

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

В.І. Дубровін

**КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ОБРОБКИ ДАНИХ**

Запоріжжя • ЗНТУ • 2013

УДК 004
ББК 22.18
Д 79

*Рекомендовано до друку вченою радою
Запорізького національного технічного університету
(протокол № 9 від 26.04.2010 р.)*

Рецензенти:

Піза Д. М., доктор технічних наук, професор, директор
Інституту інформатики та радіоелектроніки
Запорізького національного технічного
університету

Архипов О. Є., доктор технічних наук, професор кафедри
Інформаційної безпеки Національного технічного
університету України «КПІ»

Дубровін В. І.

Д79 Комп'ютерні методи інтелектуальної обробки даних:
навчальний посібник / В.І. Дубровін, Ю.В. Твердохліб,
В.В. Харченко. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2013. – 105 с.

ISBN 978-611-529-020-8.

Розглянуто як класичні методи дослідження структури сигналів (кореляційний та спектральний аналіз), так і цілий ряд спеціальних методів, призначених для вивчення процесів із змінними характеристиками (вейвлет-аналіз). Особливу увагу приділено сучасним методам аналізу нестационарних випадкових процесів.

Для викладачів, науковців і студентів комп'ютерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 004
ББК 22.18

ISBN 978-611-529-020-8

© Запорізький національний
технічний університет
(ЗНТУ), 2013

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
СПИСОК СКОРОЧЕНЬ.....	7
ОСНОВИ АНАЛІЗУ СИГНАЛІВ.....	8
1.1 Поняття сигналу. Класифікація сигналів	8
1.2 Енергія і потужність сигналу.....	12
1.3 Кореляційний аналіз	14
1.3.1 Кореляційна функція.....	14
1.3.2 Взаємна кореляційна функція.....	15
1.3.3 Зв'язок між кореляційними функціями та спектрами сигналів	16
1.3.4 Енергетичні розрахунки у спектральній області.....	17
1.4 Випадкові сигнали	18
1.4.1 Ансамбль реалізацій.....	18
1.4.2 Ймовірнісні характеристики випадкових процесів ...	18
1.4.3 Стаціонарні та ергодичні випадкові процеси	20
2 СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ.....	21
2.1 Перетворення Фур'є.....	21
2.1.1 Неперервне перетворення Фур'є	21
2.1.2 Віконне перетворення Фур'є	23
2.1.3 Дискретне перетворення Фур'є	23
2.1.4 Швидке перетворення Фур'є	25
2.2 Спектр дискретного випадкового процесу.....	25
2.3 Непараметричні методи	26
2.3.1 Періодограма	26

2.3.2	Метод Уелча	27
2.4	Параметричні методи	28
2.4.1	Авторегресійний метод	29
2.4.2	Метод MUSIC	32
2.4.3	Метод EV	33
3	ПРОГНОЗУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ АР-МОДЕЛІ	35
3.1	Стационарні часові ряди та їх характеристики	35
3.2	Авторегресійна модель	36
3.2.1	AR(1) чи марківський процес	36
3.2.2	AR(2) чи процеси Юла	37
3.3	Прогнозування за АР-моделлю	37
3.4	Побудова АР-моделі в пакеті MATLAB	38
4	ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ	40
4.1	Ідея вейвлет-перетворення	40
4.2	Неперервне вейвлет-перетворення	41
4.3	Апроксимуюча і деталізуюча компоненти	43
4.4	Дискретне вейвлет-перетворення	44
4.5	Швидке вейвлет-перетворення	45
4.6	Стационарне вейвлет-перетворення	46
4.7	Аналіз сингулярностей сигналу на основі вейвлет-перетворення	47
4.8	Трешолдинг вейвлет-коефіцієнтів для видалення шуму ..	48
4.9	Вейвлет-перетворення в MATLAB	48
4.9.1	Вейвлет-базиси та їх властивості	48
4.9.2	Функції вейвлет-перетворення	49
4.9.3	Функції видалення шуму та стиснення	50
4.9.4	Приклад вейвлет-обробки сигналу в Matlab	51
4.10	Вейвлет-перетворення двомірних сигналів	53
4.10.1	Способи представлення зображення	53
4.10.2	Функції вводу-виводу зображення в MATLAB	54
4.10.3	Основні функції двомірного вейвлет-перетворення ..	55
4.10.4	Функції видалення (додавання) шуму до зображення в MATLAB	55
4.10.5	Сполучення (накладання) зображень у MATLAB ..	56

5 ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ ДО ВИРІШЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ	58
5.1 Визначення профілю хвилястості і шорсткості оброблюваної поверхні за допомогою вейвлет-перетворення	58
5.1.1 Визначення параметрів шорсткості й хвилястості	58
5.1.2 Вхідні дані	66
5.1.3 Визначення оптимальної декомпозиції сигналу	67
5.1.4 Метод визначення хвилястості і шорсткості	69
5.1.5 Вибір вейвлет-базису	69
5.2 Вейвлет-аналіз ЕКГ	81
5.2.1 Особливості сигналу ЕКГ	81
5.2.2 Вибір материнського вейвлета	81
5.2.3 Вибір типу і масштабів вейвлет-перетворення	84
5.2.4 Алгоритм делінеації сигналу ЕКГ	86
5.2.5 Детектування початку та кінця QRS-комплексу	90
5.2.6 Детектування Т-хвилі	92
5.2.7 Детектування Р-хвилі	95
5.2.8 Опис експериментів по делінеації сигналу ЕКГ	96
ЛІТЕРАТУРА	100

ВСТУП

У даному навчальному посібнику розглядаються як класичні методи дослідження структури сигналів (кореляційний та спектральний аналіз), так і цілий ряд спеціальних методів, призначених для вивчення процесів із змінними характеристиками (вейвлет-аналіз).

Особлива увага приділяється сучасним методам аналізу нестационарних випадкових процесів. Це пов'язано з тим, що нестационарними є дуже багато сигналів у природі, зокрема, практично всі процеси, які реєструються у динаміці живих систем. У навчальному посібнику поряд з широко відомими способами оброблення експериментальних даних розглядаються перспективні підходи, запропоновані за останні два десятиліття.

Теоретичні відомості супроводжуються численними прикладами. У якості засобу створення ілюстративних прикладів обрано систему MATLAB®, яка була створена фірмою The MathWorks, Inc. і є світовим стандартом у галузі наукових та технічних обчислень.

Терміни, визначення яких наводяться в тексті, виділено курсивом.

Видання орієнтоване на студентів комп'ютерних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також може використовуватися аспірантами, науковими та педагогічними працівниками, практичними фахівцями.

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

АР – авторегресійна модель;
АЧХ – амплітудно-частотна характеристика;
ВП – вейвлет-перетворення;
ВКФ – взаємна кореляційна функція;
ВПФ – віконне перетворення Фур'є;
ВСР – варіабельність серцевого ритму;
ДВП – дискретне вейвлет-перетворення;
ДПФ – дискретне перетворення Фур'є;
ЕКГ – електрокардіограма;
ЗПФ – зворотне перетворення Фур'є;
КФ – кореляційна функція;
ММ – максимуми модуля;
ММВП – максимуми модуля вейвлет-перетворення;
НВП – неперервне вейвлет-перетворення;
НПФ – неперервне перетворення Фур'є;
ППФ – пряме перетворення Фур'є;
СА – спектральний аналіз;
ФВЧ – фільтр високих частот;
ФНЧ – фільтр низьких частот.
ШПФ – швидким перетворенням Фур'є.

ОСНОВИ АНАЛІЗУ СИГНАЛІВ

Аналіз – це один з ключових компонентів обробки сигналів. У даній главі будуть наведені основні поняття і методи аналізу сигналів.

Основною метою аналізу є порівняння сигналів один з одним для виявлення їх подібності та відмінності. Можна виділити три основних складові аналізу сигналів:

- вимірювання числових параметрів сигналів. До таких параметрів насамперед належать енергія, середня потужність і середньоквадратичне значення, а мова про їх обчислення піде в підрозділі «Енергія і потужність сигналу»;

- розкладання сигналу на елементарні складові для їх розглядання окремо або для порівняння властивостей різних сигналів. Таке розкладання здійснюється з використанням рядів і інтегральних перетворень, найважливішими серед яких є ряд Фур'є і перетворення Фур'є;

- кількісне вимірювання ступеня «схожості» різних сигналів. Таке вимірювання проводиться із застосуванням апарату кореляційного аналізу, який буде розглянуто у відповідному підрозділі.

1.1 Поняття сигналу. Класифікація сигналів

Сигнал – це залежність однієї величини від іншої (тобто з математичної точки зору сигнал являє собою функцію). Частіше за все розглядається залежність у часі ($s(t)$). Фізична природа сигналу може бути різною. Часто це напруження, рідкіше – струм, можливі інші фізичні величини.

Проведемо класифікацію сигналів [1].

В залежності від того, чи відомий нам сигнал *точно*, розрізняють *детермінований* та *випадковий* сигнали.

Детермінований сигнал повністю відомий – його значення у будь-який момент часу можна точно визначити.

Випадковий сигнал у будь-який момент часу представляє собою випадкову величину, яка приймає конкретні значення з деякою *ймовірністю*.

Наступний клас сигналів – *сигнали з інтегрованим квадратом*. Також їх називають *сигналами з обмеженою енергією*. Для цих сигналів виконується співвідношення (1.1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty. \quad (1.1)$$

Ще одна ознака класифікації сигналів, яка істотно впливає на методи їх аналізу, – *періодичність*. Для періодичного сигналу з періодом T при будь-якому t виконується співвідношення (1.2):

$$s(t + nT) = s(t), \quad (1.2)$$

де n – довільне ціле число;

T – період сигналу $s(t)$.

Величина, зворотна періоду, називається *частотою повторення сигналу*: $f = 1/T$. *Кругова частота* визначається як $\omega = 2\pi f$ та вимірюється в радіанах в секунду.

Очевидно, що будь-який періодичний сигнал має безкінечну енергію.

Наступний клас сигналів – *сигнали скінченної тривалості* (їх також називають *фінітними* сигналами). Такі сигнали відмінні від нуля тільки на окремому проміжку часу. Кажуть, що сигнал існує на скінченному часовому інтервалі.

Очевидно, що сигнал скінченної тривалості має скінченну енергію – якщо тільки він не містить розривів другого роду (з гілками функції, що йдуть в нескінченність).

Дуже важливу роль у техніці оброблення сигналів грають *гармонічні коливання*, які у найбільш загальному вигляді записуються наступним чином:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.3)$$

де A – амплітуда сигналу;

ω – частота сигналу;

φ – початкова фаза сигналу.

Дельта-функція $\delta(t)$, або функція Дірака, представляє собою безкінечно вузький імпульс з безкінечною амплітудою, який розташований при нульовому значення аргументу функції:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

«Площа» імпульсу тим не менш дорівнює 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.5)$$

Певна річ, сигнал у вигляді дельта-функції неможливо реалізувати фізично, однак ця функція дуже важлива для теоретичного аналізу сигналів і систем.

На графіках цю функцію зазвичай зображують жирною стрілкою, висота якої пропорційна множнику, що стоїть перед дельта-функцією (рис. 1.1).

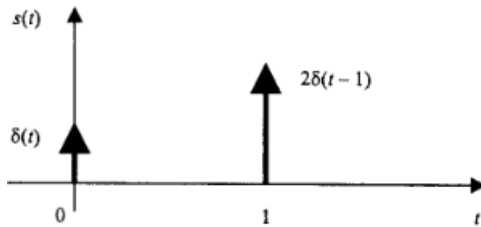


Рисунок 1.1 – Графік сигналу $s(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$

Одна з важливих властивостей дельта-функції – так звана *фільтруюча властивість*, яка полягає в тому, що якщо дельта-функція наявна під інтегралом у якості множника, тоді результат інтегрування буде дорівнювати значенню підінтегрального

виразу, що залишився, у тій точці, де зосереджений дельта-імпульс:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \quad (1.6)$$

Границі інтегрування в (1.6) не обов'язково повинні бути безкінечними, головне, що до інтервалу інтегрування потрапляло значення t_0 ; інакше інтеграл дорівнюватиме нулю.

Із того факту, що інтеграл від дельта-функції дає безрозмірну одиницю, виходить, що розмірність самої дельта-функції зворотна розмірності її аргументу. Наприклад, дельта-функція часу має розмірність $1/c$, тобто розмірність частоти.

Функція *одиночного стрибка* $\sigma(t)$ (або *функція Хевісайда*) дорівнює нулю для від'ємних значень аргументу і одиниці – для позитивних. При нульовому значенні аргументу функцію вважають або невизначеною, або такою, що дорівнює 0.5:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0.5, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Графік функції одиночного стрибка наведено на рис. 1.2.

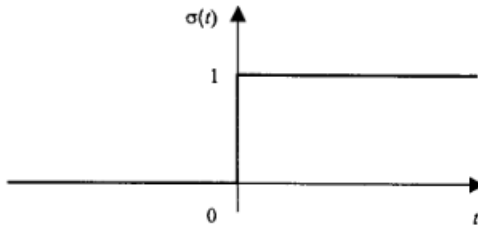


Рисунок 1.2 – Функція одиночного стрибка

Функцію одиночного стрибка зручно використовувати при створенні математичних виразів для сигналів скінченної тривалості. Найпростішим прикладом є формування прямокутного імпульсу з амплітудою A і тривалістю T :

$$s(t) = A(\sigma(t) - \sigma(t - T)). \quad (1.8)$$

Взагалі, будь-яку кусково-задану залежність можна записати у вигляді одного математичного виразу за допомогою функції одиночного стрибка.

1.2 Енергія і потужність сигналу

Почнімо зі звичайних, «фізичних» понять потужності і енергії. Якщо до резистора з опором R прикладена постійна напруга U , тоді потужність P , яка виділяється на резисторі, дорівнюватиме:

$$P = \frac{U^2}{R}. \quad (1.9)$$

За час T на цьому резисторі виділиться теплова енергія E , яка дорівнює:

$$E = \frac{U^2 T}{R}. \quad (1.10)$$

Нехай тепер до того самого резистора прикладена не постійна напруга, а сигнал $s(t)$. Потужність, яка розсіюється у резисторі, при цьому також буде залежати від часу, тобто у даному випадку мова йде про *миттєву потужність*:

$$p(t) = \frac{s^2(t)}{R}. \quad (1.11)$$

Для того, щоб обчислити енергію, яка виділяється за час T , миттєву потужність необхідно проінтегрувати:

$$E = \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.12)$$

Можна ввести також поняття середньої потужності за заданий проміжок часу, розділивши енергію на тривалість часового інтервалу:

$$P_{cp} = \frac{E}{T} = \frac{1}{RT} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.13)$$

До всіх наведених формул входить опір навантаження R . Однак, якщо енергія і потужність цікавлять нас не як фізичні величини, а як засіб *порівняння* різних сигналів, цей параметр можна з формул виключити (прийняти $R = 1$). Тоді ми отримаємо визначення енергії, миттєвої потужності і середньої потужності, прийняті в теорії сигналів:

$$E = \int_0^T s^2(t) dt, \quad (1.14)$$

$$p(t) = s^2(t), \quad (1.15)$$

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.16)$$

«Потужність» тут має розмірність B^2 , а «енергія» – $B^2 \cdot c$.

Енергія сигналу може бути скінченної або нескінченною. Наприклад, будь-який сигнал скінченної тривалості буде мати скінченну енергію (якщо він не містить дельта-функцій або гілок, що йдуть в нескінченність). А будь-який періодичний сигнал, навпаки, має нескінченну енергію.

Якщо енергія сигналу нескінченна, можна визначити середню потужність на всій часовій вісі. Для цього необхідно скористатися формулою (1.16) і виконати граничний перехід, спрямувавши інтервал усереднення до нескінченності:

$$P_{cp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt. \quad (1.17)$$

Квадратний корінь із середньої потужності дає *середньоквадратичне* (діюче) значення сигналу (англійський термін – root mean square, RMS):

$$\sigma_s = \sqrt{P_{cp}} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt}. \quad (1.18)$$

1.3 Кореляційний аналіз

Одним з класичних методів дослідження структури сигналів є кореляційний аналіз. Кореляційні функції допускають різні варіанти інтерпретації. З одного боку, вони дозволяють виявити ступінь схожості (лінійної залежності) двох сигналів при варіюванні зсуву за часом між ними. У цьому випадку говорять про взаємні кореляційні функції. З іншого боку, вони застосовні для вивчення взаємозв'язку значень одного й того самого випадкового процесу в різні моменти часу, що дозволяє використовувати термінологію автокореляційних функцій.

1.3.1 Кореляційна функція

Кореляційна функція (КФ) детермінованого сигналу представляє собою інтеграл від добутку двох копій сигналу, зсунених одна відносно одної на час τ :

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau) dt \quad (1.19)$$

Кореляційна функція показує ступінь схожості між сигналом та його зсунутою копією – чим більше значення кореляційної функції, тим ця подібність сильніше. Крім того, кореляційна функція має наступні властивості:

1. Значення КФ при $\tau = 0$ дорівнює енергії сигналу, тобто інтегралу від його квадрата:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E.$$

2. КФ є парною функцією свого аргументу τ :

$$B_s(-\tau) = B_s(\tau).$$

3. Значення КФ при $\tau = 0$ є максимально можливим:

$$|B_s(\tau)| \leq B_s(0).$$

4. Зі зростанням абсолютного значення τ КФ сигналу з кінцевою енергією згасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_s(\tau) = 0.$$

5. Якщо сигнал $s(t)$ не містить особливостей у вигляді дельта-функцій, його КФ – неперервна функція.

6. Якщо сигнал – це напруга, тоді розмірність його КФ дорівнює $B^2 * c$.

1.3.2 Взаємна кореляційна функція

Взаємна кореляційна функція (ВКФ) показує ступінь схожості між зсунутими копіями двох різних сигналів:

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt. \quad (1.20)$$

Властивості ВКФ:

1. Значення ВКФ при $\tau = 0$ нічим не виділяється; максимум може знаходитися у будь-якому місці на осі τ .

2. $B_{12}(-\tau) = B_{21}(\tau)$, тобто заміна знаку τ рівнозначна взаємній перестановці сигналів.

3. $|B_{12}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$, де E_1 і E_2 – енергії сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$.

4. Зі зростанням абсолютного значення τ ВКФ сигналу з кінцевою енергією затухає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_{12}(\tau) = 0.$$

5. Якщо сигнали – напруги, то розмірність їхньої ВКФ дорівнює $B^2 * c$.

1.3.3 Зв'язок між кореляційними функціями та спектрами сигналів

Відомо, що *пряме перетворення Фур'є* сигналу $s(t)$ задається наступним чином:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (1.21)$$

де $S(\omega)$ – спектральна функція сигналу $s(t)$ або спектральна щільність.

Для виявлення зв'язку між ВКФ та спектрами сигналів, застосуємо перетворення Фур'є до ВКФ, вважаючи, що сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ мають спектральні функції $S_1(\omega)$ та $S_2(\omega)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_{12}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)e^{-j\omega\tau} dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t-\tau)e^{j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) dt = S_1(\omega)S_2^*(\omega). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Тобто ВКФ зв'язана з перетворенням Фур'є *взаємним спектром* сигналів:

$$S_{12}(\omega) = S_1(\omega)S_2^*(\omega). \quad (1.23)$$

Звідси можна зробити висновок: для того, щоб ВКФ дорівнювалася нулю при будь-яких часових зсувах τ , необхідно і достатньо щоб їх взаємний спектр дорівнював нулю, тобто щоб спектри сигналів не перетиналися на частотній осі.

Для КФ отримаємо аналогічний результат: КФ пов'язана перетворенням Фур'є з квадратом модуля спектральної функції, тобто *енергетичним спектром* сигналу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = S(\omega) S^*(\omega) = |S(\omega)|^2. \quad (1.24)$$

Звідси випливає: КФ сигналу *не залежить від його фазового спектру*. Наслідком цього є те, що сигнали з однаковими амплітудними спектрами та різними фазовими спектрами будуть мати однакову КФ. Ще одним наслідком є те, що за КФ не можна відтворити початковий сигнал (через втрату інформації про фазу).

