривої, визначеної заданим рівнянням.

1. $\int_{AB} \frac{x}{y} dx + y^2 dy$, $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $y = \sqrt{x}$.
2. $\int_{AB} 3xy dx + 5xy^3 dy$, $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $y = 2x$.
3. $\int_{AB} 4xy dx + 6x^2 y dy$, $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $y = x^2$.
4. $\int_{AB} (x + y) dx + 6xy dy$, $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $y = 1 - x$.

$$5. \int_{AB} (x^2 + y^2) dx + 3(x^2 - y^2) dy, \quad A(0; -1), \quad B(0; 1), \quad x = \sqrt{1 - y^2},$$

напрямок обходу – проти годинникової стрілки.

$$6. \int_{AB} (4y - 2x) dx + 7xy dy, \quad A(0; 0), \quad B(1; 1), \quad y = x^3.$$

$$7. \int_{AB} (x - y^3) dx + 6xy^2 dy, \quad A(0; 0), \quad B(1; 1), \quad y = \sqrt[3]{x}.$$

$$8. \int_{AB} (x^2 + y^2) dx + (x^2 + y^2 - 1) dy, \quad A(-1; 0), \quad B(1; 0),$$

$y = \sqrt{1 - x^2}$, напрямком обходу – проти годинникової стрілки.

$$9. \int_{AB} xy^2 dx + 3y dy, \quad A(-1; -\frac{\pi}{2}), \quad B(1; \frac{\pi}{2}), \quad y = \arcsin x.$$

$$10. \int_{AB} 2x dx + \frac{4x}{y} dy, \quad A(0; 1), \quad B(1; e), \quad y = e^x.$$

$$11. \int_{AB} \frac{2y}{x} dx + (4y + x - e^y) dy, \quad A(1; 0), \quad B(e; 1), \quad y = \ln x.$$

$$12. \int_{AB} (2x - y) dx + 3xy^2 dy, \quad A(1; 0), \quad B(0; 2), \quad y = 2 - 2x.$$

$$13. \int_{AB} 4 \operatorname{tg} x (1 + y^2) dx + 2y dy, \quad A(0; 0), \quad B(\frac{\pi}{4}; 1), \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$14. \int_{AB} \frac{y dx}{e - 1} + \frac{2x}{y} dy, \quad A(0; 1), \quad B(1; e), \quad y = e^x.$$

$$15. \int_{AB} x^2 y dx - x^3 y dy, \quad A(1; 2), \quad B(2; 1), \quad y = \frac{2}{x}.$$

Завдання 1.17. Задано функцію $\varphi(x, y)$ і точку A . Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_{AB} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{\ell}$ в напрямку від початку координат O до точки A .

$$1. \varphi = \frac{2x + 4y}{1 + x^2 y^2}, \quad A(1; 1).$$

$$2. \varphi = 2^{x^2 - y^2 - 2y}, A(3; 2).$$

$$3. \varphi = \frac{4y}{\sqrt{2 + x^2 + y^2}}, A(1; 1).$$

$$4. \varphi = \sqrt[3]{xy}, A(4; 2).$$

$$5. \varphi = (2x - y)^4, A(3; 5).$$

$$6. \varphi = \sin(x + y), A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right).$$

$$7. \varphi = (3x^2 - y)^3, A(1; 2).$$

$$8. \varphi = y \ln(1 + x^2), A(0; 2).$$

$$9. \varphi = xy^4 - 13, A(1; 2).$$

$$10. \varphi = \sin^2(xy), A\left(1; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$11. \varphi = (x^2 - 3y)^3, A(2; 1).$$

$$12. \varphi = x^5 y^3, A(1; 1).$$

$$13. \varphi = y^2 - x^3, A(2; 3).$$

$$14. \varphi = \frac{x^2 + y^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 3}}, A(1; 0).$$

$$15. \varphi = \frac{2x + y}{x^2 + y^2 + 1}, A(1; 0).$$

Завдання 1.18. В наведеній сумі інтегралів змінити порядок інтегрування. У відповіді надати: 1) креслення на папері в клітинку з дотриманням масштабу; 2) явний вигляд залежностей «нових» меж внутрішнього інтегрування від «нової» змінної зовнішнього інтегрування; 3) один подвійний інтеграл, зведений до повторного.

