

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

ПРАКТИКУМ
З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ
(конспект лекцій)
для студентів спеціальностей
«Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку»
усіх форм навчання

2015

Практикум з теорії функцій комплексної змінної (конспект лекцій) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2015. – 34 с.

Укладачі: В.М.Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.
Н.В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.
Н.М. Антоненко, ст. викл., к. ф.-м.н.

Експерт
спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: В.П. Чумаченко, професор, д.ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Н.В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Затверджено радою
ЗТФ ЗНТУ
Протокол № 6
від 25.02.15

Затверджено на засіданні кафедри загальної
математики ЗНТУ
Протокол № 6
від 18.02.15

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Функції комплексної змінної.	5
2 Інтегрування аналітичних функцій	16
3 Елементи операційного числення.	24
Література	34

ВСТУП

Як відомо, одним з видів самостійної роботи студентів є виконання на протязі семестру практичних розрахункових завдань. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач. Запропонований практикум зі зразками виконання типових розрахунково-графічних завдань відповідає курсу «Теорія функцій комплексної змінної», який читається для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» у II семестрі.

Даний практикум охоплює практично всі основні розділи даного курсу; тут містяться методичні вказівки до виконання завдань, наведені приклади розв'язання задач з детальним поясненням. Крім того, наведений список рекомендованої літератури, як основної, так і додаткової. З метою полегшення користування даним посібником нумерація прикладів відповідає нумерації задач у збірці типових розрахунково-графічних завдань [6].

Типові розрахунково-графічні завдання виконуються протягом семестру, що забезпечує студентам систематичне вивчення курсу на основі опрацювання рекомендованих підручників та посібників, самостійного пошуку необхідних літературних джерел та матеріалів, їх аналізу та узагальнення, самостійного дослідження та письмового викладення практичних питань.

Матеріали даного практикуму можна розглядати як частину конспекту лекцій з ТФКЗ, в якій на практичних прикладах ілюструються теоретичні положення курсу. З огляду на це матеріали даного посібника можуть бути використані не тільки при виконанні розрахунково-графічних завдань, але і при підготовці до іспиту.

1 ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Існує кілька форм запису комплексного числа:

$z = x + iy$ – алгебраїчна форма;

$z = re^{ij}$ – показникова форма;

$z = r(\cos j + i \sin j)$ – тригонометрична форма,

де $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$, $j = \arg z$. Мають місце наступні співвідношення:

$j = \arctg \frac{y}{x}$, якщо z належить I або IV квадранту,

$j = \arctg \frac{y}{x} \pm p$, якщо z належить II або III квадранту, (1.1)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos j$, $y = r \sin j$. (1.2)

Піднесення до натурального степеня комплексного числа $z = r(\cos j + i \sin j)$ здійснюється за формулою Муавра:

$z^n = r^n(\cos nj + i \sin nj)$. (1.3)

Корінь n -го степеня з комплексного числа z має n різних значень, які обчислюються за формулою

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{j + 2pk}{n} + i \sin \frac{j + 2pk}{n} \right)$, $k = 0, \dots, n-1$. (1.4)

Точки на комплексній площині, що відповідають значенням $\sqrt[n]{z}$, є вершинами правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $R = \sqrt[n]{r}$ з центром в початку координат.

Приклад 1.1. Надати показникової та тригонометричної форм запису числам:

а) $z_1 = -\sin \frac{p}{12} - i \cos \frac{p}{12}$;

б) $z_2 = \sqrt[10]{6} i$;

$$\text{в) } z_3 = -7^{\sqrt{7}};$$

$$\text{г) } z_4 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Розв'язок. а) Спочатку знайдемо модуль і аргумент числа z_1 , користуючись формулами (1.1) і (1.2). Оскільки $x_1 = -\sin \frac{p}{12} < 0$,

$y_1 = -\cos \frac{p}{12} < 0$, то z_1 належить III квадранту;

$$r_1 = \sqrt{\left(-\sin \frac{p}{12}\right)^2 + \left(-\cos \frac{p}{12}\right)^2} = 1;$$

$$\begin{aligned} j_1 &= \operatorname{arctg} \frac{-\cos \frac{p}{12}}{-\sin \frac{p}{12}} + p = \operatorname{arctg} \operatorname{ctg} \frac{p}{12} + p = \\ &= \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \left(\frac{p}{2} - \frac{p}{12} \right) + p = \frac{17}{12} p. \end{aligned}$$

Отже, число z_1 можна подати у вигляді:

$$z_1 = \cos \frac{17}{12} p + i \sin \frac{17}{12} p \quad \text{і} \quad z_1 = e^{i \frac{17}{12} p}.$$

б) Знайдемо модуль і аргумент числа z_2 . $j_2 = \frac{p}{2}$, оскільки радіус-вектор точки $^{10}\sqrt{6}i$ утворює кут $\frac{p}{2}$ з додатним напрямом осі OX (мал.1.1). Далі, $r_2 = ^{10}\sqrt{6}$. Отже, число z_2 можна подати в тригонометричній і показниковій формах таким чином:

$$z_2 = ^{10}\sqrt{6} \left(\cos \frac{p}{2} + i \sin \frac{p}{2} \right); \quad z_2 = ^{10}\sqrt{6} e^{i \frac{p}{2}}.$$