1.3.4 Енергетичні розрахунки у спектральній області

Відомо, що *зворотне перетворення Фур'є* (ЗПФ) задається наступним чином:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.25)$$

Для ВКФ та взаємного спектру сигналу отримаємо наступне співвідношення, застосувавши ЗПФ (*теорема Релея*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2^*(\omega) d\omega. \quad (1.26)$$

Для КФ отримаємо співвідношення, яке дозволяє розрахувати енергію сигналу в часовій та частотній області (*рівність Парсеваля*):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.27)$$

1.4 Випадкові сигнали

На відміну від детермінованих сигналів, форму яких ми знаємо точно, миттєві значення випадкових сигналів заздалегідь не відомі і можуть бути передбачені лише з деякою ймовірністю, меншою від одиниці. Характеристики таких сигналів є *статистичними*, тобто мають ймовірнісний вигляд.

У радіотехніці існують два основних класи сигналів, які потребують ймовірнісного опису. По-перше, це *шуми* – електромагнітні коливання, які хаотично змінюються у часі і виникають у різноманітних фізичних системах через безладний рух носіїв заряду. По-друге, випадковими є всі сигнали, які несуть *інформацію*, тому для опису закономірностей, притаманних осмисленим повідомленням, також удаються до ймовірнісних моделей.

1.4.1 Ансамбль реалізацій

Математична модель випадкового сигналу, якій змінюється у часі, називається *випадком процесом*. За визначенням, *випадковий процес* $X(t)$ – це функція окремого виду, яка характеризується тим, що значення, які вона приймає у будь-який момент часу t , є випадковими величинами.

До реєстрації (до приймання) випадковий сигнал варто розглядати саме як випадковий процес, який представляє собою сукупність (*ансамбль*) функцій часу $x(t)$, що підпорядковуються деякій загальній для них статистичній закономірності. Одна з таких функцій, яка стала повністю відомою після приймання повідомлення, називається *реалізацією* випадкового процесу.

1.4.2 Ймовірнісні характеристики випадкових процесів

Основою для математичного опису випадкових процесів є математичний опис випадкових величин. На практиці для опису випадкових величин найчастіше використовують:

- закони розподілу випадкової величини;
- числові характеристики випадкової величини;
- характеристичні функції.

Випадкові величини поділяють на дискретні та безперервні. Якщо кількість значень випадкової величини, визначених в

інтервалі $[a, b]$, є зліченною (але не обов'язково скінченною), то випадкова величина називається *дискретною*. Якщо ж випадкова величина набуває значення у будь-якій точці визначеного інтервалу, то вона називається *безперервною випадковою величиною*.

Законом розподілу випадкової величини називають залежність між можливим значенням випадкової величини та ймовірністю появи цього значення.

Для випадкової величини функція розподілу дорівнює ймовірності того, що значення випадкової величини будуть меншими, ніж x :

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.28)$$

Причому $F(x)$ є неспадною функцією, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.

Функцію розподілу $F(x)$ називають також *інтегральною функцією розподілу*, або *інтегральним законом розподілу*.

Відмінна від нуля ймовірність може бути пов'язана лише з потраплянням величини у заданий, можливо і досить вузький, інтервал:

$$P(x < X < x + \Delta x).$$

Очевидно, що якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $P(x < X < x + \Delta x) \rightarrow 0$. Позначимо $f(x)$ границю відношення

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x). \quad (1.29)$$

Функція $f(x)$ називається *щільністю розподілу випадкової величини*.

Математичне сподівання служить теоретичною оцінкою середнього зваженого випадкового процесу в момент часу t :

$$m_x(t) = M\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t)dx. \quad (1.30)$$

Дисперсія характеризує середню потужність відхилень випадкового процесу від його середнього значення $m_x(t)$, які називаються *флуктуаціями*:

$$D_x(t) = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} = M\{X^2(t)\} - m_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t) dx - m_x^2(t). \quad (1.31)$$

Середнє квадратичне відхилення представляє собою квадратний корінь від дисперсії і служить амплітудною мірою розкиду значень випадкового процесу в момент часу t відносно математичного сподівання.

Модю x_{mo} *дискретної випадкової величини* називається таке її значення, яке має максимальну ймовірність. *Модю неперервної випадкової величини* називається таке її значення, на якому досягається максимум функції щільності ймовірності $f(x)$. Закон розподілу називається *унімодальним*, якщо мода єдина.

Медіаною безперервної випадкової величини X називається таке число x_{me} , коли $P(X < x_{me}) = 0,5 = P(X > x_{me})$.

1.4.3 Стаціонарні та ергодичні випадкові процеси

Стаціонарним називають випадковий процес, статистичні характеристики якого не змінюються у часі.

У класі стаціонарних випадкових процесів $X(t)$ виділяють підклас *ергодичних*, для яких усереднення на множині значень x дає той самий результат, що й усереднення в часі t .

Математичне сподівання ергодичного випадкового процесу дорівнює *постійній складовій* будь-якої його реалізації, а дисперсія має наочний фізичний сенс *потужності флуктуаційної складової*.

2 СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Дуже багато задач дослідження структури сигналів пов'язані зі спектральними характеристиками і методами їх ефективного обчислення. На відміну від ймовірнісних методів, які описують властивості випадкових процесів у часовій області, спектральний аналіз (СА) дозволяє охарактеризувати *частотний склад* сигналу. Математичною основою цього аналізу є перетворення Фур'є.

2.1 Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є застосовують для отримання частотного спектру неперіодичної функції, наприклад електричного сигналу, тобто для представлення сигналу у вигляді суми гармонічних коливань.

2.1.1 Неперервне перетворення Фур'є

Сигнал $s(t)$, який задовольняє умові абсолютній інтегрованості

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty, \quad (2.1)$$

може бути представлений інтегралом Фур'є:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.2)$$

де

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.3)$$

Функцію $S(\omega)$ називають *спектральною щільністю* амплітуди сигналу $s(t)$ або *спектральною функцією*. Формула (2.3) визначає *пряме перетворення Фур'є* (ППФ), а формула (2.2) – *зворотне*.

Для застосування перетворення Фур'є сигнал повинен задовольняти умови Діріхле та бути інтегрованим.

Нагадаємо *умови Діріхле*:

- не повинно бути розривів другого роду (гілок функції, що прямують до нескінченності);

- кількість розривів першого роду (стрибків) має бути скінченною;

- кількість екстремумів функції має бути скінченною.

З позиції точного представлення довільних сигналів і функцій, неперервне перетворення Фур'є (НПФ) має ряд *недоліків*:

1. Навіть для однієї заданої частоти необхідне знання сигналу не тільки в минулому, але і в майбутньому, що є математичною абстракцією.

2. В умовах практично неминучого обмеження числа гармонік або спектра коливань точне відновлення сигналу після прямого і зворотного перетворень Фур'є теоретично (і тим паче практично) неможливо, зокрема через появу *ефекту Гіббса*. Ефект Гіббса – це коливальні процеси, відсутні у вихідних функцій.

3. Базисною функцією при розкладанні в ряд Фур'є є гармонійне коливання, яке математично визначено в інтервалі часу від $-\infty$ до ∞ і має незмінні у часі параметри.

4. Окремі особливості сигналу (розриви, піки) викликають незначні зміни частотного образу сигналу у всьому інтервалі частот, які «розмазуються» по всій частотній осі, що робить їх виявлення за спектром практично неможливим.

5. Така плавна базисна функція, як синусоїда, в принципі не може представляти перепади сигналів з нескінченною крутизною (прямокутні імпульси тощо), хоча такі сигнали застосовуються

досить широко. Слід врахувати, що для нестационарних сигналів труднощі НПФ зростають у кілька раз.

6. Єдиним пристосуванням до представлення швидких змін сигналів, таких як піки або перепади, є різке збільшення числа гармонік, які впливають на форму сигналу і за межами локальних особливостей сигналу.

7. За складом вищих складових спектра практично неможливо оцінити розташування особливостей на часовій залежності сигналу і їх характер.

Проблеми спектрального аналізу і синтезу сигналів, обмежених у часі, частково вирішуються переходом до так званого *віконного перетворення Фур'є* (ВПФ).

2.1.2 Віконне перетворення Фур'є

ВПФ перед використанням НПФ, яке виражається формулою (2.3), застосовує операцію множення сигналу на вікно:

$$S_w(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)w(t-b)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.4)$$

Вікном $w(t-b)$ називається локальна функція, яка переміщується вздовж часової осі для обчислення перетворення Фур'є в декількох позиціях b .

Таким чином, перетворення стає залежним від часу, і в результаті виходить частотно-часовий опис сигналу.

Недоліком ВПФ є те, що при його обчисленні використовується фіксоване вікно, яке не може бути адаптовано до локальних властивостей сигналу. Вейвлет-перетворення, яке буде розглядатися далі, вирішує цю та деякі інші проблеми, пов'язані з обробкою сигналів.

2.1.3 Дискретне перетворення Фур'є

Для послідовності відліків $\{x(k)\}$ визначається пряме та зворотне *дискретне перетворення Фур'є* (ДПФ) за формулами (2.5) та (2.6) відповідно:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right), \quad (2.5)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right), \quad (2.6)$$

Властивості ДПФ:

– *лінійність*: якщо послідовностям $\{x(k)\}$ і $\{y(k)\}$ з однаковим періодом N відповідають набори гармонік $\{X(n)\}$ та $\{Y(n)\}$, тоді послідовності $\{ax(k)+by(k)\}$ буде відповідати спектр $aX(n)+bY(n)$;

– *затримка*: якщо початкову послідовність затримати на один такт ($y(k)=x(k-1)$), спектр необхідно помножити на $\exp(-j2\pi n/N)$;

– *симетрія*: $X(N-n)=X(-n)=X^*(n)$.

ДПФ є лінійним перетворенням, яке трансформує вектор часових відліків у вектор спектральний відліків такої самої довжини. Це перетворення може бути реалізовано як добуток певної квадратної матриці на початкову послідовність:

$$y = A \cdot x, \quad (2.7)$$

де A – матриця перетворення. У випадку ДВП ця матриця має такий вигляд:

$$A_{DFT} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Елемент матриці перетворення A розташований в n -му стовпці та m -му рядку задається:

$$A_{DFT}(m, n) = \exp\left(-j2\pi \frac{(m-1)(n-1)}{N}\right), \quad 1 \leq m \leq N, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (2.9)$$

2.1.4 Швидке перетворення Фур'є

Для обчислення одного коефіцієнту ДПФ за формулою (2.9) необхідно виконати N комплексних добутків і додавань. Таким чином, обчислення усього ДПФ, яке містить N коефіцієнтів, вимагає N^2 пар операцій «добуток-додавання». Теж саме можна побачити з формули (2.6). Якщо N не є простим числом і може бути розкладено на множники, процес обчислення можна прискорити, розділивши набір відліків на частини та обчисливши їх ДПФ. Такі способи обчислення ДВП називаються *швидким перетворенням Фур'є* (ШПФ – Fast Fourier Transform, FFT). Існує декілька варіантів реалізації ШПФ в залежності від способу поділу початкової послідовності відліків на частини (*проріджування* за часом або частотою) та від того, на скільки фрагментів здійснюється розбиття послідовності на кожному кроці (*основа ШПФ*) [1].

2.2 Спектр дискретного випадкового процесу

ДПФ є основою технології спектрального аналізу, яка застосовується для дослідження випадкових процесів.

Якщо сигнал представляє собою випадковий процес, то звичайне його ДПФ не має сенсу, оскільки в результаті ми отримаємо тільки спектр єдиної реалізації процесу. Тому для СА випадкових сигналів потрібно використовувати усереднення спектру. Такі методи, в яких використовується тільки інформація про початковий сигнал називаються *непараметричними*. Інший клас методів припускає існування статистичної моделі випадкового сигналу. Процес СА в цьому випадку включає визначення параметрів моделі, і тому ці методи називаються *параметричними*.

В загальному випадку спектр дискретного випадкового процесу визначається наступним чином:

$$W(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left| \sum_{k=-n}^n x(k) e^{-j\omega k T} \right|^2, \quad (2.10)$$

де риска зверху – усереднення по ансамблю реалізацій.

На практиці використовують аналог *теорему Вінера-Хінчина*:

$$W(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_x(k) e^{-j\omega k T}. \quad (2.11)$$

Отже, *спектр дискретного випадкового процесу є перетворенням Фур'є від його кореляційної функції*.

2.3 Непараметричні методи

При використанні непараметричних методів обчислення спектра випадкового процесу використовується тільки інформація, яка міститься у відліках сигналу, без будь-яких додаткових припущень. Ми коротко розглянемо два таких методи – періодограму та метод Уелча (Welch).

2.3.1 Періодограма

Періодограма – це оцінка спектральної щільності потужності, отримана з N відліків однієї реалізації випадкового процесу відповідно до визначення (див. формулу (2.10)). Періодограма обчислюється за формулою (2.12):

$$W(\omega) = \frac{1}{Nf_d} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\omega k T} \right|^2, \quad (2.12)$$

де f_d – частота дискретизації сигналу.

Якщо при обчисленні спектру використовується вагова функція (вікно), ми маємо модифіковану періодограму, а формула (2.12) має наступний запис:

$$W(\omega) = \frac{1}{f_d} \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) w(k) e^{-j\omega k T} \right|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} |w(k)|^2}, \quad (2.13)$$

де $w(k)$ – вагова функція (вікно).

Для розрахунку періодограми в Matlab реалізована функція:

```
[Pxx,f]=periodogram(x,w,nfft,fs,range),
```

де range – частотний діапазон вектору Pxx ('onesided' від 0 до fs/2, 'twosided' від 0 до fs);

Pxx – вектор значень спектральної щільності потужності;

f – вектор значень частот.

Приклад. Побудуємо періодограму сигналу, що представляє суму синусоїд.

```
f1=50, f2=120, fs=1000, N=2^10;  
t=[1/fs:1/fs:N/fs];  
x = sin(2*pi*f1*t) + sin(2*pi*f2*t) + 0.6*rand(1,N);  
periodogram(x,[],[],fs,'onesided');
```

На рис. 2.1 наведена побудована періодограма сигналу.

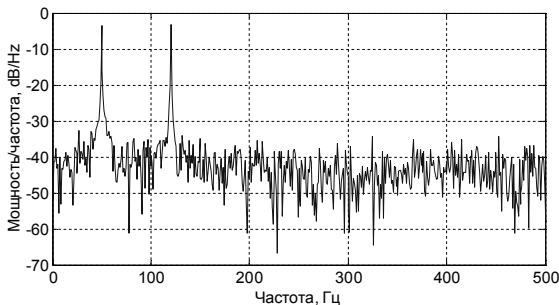


Рисунок 2.1 – Періодограма сигналу

2.3.2 Метод Уелча

При застосуванні періодограми тривалого сигналу вона є порізаною. Для зменшення порізаності необхідно застосувати усереднення. *Метод Уелча* (метод усереднення модифікованих періодограм) використовує наступні удосконалення для періодограми: вагову функцію (вікно) та розбиття сигналу на фрагменти, що перекриваються. *Застосування вікна* дозволяє послабити розтікання спектру та зменшити зсув отриманої оцінки

спектру щільності потужності за рахунок незначного погіршення роздільної здатності. *Перекриття фрагментів* зменшує дисперсію оцінки.

Для розрахунку періодограми за методом Уелча в Matlab реалізована функція `pwelch`:

```
[Pxx,f]=pwelch(x,w,noverlap,nfft,fs,'range').
```

Приклад. Побудуємо періодограму за методом Уелча для сигналу, що представляє суму синусоїд.

```
f1=50, f2=120, fs=1000, N=2^10;  
t=[1/fs:1/fs:N/fs];  
x = sin(2*pi*f1*t) + sin(2*pi*f2*t) + 0.6*rand(1,N);  
pwelch(x,[],[],[],fs,'onesided');
```

На рис. 2.2 наведена побудована періодограма сигналу.

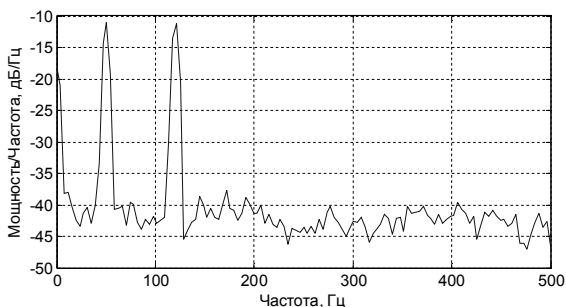


Рисунок 2.2 – Періодограма за методом Уелча

2.4 Параметричні методи

Використання параметричних методів припускає існування деякої статистичної моделі випадкового сигналу. СА зводиться до вирішення оптимізаційної задачі, тобто пошуку параметрів моделі, при яких вона найбільш близька до реального сигналу. Ми розглянемо авторегресійний, MUSIC та EV методи.

2.4.1 Авторегресійний метод

Згідно з авторегресійною моделлю (АР), сигнал $\{x(k)\}$ можна сформувати пропусканням дискретного білого шуму $\{n(k)\}$ через рекурсивний фільтр N -го ступеня (рисунок 2.3).

Спектральна щільність потужності сигналу пропорційна квадрату модуля коефіцієнта функції передачі фільтра:

$$W(\omega) = \frac{\sigma_n^2}{f_d} \cdot \frac{1}{|1 - a_1 e^{-j\omega T} - \dots - a_N e^{-jN\omega T}|^2}, \quad (2.14)$$

де a_i – коефіцієнт моделі порядку N ;

σ_n^2 – оцінка потужності білого шуму.

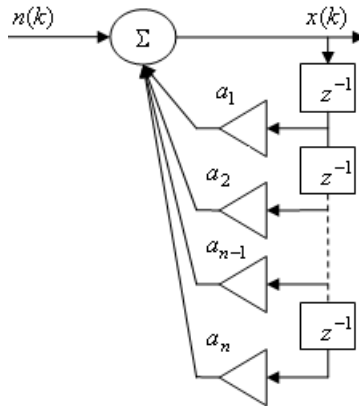


Рисунок 2.3 – Авторегресійна модель формування сигналу

Для визначення коефіцієнтів моделі виконується мінімізація похибки *лінійного передбачення* сигналу: сигнал $\{x(k)\}$ пропускається через *нерекурсивний* фільтр з коефіцієнтами $\{1, -b_1, \dots, -b_N\}$ (рис. 2.4). Зважена сума *попередніх* відліків початкового сигналу називається *лінійним передбаченням* наступного вхідного відліку, а вихідний сигнал фільтра (різниця між дійсним та передбаченим значенням) – *помилкою передбачення*.

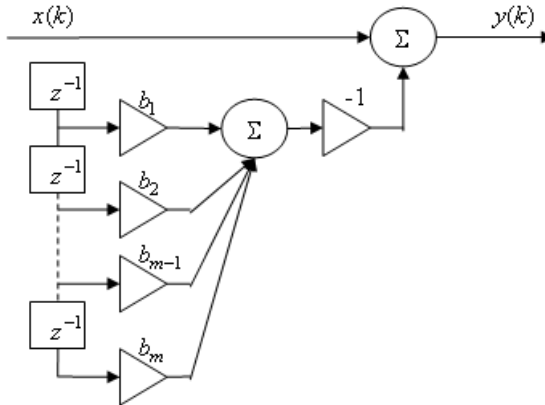


Рисунок 2.4 – Авторегресійна модель формування сигналу

Для знаходження коефіцієнтів лінійного передбачення необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\sum_{m=1}^N b_m R_x(m-k) = R_x(k), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.15)$$

Цю систему можна переписати в матричному вигляді:

$$R_x b = p, \quad (2.16)$$

де R_x – кореляційна матриця сигналу $\{x(k)\}$;

b – стовбець коефіцієнтів;

p – стовбець значень кореляційної функції.

Існує багато методів АР-моделей [1], серед яких метод Берга, коваріаційний метод, модифікований коваріаційний метод, автокореляційний метод Юла-Уолкера.

Перелічені методи відрізняються способом отримання оцінки автокореляційної матриці та дають практично однакові добрі результати при тривалих сигналах; їх недоліком є робота з короткими сигналами.

