

УДК:[62-754.2:62-585.862]:519.711/718

А. В. Куземко¹, канд. физ.-мат. наук И. А. Костюшко²

¹Национальный технический университет, ²Национальный университет;
г. Запорожье

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И АВТОКОЛЕБАНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Рассматривается задача о колебаниях гироскопа в кардановом подвесе. Исследуется устойчивость системы под действием нелинейных диссипативных и циркулярных сил. Найдено условие асимптотической устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней. Рассмотрен так же случай автоколебания системы.

Ключевые слова: гироскоп, кардановый подвес, критический случай, резонанс.

1 Уравнения движения

Рассматривается сбалансированный кардановый подвес гироскопа, размещенный на неподвижной подставке. Ось внешнего кольца карданового подвеса горизонтальна и вращение определяется углом α . Вращение во внутреннем кольце характеризуется углом β .

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \left[(A - C \sin^2 \beta) \dot{\alpha}^2 + B \dot{\beta}^2 + C (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 \right],$$

$$A = A_0 + A_1 + A_2, \quad B = A_0 + D_1, \quad C = A_0 + A_1 - C_1,$$

где A_2 – момент инерции внешнего кольца по отно-

шению к оси вращения; A_1, B_1, C_1 – моменты инерции по отношению к главным осям, связанных с этим кольцом; A_0, C_0 – экваториальные и полярные моменты инерции гироскопа; φ – угол отклонения гироскопа; точка означает производную по времени t .

Уравнения движения гироскопа получаем согласно уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_{\alpha}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = Q_{\beta}, \end{cases}$$

где обобщенные силы Q_α, Q_β выбираем в следующем виде:

$$Q_\alpha = -(B_1\dot{\alpha} + D_1\dot{\alpha}^3 + E\beta), \quad Q_\beta = -(B_2\dot{\beta} + D_2\dot{\beta}^3 - E\alpha).$$

Слагаемые $E\alpha, E\beta$ соответствуют циркулярным силам, возникающих в опорах ротора, слагаемые $B_1\dot{\alpha} + D_1\dot{\alpha}^3, B_2\dot{\beta} + D_2\dot{\beta}^3$ – диссипативным силам, E, B_1, B_2, D_1, D_2 – заданные положительные постоянные.

После исключения циклической координаты φ [1] уравнения движения гироскопа принимают вид

$$\begin{cases} (A - C \sin^2 \beta)\ddot{\alpha} - C\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin 2\beta + H\dot{\beta} \cos \beta + B_1\dot{\alpha} + D_1\dot{\alpha}^3 + E\beta = 0, \\ B\ddot{\beta} + C\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H\dot{\alpha} \cos \beta + B_2\dot{\beta} + D_2\dot{\beta}^3 - E\alpha = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где H – циклическая постоянная.

Очевидно, что уравнения (1) допускают решение

$$\alpha = \beta = 0, \quad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0, \quad (2)$$

устойчивость которого мы в дальнейшем будем исследовать.

Вводя безразмерное время $\tau = \frac{tH}{\sqrt{AB}}$, получаем уравнения движения (1) в безразмерной форме

$$\begin{cases} (1 - a \sin^2 \beta)\alpha'' - C\alpha'\beta' \sin 2\beta + h\beta' \cos \beta + b_1\alpha' + d_1\alpha'^3 + e\beta = 0; \\ h^2\beta'' + a\alpha'^2 \sin \beta \cos \beta - h\alpha' \cos \beta + b_2\beta' + d_2\beta'^3 - e\alpha = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $a = \frac{C}{A}, h = \sqrt{\frac{B}{A}}, b_1 = \frac{B_1}{H} \sqrt{\frac{B}{A}}, b_2 = \frac{B_2}{H} \sqrt{\frac{B}{A}},$

$d_1 = \frac{D_1H}{\sqrt{A^3B}}, d_2 = \frac{D_2H}{\sqrt{A^3B}}, e = \frac{EB}{H^2}$; штрих означает

производную по τ .