$$1. J = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_1^5 dx \int_0^{\sqrt{5-x}} f(x, y) dy.$$

$$2. J = \int_0^4 dy \int_0^{y/2} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_0^{\sqrt{4-(y-4)^2}} f(x, y) dx .$$

$$3. J = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y) dy .$$

$$4. J = \int_0^2 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_2^6 dy \int_0^{4-\sqrt{16-(y-6)^2}} f(x, y) dx .$$

$$5. J = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_4^5 dx \int_0^{10-2x} f(x, y) dy .$$

$$6. J = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x, y) dx .$$

$$7. J = \int_0^1 dx \int_0^{3x} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{9-(x-1)^2}} f(x, y) dy .$$

$$8. J = \int_{-2}^0 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-2}}^0 f(x, y) dx .$$

$$9. J = \int_{-4}^0 dx \int_0^{x+4} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_0^{(x-2)^2} f(x, y) dy .$$

$$10. J = \int_0^1 dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx + \int_1^{1+\pi/2} dy \int_0^{1+\pi/2-y} f(x, y) dx .$$

$$11. J = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi/2}^{\pi/2+1} dx \int_0^{\pi/2+1-x} f(x, y) dy .$$

$$12. J = \int_0^2 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_2^6 dy \int_0^{6-y} f(x, y) dx .$$

$$13. J = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_0^{8-2x} f(x, y) dy .$$

$$14. J = \int_0^2 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_2^{2\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx .$$

$$15. J = \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\operatorname{tg} x} f(x, y) dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{2-4x/\pi} f(x, y) dy .$$

Завдання 1.19. Розв'язати задачу з використанням подвійного інтегралу.

1. Обчислити ординату центру мас однорідного параболічного сегменту, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = b$.

2. Обчислити абсцису центру мас однорідного криволінійного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = b$, $x = 0$. Трикутник належить першій координатній чверті.

3. Обчислити абсцису центру мас однорідного криволінійного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = 0$, $x = a$.

4. Обчислити ординату центру мас однорідного криволінійного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = 0$, $x = a$.

5. Обчислити масу неоднорідного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a} \cdot x$, $y = 0$, $x = a$. Поверхнева густина змінюється за законом $\sigma(x, y) = \sigma_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

6. Обчислити масу неоднорідного трикутника, обмеженого лініями $y = \frac{b}{a} \cdot x$, $y = 0$, $x = a$. Поверхнева густина змінюється за законом $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cdot \frac{x}{a}$.

7. Однорідний криволінійний трикутник з поверхневою густиною σ обмежений лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = b$, $x = 0$ і розташований в першій координатній чверті. Обчислити момент інерції трикутника при обертанні навколо осі Ox .

8. Однорідний криволінійний трикутник з поверхневою густиною σ обмежений лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = b$, $x = 0$ і розташований в першій координатній чверті. Обчислити момент інерції трикутника при обертанні навколо осі Oy .

9. Неоднорідну прямокутну пластину обмежено прямими $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Поверхнева густина змінюється за законом $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cdot \frac{y}{b}$. Обчислити момент інерції пластини при обертанні навколо осі Ox .

10. Однорідний криволінійний трикутник з поверхневою густиною σ обмежено лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = 0$, $x = a$. Обчислити момент інерції трикутника при обертанні навколо осі Ox .

11. Однорідний криволінійний трикутник з поверхневою густиною σ обмежено лініями $y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$, $y = 0$, $x = a$. Обчислити момент інерції трикутника при обертанні навколо осі Oy .

12. Однорідний сектор обмежено колом $x^2 + y^2 = R^2$ і прямими $y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$, де α – даний сталий гострий кут. Обчислити абсцису центру мас сектора.

13. Однорідний сектор з поверхневою густиною σ обмежено колом $x^2 + y^2 = R^2$ і прямими $y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$, де α – даний сталий гострий кут. Обчислити момент інерції сектора при обертанні навколо осі Ox .

14. Однорідний сектор з поверхневою густиною σ обмежено колом $x^2 + y^2 = R^2$ і двома прямими: $y = 0$ і $y = x \operatorname{tg} \alpha$, де α – даний сталий гострий кут. Обчислити момент інерції сектора при обертанні навколо осі Oy .

15. Неоднорідне коло обмежено лінією $x^2 + y^2 = R^2$. Поверхнева густина залежить від відстані ρ між початком координат і поточною точкою за законом $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cdot \frac{\rho}{R}$. Обчислити масу кола.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В. Інтегральне числення : навч. посібник. Запоріжжя : НУ "Запорізька політехніка", 2021. 254 с.
2. Вища математика: підруч.: у 2 кн. Кн.1. Основні розділи / Призва Г.Й., Плахотник В.В, Гординський Л.Д. та ін.; за ред. Г.Л. Кулініча. Київ : Либідь, 2003. 400 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика : навч. посіб. Київ : Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
4. Мاستиновський Ю.В., Анпілогов Д.І. Математичні поняття, визначення, теореми і формули : довідковий посібник. Запоріжжя : Кругозір, 2015. 172 с.