В MATLAB реалізовані функції для розрахунку коефіцієнтів моделі та спектрального аналізу (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1 – Функції авторегресійних моделей

Назва методу	Функція обчислення коефіцієнтів моделі	Функція спектрального аналізу
Коваріаційний метод	arsov	rsov
Модифікований коваріаційний метод	armscov	prmscov
Метод Берга	arburg	prburg
АР метод Юла-Уолкера	aryule	pyulear

Синтаксис функції для обчислення коефіцієнтів АР-моделі:

$$[a,e,r]=arxxx(x,p),$$

де arxxx – ім'я функції (див. табл. 2.1);

x – вектор відліків сигналу;

p – порядок АР-моделі;

a – вектор коефіцієнтів моделі;

e – оцінка дисперсії білого шуму;

r – вектор коефіцієнтів відображення.

Синтаксис виклику функцій для обчислення спектру потужності на основі АР-моделі:

$$[Pxx,f]=rxxx(x,p,nfft,fs,'range'),$$

де rxxx – ім'я функції (див. табл. 2.1);

nfft – число відліків для розрахунку спектра;

fs – частота дискретизації сигналу;

'range' – частотний діапазон ('onesided', 'twosided');

Pxx – вектор спектральної щільності потужності;

f – вектор значень частот.

Приклад. Виконаємо спектральний АР-аналіз за методом Берга для сигналу суми синусоїд з 8 порядком АР-моделі.

```
f1=50, f2=120, fs=1000, N=2^10;
```

```
t=[1/fs:1/fs:N/fs];
```

```
x=sin(2*pi*f1*t)+sin(2*pi*f2*t)+0.6*rand(1,N);
```

```
figure; pburg(x,8,256,fs)
```

Результат спектрального АР-аналізу за методом Берга наведено на рис. 2.5.

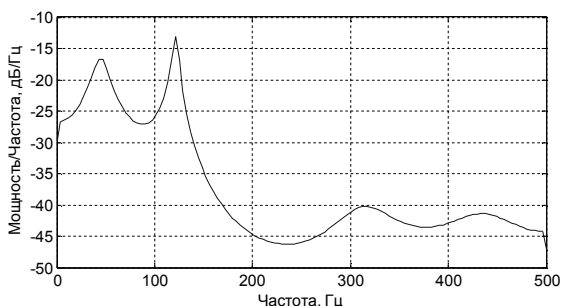


Рисунок 2.5 – Спектральний АР-аналіз (метод Берга)

2.4.2 Метод MUSIC

Метод *MUSIC* (**MU**ltiple **SI**gnal **C**lassification) призначений для спектрального аналізу сигналів, що представляють собою суму декількох синусоїд з білим шумом. Метою спектрального аналізу подібних сигналів є не обчислення спектру сигналу, а визначення частот і рівнів (амплітуд чи потужностей) гармонічних складових. Метод *MUSIC* призначений саме для цього, тому залежність рівня сигналу від частоти, яку отримують за його допомогою, називають *псевдоспектром*. В основі метода лежить аналіз власних чисел та власних векторів кореляційної матриці сигналу.

Псевдоспектр сигналу визначається за формулою:

$$W(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^N \left| \sum_{n=0}^{N-1} v_k(n) e^{-j\omega n T} \right|^2}, \quad (2.17)$$

де v_k – n -й елемент k -го вектору кореляційної матриці. В *MATLAB* метод *MUSIC* реалізовано функцією:

$$[s,f,v,e]=pmusic(x,p,nfft,fs,nwin,noverlap,'range'),$$

- де n_{win} – розмір прямокутного вікна;
- range – діапазон частот сигналу ('whole', 'half');
- s – вектор значень псевдоспектру;
- v – власні вектори кореляційної матриці;
- e – власні числа кореляційної матриці.

Приклад. Виконаємо спектральний AP-аналіз за методом Берга для сигналу суми синусоїд з 8 порядком AP-моделі.

```
f1=50, f2=120, fs=1000, N=2^10;
t=[1/fs:1/fs:N/fs];
x=sin(2*pi*f1*t)+sin(2*pi*f2*t)+0.6*rand(1,N)
figure
pmusic(x,4,256,fs)
```

Результат спектрального AP-аналізу за методом MUSIC наведено на рис. 2.6.

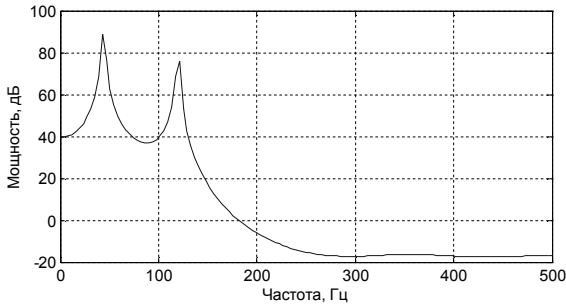


Рисунок 2.6 – Спектральний аналіз (метод MUSIC)

2.4.3 Метод EV

Метод EV (eigenvectors, EV) відрізняється від MUSIC тим, що при підсумуванні по k використовуються вагові коефіцієнти, обернені відповідним власним числам:

$$W(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^N \frac{1}{\lambda_k} \left| \sum_{n=0}^{N-1} v_k(n) e^{-j\omega n T} \right|^2}, \quad (2.18)$$

де λ_k – число, яке відповідає k -му власному вектору v_k .
В MATLAB метод MUSIC реалізовано функцією:

```
[s,f,v,e]=peig(x,p,nfft,fs,nwin,noverlap,'range'),
```

Приклад. Виконаємо спектральний AP-аналіз за методом EV для сигналу суми синусоїд з 8 порядком AP-моделі.

```
f1=50, f2=120, fs=1000, N=2^10;  
t=[1/fs:1/fs:N/fs];  
x=sin(2*pi*f1*t)+sin(2*pi*f2*t)+0.6*rand(1,N);  
figure; peig(x,4,256,fs);
```

Результат спектрального AP-аналізу за методом EV наведено на рис. 2.7.

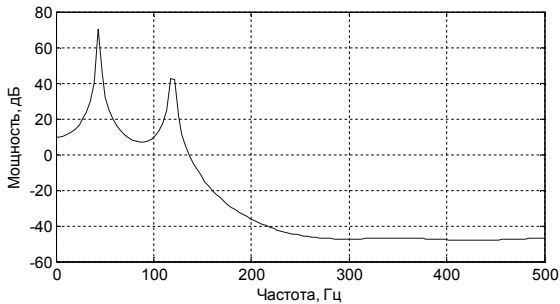


Рисунок 2.7 – Спектральний AP-аналіз (EV)

3 ПРОГНОЗУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ АР-МОДЕЛІ

3.1 Стаціонарні часові ряди та їх характеристики

Стаціонарний процес – це процес, для якого середнє та дисперсія незалежно від розглянутого періоду часу незмінні, а автокореляція залежить тільки від довжини зсуву (лагу) між розглянутими змінними. *Оцінка коефіцієнту автокореляції* визначається наступним чином:

$$r(\tau) = \frac{\frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}, \quad (3.1)$$

де n – тривалість часового ряду;

τ – часовий зсув (лаг);

\bar{y} – середнє значення часового ряду.

Для стаціонарного часового ряду зі збільшенням зсуву АКФ повинна монотонно спадати, оскільки залежність між рівнями ряду зі зростанням зсуву зменшується.

Зв'язок між рівнями ряду визначається за допомогою *часткової автокореляційної функції* (ЧАКФ):

$$r_{ij.k} = \frac{r_{ij} - r_{ik}r_{jk}}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2)(1 - r_{jk}^2)}}, \quad (3.2)$$

3.2 Авторегресійна модель

Авторегресійна модель (AR, Autoregressive (AR-) model) є різновидом моделей стаціонарних часових рядів, серед яких також можна виділити моделі змінного середнього (MA), змінного середнього в залишках (ARMA) та проінтегрованого змінного середнього (ARIMA).

В AR-моделі кожне значення знаходиться у лінійної залежності від попередніх значень. Якщо динамічний процес, що розглядається, залежить від значень, які відстають на p часових лагів, AR-процес порядку p (AR(p)-процес) визначається наступним чином:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (3.3)$$

де ε_t – білий шум з нульовим математичним сподіванням;

α_0 – вільний член (частіше дорівнює нулю).

Використовуючи функцію оператора лагу, отримуємо:

$$(1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_p B^p) y_t = \Phi(B) y_t = \varepsilon_t, \quad (3.4)$$

де B – оператор зсуву (один часовий такт);

$\Phi(B)$ – оператор авторегресії.

Для виконання умови стаціонарності всі корні $\Phi(B)$ повинні знаходитися за одиничним кругом, тобто $1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p = 0$, а $|z| > 1$.

3.2.1 AR(1) чи марківський процес

Модель цього процесу має наступний вигляд:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.5)$$

де α – коефіцієнт, $|\alpha| < 1$.

Властивості марківського процесу:

1. $\mu_{t_i} = 0$.

$$2. D(t_t) = \sigma_0^2 / (1 - \alpha^2).$$

$$3. R(y_t, t_{t \pm k}) = \alpha^k.$$

3.2.2 AP(2) чи процеси Юла

Модель цього процесу має наступний вигляд:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (3.6)$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{R(1)[1 - R(2)]}{1 - R^2(1)};$$

$$\alpha_2 = \frac{R(2) - R^2(1)}{1 - R^2(1)}.$$

Умови стаціонарності процесу AP(2):

$$|\alpha_2| < 1;$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) < 1;$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 < 1.$$

3.3 Прогнозування за AP-моделлю

Головною метою обробки часових рядів є прогнозування за існуючими спостереженнями. Прогнозування виконується при умові, що йому передувало прийняте рішення. При пошуку вдалого прогнозованого рішення використовуються два різних підходи. Перший з них використовує адитивну структуру ряду, що дозволяє прогноз уявити як суму прогнозованих значень детермінованої та стохастичної складових ряду (*Вінеровський підхід*). Другий підхід використовує обидві складові ряду, що дозволяє додатково покращити початкову параметричну ідентифікацію (*Байєсівський підхід*). Детально ці методи описані в [2, 3, 4].

Для прогнозування y_{n+k} моделі AP(1) використовується наступне співвідношення:

$$y_{n+k} = \alpha_2^k y_n. \quad (3.7)$$

Для прогнозування y_{n+k} моделі AP(2) використовується наступне співвідношення:

$$y_{n+k} = \alpha_2 y_{n+k-1} + \alpha_3 y_{n+k-2}. \quad (3.8)$$

3.4 Побудова AP-моделі в пакеті MATLAB

В MATLAB реалізовані наступні функції для побудови AP-моделі: `arcov`, `armcov`, `arburg` та `aryule`.

Синтаксис виклику функцій для розрахунку коефіцієнтів AP-моделі:

$$[a,e,r]=arxxx(x,p),$$

де `arxxx` – ім'я функції;

`x` – вектор відліків сигналу;

`p` – порядок AP-моделі;

`a` – вектор коефіцієнтів моделі;

`e` – оцінка дисперсії білого шуму;

`r` – вектор коефіцієнтів відображення.

Приклад. Спрогнозуємо поведінку випадкового сигналу (формула (4.7)) з нормальним розподілом (математичне сподівання – 5, дисперсія – 2) на наступні 5 лагів, використовуючи AP(1).

```
N=50;
y = 5 + 2.*randn(N,1);
[a,e]=arcov(y,1);
T=y;
for i=2:N
    T(i)=T(i-1)*a(2)+y(i)*a(1);
End
%прогноз на 5 шагів вперед
for i=N+1:N+5
    T(i)=T(N)*(a(2)^(i-N));
end
plot(y,'-ob');
hold on;
plot(T,'--or');
```

```
xlabel('Время, с');  
ylabel('Амплитуда, мм');
```

Результат прогнозування процесу за допомогою AP(1) наведено рис. 3.1.

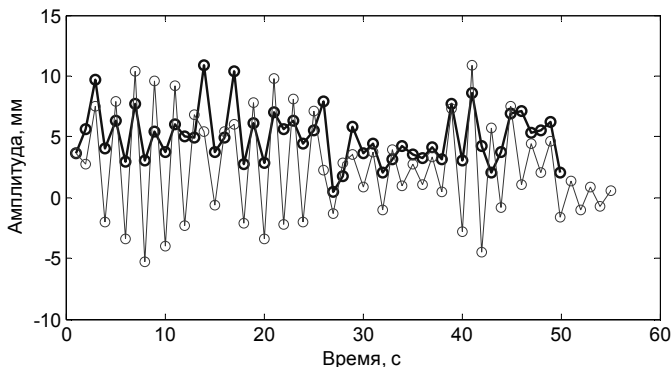


Рисунок 3.1 – Прогнозування процесу за допомогою AP(1)

У результаті роботи програми були знайдені наступні коефіцієнти:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -0.80.$$

Модель має вигляд:

$$T_t = \alpha_2 T_{t-1} + \alpha_1 y_t.$$

На рис. 3.1 товстою лінією зображено дійсні спостереження, а тонкою лінією – побудову моделі AP(1) та прогноз на 5 лагів вперед.

4 ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ

Вейвлет-аналіз став фактично стандартним інструментом для дослідження частотно-часової поведінки сигналів. На відміну від класичних методів аналізу Фур'є, вейвлет-аналіз дозволяє працювати з нестационарними сигналами, виявляти їх особливості й визначати часову локалізацію частотних складових сигналу.

4.1 Ідея вейвлет-перетворення

На основі поняття векторного простору загальним підходом до аналізу сигналу є представлення його у вигляді добутку двох функцій – базисних функцій $\psi_k(t)$ та коефіцієнтів C_k :

$$s(t) = \sum_k C_k \psi_k(t). \quad (4.1)$$

Оскільки базисні функції задані певного виду, то тільки коефіцієнти C_k містять інформацію про конкретний сигнал. Таким чином, можна говорити про можливість представлення сигналу на основі рядів з різними базисними функціями. Наприклад, ряд Фур'є в якості базисних функцій використовує синусоїди та косинусоїди, а коефіцієнти ряду Фур'є сигналу $s(t)$ знаходяться як:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(t) \cdot (\cos(tk) + j \sin(tk)) dt. \quad (4.2)$$

Недоліком цих базисних функцій є те, що вони не здатні адаптуватися до локальних особливостей сигналу. Цей недолік усувають вейвлети та вейвлет-перетворення сигналу.

Вейвлети (wavelet), за спрощеною схемою, – це деякі хвильові функції, які здатні виконати перетворення Фур’є не по всій часовій осі, а локально – на місці свого положення. Ці функції повинні переміщуватися по сигналу та масштабуватися (параметри зміщення та масштабу). При цьому базисною функцією може бути будь-яка функція, що забезпечує різне представлення сигналу.

Вейвлети характеризуються своїми часовим і частотним образами. Часовий образ визначається функцією $\psi(t)$, а частотний образ – її Фур’є-образом:

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.3)$$

Таким чином, за допомогою вейвлетів сигнал можна представити як сукупність вейвлетів, створених на основі деякої початкової функції $\psi_0(t)$ (базисної функції). Ця сукупність різна на різних частинах часового інтервалу визначення сигналу і коректується множниками, які мають вигляд складних часових функцій та представляють сигнал з певним ступенем деталізації. Такий підхід має назву *вейвлет-перетворення*. Число використовуваних при розкладанні сигналу вейвлетів задає *рівень декомпозиції сигналу* [5].

4.2 Неперервне вейвлет-перетворення

Пряме вейвлет-перетворення або *неперервне вейвлет перетворення* (Continuous Wavelet Transformation, CWT) – це розкладання сигналу по базису у вигляді сукупності хвильових пакетів – вейвлетів, які характеризуються чотирма принципово важливими властивостями:

- мають вигляд коротких, локалізованих у часі чи просторі хвильових пакетів з нульовим значенням інтегралу;
- володіють можливістю зсуву в часі;
- здатні до масштабування (стиснення, розтягнення);

– мають обмежений частотний спектр.

Отже, *неперервне вейвлет-перетворення* (НВП) представляє собою розкладання сигналу за набором базисних функцій, породжених шляхом зсуву по осі часу та зміни масштабу однієї вихідної функції, так званого «материнського» вейвлета. НВП сигналу обчислюється за формулою (4.4):

$$W_a x(b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, a > 0, \quad (4.4)$$

де $x(t)$ – сигнал;

$\psi(t)$, $\psi^*(t)$ – вейвлет і його комплексне спряження;

a , b – масштабний коефіцієнт і параметр зсуву.

Вейвлет-перетворення сигналу здійснюється наступним чином: для обраного значення масштабного параметра a виконується згортка сигналу з вейвлетом для всього діапазону значень зсуву. Таким чином, вейвлет із заданим значенням a неначе «пробігає» по всьому досліджуваному сигналу, в результаті на виході одержується масив вейвлет-коефіцієнтів, довжина якого дорівнює кількості відліків вихідного сигналу. Далі обирається наступний масштабний коефіцієнт і процедура повторюється (рис. 4.1). Одержані в результаті перетворення вейвлет-коефіцієнти відбивають ступінь схожості аналізованого сигналу на вейвлет у конкретний момент часу, тобто при певному значенні b .

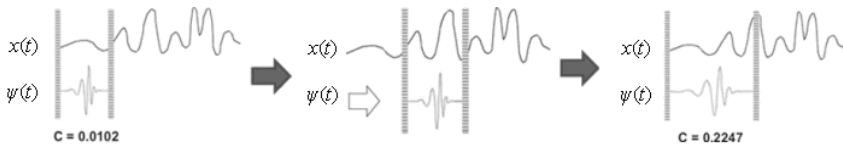


Рисунок 4.1 – Вейвлет-перетворення довільного сигналу

Коефіцієнт C (див. рис. 4.1) показує, наскільки корельований вейвлет із фрагментом сигналу. Чим більше значення коефіцієнта C за абсолютною величиною, тим більша схожість сигналу на вейвлет.

Згідно з принципом невизначеності, чим краще функція сконцентрована в часі, тим більше вона розмазана в частотній

області. При перемасштабуванні функції добуток часового й частотного діапазонів залишається постійним і представляє собою площу комірки в частотно-часовій (фазовій) площині (рис. 4.2). Перевага вейвлет-перетворення полягає в тому, що воно покриває фазову площину осередками однакової площі, але різної форми. Це дозволяє добре локалізувати низькочастотні деталі сигналу в частотній області, а високочастотні – у часовій (різкі стрибки, піки тощо).

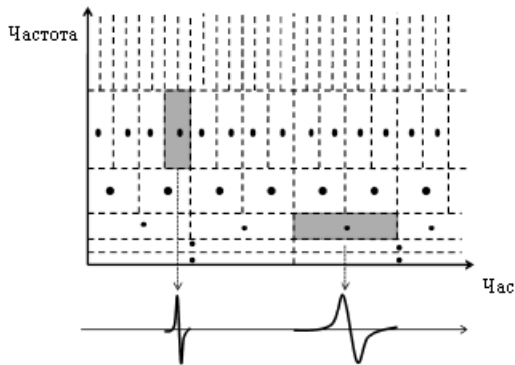


Рисунок 4.2 – Фазова площина вейвлет-перетворення

4.3 Апроксимуюча і деталізуюча компоненти

Однією з основних ідей вейвлет-перетворення є поступове багаторівневе розкладання сигналу на дві складові – апроксимуючу (грубу) та деталізуючу (уточнюючу). Це можливо як в часовій, так і в частотній областях представлення сигналів вейвлетами.

В основі НВП – використання двох неперервних та інтегрованих по всій осі часу функцій:

- вейвлет-функція $\psi(t)$, яка визначає особливості сигналу і спричиняє деталізуючі вейвлет-коефіцієнти;

- функція масштабування чи скейлінг-функція $\varphi(t)$, яка визначає апроксимацію (приближення) сигналу і спричиняє коефіцієнти апроксимації.

Скейлінг-функції мають лише ті вейвлети, які є ортогональними.

Вейвлет-функція $\psi(t)$ створюється на основі базисної функції $\psi_0(t)$, яка як і $\psi(t)$ визначає тип вейвлету. Базисну функцію також називають *материнським вейвлетом*, бо вони породжують вейвлети певного виду. Базисна функція повинна відповідати всім вимогам для $\psi(t)$ та забезпечувати виконання двох основних операцій – зсув у часі та масштабування:

$$\psi(t) \equiv \psi(a, b, t) = a^{-1/2} \psi_0\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (4.5)$$

де a – масштаб вейвлету;

b – зсув (положення) вейвлета.