2 Исследование устойчивости по первому приближению

Раскладывая нелинейные слагаемые уравнений системы (3) в окрестности решения (2) в ряды Тейлора, запишем систему первого приближения

$$\begin{cases} \alpha'' + b_1\alpha' + h\beta' + e\beta = 0, \\ h^2\beta'' + b_2\beta' - h\alpha' - e\alpha = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Согласно критерия Рауса-Гурвица соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} h^2\lambda^4 + (b_1h^2 + b_2)\lambda^3 + \\ + (b_1b_2 + h^2)\lambda^2 + 2eh\lambda + e^2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

при $e < \tilde{e}, \tilde{e} = \frac{2h(b_1h^2 + b_2)(b_1b_2 + h^2)}{4h^4 + (b_1h^2 + b_2)^2}$ имеет корни с

отрицательными действительными частями, т.е. решение (2) асимптотически устойчиво. При $e > \tilde{e}$ корни уравнения (5) имеют положительные действительные части, т.е. решение (2) неустойчиво.

При $e = \tilde{e}$ характеристическое уравнение (5) имеет два корня с отрицательными действительными частями и пару чисто мнимых корней

$$\lambda_{1,2} = \pm i\tilde{\lambda}, \quad \tilde{\lambda} = 2h \sqrt{\frac{b_1b_2 + h^2}{4h^4 + (b_1h^2 + b_2)^2}}.$$

Присутствие пары чисто мнимых корней подразумевает критический случай устойчивости. Следовательно, проблему устойчивости следует решать, учитывая нелинейные слагаемые системы (3).

3 Исследование устойчивости в критическом случае

Введем обозначения: $z_1 = \alpha, z_2 = \beta, z_3 = \alpha', z_4 = \beta'$. Раскладывая нелинейные слагаемые системы (3) в окрестности решения (2) в ряды, ограничиваясь членами до третьего порядка включительно, запишем систему (3) в нормальной форме при $e = \tilde{e}$:

$$\begin{cases} z_1' = z_3; \\ z_2' = z_4; \\ z_3' = -\tilde{e}z_2 - b_1z_3 - hz_4 + Z_3(z_1, z_2, z_3, z_4) + \dots; \\ z_4' = \frac{\tilde{e}}{h^2}z_1 + \frac{1}{h}z_3 - \frac{b_2}{h^2}z_4 + Z_4(z_1, z_2, z_3, z_4) + \dots, \end{cases}$$

где многоточие означает совокупность членов не ниже пятого порядка;

$$\begin{aligned} Z_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ = 2az_2z_3z_4 - hz_2^2z_4 \left(a - \frac{1}{2} \right) - ab_1z_2^2z_3 - d_1z_3^3 - \tilde{e}az_2^3; \\ Z_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = -\frac{a}{h^2}z_2z_3^2 - \frac{1}{2h}z_3z_2^2 - \frac{d_2}{h^2}z_4^3. \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (6) вводим новые переменные

$$\begin{aligned} x &= c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 + c_4z_4; \\ y &= \bar{x} = \bar{c}_1z_1 + \bar{c}_2z_2 + \bar{c}_3z_3 + \bar{c}_4z_4; \\ x_1 &= z_1, \quad x_2 = z_2, \end{aligned}$$

где $c_1 = \frac{\tilde{e}}{h} \left(1 - i \frac{b_1}{\tilde{\lambda}} \right), c_2 = \frac{\tilde{e}(\tilde{e} + i\tilde{\lambda}h)}{\tilde{\lambda}^2h},$

$$c_3 = 1 - \frac{\tilde{e}i}{\tilde{\lambda}h}, c_4 = h(i\tilde{\lambda} + b_1);$$

черта означает сопряжение величин. В результате система (6) примет вид:

$$\begin{cases} x' = i\tilde{\lambda}x + Y_1(x, y, x_1, x_2), \\ y' = -i\tilde{\lambda}y + Y_2(x, y, x_1, x_2), \\ x_1' = m_1x + m_2y + m_3x_1 + m_4x_2, \\ x_2' = n_1x + n_2y + n_3x_1 + n_4x_2, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$m_1 = \frac{\bar{c}_4}{\Delta}, m_2 = -\frac{c_4}{\Delta}, m_3 = \frac{\bar{c}_1c_4 - \bar{c}_4c_1}{\Delta}, m_4 = \frac{\bar{c}_2c_4 - \bar{c}_4c_2}{\Delta};$$

$$n_1 = -\frac{\bar{c}_3}{\Delta}, n_2 = \frac{c_3}{\Delta}, n_3 = \frac{\bar{c}_3c_1 - \bar{c}_1c_3}{\Delta},$$