в) $r_3 = 7^{\sqrt{7}}$, $j_3 = p$, оскільки радіус-вектор точки $-7^{\sqrt{7}}$ утворює кут p з додатним напрямом осі OX (рис. 1.1). Отже,

$$z_3 = 7^{\sqrt{7}} (\cos p + i \sin p); \quad z_3 = 7^{\sqrt{7}} e^{ip}.$$

г) Знайдемо модуль і аргумент числа z_4 . Оскільки $x_4 = -1 < 0$, $y_4 = -\sqrt{3} < 0$, то z_4 належить III квадранту;

$$r_4 = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2;$$

$$j_4 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} + p = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + p = \frac{p}{3} + p = \frac{4p}{3}.$$

Отже, число z_4 можна подати у вигляді:

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{4}{3}p + i \sin \frac{4}{3}p \right) \quad \text{і} \quad z_4 = 2e^{i\frac{4}{3}p}. \blacksquare$$

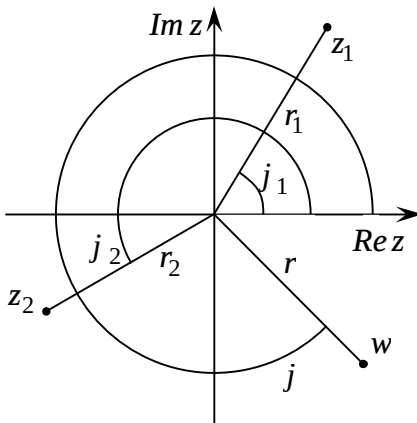


Рисунок 1.1

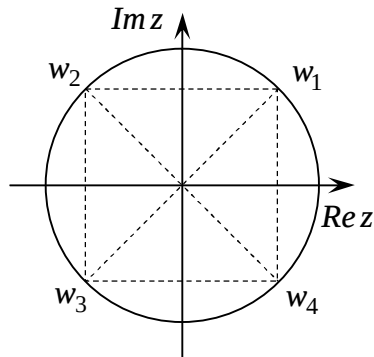


Рисунок 1.2

Приклад 1.2. Комплексне число w подати у вигляді $a+ib$.

Навести геометричну інтерпретацію:

а) $w = (1 + i\sqrt{3})(-i - 1);$

б) $w = \frac{1-2i}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i};$

в) $w^4 + 1 = 0$.

Розв'язок. а) Виконаємо множення:

$$w = (1 + i\sqrt{3})(-i - 1) = -i - 1 + \sqrt{3} - i\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1) - i(\sqrt{3} + 1).$$

Тут врахували, що $i \cdot i = -1$.

б) Для того, щоб звести дріб до стандартної алгебраїчної форми, домножимо чисельник і знаменник на величину, спряжену до

знаменника, в даному випадку це $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i$:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1-2i}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i} = \frac{(1-2i)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i - \frac{2}{3}i - 1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{-\frac{2}{3} - \frac{7}{6}i}{\frac{13}{36}} = -\frac{24}{13} - \frac{42}{13}i. \end{aligned}$$

в) Скористаємося формулою (1.4). Оскільки $w^4 + 1 = 0$, то $w = \sqrt[4]{-1}$; $|-1| = 1$, $\arg(-1) = p$. Корінь має чотири значення:

$$w = \cos \frac{p + 2pk}{4} + i \sin \frac{p + 2pk}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$k = 0: \quad w_1 = \cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 1: \quad w_2 = \cos \frac{3p}{4} + i \sin \frac{3p}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 2: \quad w_3 = \cos \frac{5p}{4} + i \sin \frac{5p}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 3: \quad w_4 = \cos \frac{7p}{4} + i \sin \frac{7p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Геометрично числа w_k є вершинами вписаного в одиничне коло квадрата (рис. 1.2).

При розв'язуванні задач можна користуватися формулою Ейлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (1.5)$$

із якої отримуємо:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (1.6)$$

Також наведемо означення ще однієї елементарної функції Lnz :

$$Lnz = \ln|z| + i \arg z + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Приклад 1.3.

а) Обчислити $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

б) Обчислити $(1 + i)^{1-i}$.

в) Розв'язати рівняння $\sin z = \pi i$.

Розв'язок. а) Зобразимо число $z = -1 + i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі (враховуючи, що $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$):

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Застосовуючи формулу Муавра (1.3), одержуємо:

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60} \left(\cos \left(60 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(60 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^{60} (\cos 40\pi + i \sin 40\pi) = 2^{60}. \end{aligned}$$

б) Зобразимо вираз у вигляді:

$$(1 + i)^{1-i} = e^{(1-i)Ln(1+i)}.$$

Знайдемо значення логарифму, користуючись його означенням (1.7):

$$\begin{aligned} Ln(1 + i) &= \ln|1 + i| + i \arg(1 + i) + 2\pi ik = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} + 2\pi ik = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + i\pi \left(\frac{1}{4} + 2k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Отже, одержуємо:

$$\begin{aligned}
 (1+i)^{1-i} &= e^{(1-i)\left(\frac{1}{2}\ln 2 + ip(1+2k)\right)} = e^{\frac{1}{2}\ln 2 + p(1+2k) + i\left(p(1+2k) - \frac{1}{2}\ln 2\right)} = \\
 &= e^{\frac{1}{2}\ln 2} \cdot e^{p(1+2k)} \times \\
 &\times \left(\cos\left(\frac{p}{2} + 2kp - \frac{1}{2}\ln 2\right) + i \sin\left(\frac{p}{2} + 2kp - \frac{1}{2}\ln 2\right) \right) = \\
 &= \sqrt{2}e^{p(1+2k)} \left(\sin \frac{1}{2}\ln 2 + i \cos \frac{1}{2}\ln 2 \right), \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