Про вейвлети, які чітко локалізовані у просторі (або в часі), кажуть, що вони мають *компактний носій*. У частотній області невеликі значення параметру a відповідають високим частотам, а великі – низьким частотам. Таким чином, операція визначення розміру вікна в перетворенні Фур'є заснована на базисній функції вейвлетів.

4.4 Дискретне вейвлет-перетворення

Дискретне вейвлет-перетворення (Discrete Wavelet Transformation, DWT) відрізняється від неперервного використанням масштабів, кратних степені двійки. НВП вимагає значних обчислювальних витрат. Тому для практичного його застосування необхідна дискретизація значень a і b . Дискретизація, зазвичай, здійснюється через степені двійки.

Подібна дискретизація є найбільш розповсюдженою, а сітка дискретизації називається діадною. Відповідно, це перетворення прийнято називати діадним вейвлет-перетворенням. Його важливою особливістю є виключення перекриття носіїв вейвлетів, тобто усунення надмірності в процесі вейвлет-перетворень [5, 6].

4.5 Швидке вейвлет-перетворення

Для ортогональних вейвлетів існує швидке вейвлет-перетворення (алгоритм Малла), яке реалізує оснований на фільтрації ітераційний алгоритм. Схема розкладання сигналу за алгоритмом Малла наведена на рис. 4.3.

Спочатку сигнал x пропускають через ФНЧ з передаточною функцією $H(z)$ і через ФВЧ з передаточною функцією $G(z)$ та отримують відповідно коефіцієнти апроксимації першого рівня розкладання cA_1 , які представляють згладжений сигнал, і коефіцієнти деталізації першого рівня розкладання cD_1 , які описують високочастотні флуктуації сигналу. Далі процедура розкладання застосовується до набору коефіцієнтів cA_1 .

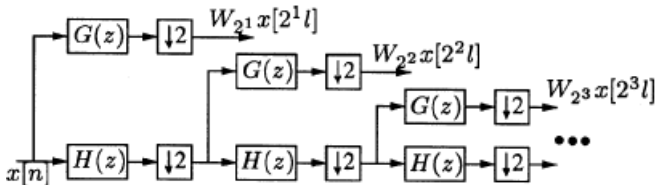


Рисунок 4.3 – Схема розкладання сигналу за алгоритмом Малла

Коефіцієнти апроксимації отримують за допомогою математичної операції згортки досліджуваного сигналу з передаточною функцією ФНЧ за формулою (4.6):

$$cA_{j+1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) \cdot cA_j(k), \quad (4.6)$$

де j – рівень декомпозиції;

cA_{j+1} – коефіцієнти апроксимації на $(j+1)$ -ому рівні розкладання;

h – коефіцієнти ФНЧ.

Коефіцієнти деталізації отримують за формулою (4.7):

$$cD_{j+1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-k) \cdot cA_j(k), \quad (4.7)$$

де cD_{j+1} – коефіцієнти деталізації на $(j+1)$ -ому рівні розкладання;

g – коефіцієнти ФВЧ.

Після кожного кроку кількість апроксимуючих коефіцієнтів і окремо деталізуючих зменшується в два рази. Це результат операції децимації $\downarrow 2$. Оскільки половина частотного діапазону сигналу була відфільтрована, тому, згідно з теоремою Котельникова, відліки сигналів можна прорідити в 2 рази.

Таке розкладання вдвічі зменшило роздільну здатність сигналу за часом через його проріджування. Проте кожен з отриманих сигналів є половиною частотної смуги вихідного сигналу, тому роздільна здатність сигналу за частотою подвоїлася.

4.6 Стаціонарне вейвлет-перетворення

Якщо необхідно зберегти роздільну здатність сигналу за часом на різних масштабах, використовують стаціонарне вейвлет-перетворення (алгоритм «a trous»). Інваріантність розкладання у часі досягається виключенням етапів проріджування та інтерполяцією імпульсних відгуків фільтра на попередньому масштабі. Схема розкладання сигналу за алгоритмом «a trous» наведена на рис. 4.4.

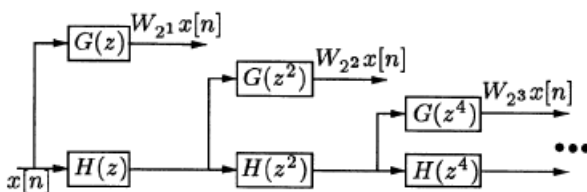


Рисунок 4.4 – Схема розкладання сигналу за алгоритмом "a trous"

4.7 Аналіз сингулярностей сигналу на основі вейвлет-перетворення

Сингулярності (локальні особливості) та нерегулярні структури часто несуть найважливішу інформацію у сигналах.

Чудовою властивістю вейвлет-перетворення є його здатність характеризувати локальну ступінь сингулярності функції, яка вимірюється локальним показником Гельдера. Чим менше величина показника Гельдера, тим сильніше сингулярність [7-9].

Сингулярності виявляють шляхом знаходження абсциси, в якій максимуми модуля вейвлет-перетворення сходяться на малих масштабах.

Максимумом модуля вейвлет-перетворення (ММВП) функції $f(x)$ називається точка (x_0, a_0) в площині (x, a) , така що виконується строга нерівність $|Wf(x, a_0)| < |Wf(x_0, a_0)|$ при x , що лежить у правій або лівій околиці точки x_0 , і при цьому $|Wf(x, a_0)| \leq |Wf(x_0, a_0)|$, коли x належить протилежній околиці точки x_0 .

Неперервну криву $a(x)$ на площині (x, a) , що з'єднує максимуми модуля, називають лінією максимумів. Скелет максимумів – це набір усіх ліній максимумів функції $Wf(x, a)$.

Гельдерівські сингулярності $f(x)$ представляють собою границі «локалізуючих» послідовностей виду (x_n, a_n) , що належать скелету максимумів, при a , що прямує до нуля. Величину показника Гельдера можна оцінити за нахилом $\log\text{-}\log$ графіку $|Wf(x, a)|$ від a уздовж лінії максимумів, яка йде до сингулярної точки.

Вейвлет-перетворення з n нульовими моментами можна інтерпретувати як багатомасштабний диференціальний оператор n -го порядку згладженого сигналу. Якщо вейвлет має один нульовий момент, тоді ММВП представляють собою максимуми першої похідної згладженого сигналу. Точки перетину вейвлет-перетворення з нулем на першому масштабі відповідають положенням локальних мінімумів і максимумів аналізованого сигналу [8]. Однак через присутність перешкод можлива поява великої кількості перетинів із нулем поблизу шуканого максимуму сигналу. Оскільки кількість перетинів з нулем зменшується при збільшенні масштабу, застосовується схема, загальна ідея якої зводиться до поступового обчислення

перетинів вейвлет-перетворення із нулем при просуванні від більшого масштабу до меншого.

4.8 Трешолдинг вейвлет-коефіцієнтів для видалення шуму

При вейвлет-аналізі сигнал розкладається на коефіцієнти апроксимації, які представляють згладжений сигнал, і коефіцієнти деталізації, що описують коливання. Отже, шумова компонента більше відбивається у коефіцієнтах деталізації. Тому при видаленні шуму обробляють зазвичай коефіцієнти деталізації. Друге припущення полягає в тому, що шумова компонента представляє собою сигнал, менший за модулем, ніж основний. Тому найпростіший спосіб видалення шуму полягає в тому, щоб зробити нульовими значення коефіцієнтів, менших за деяке порогове значення. Ця процедура називається пороговим обробленням (трешолдингом) коефіцієнтів. Широке поширення отримали такі методи порогового оброблення, як жорсткий трешолдинг і м'який трешолдинг.

При жорсткому трешолдингу зберігаються незмінними всі коефіцієнти, більші за абсолютною величиною від порогу, або такі, що дорівнюють йому, а менші коефіцієнти встановлюють на нуль. При м'якому трешолдингу разом із встановленням на нуль коефіцієнтів, за модулем менших за поріг, відбувається зменшення за модулем інших коефіцієнтів на величину порога [6].

4.9 Вейвлет-перетворення в MATLAB

4.9.1 Вейвлет-базиси та їх властивості

Загальну інформацію про вейвлет `wname` можна отримати використав функцію `waveinfo('wname')`. Перелік родин вейвлетів представлено в таблиці 4.1.

Для знаходження функцій $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ використовується функція:

$$[\text{phi}, \text{psi}, X] = \text{wavefun}(\text{'wname'}, K),$$

де K – число ітерацій обчислення.

Таблиця 4.1 – Вейвлет-родини в Matlab

Коротке ім'я	Вейвлет-родина	Властивості					
		Компактний носій	Ортогональний аналіз	Симетрія	НВП	ДВП	Швидкий алгоритм
Db	Добеші	+	+	–	+	+	+
Sym	Симлети	+	+	–	+	+	+
coif	Койфлети	+	+	+	+	+	+
bior	Біортогональні	+	–	+	+	+	+
Rbio	Дульні біортогональні	+	–	+	+	+	+
meur	Мейера	–	+	+	+	+	–
gaus	Гаусові	–	–	+	+	–	–
mexh	Мексиканський капелюх	–	–	+	+	–	–

Центральна частота вейвлету визначається:

$$\text{freq}=\text{centfrq}(\text{'wname'}).$$

Похідна вейвлету можна знайти з

$$[\text{intW},\text{X}]=\text{intwave}(\text{'wname'}).$$

4.9.2 Функції вейвлет-перетворення

Неперервне вейвлет-перетворення сигналу s виконується за допомогою функції:

$$\text{coeffs} = \text{cwt}(s,\text{scales},\text{'wname'},\text{'plot'}),$$

де scales – вектор масштабів (наприклад, $[1:32]; 5; [2 \ 16:32 \ 64]$).

Одномірне пряме дискретне вейвлет-перетворення сигналу s виконується за допомогою функції:

$$[\text{cA},\text{cD}] = \text{dwt}(s,\text{'wname'}),$$

де cA , cD – коефіцієнти апроксимації та деталізації сигналу.

Зворотнє одномірне вейвлет-перетворення:

$$s = \text{idwt}(cA, cD, 'wname').$$

Багатомірне вейвлет-перетворення виконується за допомогою наступних функцій:

$$[cA, cD] = \text{wavedec}(s, N, 'wname')$$

та

$$s = \text{waverec}(cA, cD, 'wname'),$$

де N – глибина (рівень) розкладання сигналу.

Для перерахунку параметру масштабу в частоту (Гц) використовується функція:

$$\text{freq} = \text{scal2frq}(N, 'wname', 1/Fs),$$

де Fs – частота дискретизації сигналу.

4.9.3 Функції видалення шуму та стиснення

Визначення порогу для видалення шуму:

$$\text{THR} = \text{thselect}(s, \text{TPTR}),$$

де TPTR – правило визначення порогу ('rigrsure' – принцип Штейна, 'heursure' – евристичний принцип Штейна, 'sqtwolog', 'minimax').

Порогова обробка:

$$Y = \text{wthresh}(s, \text{SORH}, \text{THR}),$$

де THR – порогове значення,

SORH – вид порогової обробки ('s' – м'яка, 'h' – жорстка).
Автоматичне видалення шуму:

$$Y = \text{wden}(s, \text{TPTR}, \text{SORH}, \text{PS}, N, 'wname')$$

чи

$$Y = \text{wden}(cA, cD, \text{TPTR}, \text{SORH}, \text{PS}, N, 'wname'),$$

де PS – визначення перемасштабування ('one' – без перемасштабування, 'sln' – перемасштабування з використанням оцінки шуму для першого рівня, 'mln' – перемасштабування з використанням оцінки шуму в залежності від рівня розкладення), N – рівень розкладення (декомпозиції сигналу).

Видалення шуму та стиснення сигналу:

```
Y=wdencmp('gbl',s,'wname',N,THR,SORH)
```

чи

```
Y=wdencmp('gbl',cA,cD,'wname',N,THR,SORH).
```

Оцінка шуму вейвлет-коефіцієнтів:

```
STDC=wnoisest(cA,cD,s).
```

Визначення параметрів для видалення шуму чи стиснення сигналу:

```
[THR,SORH,KEEPAPP]=ddencmp(IN1,IN2,s),
```

де IN1 – видалення шуму чи компресія сигналу ('den', 'cmp'),
IN2 – вейвлет чи вейвлет-пакет ('wv', 'wp'),
KEEPAPP – якщо 1, то коефіцієнти апроксимації не підлягають пороговій обробці.

4.9.4 Приклад вейвлет-обробки сигналу в Matlab

Проведемо вейвлет-декомпозицію нестационарного сигналу, побудуємо його спектр та видалимо шумову складову.

```
% загрузка тест. сигнала (доплерова кривая с шумом)
load ndoppr1;
s=ndoppr1;
%спектр сигнала
figure;
cwt(s,1:1024,'db12','plot');
%удаление шума
s_den=wden(s,'minimaxi','s','one',5,'db12');
%результаты фильтрации
figure;
plot(s,'g');
hold on;
```

```
plot(s_den,'r','LineWidth',2);  
xlabel('Время, с');  
ylabel('Амплитуда, мм');
```

Результати роботи програми наведено на рис. 4.5 і 4.6.

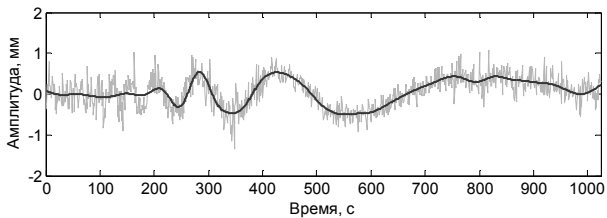


Рисунок 4.5 – Видалення шуму

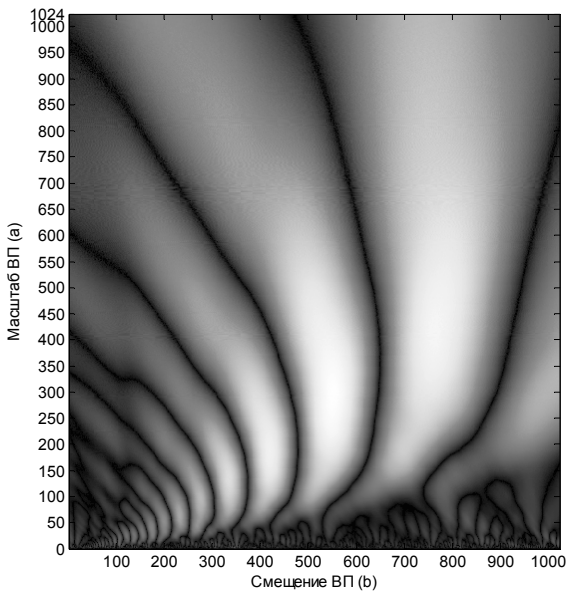


Рисунок 4.6 – Спектр сигналу

4.10 Вейвлет-перетворення двомірних сигналів

Двомірні сигнали $s(x,y)$ будемо називати *зображеннями*. Алгоритм розкладення зображення аналогічний одномірному випадку. Нехай $\varphi(x)$ – функція масштабування, $\psi(x)$ – вейвлет.

При декомпозиції (розкладанні) двомірного сигналу отримуємо чотири типи вейвлет-коефіцієнтів (рис. 4.7):

– *апроксимуючі коефіцієнти* cA_j можна отримати як коефіцієнти розкладання по вейвлет-базису $\varphi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)$;

– *горизонтальні деталізуючі коефіцієнти* cH_j можна отримати як коефіцієнти розкладання по вейвлет-базису $\varphi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)$;

– *вертикальні деталізуючі коефіцієнти* cV_j можна отримати як коефіцієнти розкладання по вейвлет-базису $\psi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)$;

– *діагональні деталізуючі коефіцієнти* cD_j можна отримати як коефіцієнти розкладання по вейвлет-базису $\psi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)$.

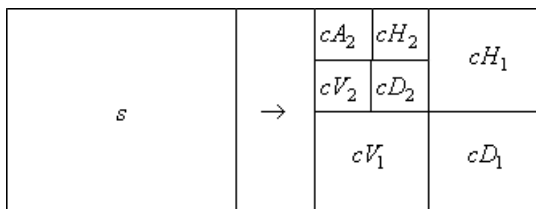


Рисунок 4.7 – Схема розкладання двомірного сигналу

4.10.1 Способи представлення зображення

Зображення в MATLAB може бути представлено наступним чином:

– *бінарне* (чорно-біле) задається матрицею, елементи якої приймають значення 0 чи 1;

– *полутонове* (grayscale) задається матрицею, елементи якої приймають дійсні значення від 0 до 1 та характеризують яскравість відповідного пікселю дисплею;

– *палітрове* зображення задається двома матрицями X та MAP . Кольорова карта MAP містить три стовпчики, які задають

інтенсивність червоного (R), зеленого (G) та синього (B) кольорів. Значення елемента матриці X є номером строки у матриці MAP , в якій вказані інтенсивності кольорів пікселю, відповідного елементу матриці X ;

– *повнокольорове* (RGB) зображення представляє тримірний масив розміру $n \times t \times 3$. Це три матриці $n \times t$, які містять інтенсивність R, G, B кольорів кожного пікселю.

Кольорову карту можна задати командою

```
colormap('map'),
```

де параметр 'map' приймає наступні значення: jet, HSV, Hot, Cool, Spring, Summer, Autumn, Winter, Gray, Bone, Copper, Pink, Lines.

4.10.2 Функції вводу-виводу зображення в MATLAB

Для виводу на екран зображення реалізована функція:

```
imshow name
```

чи

```
imshow(IM),
```

де IM – параметр зображення (BW; X, MAP; RGB);

BW – параметр бінарного зображення;

X, MAP – параметри палітрового зображення;

RGB – параметр повнокольорового зображення.

Для візуалізації матриці та виводу на екран зображення:

```
image(IM).
```

Для читання зображення з файлу використовується функція:

```
A=imread(fname.format)
```

чи

```
[X,MAP]=imread(fname.format),
```

де `fname.format` – графічний файл у форматі `bmp`, `jpg`, `pcx`, `tif`, `hdf`, `png`, `xwd`;

A – матриця двомірна для полутонового зображення та тримірна для повнокольорового.

Для запису зображення в файл використовується функція:

```
imwrite(A,fname.format)
```

чи

```
imwrite(X,MAP,fname.format).
```

4.10.3 Основні функції двомірного вейвлет-перетворення

Двомірне дискретне вейвлет-перетворення виконується за наступними функціями:

```
[cA,cH,cV,cD]=dwt2(X,'wname'),
```

```
X=idwt2(cA,cH,cV,cD,'wname'),
```

```
[C,S]=wavedec2(X,N,'wname'),
```

```
X=waverec2(C,S,'wname'),
```

де C – набір коефіцієнтів ($[A(N), H(N), V(N), D(N), A(N-1), H(N-1), V(N-1), D(N-1), \dots, A(1), H(1), V(1), D(1)]$);

S – матриця порядку $((N+2)*2)$ та має наступну будову: перший рядок – це розмір матриці $p \times q$ апроксимуючих коефіцієнтів рівня N , наступні рядки – це розміри матриць деталізуючих коефіцієнтів рівнів $(N-i+2)$ для $i=2, \dots, N+1$, останній рядок – розмір $n \times m$ матриці початкового сигналу.

4.10.4 Функції видалення (додавання) шуму до зображення в MATLAB

Для додавання шуму використовується функція:

```
Y=imnoise(X,type,val),
```

де `type` – тип шуму ('gaussian', 'salt & pepper', 'speckle'),

val – щільність шуму (якщо це гаусів білий шум, то два параметри – математичне сподівання та відхилення).

Для видалення шуму використовують на ступні функції: wthresh – порогова обробка, wdenctr – видалення шуму та стиснення сигналу, ddenctr – отримання параметрів для видалення шуму.

Приклад. Видалімо шум з палітрового зображення woman (рис. 4.8).

```
load woman;  
X_den=wdenctr('gb',X,'db8',5,20,'h',1);  
figure;  
subplot(121), image(X),  
colormap(map), axis off, axis image  
subplot(122), image(X_den),  
colormap(map), axis off, axis image
```



а



б

а – з шумом; б – без шуму

Рисунок 4.8 – Видалення шуму з зображення

4.10.5 Сполучення (накладання) зображень у MATLAB

Сполучення двох зображень можливе за допомогою функції:

```
XFUS=wfusing(X1,X2,'wname',N,afusm,dfusm),
```

де X1, X2 – матриці зображень;

afusm, dfusm – метод сполучення для приближень та деталей відповідно: простий – 'max', 'min', 'mean', 'img1', 'img2', 'rand'; залежний від параметру – struct('name', nameMETH, 'param',

paramMATH), де nameMETH – 'linear', 'UD_fusion' – сполучення зверху вниз, 'DU_fusion' – сполучення знизу вгору, 'RL_fusion' – сполучення справа наліво, 'UserDEF'.