$$n_4 = \frac{\bar{c}_3c_2 - \bar{c}_2c_3}{\Delta}, \quad \Delta = \bar{c}_4c_3 - \bar{c}_3c_4;$$

$$Y_1(x, y, x_1, x_2) = c_3Z_3 \begin{pmatrix} x_1, x_2, m_1x + m_2y + m_3x_1 + m_4x_2 \\ n_1x + n_2y + n_3x_1 + n_4x_2 \end{pmatrix} + c_4Z_4 \begin{pmatrix} x_1, x_2, m_1x + m_2y + m_3x_1 + m_4x_2 \\ n_1x + n_2y + n_3x_1 + n_4x_2 \end{pmatrix};$$

$$Y_2(x, y, x_1, x_2) = \bar{c}_3Z_3 \begin{pmatrix} x_1, x_2, m_1x + m_2y + m_3x_1 + m_4x_2 \\ n_1x + n_2y + n_3x_1 + n_4x_2 \end{pmatrix} + \bar{c}_4Z_4 \begin{pmatrix} x_1, x_2, m_1x + m_2y + m_3x_1 + m_4x_2 \\ n_1x + n_2y + n_3x_1 + n_4x_2 \end{pmatrix}.$$

Согласно основной теоремы о критических случаях [2] систему (8) можно записать в «укороченном» виде

$$\begin{cases} x' = i\tilde{\lambda}x + Y_1(x, y, u_1(x, y), u_2(x, y)), \\ y' = -i\tilde{\lambda}y + Y_2(x, y, u_1(x, y), u_2(x, y)), \end{cases} \quad (9)$$

где $u_1(x, y) = A_1x + B_1y$, $u_2(x, y) = A_2x + B_2y$;

$$A_1 = \frac{-m_1(n_4 - i\tilde{\lambda}) + n_1m_4}{(m_3 - i\tilde{\lambda})(n_4 - i\tilde{\lambda}) - n_3m_4};$$

$$A_2 = \frac{-n_1(m_3 - i\tilde{\lambda}) + n_3m_1}{(m_3 - i\tilde{\lambda})(n_4 - i\tilde{\lambda}) - n_3m_4};$$

$$B_1 = \frac{-m_2(n_4 + i\tilde{\lambda}) + n_2m_4}{(m_3 + i\tilde{\lambda})(n_4 + i\tilde{\lambda}) - n_3m_4};$$

$$B_2 = \frac{-n_2(m_3 + i\tilde{\lambda}) + n_3m_2}{(m_3 + i\tilde{\lambda})(n_4 + i\tilde{\lambda}) - n_3m_4}.$$

Используя метод нормальной формы, можно найти такое полиномиальное преобразование $x = v + Q_3(v, w)$, $y = w + R_3(v, w)$, где Q_3, R_3 – одно-

родные формы третьего порядка, что в правых частях системы (9) останутся лишь резонансные слагаемые. Таким образом, система (9) приводится к виду

$$\begin{cases} v' = i\tilde{\lambda}v + K_3v^2w + \dots, \\ w' = -i\tilde{\lambda}w + \bar{K}_3w^2v + \dots \end{cases} \quad (10)$$

Причем коэффициент K_3 равен коэффициенту при x^2y в разложении функции $Y_1(x, y, u_1(x, y), u_2(x, y))$.

В системе (10) делаем подстановку $v = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = r(\cos\theta - i\sin\theta)$. Приравнивая действительные и мнимые части, приходим к новой системе

$$\begin{cases} r' = \text{Re } K_3 \cdot r^3 + \dots \\ \theta' = \tilde{\lambda} + \text{Im } K_3 \cdot r^3 + \dots \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, задача устойчивости для системы (6) эквивалентна той же задаче для системы (11). Последняя определяется знаком величины $\text{Re } K_3$. Если $\text{Re } K_3 < 0$, то нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво, в противном случае – неустойчиво.

Задавая значения параметров

$\frac{B_1}{H} = 0,25$, $\sqrt{\frac{B}{A}} = 0,8$ (что соответствует значениям реальных приборов [3]), $d_1 = d_2 = d$ построена поверхность $\text{Re } K_3(a, b_2, d) = 0$ (рис. 1). Для значений параметров a, b_2, d , лежащих выше указанной поверхности $\text{Re } K_3 < 0$ (имеет место асимптотическая устойчивость), а ниже – $\text{Re } K_3 > 0$ (неустойчивость).