в) Користуючись формулою (1.6), перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = pi, \quad \text{або} \quad e^{iz} - e^{-iz} = -2p.$$

Домножимо обидві частини рівності на e^{iz} і одержимо квадратне (відносно e^{iz}) рівняння:

$$(e^{iz})^2 + 2pe^{iz} - 1 = 0.$$

Розв'язуючи його, отримуємо:

$$e^{iz} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 + 4}}{2} = -p \pm \sqrt{p^2 + 1},$$

звідки

$$iz = \operatorname{Ln}\left(-p \pm \sqrt{p^2 + 1}\right), \quad \text{або} \quad z = -i\operatorname{Ln}\left(-p \pm \sqrt{p^2 + 1}\right).$$

Обчислимо $\operatorname{Ln}\left(-p \pm \sqrt{p^2 + 1}\right)$. Згідно означення $\operatorname{Ln} z$,

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{Ln}\left(-p + \sqrt{p^2 + 1}\right) = \\
 &= \ln\left|-p + \sqrt{p^2 + 1}\right| + i \arg\left(-p + \sqrt{p^2 + 1}\right) + 2pki = \\
 &= \ln\left(\sqrt{p^2 + 1} - p\right) + 2pki, \quad k \in \mathbb{Z},
 \end{aligned}$$

оскільки $\sqrt{p^2 + 1} - p$ – дійсне додатне число. Аналогічно,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Ln}\left(-p - \sqrt{p^2 + 1}\right) = \\ & = \ln\left|-p - \sqrt{p^2 + 1}\right| = i \arg\left(-p - \sqrt{p^2 + 1}\right) + 2pki = \\ & = \ln\left(p + \sqrt{p^2 + 1}\right) + ip + 2pki, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

оскільки $-p - \sqrt{p^2 + 1}$ – дійсне від'ємне число. Остаточню для z одержимо:

$$z = -i \ln\left(\sqrt{p^2 + 1} - p\right) + 2pk,$$

$$z = -i \ln\left(\sqrt{p^2 + 1} + p\right) + p(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 1.4.

а) Знайти множину точок на площині комплексної змінної z , що задовольняють умову

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| < \left|1 - \frac{1}{2}z\right|.$$

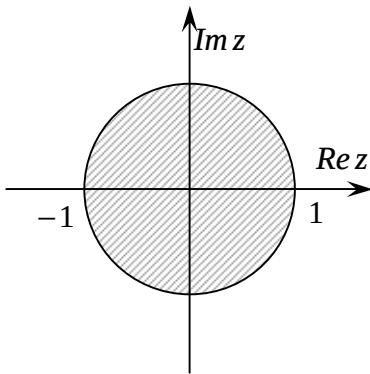


Рисунок 1.3

б) Записати рівняння рівнобічної гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$ в комплексній формі.

Розв'язок. а) Нехай $z = x + iy$. Тоді нерівність набуває вигляду:

$$\left|\left(x - \frac{1}{2}\right) + iy\right| < \left|\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}iy\right|.$$

За означенням модуля маємо:

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} < \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{4}y^2}.$$

Розв'язуючи цю нерівність, одержуємо:

$$x^2 + y^2 < 1.$$

Це є внутрішня область одиничного кола (рис. 1.3).

б) Нехай $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Звідси отримуємо:

$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Підставляючи останнє в задане рівняння, знаходимо:

$$z^2 + (\bar{z})^2 = 2a^2.$$

Це і буде рівняння гіперболи в комплексній формі. ■

Функція $w = f(z)$ здійснює відображення точок комплексної площини z на відповідні точки комплексної площини w . Нехай $z = x + iy$ і $w = u + iv$. Тоді залежність $w = f(z)$ може бути описана за допомогою двох дійсних функцій u і v дійсних змінних x і y :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}.$$

При дослідженні функції на аналітичність користуються умовами Коші – Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Існування частинних похідних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, а також виконання рівностей (1.8) є необхідною умовою аналітичності функції $f(z)$, а за додаткової вимоги диференційовності функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ – достатньою умовою аналітичності.

Приклад 1.5. а) Дослідити функцію $w = ze^z$ на диференційовність. б) Відновити аналітичну в околі точки 0 функцію за її уявною частиною $v(x, y) = 2 \cos x \cosh y - x^2 + y^2$, якщо $f(0) = 2$.

Розв'язок. а) Виділимо дійсну і уявну частини $u(x, y)$ і $v(x, y)$ заданої функції:

$$w = u + iv = (x + iy)e^{x+iy} = (x + iy)(\cos y + i \sin y)e^x =$$

$$= xe^x \cos y - ye^x \sin y + ie^x(y \cos y + x \sin y),$$

звідки

$$\begin{cases} u = e^x(x \cos y - y \sin y) \\ v = e^x(y \cos y - x \sin y) \end{cases}.$$

Функції u і v диференційовні в будь-якій точці площини XOY .
Перевіримо виконання умов Коші – Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(x \sin y + \sin y + y \cos y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y).$$

Як бачимо, умови Коші – Рімана виконуються в будь-якій точці площини XOY , отже, функція ze^z диференційовна на всій комплексній площині.