Сполучення двох матриць чи векторів реалізовано функцією:

$$C = \text{wfusmat}(X1, X2, \text{method}),$$

де method – див. afusm, dfusm.

Приклад. Виконаємо сполучення двох зображень в одне (рис. 4.9).

```
load mask; X1=X;  
load bust; X2=X;  
XFUS=wfusing(X1,X2,'db2',5,'mean','mean');  
colormap(map);  
subplot(131), image(X1), axis off  
subplot(132), image(X2), axis off  
subplot(133), image(XFUS), axis off
```



а

б

в

а – перше зображення; б – друге зображення; в – результат накладання зображень

Рисунок 4.9 – Сполучення зображень

5 ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ ДО ВИРІШЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ

5.1 Визначення профілю хвилястості і шорсткості оброблюваної поверхні за допомогою вейвлет-перетворення

5.1.1 Визначення параметрів шорсткості й хвилястості

Під *якістю поверхні* слід розуміти сукупність властивостей (шорсткість, залишкові напруги, поверхнева твердість тощо), які визначають придатність поверхневого шару для використання його за призначенням. А оскільки поверхня повинна виконувати свої функції в заданих межах, якість її виконання повинна відповідати певним нормам (допускам). Складність геометричної форми в поєднанні з низькою жорсткістю, похибка верстата, затуплення і нерівності ріжучих кромek інструменту, пластична деформація поверхні оброблюваної деталі при стружкоутворюванні призводять до виникнення в процесі обробки ділянок поверхні з різною шорсткістю. Це зумовило необхідність розроблення нових способів формування необхідної шорсткості і, як наслідок, уточнення методики оцінювання її параметрів.

До останнього часу всі роботи велися в межах ГОСТ 2789:73 та ДСТУ ГОСТ 25142:2009.

Шорсткість поверхні (рис. 5.1) – це сукупність нерівностей поверхні з відносно малими кроками, виділена за допомогою базової довжини [10].

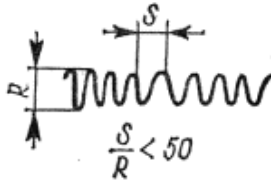


Рисунок 5.1 – Шорсткість поверхні

Визначення шорсткості конкретної поверхні починають з того, що обирають напрямок вимірювання нерівностей. Воно може бути задано кресленням. При відсутності такої вказівки вимір здійснюють у напрямку найбільших нерівностей, найчастіше перпендикулярно ризикам обробки. Поверхню розсікають перпендикулярної площиною, отримуючи реальний профіль. Відносно цього профілю проводять *базову лінію*. При оцінюванні плоских поверхонь (або циліндричних в осьовому перетині) базовою лінією буде пряма. На певній ділянці цієї лінії, яку називають *базовою довжиною l*, виділяють нерівності, що характеризують шорсткість поверхні [11]. *Базова лінія* – це лінія заданої геометричної форми, проведена відносно профілю і яка служить для оцінювання геометричних параметрів шорсткості [12].

Кресленням, як правило, задаються вимоги до шорсткості всієї робочої поверхні деталі. Контроль дотримання цих вимог здійснюється зазвичай по деякому числу профілів обмеженої довжини. При цьому виникають питання: якої довжини має бути кожен обстежуваний профіль (ділянка виміру), скільки таких ділянок мають бути обстежені, які ділянки вибирати для вимірювань, щоб оцінити якість поверхні в цілому.

Існують дві системи визначення числових значень параметрів шорсткості поверхні: системи *M* (відлік висоти нерівностей від середньої лінії профілю) і *E* (від обвідної лінії, що лежить поза контуру шорсткості поверхні) [13]. Найпоширенішою з них є система *M*, яка відповідає рекомендаціям ISO [10, 14].

Середня лінія профілю (рис. 5.2) – це базова лінія, що має форму номінального профілю і проведена так, що в межах базової довжини середньоквадратичне відхилення профілю до цієї лінії мінімально [12].



Рисунок 5.2 – Середня лінія профілю

Система середньої лінії – система відліку, використовувана при оцінюванні параметрів шорсткості поверхні, в якій в якості базової довжини використовується середня лінія.

Лінія виступів профілю (рис. 5.3) – лінія, еквідистантна середній лінії і яка проходить через найвищу точку профілю в межах базової довжини. Лінію, еквідистантну середній лінії і яка проходить через нижчу точку профілю в межах базової довжини, називають *лінією западин профілю*.

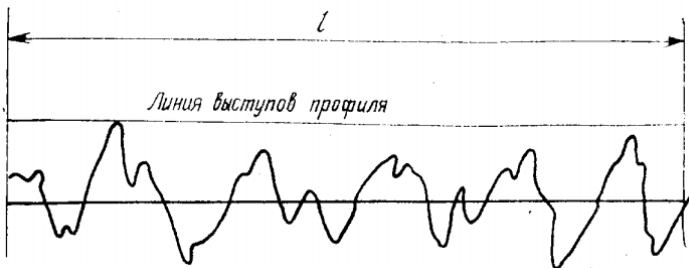


Рисунок 5.3 – Лінія виступів профілю

На вимогу ГОСТ 2789-73 визначені наступні параметри шорсткості:

1. Ra – середньоарифметичне відхилення профілю – середнє арифметичне з абсолютних значень відхилень профілю в межах базової довжини (рис. 5.4):

$$Ra = \frac{1}{l} \int_0^l |y(x)| dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i|, \quad (5.1)$$

де l – базова довжина;

n - число обраних точок профілю на базовій довжині.

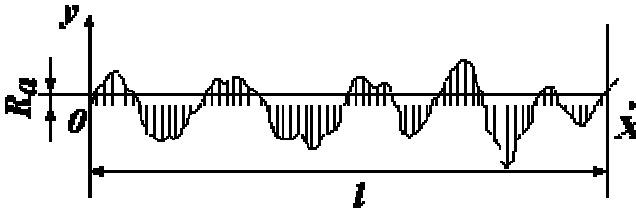


Рисунок 5.4 – Середньоквадратичне відхилення профілю

2. Rz – висота нерівностей профілю по 10 точкам – сума середніх абсолютних значень висот п'яти найбільших западин профілю в межах базової довжини (рис. 5.5):

$$R_z = \frac{\sum_{i=1}^5 |y_{pmi}| + \sum_{i=1}^5 |y_{vmi}|}{5}, \quad (5.2)$$

де y_{pmi} – висота i -го найбільшого виступу профілю;

y_{vmi} – глибина i -ї найбільшої западини профілю.

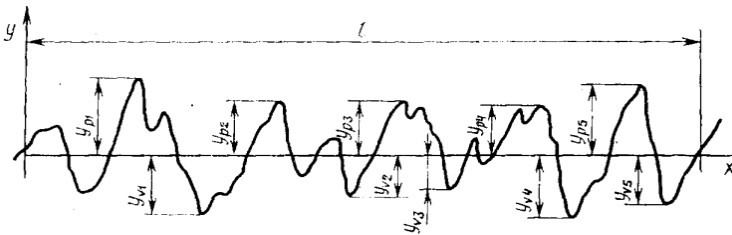


Рисунок 5.5 – Висота нерівностей за 10 точками

3. R_{max} – найбільша висота профілю – відстань між лінією виступів і лінією западин профілю в межах базової довжини (рис. 5.6).

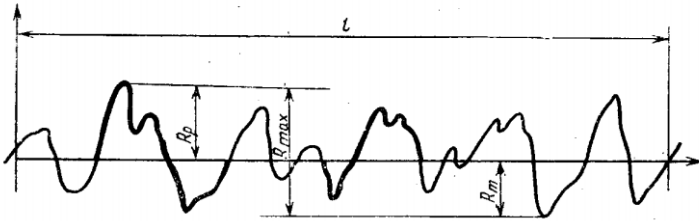


Рисунок 5.6 – Найбільша висота профілю

4. S_m – середній крок нерівностей – середнє значення кроку нерівностей профілю в межах базової довжини (рис. 5.7).

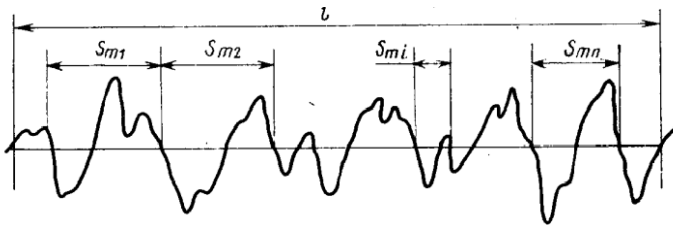


Рисунок 5.7 – Крок нерівностей профілю

5. S – середній крок локальних виступів профілю – середнє значення кроку локальних виступів профілю в межах базової довжини (рис. 5.8).

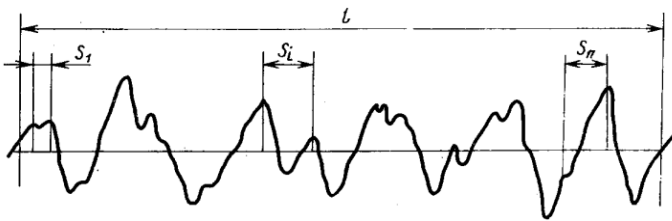


Рисунок 5.8 – Крок локальних виступів профілю

6. T_p – відносна довжина профілю – відношення опорної довжини профілю до базової довжини:

$$t_p = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n b_i, \quad (5.3)$$

де b – значення рівня перетину профілю – відстань між лінією виступів профілю і лінією, що перетинає профіль еквідистантно лінії виступів профілю.

Найважливішим параметром, який характеризує шорсткість, є середнє арифметичне відхилення профілю Ra .

ГОСТ 2789-73 [10] регламентує наступні межі значень параметрів шорсткості (рис. 5.9): $Ra = 0.008 \div 100$ мкм; Rz і $Rmax$ дорівнюють $0.025 \div 1600$ мкм; Sm і S дорівнюють $0.002 \div 12.5$ мм; $tp = 10 \div 90\%$; $l = 0.01 \div 25$ мм, а також напрямок нерівностей. Вимоги до шорсткості встановлюються за одним або кількома параметрами.

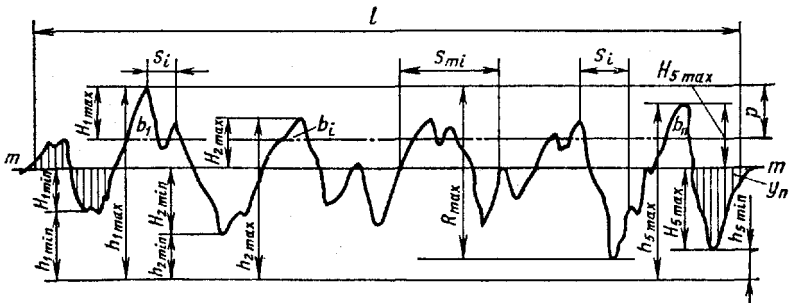


Рисунок 5.9 – Профілограма шорсткості поверхні

Співвідношення параметрів Ra , Rz , $Rmax$ і базової довжини l , зумовлені [10] представлені в таблиці 5.1.

Шорсткість поверхонь оцінюють при контролі і прийманні деталей, а також при дослідженнях в лабораторних умовах. Застосовувані методи оцінювання можна розділити на прямі і непрямі.

Таблиця 5.1 – Співвідношення значень параметрів Ra , Rz , $Rmax$ і базової довжини l

Ra , мкм	$Rz = Rmax$, мкм	l , мм
0 – 0.025	0 – 0.10	0.08
0.025 – 0.4	0.10 – 1.6	0.25
0.4 – 3.2	1.6 – 12.5	0.8
3.2 – 12.5	12.5 – 50	2.5
12.5 – 100	50 – 400	8.0

Непрягий метод оцінювання заснований на візуальному зіставленні обробленої поверхні з еталоном неозбросним оком або під мікроскопом, а також по відчуттях при обмацуванні рукою (пальцем, долонею, нігтем). Візуальним способом можна досить точно визначати шорсткість поверхні, за винятком дуже тонко оброблених поверхонь. Еталони, які застосовуються для оцінювання шорсткості поверхні візуальним способом, повинні бути виготовлені з тих самих матеріалів, з такою самою формою поверхні і тим самим методом. Якісну оцінку вельми тонко оброблених поверхонь слід проводити за допомогою мікроскопа або лупи з п'ятиразовим і більшим збільшенням [15].

Поверхні, оброблені різними способами, мають шорсткість не тільки різної висоти, але і різної геометричної форми, яка значно впливає на їх властивості. Ця обставина призвела до того, що оцінити шорсткість однією характеристикою так, щоб вона одночасно відображала б ряд її експлуатаційних властивостей, не представляється можливим.

Дослідження шорсткості поверхонь ведеться в таких основних напрямках:

- пошук, дослідження та стандартизація параметрів і критеріїв шорсткості,
- метрологічний напрямок,
- технологічне забезпечення, визначення шорсткості розрахунковим способом,
- шорсткість, її зв'язок з експлуатаційними властивостями поверхонь,
- функціональна взаємозамінність поверхонь за параметрами шорсткості [15].

Поверхні, оброблені металорізальними інструментами (різцем, фрезою тощо), мають шорсткість різного характеру: подовжню – у напрямку вектора швидкості різання і поперечну – у напрямку, перпендикулярному вказаному вектору, тобто в напрямку подачі (рис. 5.10).

Поздовжня шорсткість утворюється внаслідок коливань сили різання при обробці, які можуть викликати вібрації, що збільшують подовжню шорсткість. Можливі й інші причини утворення поздовжньої шорсткості, наприклад утворення наросту.

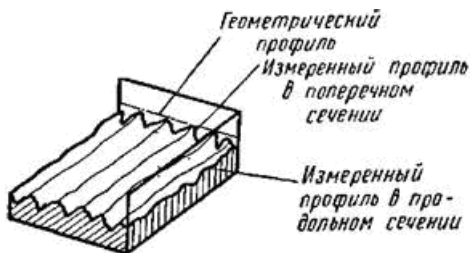


Рисунок 5.10 – Поздовжня й поперечна шорсткість

Поперечна шорсткість зазвичай більша, ніж поздовжня. При чистовому обробленні поверхонь деталей абразивним інструментом шорсткість поверхні в поздовжньому і поперечному напрямках приблизно однакова.

До числа багатьох факторів, від яких залежить якість оброблюваної поверхні, відносяться:

- рід і властивості оброблюваного матеріалу;
- спосіб обробки (точіння, стругання, шліфування тощо);
- режим різання металу (швидкість різання, подача, глибина різання);
- жорсткість системи верстат-приспосовування-інструмент-деталь;
- геометричні параметри інструменту;
- матеріал інструменту;
- охолодження в процесі різання.

При оцінюванні шорсткості враховують не тільки висоту й форму нерівностей, але також їх напрямок. Форма мікронерівностей впливає на несучу поверхню, яка визначає знос і контактну деформацію сполучених деталей. При гостровершинних нерівностях несуча поверхня мала; при плосковершинних вона зростає. Водночас наявність глибоких западин (мікротріщин) порушує щільність поверхневого шару, знижуючи втмну міцність деталі. Напрямок штрихів від попередньої обробки слід оцінювати з урахуванням спільного контакту сполучених деталей (при нерухомих з'єднаннях) і напрямку руху деталей в рухомих з'єднаннях. Розрізняють шорсткість поперечну, виміряну в напрямку руху подачі, і подовжню, виміряну в напрямку головного руху різання [16].

Під *хвилястістю поверхні* розуміють сукупність нерівностей, які періодично чергуються з відносно великим кроком, що перевищує прийняту при вимірюванні шорсткості базову довжину. Хвилястість є геометричною похибкою, що займає за величиною проміжне положення між мікро- і макрогеометрією поверхні [17]. Хвилястість поверхні деталі виникає при обробленні внаслідок вібрації технологічної системи верстат-приспособування-інструмент-деталь, нерівномірності процесу різання, биття ріжучого інструменту та інших причин. Часто хвилястість виникає на поверхні деталей середніх і великих розмірів при обробленні гострінням, фрезеруванням, шліфуванням.

Недоліки методики розділення профілю за ГОСТ 4287:2002:

- порогова довжина хвилі профільного фільтра залежить від базової довжини поверхні;
- базова довжина поверхні залежить від ряду обчислених параметрів профілю;
- базова довжина поверхні визначена на декілька класів шорсткості поверхні.

Ці недоліки призводять до неправильного оцінювання якості обробленої поверхні.

Таким чином, виникає завдання розроблення системи критеріїв для визначення хвилястості і шорсткості обробленої поверхні.

Для вирішення цієї проблеми перспективно використовувати вейвлет-перетворення, яке є одним з напрямків обробки сигналів, що активно розвиваються.

5.1.2 Вхідні дані

Розглянемо зразок металевої поверхні, оброблений фрезеруванням при наступних параметрах: частота обертання шпинделя – 1800 об/хв., глибина різання – 0.5 мм, подача – 90 мм/хв.

Профілограма даного зразка наведена на рис. 5.11.

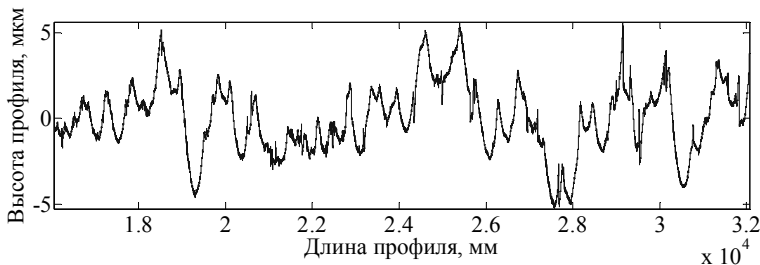


Рисунок 5.11 – Вихідна профілограма

5.1.3 Визначення оптимальної декомпозиції сигналу

Сигнал, що має розмірність N , може бути розкладений багаторівневим одновимірним вейвлет-перетворенням на $2^{N/2}$ рівнів, які представляють собою набір апроксимуючих (cA) і деталізуючих (cD) коефіцієнтів [18]. Число рівнів розкладання достатньо велике і встановлення обмеження глибини декомпозиції багато в чому залежить від досвіду дослідника.

У роботі Р. Р. Кофмана [19] для отримання оптимальної декомпозиції сигналу запропоновано використовувати критерій мінімуму ентропії.

Інформаційна ентропія – це міра невизначеності або непередбачуваності інформації [20]. Ентропія характеризує ймовірність P , з якою встановлюється той чи інший стан, і є мірою хаотичності або незворотності. Всі процеси в природі протікають в напрямку збільшення ентропії. Термодинамічній рівновазі системи, в яку не надходить енергія ззовні, відповідає стан з максимумом ентропії. Рівновага, якій відповідає найбільший максимум ентропії, називається *абсолютно стійкою*. Таким чином, збільшення ентропії системи означає перехід в стан, що має велику ймовірність. Необоротні процеси протікають мимоволі доти, поки система не досягне стану, якому відповідає найбільша ймовірність, а ентропія досягне свого максимуму [21, 22]. Згідно з теорією К. Шеннона, приріст інформації дорівнює втраченій невизначеності системи [23]:

$$H = -\sum_{j=1}^N P_j^2 \log(P_j^2), \quad (5.4)$$

Суть методу Кофмана полягає в наступному: на черговому рівні розкладання сигналу розраховується значення суми ентропій апроксимуючих і деталізуючих коефіцієнтів вейвлет-розкладання сигналу; якщо отримане значення більше, ніж на попередньому рівні розкладання, декомпозицію продовжують, в іншому випадку попередній рівень (рівень, отриманий на попередній ітерації) є заключним. Підсумкова декомпозиція сигналу являє собою набір рівнів: з першого до рівня з мінімальною ентропією.