Приведенные аналитические результаты подтверждаются численными. На рис. 2, 3 приводится численное решение системы дифференциальных уравнений (3) при начальных условиях $\alpha(0) = \alpha'(0) = \beta(0) = \beta'(0) = 0,01$. Согласование численных и аналитических результатов свидетельствуют о достоверности последних.

4 Автоколебания

При переходе величины e через критическое значение \tilde{e} может возникнуть автоколебательный режим гироскопа. Для этого достаточно, что бы два корня характеристического уравнения (5) пересекали мнимую ось с ненулевой скоростью и решение (2) при $e = \tilde{e}$ было асимптотически устойчивым или неустойчивым [19].

Учитывая, что два корня уравнения (5) пересекают мнимую ось с положительной скоростью, полагаем, что параметры системы таковы, что при $e = \tilde{e}$ $\text{Re } K_3 < 0$.

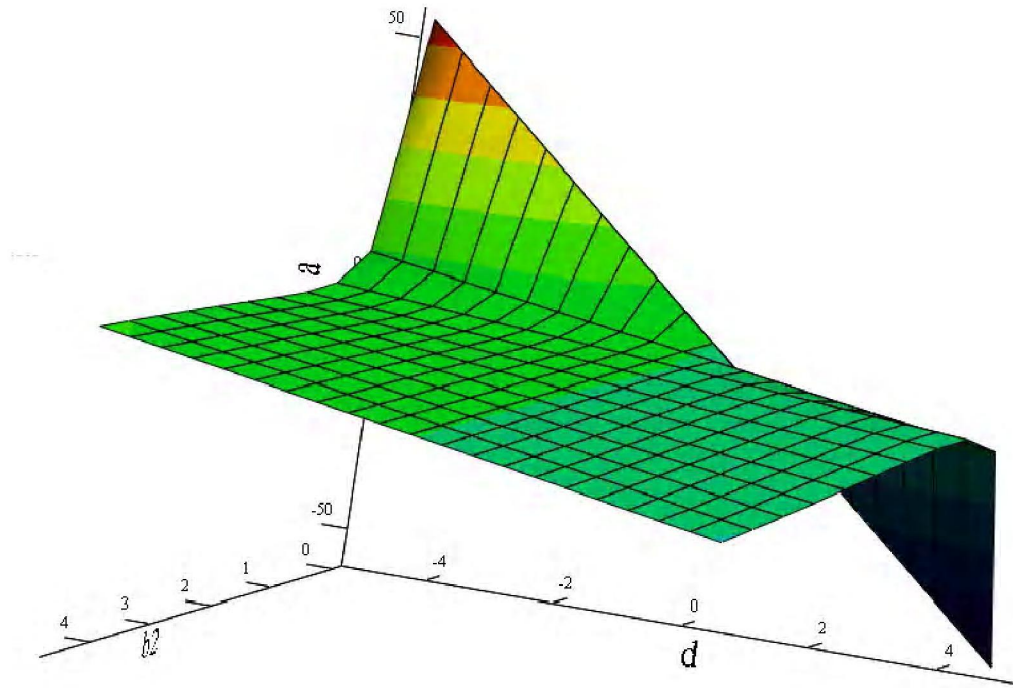


Рис. 1. Область устойчивости решения при значении параметров $h = \frac{4}{5}, b_1 = \frac{1}{5}, d_1 = d_2 = d$