б) Якщо $f(z)$ аналітична, то її уявна і дійсна частини задовольняють умови Коші – Рімана (1.8). Користуючись першою умовою, одержуємо:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dx + y(y) = \int (2 \cos xshy + 2y) dx + y(y) = \\ &= 2 \sin xshy + 2xy + y(y). \end{aligned}$$

Із другої умови одержуємо рівність:

$$2 \sin xchy + 2x + y'(y) = -(-2 \sin xchy - 2x),$$

звідки $y'(y) = 0$ і $y(y) = C$. Отже, маємо:

$$u(x, y) = 2 \sin xshy + 2xy + C;$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 2 \sin xshy + 2xy + C + i(2 \cos xchy - x^2 + y^2) = \\ &= 2i(\cos x \cos iy - \sin x \sin iy) - (x^2 + 2xyi - y^2) + C = \\ &= 2i \cos(x + iy) - i(x + iy)^2 + C = 2i \cos z - iz^2 + C. \end{aligned}$$

Сталу C знаходимо із умови $f(0) = 2$: $2i + C = 0$, звідки $C = -2i$. Остаточню маємо:

$$f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2. \blacksquare$$

Приклад 1.6. Обчислити інтеграл $\int_C \frac{dz}{|z|}$, де C – півколо $|z| = 1$,

$$-\frac{p}{2} \leq \arg z \leq \frac{p}{2}.$$

Розв’язок. Зобразимо контур інтегрування (рис. 1.4). Напрямок обходу позначений стрілкою. Будь-яке z , що лежить на цьому контурі, можна представити в показниковій формі:

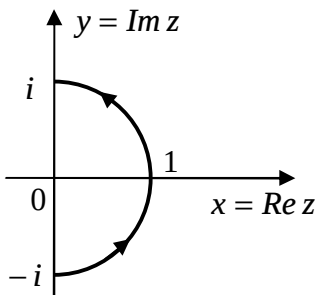


Рисунок 1.4

$$z = e^{ij}, \text{ де } -\frac{p}{2} \leq j \leq \frac{p}{2};$$

$$|z| = 1, dz = ie^{ij} dj.$$

Тоді одержуємо:

$$\int_C \frac{dz}{|z|} = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} ie^{ij} dj = e^{ij} \Big|_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} = e^{i\frac{p}{2}} - e^{-i\frac{p}{2}} =$$

$$= \left(\cos \frac{p}{2} + i \sin \frac{p}{2} \right) - \left(\cos \frac{p}{2} - i \sin \frac{p}{2} \right) = i + i = 2i. \blacksquare$$

Нехай $f(z)$ – аналітична в області D і на її границі C функція; границя C області D – кусково-гладкий замкнений контур. Тоді справедлива інтегральна формула Коші:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad z_0 \in D, \quad (1.9)$$

де обхід контура C такий, що область D залишається весь час зліва. Для будь-якого натурального n за тих же умов справедлива формула:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad z_0 \in D. \quad (1.10)$$

Приклад 1.7. Обчислити інтеграл:

$$a) \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz;$$

$$б) \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz.$$

Розв'язок. а) Всередині кола $|z|=1$ знаменник дробу перетворюється в нуль в точці $z_0 = 0$. Щоб застосувати формулу (1.9), перепишемо інтеграл в наступному вигляді:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{e^z / (z+2)}{z} dz.$$

Тут $z_0 = 0$ і функція $f(z) = \frac{e^z}{z+2}$ є аналітичною в крузі $|z| \leq 1$. Тому

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

б) В якості $f(z)$ розглянемо $\cos z$. Ця функція аналітична в крузі $|z| \leq 1$. Покладаючи в формулі (1.10) $n = 2$, маємо:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i (-\cos z)_{z=0} = -\pi i. \blacksquare$$

2 ІНТЕГРУВАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Радіус збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

обчислюють за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (2.1)$$

або

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

(границя (2.2) існує завжди, скінченна або нескінченна, а границя (2.1) може і не існувати). Заданий ряд збігається в області $|z - z_0| < R$.

Радіус збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ обчислюють

за аналогічними формулами:

$$r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \right)^{-1}$$

або

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{-n-1}}{a_{-n}} \right|, \quad (2.3)$$

якщо остання границя існує. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ збігається в області $|z - z_0| > r$.

Приклад 2.1. Визначити область збіжності рядів:

$$а) \sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n ;$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n} .$$

Розв'язок. а) Скористаємось формулою (2.2):

$$R = \left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{|e^{in}|} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|e^{in}|}} = 1 .$$

Область збіжності ряду – $|z| < 1$.

б) За формулою (2.3) визначаємо радіус збіжності:

$$r = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \left| \frac{(1-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Отже, ряд збігається в області $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. ■

Аналітична і однозначна в області $r < |z - z_0| < R$ функція $f(z)$ розкладається в цьому кільці в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

де коефіцієнти c_n обчислюються за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Тут G – довільне коло з центром в точці z_0 , що лежить всередині даного кільця. На практиці формулами (2.4) користуються рідко, звичайно використовують відомі розвинення елементарних функцій в ряд Тейлора, а також розвинення:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \quad (2.5)$$

Приклад 2.2. Розкласти в ряд Лорана у вказаних областях функції:

а) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}, \quad 0 < |z| < \infty;$

б) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad 2 < |z| < 3.$

Розв'язок. а) Для будь-якого комплексного z маємо:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \text{ Покладаючи } z = \frac{1}{z}, \text{ одержуємо для будь-якого } z \neq 0:$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots,$$