Оскільки потрібно визначити рівень декомпозиції, при якому система має найбільш стійкий стан, будемо використовувати критерій максимізації ентропії, на відміну від роботи методу Кофмана.

Виконаймо декомпозицію профілограми і обчислимо на кожному рівні розкладання сумарну ентропію Шеннона для профілю хвилястості і шорсткості (рис. 5.12).

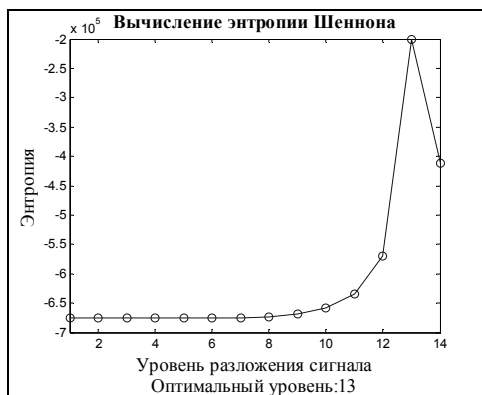


Рисунок 5.12 – Обчислення сумарної ентропії для профілограми

Максимальна ентропія спостерігається на рівні 13 розкладання. Таким чином, оптимальний рівень декомпозиції для розділення вихідного профілю на хвилястість і шорсткість – 13.

5.1.4 Метод визначення хвилястості і шорсткості

Для визначення оптимальної декомпозиції профілограми дослідимо поведінку сумарною ентропії хвилястості і шорсткості профілю.

Алгоритм роботи методу:

1. Обчислити початкове значення ентропії профілограми.
2. Встановити рівень декомпозиції $i = 2$.
3. Розкласти сигнал на глибину i , отримати хвилястість обробленої поверхні (W_i).
4. Відняти з загального профілю хвилястість, отримати шорсткість обробленої поверхні (R_i).
5. Обчислити ентропію Шеннона для хвилястості і шорсткості поверхні (H_{W_i} і H_{R_i}):

$$H_{W_i} = -\sum_{j=1}^N W_{ij}^2 \log(W_{ij}^2), \quad (5.5)$$

$$H_{R_i} = -\sum_{j=1}^N R_{ij}^2 \log(R_{ij}^2). \quad (5.6)$$

6. Обчислити сумарну ентропію:

$$H_i = H_{W_i} + H_{R_i}. \quad (5.7)$$

7. Якщо $H_i > H_{i-1}$, встановити $i = i + 1$ та перейти до кроку 3.

8. Зупинитися.

У підсумку отримаємо поділ профілограми на хвилястість і шорсткість на рівні декомпозиції ($i-1$), який має максимальну ентропію, що відповідає стійкому стану системи.

5.1.5 Вибір вейвлет-базису

У роботі [24] для побудови амплітудно-частотної характеристики вейвлета було запропоновано на основному діапазоні частот побудувати залежність відношень середньоквадратичних значень відновленого і вихідного сигналу від частоти сигналу. Даний підхід можна застосувати тільки для

вейвлет-родин, які мають скейлінг-функцію, наявність якої є необхідною умовою для відновлення сигналу [5]. Тому для зняття вищенаведеного обмеження дослідімо чутливість вейвлет-коефіцієнтів від частоти сигналу.

При побудові АЧХ вейвлета спочатку виконується пряме вейвлет-перетворення. Вихідним сигналом при цьому є синусоїда фіксованою амплітуди і частоти. Після цього обчислюється відношення середньоквадратичних значень коефіцієнтів розкладання і вихідного сигналу. Процедура повторюється для різних частот у заданому інтервалі (до частоти Найквіста) [25]. Метод побудови АЧХ вимагає вибору масштабу для вейвлет-перетворення сигналу. *Оптимальним* назвемо масштаб, частота якого максимально відповідає заданій базовій частоті сигналу [26]:

$$Freq = \{(F_{wavelet} \cdot F_{signal}) / A_j\}, \quad j = \overline{2^0 \div 2^N}, \quad (5.8)$$

де $F_{wavelet}$ – центральна частота вейвлета;

F_{signal} – несуча частота вхідного сигналу;

A_j – масштаб вейвлет-перетворення.

На рис. 5.13 наведено блок-схему алгоритму, де Y – вхідний сигнал, F_{signal} – основна частота вхідного сигналу, F_s – частота дискретизації, d – крок зміни частоти, $wname$ – ім'я вейвлет-фільтра, $F_{wavelet}$ – центральна частота вейвлета, A – масштаб вейвлет-перетворення, REZ – масив, що містить дані про АЧХ.

Для кожного пелюстка АЧХ можна визначити наступні параметри: початкова, кінцева і центральні частоти, ширина пелюстка, частоти смуги пропускання та її ширина, відношення середньоквадратичних відхилень (std) вейвлет-коефіцієнтів до вихідного сигналу для кожного з вищеперерахованих параметрів.

Для визначення оптимального вейвлета використані наступні параметри АЧХ: ширина смуги пропускання (L_p) головного пелюстка АЧХ, площа бічних пелюстків (S_b), близькість центральної частоти головного пелюстка до частоти досліджуваного сигналу ($F_{cs} = |F_c - F_{signal}|$).

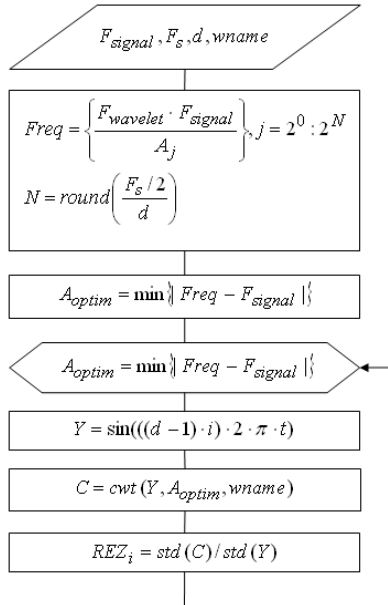


Рисунок 5.13 – Блок-схема алгоритму побудови АЧХ вейвлета

Тоді оптимальний вейвлет-базис визначається наступним чином:

$$f(L_p, S_b, F_{cs}) \rightarrow \min \quad (5.9)$$

Для вибору оптимального вейвлет-базису проаналізуймо родину вейвлетів Добеши.

Вейвлети родини Добеши – це ортогональні вейвлети з компактним носієм, які мають такі властивості [27]:

- функція φ існує і аналіз ортогональний;
- функції φ і ψ мають компактний носій;
- функція φ має деяке число нульових моментів;
- несиметричні;

– можливий аналіз: безперервне розкладання, дискретне перетворення з використанням швидких алгоритмів.

Для дослідження частотних характеристик вейвлетів скористаємося вищеописаним методом. Побудуємо АЧХ вейвлетів родини Добеши порядку від 1 до 20 (рис. 5.14).

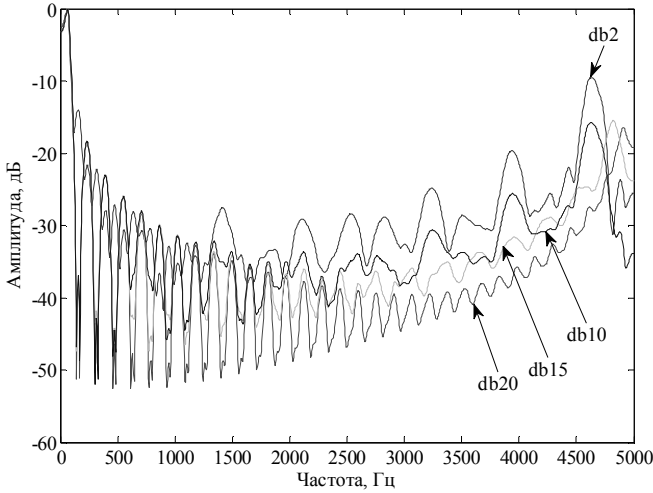


Рисунок 5.14 – АЧХ вейвлетів сімейства Добеши

Аналізуючи АЧХ вейвлетів, можна побачити, що вейвлети родини Добеши порядку від 1 до 10 мають велику кількість бічних пелюсток і, тому, будуть надавати сигналу більш «гостру» форму, що суперечить природі хвилястості профілю; тому для визначення вейвлет-базису проаналізуємо вейвлети цієї родини порядку від 11 до 20. Значення центральної частоти вейвлетів Добеши показані на рис. 5.15.

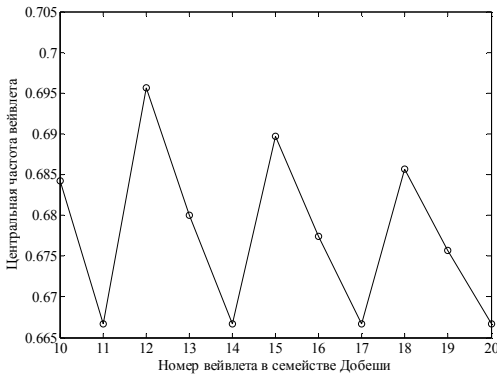


Рисунок 5.15 – Центральні частоти вейвлетів родини Добеши

За результатами дослідження профілограми металевої поверхні, отриманої шляхом фрезерування співробітниками кафедри ТМБ ЗНТУ, можна зробити наступні висновки: для отримання профілів хвилястості і шорсткості, передбачених ДСТУ 4287:2006 [28], обробка загального профілю здійснюється з використанням фільтра Гауса [29-31]; причому параметри фільтра повинні задовольняти наступній умові: локальним екстремумам кривої локальних нахилів необхідно перейти 5%-бар'єр середнього арифметичного відхилення профілю (рис. 5.16, 5.17). Оцінювання локального нахилу задається [28]:

$$dz_i / dx = 1/60\Delta x(z_{i+3} - 9z_{i+2} + 45z_{i+1} - 45z_{i-1} + 9z_{i-2} - z_{i-3}), \quad (5.10)$$

де $Z(x)$ – ординатне значення профілю.

Криві локальних нахилів профілю для вейвлетів родини Добеши порядку від 10 до 20 наведено на рис. 5.18-5.28.

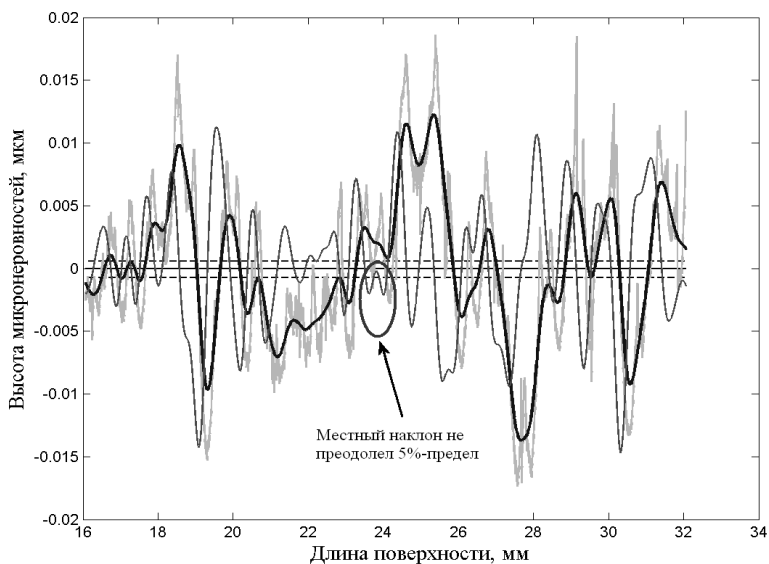


Рисунок 5.16 – Обробка профілю фільтром Гауса ($\lambda = 0.8$)

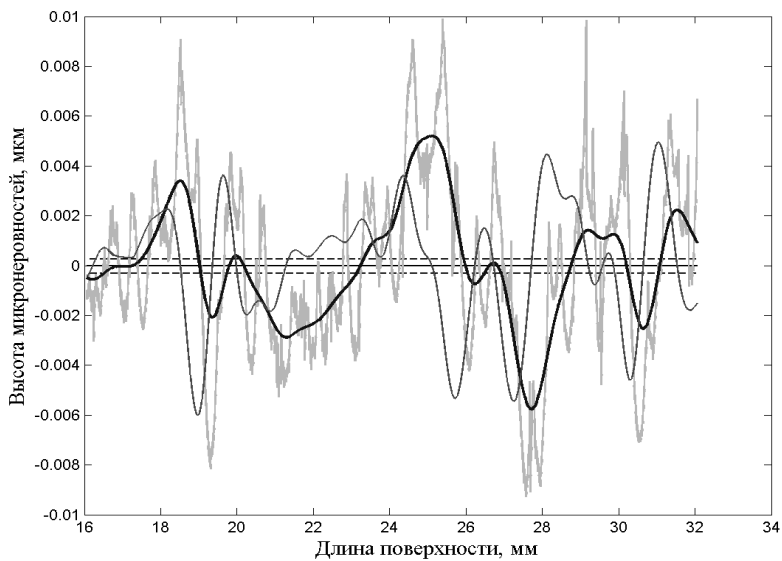


Рисунок 5.17 – Обработка профілю фільтром Гауса ($\lambda = 1.7$)