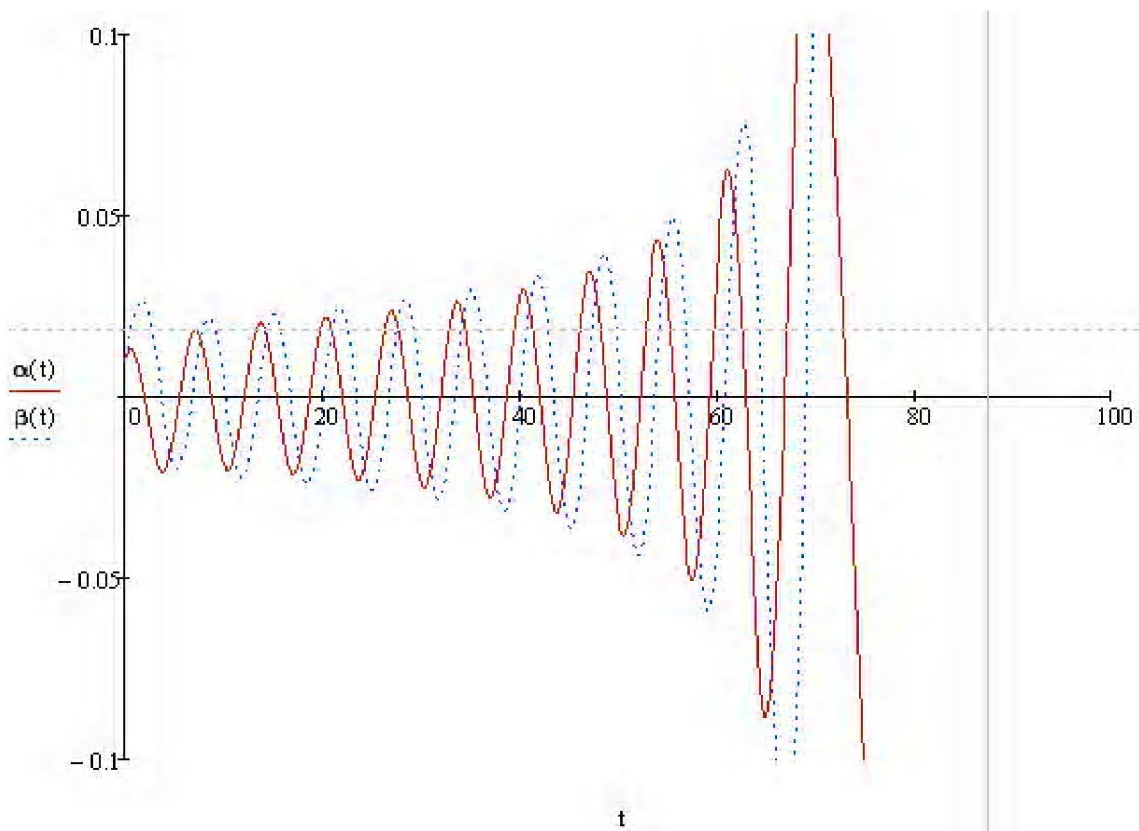


Рис. 2. Неустойчивость в критическом случае при $a = -50, b_1 = \frac{1}{5}, b_2 = \frac{1}{2}, d_1 = d_2 = -4$