або

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots \right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4! z} + \dots$$

б) Перетворимо $f(z)$ наступним чином:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}.$$

Розкладемо функцію $\frac{1}{z-3}$ в ряд, користуючись формулами (2.5):

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-3 \left(1 - \frac{z}{3} \right)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{3} \right)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Цей ряд збігатиметься при $\left| \frac{z}{3} \right| < 1$, тобто при $|z| < 3$. Розкладемо

тепер функцію $\frac{1}{z-2}$:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{2}{z} \right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{z} \right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

Цей ряд збігатиметься при $\left| \frac{2}{z} \right| < 1$, тобто при $|z| > 2$. Отже, функція

$f(z)$ розкладається в ряд Лорана наступним чином:

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

Це розвинення має місце при $2 < |z| < 3$. ■

Для обчислення комплексних інтегралів вздовж замкнутого контура користуються теоремою Коші про лишки.

Інтеграли типу

$$\int_0^{\infty} R(x) \cos l x dx, \quad \int_0^{\infty} R(x) \sin l x dx$$

(де $R(x)$ – правильний раціональний дріб, $l > 0$) обчислюються за допомогою леми Жордана.

Нехай $f(x) = \frac{Q_n(x)}{P_m(x)}$ – раціональна функція, причому

$m \geq n + 2$ і $P_m(x) \neq 0$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i s, \quad (2.6)$$

де s – сума лишків функції $f(x)$ відносно всіх полюсів, що розміщені у верхній півплощині.

Приклад 2.3. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz ;$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=1} z \cdot \operatorname{tg} p z dz ;$$

$$\text{в) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx ;$$

$$\text{г) } \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{1 + x^2} dx .$$

Розв'язок. а) Для обчислення інтегралу скористаємось теоремою Коші про лишки. Контур інтегрування – одиничне коло. Підінтегральна функція всередині контура інтегрування має єдину особливу точку $z_0=0$. Отже, за теоремою Коші про лишки маємо:

$$\oint_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0),$$

де $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$. Знайдемо лишок $\operatorname{res} f(0)$. За одним із означень лишок функції $f(z)$ відносно особливої точки z_0 – це коефіцієнт при $\frac{1}{z - z_0}$ в розвиненні функції в ряд Лорана в околі точки z_0 . Випишемо

ряд Лорана підінтегральної функції в околі точки $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \sin \frac{1}{z} = z^3 \left(\frac{1}{z} - \frac{(1/z)^3}{3!} + \frac{(1/z)^5}{5!} - \frac{(1/z)^7}{7!} + \mathbf{K} \right) = \\ &= z^3 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \frac{1}{z^5 \cdot 5!} - \frac{1}{z^7 \cdot 7!} + \mathbf{K} \right) = \\ &= z^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{z^2 \cdot 5!} - \frac{1}{z^4 \cdot 7!} + \mathbf{K} + (-1)^n \frac{1}{z^{2n-2} \cdot (2n+1)!} + \mathbf{K} \end{aligned}$$

Очевидно, що коефіцієнт при $\frac{1}{z}$ дорівнює нулю. Таким чином,
 $\operatorname{res} f(0) = 0$, і

$$\oint_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{2} dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

б) В крузі $|z| \leq 1$ функція $z \cdot \operatorname{tg} pz$ аналітична всюди, крім точок $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2}$, які є простими полюсами. Всі інші особливі точки $z_n = -\frac{1}{2} + pn$, $n \in \mathbb{Z}$ лежать зовні контура інтегрування, тому ми їх не враховуємо.

$$\operatorname{res} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{z \cdot \sin z}{(\cos pz)'} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{z}{p} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2p};$$

$$\operatorname{res} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{z \cdot \sin pz}{(\cos pz)'} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{z}{p} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2p}.$$

Тому за теоремою Коші про лишки маємо:

$$\oint_{|z|=1} z \cdot \operatorname{tg} pz \, dz = 2\pi i \left(\operatorname{res} f\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{res} f\left(-\frac{1}{2}\right) \right) = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

в) Оскільки підінтегральна функція парна, то

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Введемо функцію $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}$, яка на дійсній осі збігається з $f(x)$.

У верхній півплощині функція $f(z)$ має два простих полюси в точках

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{і} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\operatorname{resf}(z_1) = \frac{z^2 + 1}{(z^4 + 1)'} \Big|_{z=z_1} = -\frac{i}{2\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{resf}(z_2) = \frac{z^2 + 1}{(z^4 + 1)'} \Big|_{z=z_2} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Користуючись формулою (2.6), отримуємо:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{p}{\sqrt{2}}.$$

г) Введемо допоміжну функцію $f(z) = \frac{e^{2zi}}{1+z^2}$. Бачимо, що, якщо $z = x$, то $\operatorname{Re} f(z)$ збігається з підінтегральною функцією

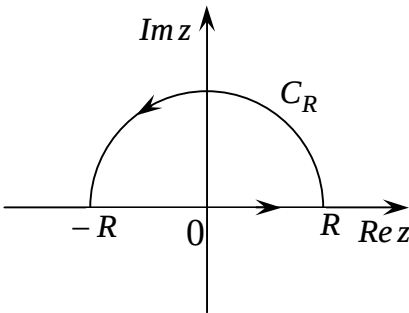


Рисунок 2.1.