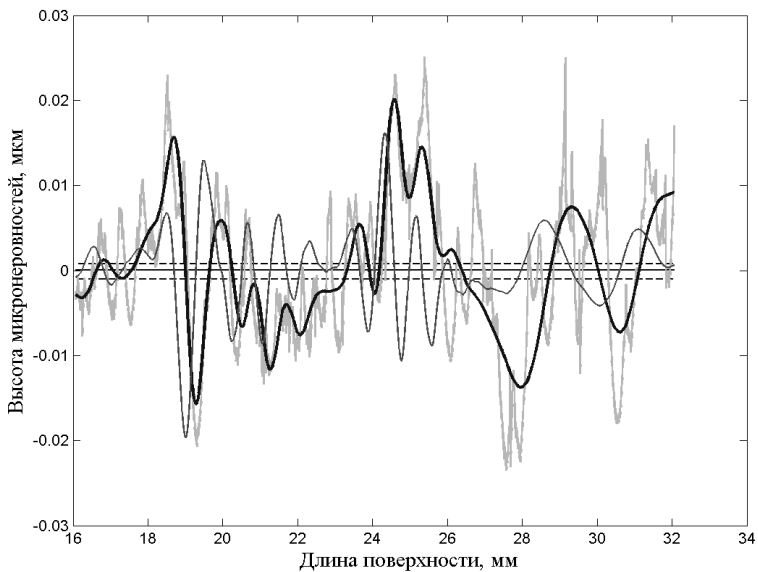


Рисунок 5.18 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 10$

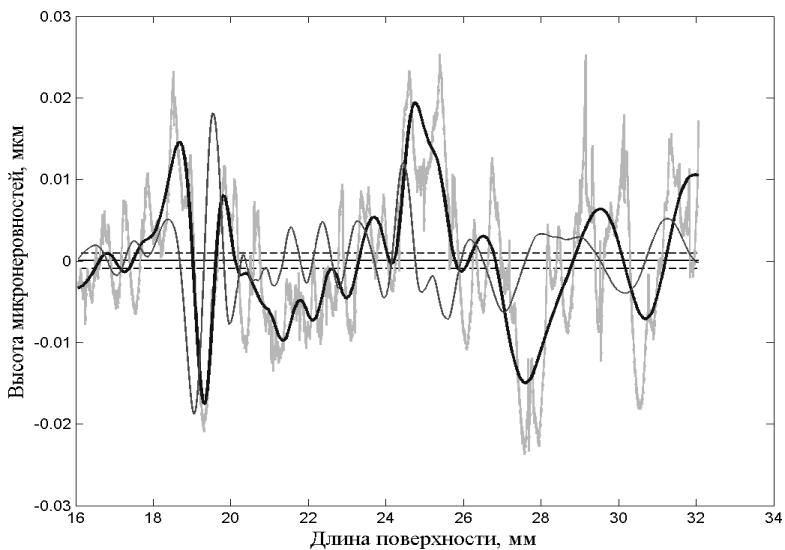


Рисунок 5.19 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 11$

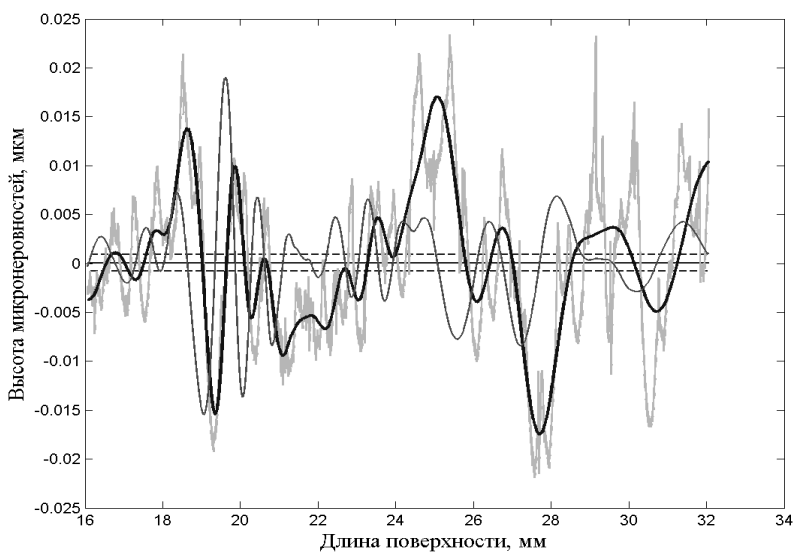


Рисунок 5.20 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 12$

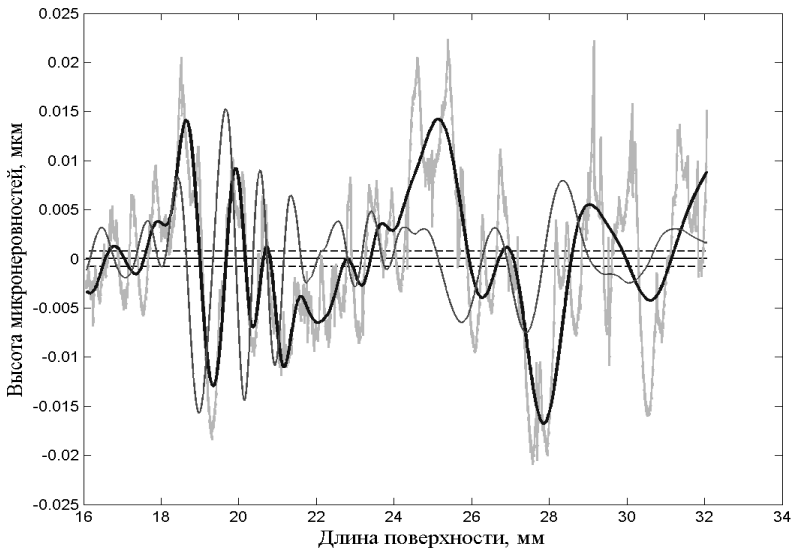


Рисунок 5.21 – Обработка профиля вейвлетом Добеши $N = 13$

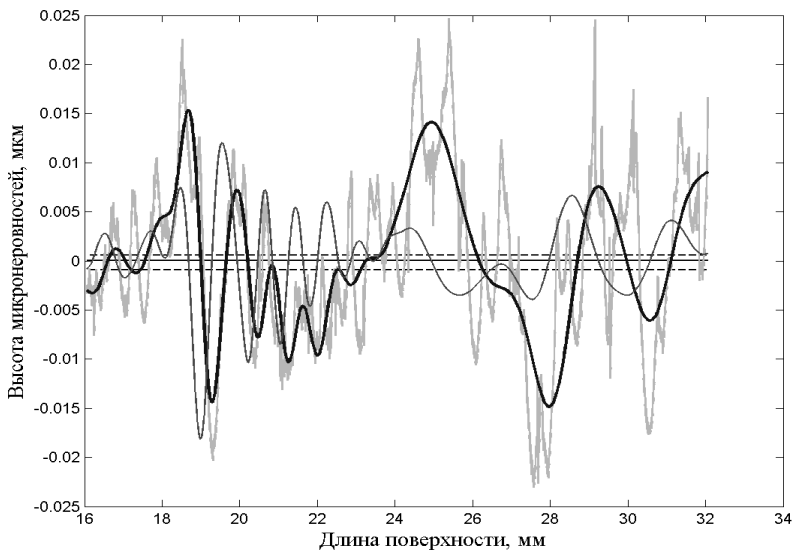


Рисунок 5.22 – Обработка профиля вейвлетом Добеши $N = 14$

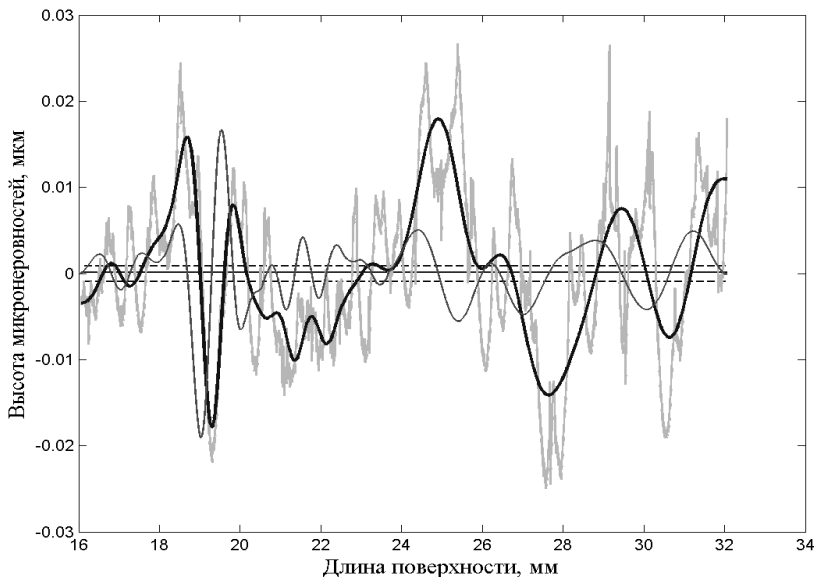


Рисунок 5.23 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 15$

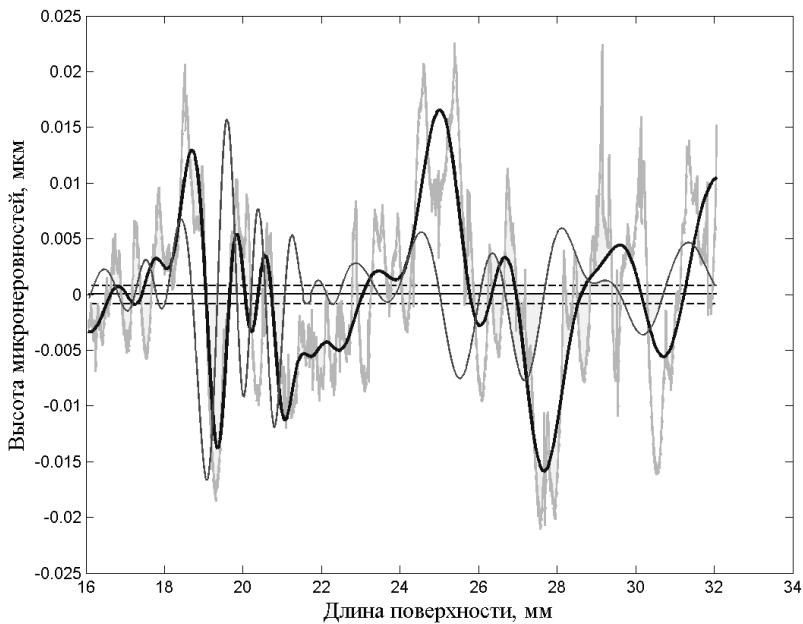


Рисунок 5.24 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 16$

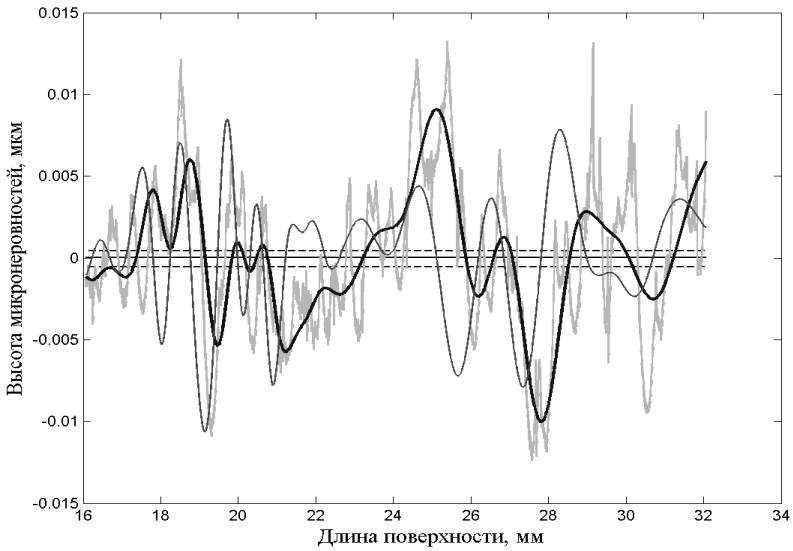


Рисунок 5.25 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 17$

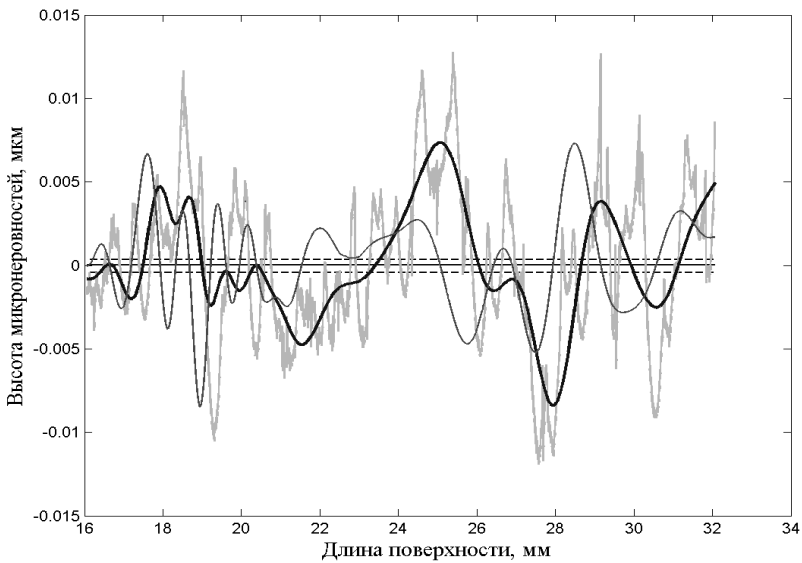


Рисунок 5.26 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 18$

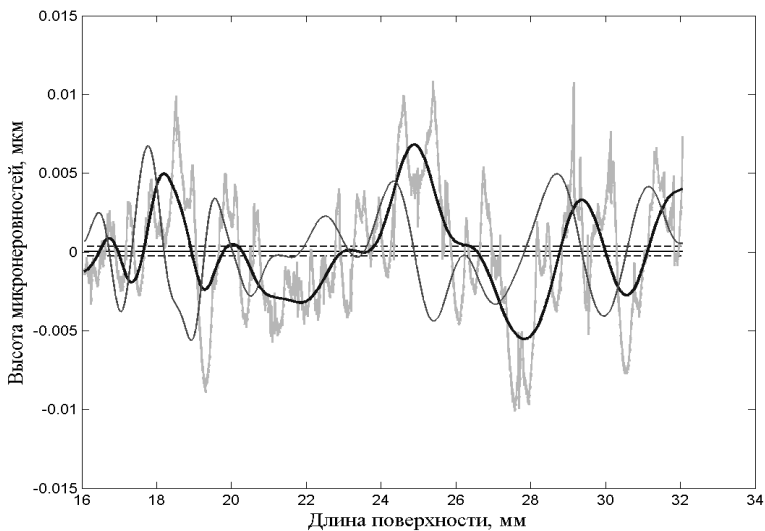


Рисунок 5.27 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 19$

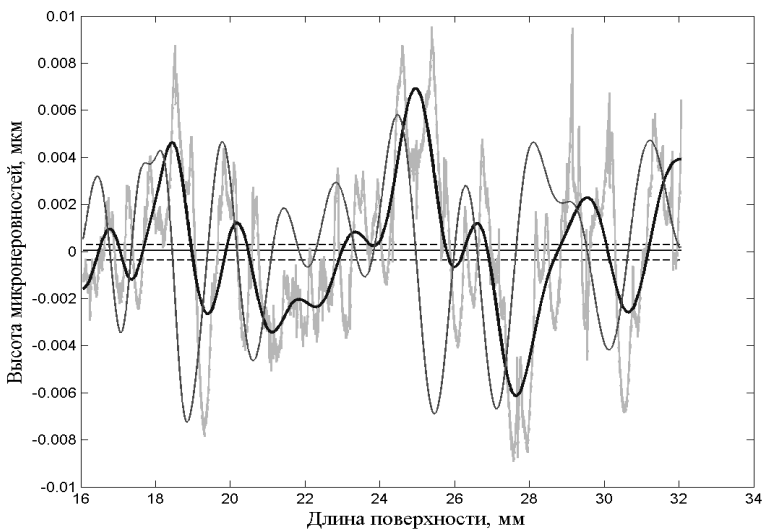
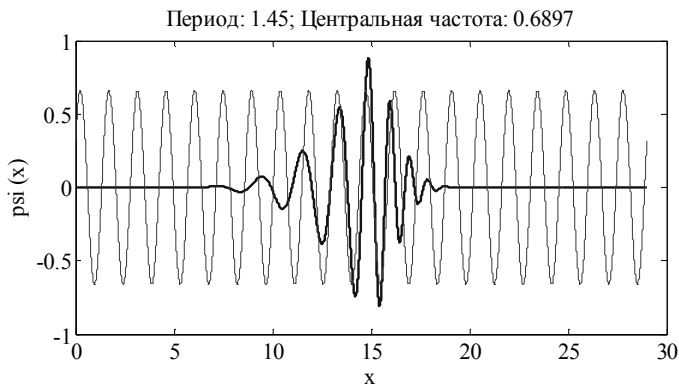


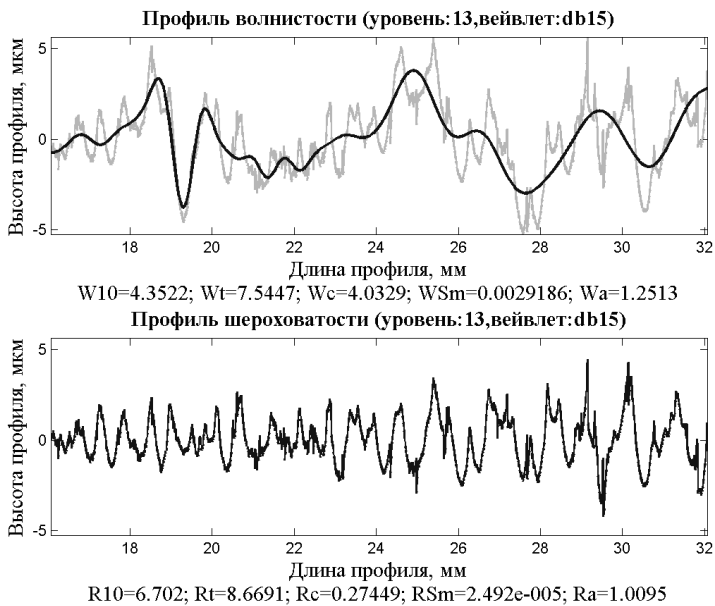
Рисунок 5.28 – Оброблення профілю вейвлетом Добеши $N = 20$

Проаналізувавши криві місцевих нахилів профілю для вейвлетів родини Добеши порядку від 10 до 20, можна зробити

наступний висновок: перший вейвлет, який подолав 5%-межу середнього арифметичного відхилення профілю, – вейвлет Добеши $N = 15$ (рис. 5.29).



Остаточне розділення профілю наведено на рис. 5.30.



Рисунік 5.30 – Вейвлет Добеши $N = 15$

5.2 Вейвлет-аналіз ЕКГ

5.2.1 Особливості сигналу ЕКГ

ЕКГ – це графічне представлення різниці потенціалів, що виникає на поверхні тіла під час роботи серця і реєструється електрокардіографом. Сигнал ЕКГ представляє собою послідовність кардіоциклів, що повторюються через випадкові інтервали часу. Кардіоцикл (рис. 5.31) розділений на зубці та інтервали, кожен з яких відповідає певній фазі розповсюдження хвилі збудження у міокарді.

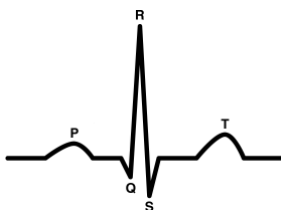


Рисунок 5.31 – Комплекс P-QRS-T

Аналіз сигналу ЕКГ представляє собою складну теоретичну проблему. Це пов'язано з фізіологічним походженням сигналу, яке обумовлює його недетермінованість, нестационарність і схильність до численних видів перешкод (м'язові шуми, мережна перешкода, артефакти зміщення електродів тощо).

Циклічний характер сигналу ЕКГ та його спектральні складові, що, в основному, з'являються у добре відомих смугах частот, які можна розрізнити, зробили ЕКГ підходящим кандидатом для багатомасштабного розкладання за допомогою вейвлет-перетворення [9, 32-48].

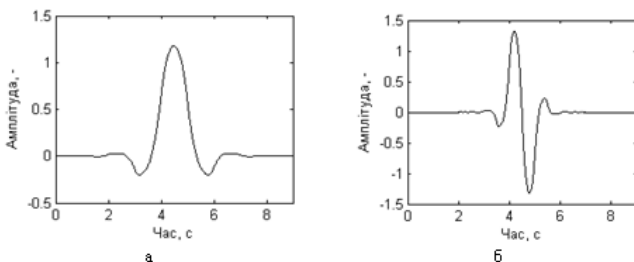
5.2.2 Вибір материнського вейвлета

Вибір вейвлет-функції, яка точно б відповідала досліджуваному сигналу, має ключове значення у вейвлет-застосуваннях.

Перша вимога, що пред'являється до материнського вейвлета, – це компактний носій, тобто вейвлет повинен бути відмінним від нуля лише в обмеженій області простору. Чим вужча ця область, тим кращої локалізації за часом можна досягти. Необхідно обрати

материнський вейвлет таким чином, щоб за вейвлет-розкладанням можна було б достатньо просто охарактеризувати сигнал, тобто знайти положення й амплітуди піків, що представляють інтерес, а також початок фронтів наростання сигналу. З іншого боку, бажано, щоб цей вейвлет був добре дослідженим математично, щоб мати надійний алгоритм параметризації сигналу. Як правило, характерними точками вейвлет-розкладання служать максимуми і точки перетину з нулем. При цьому завжди зручніше мати справу з симетричними вейвлетами, оскільки симетричний сигнал породжує симетричне розкладання на кожному масштабі, що набагато зручніше при аналізі сигналу.

Для ідентифікації сигналу ЕКГ було обрано біортогональний вейвлет «bior1.5». Графіки функції масштабування і вейвлет-функції даного вейвлета наведено на рис. 5.32.



а – функція масштабування; б – вейвлет-функція

Рисунок 5.32 – Графіки функції масштабування і вейвлет-функції вейвлета «bior1.5»

Вейвлет є симетричним, має компактний носій, дорівнює першій похідній від скейлінг-функції та має один нульовий момент. Це робить його використання дуже зручним при аналізі ЕКГ.

При багаторівневому розкладанні сигналу (рис. 5.33) обчислюють коефіцієнти апроксимації A , які представляють згладжений сигнал, і коефіцієнти деталізації D , які описують високочастотні коливання сигналу.

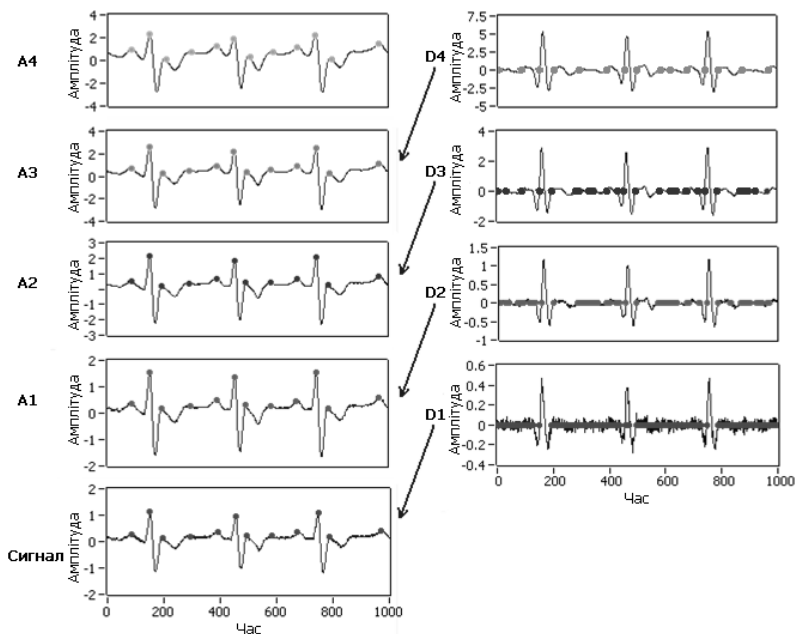


Рисунок 5.33 – Багатомасштабний процес уточнення положення піків

Вейвлет-перетворення з одним нульовим моментом можна розглядати як багатомасштабний диференціальний оператор 1-го порядку згладженого сигналу. У цьому разі максимуми модуля вейвлет-перетворення представляють собою ММ першої похідної згладженого сигналу, а точки перетину ВП з нулем відповідають положенням локальних мінімумів і максимумів згладженого сигналу. А отже, точки перетину ВП з нулем на першому масштабі відповідають положенням локальних мінімумів і максимумів аналізованого сигналу.

Однак через присутність перешкод можлива поява великої кількості перетинів із нулем поблизу шуканого максимуму сигналу. Оскільки кількість перетинів з нулем зменшується при збільшенні масштабу, застосовується схема, загальна ідея якої зводиться до поступового обчислення перетинів ВП із нулем при просуванні від більшого масштабу до меншого.

Отже, застосування аналізу локальних особливостей сигналу на основі вейвлет-перетворення дозволяє відкинути шуми й артефакти.

5.2.3 Вибір типу і масштабів вейвлет-перетворення

Оскільки НВП вимагає значних обчислювальних витрат, а дискретне вейвлет-перетворення (ДВП) не є інваріантним у часі, обрано стаціонарне вейвлет-перетворення.

Використання ВП рівнозначно накладанню еквівалентних фільтрів на аналізовану функцію. Еквівалентні фільтри ВП визначають смуги частот, що відповідають кожному масштабу.

Для частоти дискретизації 250 Гц амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) еквівалентних фільтрів на перших п'яти масштабах ДВП сигналу наведено на рис. 5.34. Відповідно до правила Найквіста, спектр частот сигналу обмежений максимальною частотою 125 Гц.

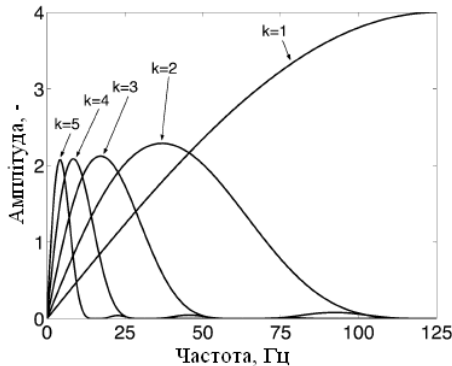


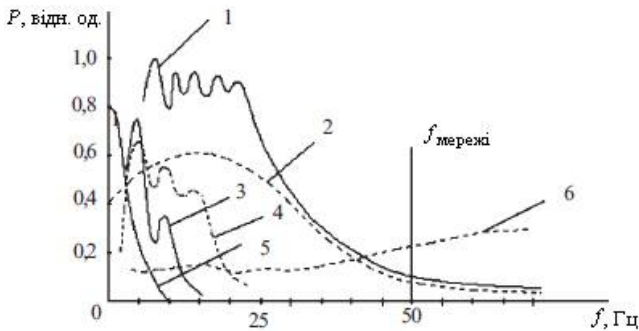
Рисунок 5.34 – АЧХ еквівалентних фільтрів на перших п'яти масштабах ДВП сигналу при частоті дискретизації 250 Гц

Знаючи в якому діапазоні лежить основна потужність корисного сигналу, можна знайти характерний масштаб вейвлет-розкладання, на якому корисний сигнал буде домінувати над шумами.