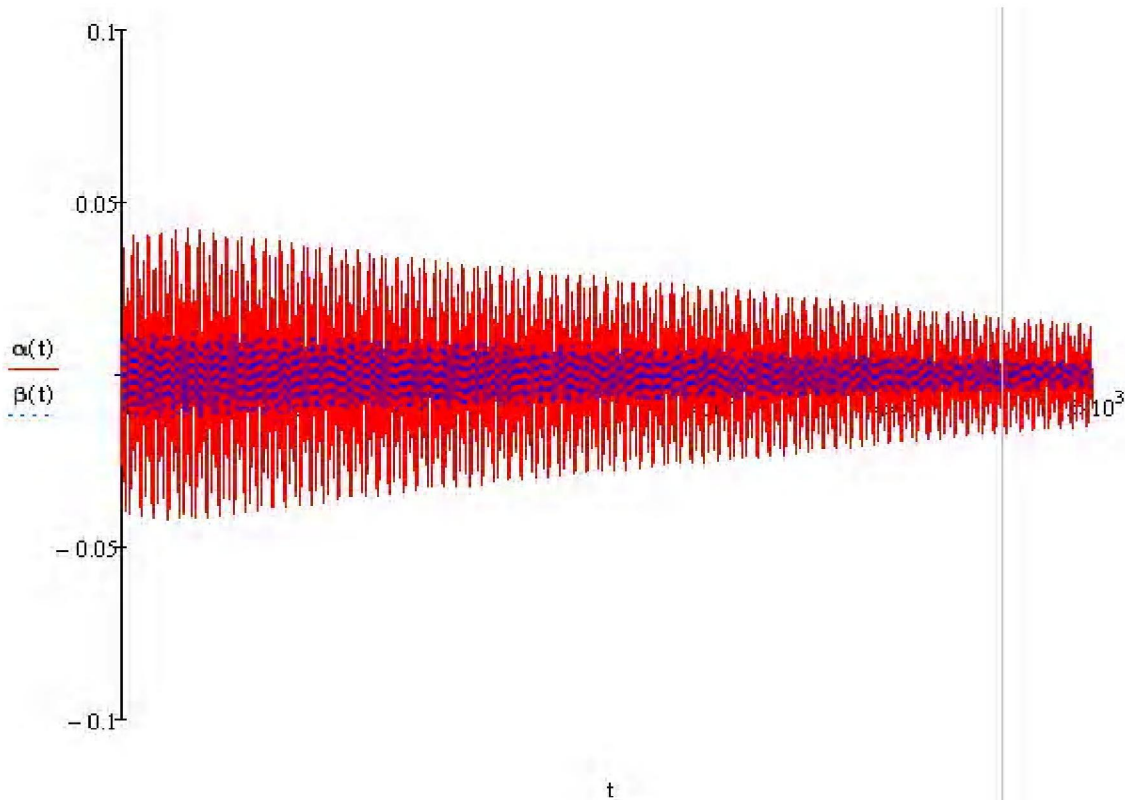


Рис. 3. Устойчивость в критическом случае при $a = 0,1, b_1 = \frac{1}{5}, b_2 = 5, d_1 = d_2 = 0,1, h = 0,8$

В системе (6) полагаем $e = \tilde{e} + \varepsilon$, где ε – малый положительный параметр. Проведя выкладки, аналогичные рассмотренным ранее, приходим к системе

$$\begin{cases} x' = i\tilde{\lambda}x + \varepsilon \left[\left(\frac{A_1 c_4}{h^2} - A_2 c_3 \right) x + \left(\frac{B_1 c_4}{h^2} - c_3 B_2 \right) y \right] + R(x, y), \\ y' = -i\tilde{\lambda}y + \varepsilon \left[\left(\frac{A_1 \bar{c}_4}{h^2} - A_2 \bar{c}_3 \right) x + \left(\frac{B_1 \bar{c}_4}{h^2} - \bar{c}_3 B_2 \right) y \right] + \bar{R}(x, y), \end{cases} \quad (12)$$

где $R(x, y) = F_1 x^3 + F_2 x^2 y + F_3 x y^2 + F_4 y^3$, здесь F_i ($i = \overline{1,4}$) – известные комплексно-значные функции, зависящие от параметров задачи.

В системе (12) делаем замену переменных $x = r e^{i\varphi}, y = \bar{x} = r e^{-i\varphi}$, выделяя действительные и мнимые части, находим выражения для производных r', φ' . Отношение полученных выражений определяет значение $\frac{dr}{d\varphi}$, которое с точностью до ε можно представить в виде:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon r}{\tilde{\lambda}} \cdot E_1(\varphi) + \frac{r^3}{\tilde{\lambda}} E_2(\varphi) + \frac{\varepsilon r^3}{\tilde{\lambda}^2} E_3(\varphi) + \dots, \quad (13)$$

где E_i ($i = \overline{1,3}$) – вполне определенные действительные функции аргумента φ , имеющие следующую структуру:

$$E_i = E_i^1 + E_i^2 \cos 2\varphi + E_i^3 \sin 2\varphi + E_i^4 \cos 4\varphi + E_i^5 \sin 4\varphi + E_i^6 \cos 6\varphi + E_i^7 \sin 6\varphi,$$

где E_i^j – известные действительные величины, являющиеся комбинацией параметров задачи.

Периодическое решение уравнения (13), отвечающее автоколебательному режиму, ищем в виде

$$r = \varepsilon^{1/2} \left(k + \varepsilon p_1 \cos 2\varphi + \varepsilon p_2 \sin 2\varphi + \varepsilon q_1 \cos 4\varphi + \varepsilon q_2 \sin 4\varphi \right) + \dots \quad (14)$$

Здесь многоточие означает члены порядка ε^2 . Постоянные k, p_i, q_i ($i = 1, 2$) определяются путем подстановки выражения (14) в (13).