$$g(x) = \frac{\cos 2x}{1+x^2}. \quad \text{Розглянемо}$$

контур, вказаний на рис. 2.1. При досить великому R на контурі C_R функція

$$g(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{задовольняє}$$

нерівність $|g(z)| < \frac{1}{R^2 - 1}$, отже,

$g(z)$ прямує до нуля, якщо

$R \rightarrow \infty$. За лемою Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2} dz = 0. \quad (2.7)$$

Для будь-якого R за теоремою Коші маємо:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{2ix}}{1+x^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2} dz = 2\pi i s,$$

$$\text{де } s = \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{2iz}}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{2iz}(z-i)}{1+z^2} = \frac{1}{2ie^2}.$$

В граничному випадку при $R \rightarrow \infty$, враховуючи (2.7), одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx = \frac{p}{e^2}.$$

Із парності підінтегральної функції остаточно одержуємо:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx = \frac{p}{2e^2}. \blacksquare$$

3 ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

При знаходженні зображень за заданими оригіналами користуються, як правило, таблицями перетворень Лапласа для елементарних функцій. Окрім того, можна використовувати властивості перетворення Лапласа.

Приклад 3.1. Знайти зображення заданих функцій-оригіналів:

а) $f(t) = \sin^2 t$;

б) $f(t) = t^2 e^t$;

в) $f(t) = \int_0^t e^t dt$;

г) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$;

д) $f(t) = e^{-t} \cos 2t$;

е) $f(t) = (t-1)^2 h(t-1)$;

є) $f(t)$ задана графічно – рис. 3.1;

ж) $f(t)$ задана графічно – рис. 3.2;

з) $f(t) = \begin{cases} 0; & t < 1 \\ t^2; & 1 < t < 2 \\ 0; & t > 2 \end{cases}$;

і) $f(t)$ задана графічно – рис. 3.3;

к) $f(t) = \int_0^t (t-t) e^t dt$.

Розв'язок. а) Skorистаємось теоремою про диференціювання оригіналу. Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тоді $f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$. Але

$$f(0) = 0, \quad \text{а} \quad f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \leftrightarrow \frac{2}{p^2 + 4}. \quad \text{Отже,}$$

$$\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p), \text{ звідки:}$$

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \leftrightarrow \sin^2 t.$$

б) Маємо з таблиць $e^t \leftrightarrow \frac{1}{p-1}$. За теоремою про диференціювання зображення $\left(\frac{1}{p-1}\right)' \leftrightarrow -te^t$, звідки

$$\frac{1}{(p-1)^2} \leftrightarrow te^t. \text{ Далі:}$$

$$\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)' \leftrightarrow -t(te^t),$$

або

$$\frac{2}{(p-1)^3} \leftrightarrow t^2 e^t.$$

в) Маємо з таблиць $e^t \leftrightarrow \frac{1}{p-1}$. За теоремою про інтегрування оригіналу одержимо:

$$\int_0^t e^t dt \leftrightarrow \frac{1}{p} \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

г) Як відомо, $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$. Тому за теоремою про інтегрування зображення маємо:

$$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \arctg p \Big|_p^\infty = \frac{p}{2} - \arctg p = \text{arcctg} p$$

(для багатозначних функцій $Arctgz$, $Arcctgz$ беремо їхні головні гілки, для яких $arctg 1 = arcctg 1 = \frac{p}{4}$).

д) За таблицями знаходимо $\cos 2t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 4}$. За теоремою зміщення ($p_0 = -1$) одержимо:

$$e^{-t} \cos 2t \leftrightarrow \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

е) Для функції $t^2 h(t)$ маємо:

$$t^2 h(t) \leftrightarrow \frac{2}{p^3}.$$

За теоремою загалювання для функції $(t-1)^2 h(t-1)$ матимемо

$$(t-1)^2 h(t-1) \leftrightarrow e^{-p} \frac{2}{p^3}.$$

Тут істотним є той факт, що шукається зображення функції $(t-1)^2 h(t-1)$, тобто функції, яка дорівнює нулю при $t < 1$. Якщо ж розглянути функцію $(t-1)^2 h(t)$, то для неї ми би отримали $(t^2 - 2t + 1)h(t)$, і за властивістю лінійності:

$$(t-1)^2 h(t) = (t^2 - 2t + 1)h(t) \leftrightarrow \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

є) Знайдемо за графіком аналітичний вираз для функції $f(t)$.

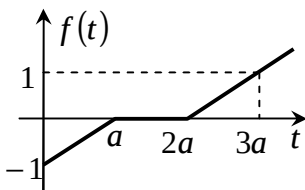


Рисунок 3.1

1) Для $t \in (0; a)$ функція $f(t)$ задається формулою

$$f(t) = \frac{t-a}{a} h(t). \quad (3.1)$$

2) Для $t \in (a; 2a)$ маємо $f(t) = 0$.

3) Для $t > 2a$ функція $f(t)$ задається формулою

$$f(t) = \frac{t-2a}{a} h(t-2a).$$

Припускаючи, що функція $f(t)$ задана формулою (3.1) для всіх $t > 0$, з'ясуємо, яку функцію $y_1(t)$ потрібно до неї додати, щоб одержати функцію $f(t) = 0$ для всіх $t > a$. Вимагаючи, щоб при $t > a$ виконувалась умова

$$\frac{t-a}{a} + y_1(t) = 0,$$

знайдемо

$$y_1(t) = -\frac{t-a}{a} h(t-a).$$

Далі знаходимо таку функцію $y_2(t)$, щоб в сумі з $f(t) = 0$ одержати функцію $\frac{t-2a}{a}$ для всіх $t > 2a$. Це нам дає

$$0 + y_2(t) = \frac{t-2a}{a},$$

звідки

$$y_2(t) = \frac{t-2a}{a} h(t-2a).$$

Таким чином, для всіх $t > 0$ одержимо:

$$f(t) = \frac{t-a}{a} h(t) - \frac{t-a}{a} h(t-a) + \frac{t-2a}{a} h(t-2a).$$

Користуючись властивістю лінійності і теоремою загальовання, знаходимо зображення $F(p)$ даної функції $f(t)$:

$$F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2} e^{-ap} - \frac{1}{ap^2} e^{-2ap}.$$

ж) Знайдемо за графіком аналітичний вираз для функції $f(t)$.

1) $f(t) = 1$ для $t \in (0; a)$.

2) $f(t) = 0$ для $t \in (a; 2a)$.

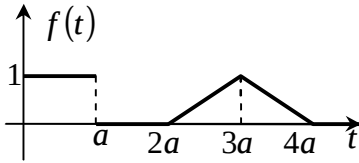


Рисунок 3.2

$$3) f(t) = \frac{t-2a}{a} \text{ для } t \in (2a; 3a).$$

$$4) f(t) = 1 - \frac{t-3a}{a} \text{ для } t \in (3a; 4a).$$

$$5) f(t) = 0 \text{ для } t > 4a.$$

Для $t \in (0; a)$ маємо:

$$f(t) = 1. \text{ Далі знаходимо функцію}$$

$y_1(t)$ таку, щоб при $t > a$ виконувалось співвідношення $1 + y_1(t) = 0$, звідки $y_1(t) = -1 \cdot h(t-a)$.

Тепер знаходимо функцію $y_2(t)$ таку, щоб при $t > 2a$ виконувалось співвідношення $0 + y_2(t) = \frac{t-2a}{a}$. Звідси

$$y_2(t) = \frac{t-2a}{a} h(t-2a).$$

Аналогічно знаходимо функції:

$$y_3(t) = -2 \frac{t-3a}{a} h(t-3a), \quad y_4(t) = \frac{t-4a}{a} h(t-4a).$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} f(t) = & h(t) - h(t-a) + \frac{t-2a}{a} h(t-2a) - \\ & - 2 \frac{t-3a}{a} h(t-3a) + \frac{t-4a}{a} h(t-4a). \end{aligned}$$

Користуючись властивістю лінійності і теоремою загасання, знаходимо зображення $F(p)$ даної функції $f(t)$:

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-2ap} - \frac{2}{ap^2} e^{-3ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-4ap}.$$

3) Виразимо $f(t)$ через степені різниць $t-1$ і $t-2$. Маємо:

$$t^2 = [(t-1)+1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1,$$

$$t^2 = [(t-2)+2]^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4.$$

Отже, дана функція $f(t)$ запишеться у вигляді

$$f(t) = \left[(t-1)^2 + 2(t-1) + 1 \right] h(t-1) - \left[(t-2)^2 + 4(t-2) + 4 \right] h(t-2).$$

Переходячи до зображень, одержимо:

$$f(t) \leftrightarrow F(p) = \left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} \right) e^{-p} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} \right) e^{-2p}.$$

і) Зображення для періодичної функції знаходимо за формулою

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt, \quad (3.2)$$

де T – період. Аналітичний вираз для даної функції:

$$f(t) = \begin{cases} t; & 0 < t < 1 \\ 2-t; & 1 < t < 2 \end{cases}$$

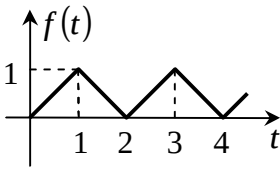


Рисунок 3.3

Підставляючи цей вираз в (3.2) і враховуючи, що $T = 2$, одержимо:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left[\int_0^1 t e^{-pt} dt + \int_1^2 (2-t) e^{-pt} dt \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left[\left(-\frac{t}{p} - \frac{1}{p^2} \right) e^{-pt} \Big|_0^1 + \left(-\frac{2-t}{p} + \frac{1}{p^2} \right) e^{-pt} \Big|_1^2 \right] = \frac{1 - e^{-p}}{p^2(1 + e^{-p})}. \end{aligned}$$

к) Функція $f(t)$ є згорткою функцій $y(t) = t$ і $j(t) = e^t$. За теоремою про згортку (теорема множення зображень) одержимо:

$$f(t) \leftrightarrow F(p) = Y(p)F(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}. \blacksquare$$

Для знаходження оригінала $f(t)$ по відомому зображенню $F(p)$ застосовують наступні прийоми.

І. Якщо $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то

його розкладають в суму простих дробів і знаходять оригінали для кожного простого дробу, користуючись властивостями перетворення Лапласа та таблицями.

II. Можна скористатись другою теоремою розкладання, яка стверджує, що за певних умов, накладених на $F(p)$, оригіналом для $F(p)$ слугує функція

$$f(t) = \sum_{p_k} \text{res}[F(p)e^{pt}],$$

де сума лишків береться за всіма особливими точками p_k функції $F(p)$.

Зокрема, якщо $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб,

то оригіналом для $F(p)$ слугує функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} [F(p)e^{pt}(p - p_k)^{n_k}]^{n_k - 1}, \quad (3.3)$$

де p_k – полюси функції $F(p)$ кратності n_k і сума в (3.3) береться за всіма полюсами функції $F(p)$.