На рис. 4 приведено графическое решение задачи, отвечающее автоколебательному режиму.

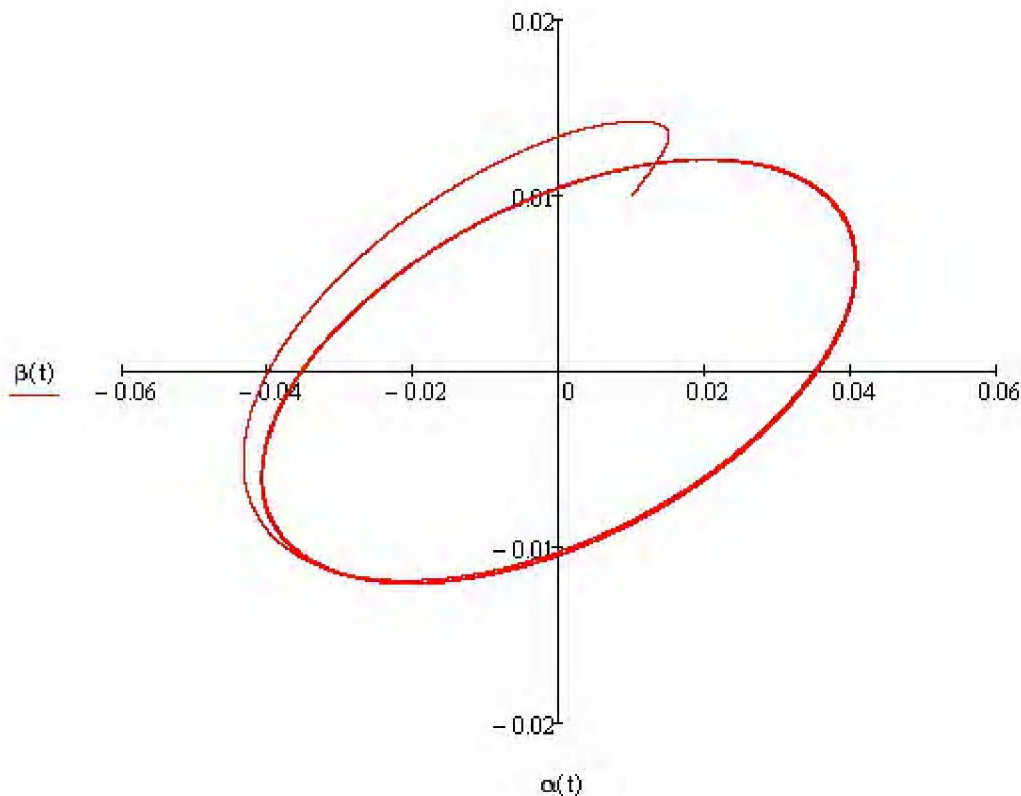


Рис. 4. Автоколебательный режим при значении параметров:
 $d_1 = 0,1, d_2 = 0,1, h = 0,8, b_1 = 0,2, b_2 = 5, a = 0,1, \varepsilon = 0,00007, e = 0,482$

Перечень ссылок

1. Маркеев А. П. Теоретическая механика / Маркеев А. П. – М. : ЧеРо, 1999. – 572 с.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения / Малкин И. Г. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 432 с.
3. Меркин Д. Р. Гирокоптческие системы / Меркин Д. Р. – М. : Наука, 1974. – 344 с.

Одержано 24.11.2010

Куземко А.В., Костюшко І.А. Дослідження стійкості руху і автоколивання гіроскопа в кардановому підвісі

Розглядається задача про коливання гіроскопа в кардановому підвісі. Досліджується стійкість системи під дією нелінійних дисипативних і циркулярних сил. Знайдено умову асимптотичної стійкості в критичному випадку пари чисто уявних коренів. Розглянутий також випадок автоколивання системи.

Ключові слова: гіроскоп, кардановий підвіс, критичний випадок, резонанс.

Kuzemko A., Kostyushko I. Research of gimbal suspension gyro stability and self-excited oscillations

A task about the vibrations of gyroscope in a gimbal is examined. System stability is probed under the action of nonlinear dissipative and circular forces. The condition of asymptotic stability is found in critical case of cleanly imaginary roots pair. The auto-oscillation case of system is considered similar

Key words: gyroscope, gimbal, critical case, resonance.