Якщо всі полюси функції $F(p)$ прості, то формула (3.3) спрощується і набуває вигляду:

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Приклад 3.2. Для даних зображень знайти оригінали:

а) $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$; б) $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$;

в) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1}$; г) $F(p) = \frac{p}{(p^2-1)^2}$.

Розв'язок. а) Розкладаємо $F(p)$ на суму простих дробів:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Знаходячи коефіцієнти A, B, C, D , одержуємо:

$$F(p) = -\frac{1}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+4}.$$

Оригінали для кожного простого дробу правої частини рівності знаходимо за таблицями. Використовуючи властивість лінійності, отримуємо:

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

б) У даному випадку $F(p)$ вже є простим дробом. Для знаходження оригіналу скористаємось теоремою про згортку (про множення зображень), а також тим, що $\frac{1}{p^2 + 1} \leftrightarrow \sin t$. Маємо:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{(p^2 + 1)^2} = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \leftrightarrow \int_0^t \sin(t-t) \sin t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t - \cos(2t-t)] dt = \left(\frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{4}\sin(2t-t) \right) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{2}\sin t. \end{aligned}$$

в) Наявність множника e^{-p} вказує на необхідність застосування теореми загалювання. Тут $t = 1$, $\frac{1}{p+1} \leftrightarrow e^{-t}$, тому:

$$\frac{e^{-p}}{p+1} \leftrightarrow e^{-(t-1)}h(t-1).$$

г) Функція $F(p)$ має полюси $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, кожний кратності 2. За формулою (3.3):

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2} \right)'_p + \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2} \right)'_p = \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{((1+tp)(p+1) - 2p)e^{pt}}{(p+1)^3} + \lim_{p \rightarrow -1} \frac{((1+tp)(p-1) - 2p)e^{pt}}{(p-1)^3} = \\ &= \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}te^{-t} = \frac{1}{2}tsht. \blacksquare \end{aligned}$$

Операційний метод дозволяє розв'язувати задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 3.3. Розв'язати задачу Коші.

а) $x'' + x = 2 \cos t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

б) $x'' + x = f(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$, $f(t)$ – рис. 3.4.

Розв'язок. а) Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою про диференціювання оригіналу $x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1$. Крім того, за таблицями маємо $\cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1}$. Операторне рівняння має вигляд:

$$p^2 X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1}.$$

Розв'язуємо відносно невідомої функції $X(p)$:

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1} - 1, \quad X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Це операторний розв'язок. Знайдемо для нього оригінал.

Оригінал для функції $\frac{1}{p^2 + 1}$:

$$\frac{1}{p^2 + 1} \leftrightarrow \sin t.$$

Для знаходження оригіналу для функції $\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$ скористаємось, наприклад, теоремою про диференціювання зображення:

$$\frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = - \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)' \leftrightarrow t \sin t.$$

Отже, $X(p) \leftrightarrow t \sin t - \sin t = (t - 1) \sin t$. Остаточно одержали:

$$x(t) = (t - 1) \sin t.$$

б) Для функції $f(t)$, заданої графічно, знайдемо аналітичну форму запису:

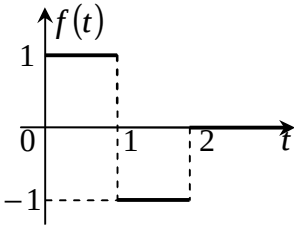


Рисунок 3.4

$f(t) = h(t) - 2h(t-1) + h(t-2)$.
Застосовуючи теорему загалювання, знайдемо зображення цієї функції:

$$\begin{aligned} f(t) &\leftrightarrow \frac{1}{p} - 2\frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} = \\ &= \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}). \end{aligned}$$

Покладаючи $x(t) \leftrightarrow X(p)$ та враховуючи початкові умови, одержимо: $x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p)$.

Операторне рівняння:

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}).$$

Розв'язуючи його, одержимо:

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2 + 1)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2 + 1)}.$$

Це операторний розв'язок. Знайдемо для нього оригінал.

Оскільки $\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$, то за таблицями маємо:

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} \leftrightarrow (1 - \cos t)h(t).$$

За теоремою загалювання:

$$\frac{e^{-p}}{p(p^2 + 1)} \leftrightarrow (1 - \cos(t-1))h(t-1), \quad \frac{e^{-2p}}{p(p^2 + 1)} \leftrightarrow (1 - \cos(t-2))h(t-2).$$

Отже,

$$x(t) = (1 - \cos t)h(t) - 2(1 - \cos(t-1))h(t-1) + (1 - \cos(t-2))h(t-2),$$

або остаточно:

$$x(t) = 2 \left[\sin^2 \frac{t}{2} h(t) - 2 \sin^2 \frac{t-1}{2} h(t-1) + \sin^2 \frac{t-2}{2} h(t-2) \right]. \blacksquare$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 3-х ч. Ч. 3 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980. – 288 с.
2. Краснов М.Т. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Т. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 304 с.
3. Лаврентьев М.А. Шабат В.В. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, В.В. Шабат. – М. : Наука, 1987. – 688 с.
4. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М. : Просвещение, 1977. – 320 с.
5. Сборник задач по курсу Высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973. – 576 с.
6. Розрахунково-графічні завдання з теорії функцій комплексної змінної (конспект лекцій) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. – 42 с.