Енергія, що міститься на певних масштабах ВП, залежить від центральної частоти використовуваного вейвлета. Вейвлет «bior1.5» має центральну частоту 0.7781 Гц. При частоті дискретизації 250 Гц отримуємо центральну частоту вейвлета, що використовується для першого рівня розкладання [6]: $F_{r1}=250*0.7781=194.525$ Гц. Оскільки при діадному ВП

масштаби відрізняються удвічі, з кожним наступним рівнем розкладання частота вейвлета буде зменшуватися у два рази.

З графіків АЧХ (рис. 5.34) і згідно зі спектром хвиль сигналу ЕКГ (рис. 5.35) очевидно, що основна потужність ЕКГ-сигналу зосереджена в межах масштабів від 2^1 до 2^5 . Для масштабів, більших за 2^4 , енергія QRS-комплексу дуже низька. Р- і Т-хвилі мають важливі компоненти на масштабі 2^5 , хоча на цьому масштабі значний вплив дрейфу ізолінії.



1 – ЕКГ-сигнал; 2 – QRS-комплекс; 3 – артефакти руху; 4 – Р-, Т-зубці;
5 – напруга поляризації; 6 – м'язові шуми

Рисунок 5.35 – Характеристики відносної спектральної щільності потужності ЕКГ-сигналу і перешкод

На рис. 5.36 показано декілька штучних хвиль, схожих на хвилі ЕКГ, разом з першими п'ятьма масштабами їх ДВП [34].

Однофазні хвилі (рис. 5.36, а) утворюють пару позитивний максимум-негативний мінімум уздовж масштабів з перетином нуля між ними. Кожна різка зміна в сигналі пов'язана з лінією максимумів або мінімумів уздовж масштабів.

На хвилі, яка моделює QRS-комплекс (рис. 5.36, б), можна помітити, що піки малих хвиль Q і S асоційовані з точками перетину вейвлет-перетворення з нулем здебільшого на масштабах 2^1 і 2^2 .

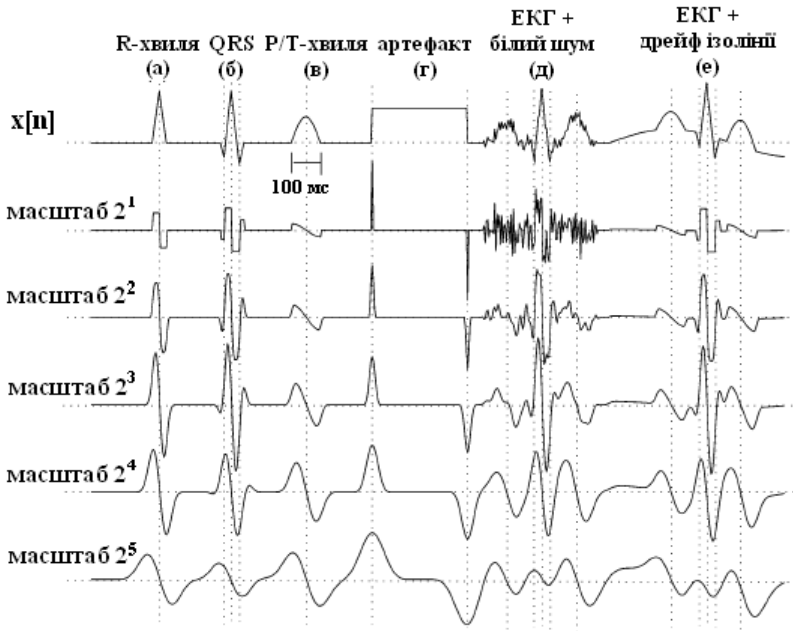


Рисунок 5.36 – Перші п'ять масштабів діадного вейвлет-перетворення ЕКГ-подібного сигналу

R- і T-подібні хвилі (рис. 5.36, в) мають головні компоненти на масштабах від 2^4 до 2^5 , тоді як артефакти, подібні артефакту (рис. 5.36, г), утворюють ізольовані лінії максимумів або мінімумів, що можуть бути легко відкинуті. Якщо сигнал забруднено височастотним шумом (рис. 5.36, д), найбільш ураженими є масштаби 2^1 і 2^2 , вищі масштаби несприйнятливі до цього виду шуму. Дрейф ізолінії (рис. 5.36, е) уражає масштаби, вищі за 2^4 .

5.2.4 Алгоритм делінеації сигналу ЕКГ

Використовуючи інформацію про локальні максимуми, мінімуми й точки перетину з нулем на різних масштабах, алгоритм ідентифікує значущі точки за наступні кроки:

- виявлення QRS-комплексів;
- виявлення індивідуальних хвиль QRS-комплексу;
- визначення меж QRS-комплексу;
- лінійна інтерполяція QRS-комплексів;

- виявлення та встановлення меж Т-хвиль;
- виявлення та встановлення меж Р-хвиль.

Визначення положення QRS-комплексів здійснюється за алгоритмом, побудованим на багатомасштабному підході, запропонованому у роботі [42]. Відповідно до цього алгоритму, вздовж масштабів від 2^4 до 2^1 виконується пошук ліній максимумів модуля ВП (ММВП), що перевищують певні порогові.

Енергія QRS-комплексу неперервно розподілена по спектральних смугах так само, як і по часових масштабах. Шум у сигналі не має такої властивості, і тому помилково знайдені через шум піки можуть бути виключені завдяки багатомасштабному підходу [7].

Для детектування R-хвиль мають бути визначені потенційні лінії максимуму модуля, що відповідають R-пікам на характеристичних масштабах.

Алгоритм визначення положення R-піків складається з наступних кроків:

Крок 1. На масштабі 2^4 : знаходять усі максимуми модуля, більші за поріг ε_{QRS}^4 . Отримують множину положень максимумів модуля $\{n_k^4 \mid k = \overline{1, N}\}$.

Крок 2. На масштабі 2^3 : в околиці точок, знайдених на кроці 1, знаходять максимуми модуля, більші за поріг ε_{QRS}^3 . Розглядаються два випадки:

– якщо існують декілька максимумів модуля, обирають найбільший. Однак якщо найбільший максимум модуля не перевищує інші у t разів (емпірично встановлено, що t дорівнює 1.2), обирають максимум модуля з положенням, найближчим до n_k^4 ;

– якщо в околиці точки максимуми модуля не існують, тоді всі точки на менших масштабах, тобто n_k^3 , n_k^2 , n_k^1 , встановлюють на нуль.

Крок 3. Подібно до кроку 2, на масштабах 2^2 і 2^1 знаходять положення максимумів модуля, використовуючи порогові ε_{QRS}^2 і ε_{QRS}^1 .

З'єднавши у ланцюг положення максимумів модуля на вищих масштабах з положеннями сусідніх максимумів модуля на нижчих масштабах і виключивши ланцюги з $n_k^1 = 0$, отримують множини положень ліній максимуму модуля $\{n_k^4, n_k^3, n_k^2, n_k^1\} (k = \overline{1, N_1})$.

Хоча алгоритм побудовано на [42], його модифіковано шляхом введення нових правил для виключення ізольованих і надлишкових максимумів модуля.

Правило 1. R-хвиля відповідає парі позитивний максимум-негативний мінімум на кожному характеристичному масштабі. Припустимо, що n_1^1 – це положення першого позитивного максимуму (негативного мінімуму) і n_k^1 – це положення наступного негативного мінімуму (позитивного максимуму). Якщо інтервал між n_1^1 і n_k^1 є більшим за інтервальний поріг, тоді максимум (мінімум) у положенні n_1^1 вважається ізольованим максимумом (ізольованим мінімумом). Інтервал між цими двома максимумами модуля має бути меншим за ширину QRS-комплексу. Щоб не втратити широкі QRS-комплекси, інтервальний поріг обирають, виходячи з інтервалу між двома максимумами модуля, породженими найширшим з можливих QRS. Емпірично встановлено, що інтервальний поріг дорівнює 120 мс [46].

Правило 2. Зазвичай R-хвиля відповідає одній парі ММП з протилежними знаками. Однак у випадку екстрасистол або за наявності шуму можуть з'явитися два або більше максимумів модуля, з яких тільки один є корисним.

Для усунення надлишкових максимумів модуля обрано масштаб 2^3 , оскільки на цьому масштабі зосереджена найбільша частина енергії QRS-комплексу. Можливі два випадки: перший – позитивний пік, що відповідає одному позитивному максимуму і декільком негативним мінімумам, і другий – негативний пік, що відповідає одному негативному мінімуму і декільком позитивним максимумам. А тепер уявімо ситуацію, коли в околиці (120 мс) позитивного максимуму (негативного мінімуму) є два негативні мінімуми (позитивні максимуми). Нехай ці два мінімуми (максимуми) – P_1 і P_2 . Позначимо відношення їхніх абсолютних

величин (A_1 і A_2) до відстаней між мінімумами (максимумами) і максимумом (мінімумом) (L_1 і L_2) через S_1 і S_2 , тобто $S_1 = A_1/L_1$ і $S_2 = A_2/L_2$.

Застосовуються наступні правила пошуку надлишкових ліній максимуму модуля.

Правило 1. Якщо $S_1 > 1.2 \cdot S_2$, тоді P_2 – надлишковий.

Правило 2. Якщо $S_2 > 1.2 \cdot S_1$, тоді P_1 – надлишковий.

Правило 3. Інакше, якщо P_1 і P_2 – з одного боку позитивного максимуму (негативного мінімуму), тоді мінімум (максимум), більш віддалений від максимуму (мінімуму), є надлишковим. Якщо P_1 і P_2 – з різних боків максимуму (мінімуму), тоді мінімум (максимум), наступний за максимумом (мінімумом) є надлишковим.

Після відбракування усіх ізольованих і надлишкових ліній максимуму модуля точки перетину з нулем між парами максимумів модуля вейвлет-перетворення на масштабі 2^1 ототожнюються з R-піками.

Значення порогів ε_{QRS}^1 , ε_{QRS}^2 , ε_{QRS}^3 пропорційні середньому квадратичному ВП на відповідних масштабах і обчислюються за формулою (5.11):

$$\varepsilon_{QRS}^i = RMS(W_{2^i}x[n]), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.11)$$

де $RMS(x)$ – середнє квадратичне набору чисел $\{x\}$;

$W_{2^i}x[n]$ – вейвлет-перетворення сигналу на масштабі 2^i .

Значення порогу ε_{QRS}^4 обчислюється за формулою (5.12):

$$\varepsilon_{QRS}^4 = RMS(W_{2^4}x[n]), \quad (5.12)$$

де $W_{2^4}x[n]$ – вейвлет-перетворення сигналу на масштабі 2^4 .

Пошук від більших до менших масштабів має дві переваги. Перша – це зменшення часу обчислень. Друга – це відсутність помилково знайдених через шум максимумів модуля завдяки мінімізації шуму на великих масштабах.

На відміну від [42], пошук головної хвилі QRS-комплексу не обмежено пошуком тільки R-хвилі – негативні хвилі також виявляються.

Алгоритм стартує з позиції n_{qrs} на масштабі 2^2 , що відповідає R-піку і оточена з обох боків парою максимумів модуля з протилежними знаками, а саме n_{pre} і n_{post} . Виконується пошук перед n_{pre} і після n_{post} значущих ММВП, спричинених іншими суміжними крутостями QRS-комплексу. Локальний максимум модуля вважається значущим, якщо він перевищує порогові γ_{QRSpre} або γ_{QRSpost} для попередньої або наступної хвилі відповідно. Точки перетину з нулем між цими значущими крутостями на масштабі 2^1 приймають за піки хвиль і позначають залежно від знаку та послідовності максимумів модуля.

Значення порогів γ_{QRSpre} та γ_{QRSpost} залежать від амплітуди глобального максимуму модуля в межах вікна пошуку SW_{QRS} . Значення порогу γ_{QRSpre} обчислюється за формулами (5.13):

$$\gamma_{\text{QRSpre}} = 0.06 \cdot \max(|W_{2^2}x[n]|), n \in SW_{\text{QRS}}, \quad (5.13)$$

де $W_{2^2}x[n]$ – вейвлет-перетворення сигналу на масштабі 2^2 ;

SW_{QRS} – вікно пошуку, що починається за 80 мс перед і закінчується через 160 мс після головної хвилі QRS-комплексу [39].

Значення порогу γ_{QRSpost} обчислюється за формулою (5.14):

$$\gamma_{\text{QRSpost}} = 0.09 \cdot \max(|W_{2^2}x[n]|), n \in SW_{\text{QRS}}. \quad (5.14)$$

5.2.5 Детектування початку та кінця QRS-комплексу

Початок (кінець) QRS-комплексу знаходиться перед (після) першою (останньою) значущою крутістю, асоційованою з максимумом вейвлет-перетворення на масштабі 2^2 . Спочатку визначають відліки, що відповідають першому та останньому пікам, асоційованим з QRS-комплексом на масштабі 2^2 , наприклад n_{first} і n_{last} . Потім здійснюється пошук у зворотному (прямому) напрямку першого відліку, що є меншим за поріг ξ_{QRSon} (ξ_{QRSend}), пропорційний амплітуді відповідного максимуму

модуля. Знайдений відлік i є початком (кінцем) QRS-комплексу. Рис. 5.37 демонструє цю процедуру стосовно визначення кінця QRS-комплексу.

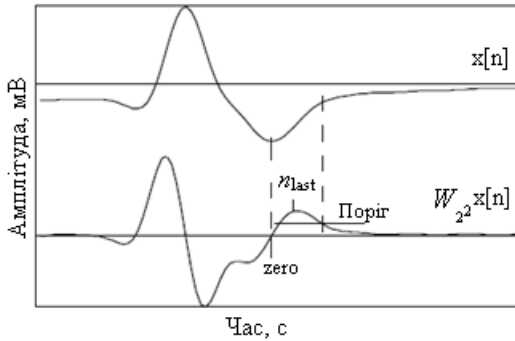


Рисунок 5.37 – Визначення кінця QRS-комплексу пороговим методом

Проте коли дві хвилі перекриваються, пороговий критерій може зазнати невдачі й показати місця розташування меж, далекі від точок, очікуваних з фізіологічних міркувань [49]. Тому застосовується критерій локального мінімуму вейвлет-перетворення (рис. 5.38). З позиції n_{last} здійснюється пошук найменшого абсолютного піку в тому ж напрямку, що й в попередньому критерію. Позиція знайденого піку, асоційована з точкою перегину сигналу ЕКГ, приймається в якості межі хвилі.

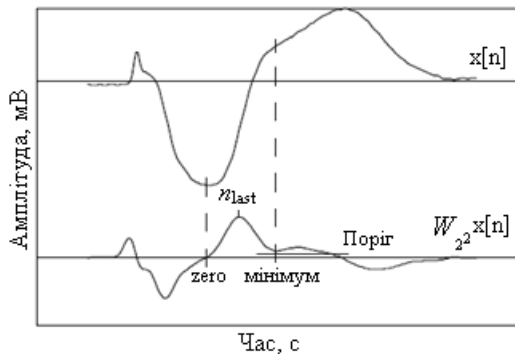


Рисунок 5.38 – Визначення кінця QRS-комплексу за критерієм локального мінімуму вейвлет-перетворення

Значення порогу ξ_{QRSon} для визначення початку QRS-комплексу обчислюється за формулою (5.15):

$$\xi_{QRSon} = \begin{cases} 0.05 \cdot W_{2^2} x[n_{first}], & W_{2^2} x[n_{first}] > 0 \\ 0.07 \cdot W_{2^2} x[n_{first}], & W_{2^2} x[n_{first}] < 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

де n_{first} – відлік, що відповідає першому піку, асоційованому з QRS-комплексом на масштабі 2^2 [34].

Значення порогу ξ_{QRSend} для визначення кінця QRS-комплексу обчислюється за формулою (5.16):

$$\xi_{QRSend} = \begin{cases} 0.125 \cdot W_{2^2} x[n_{last}], & W_{2^2} x[n_{last}] > 0 \\ 0.71 \cdot W_{2^2} x[n_{last}], & W_{2^2} x[n_{last}] < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

де n_{last} – відлік, що відповідає останньому піку, асоційованому з QRS-комплексом на масштабі 2^2 [34].

5.2.6 Детектування Т-хвилі

Визначення положення кінця Т-хвилі є найскладнішою частиною розмежування сигналу ЕКГ через дуже повільний перехід сигналу до ізоелектричної лінії біля кінця Т-хвилі. Проте кінець Т-хвилі є надзвичайно важливою межею, необхідною при обчисленні загальної тривалості деполяризації та реполяризації шлуночків.

Відповідно до [34], для детектування Т-хвилі спочатку визначають вікно пошуку для кожного удару відносно положення QRS-комплексу та залежно від величини RR-інтервалу, що обчислюється рекурсивно. У межах цього вікна виконують пошук локальних максимумів модуля вейвлет-перетворення на масштабі 2^4 . Якщо принаймні два з них перевищують поріг ε_T , вважають, що Т-хвиля присутня. У цьому випадку локальні максимуми вейвлет-перетворення з амплітудою, більшою за γ_T , вважають значущими крутостями хвилі, а точку перетину з нулем між ними – піком хвилі. Залежно від кількості та полярності знайдених максимумів, визначають одну з шести можливих морфологій Т-хвилі: позитивна (+), негативна (-), двофазна (+/-

та $-/+$), висхідна, низхідна. Якщо Т-хвилю не знаходять на масштабі 2^4 , то повторюють вищенаведену процедуру на масштабі 2^5 .

Пік Т-хвилі відповідає точці перетину вейвлет-перетворення з нулем на масштабі 2^3 , якщо вона існує, або на масштабі 2^k ($k=4$ або 5), на якому Т-хвиля була знайдена. Для визначення меж хвилі використовують ті самі критерії, що й для визначення меж QRS-комплексу, з порогами ζ_{Ton} та ζ_{Toff} , які застосовують до масштабу 2^k .

Проте не всі Т-хвилі можуть бути знайдені шляхом пошуку пари максимумів модуля. У деяких випадках існує тільки один максимум модуля [47].

Використовуючи метод, описаний нижче, можна виявити більшість варіацій Т-хвилі.

Енергія Т-хвилі, в основному, зосереджена на масштабах від 2^3 по 2^5 . Масштаб 2^3 є чутливим до шуму, масштаб 2^4 не відрізняє Т-хвилі від QRS-комплексів, а на масштабі 2^5 стає помітним дрейф ізолінії. Тому доцільно відійти від діадних масштабів вейвлет-перетворення і обрати для детектування Т-хвилі масштаб 10.

На масштабі 10 аналізують сигнал і виконують пошук максимумів модуля, більших за поріг γ_T . За наявності двох або більше максимумів модуля з тим самим знаком обирають найбільший.

Після знаходження одного або більше максимумів модуля можна визначити розташування і характер Т-хвилі. Перша ситуація виникає за наявності пари максимумів модуля з протилежними знаками. Це свідчить про невеликий пагорб, коли знаки $+/-$, і невеликий перевернутий пагорб, коли знаки $-/+$. За наявності одного максимуму модуля знак $+$ вказує на низхідну Т-хвилю, а знак $-$ – на висхідну.

Вікно пошуку для Т-хвилі відносно QRS-комплексу не згадувалося у роботі [34]. Прийнято рішення використовувати вікно пошуку SW_T , що визначається за формулою (5.17):

$$SW_T = [QRS_{end} + 15, QRS_{onset} + (1.5 \cdot QTc_{max} \cdot \sqrt{RR})], \quad (5.17)$$

де QRS_{onset} , QRS_{end} – початок і кінець QRS-комплексу, що передує хвилі;

QTc_{max} – максимальне значення скоригованого за формулою Базета інтервалу QT;

RR – величина попереднього RR-інтервалу у відліках.

Значення порогу γ_T залежить від амплітуди глобального максимуму модуля в межах вікна пошуку SW_T і обчислюється за формулою (5.18):

$$\gamma_T = 0.125 \cdot \max(|W_{10}x[n]|), n \in SW_T, \quad (5.18)$$

де $W_{10}x[n]$ – вейвлет-перетворення сигналу на масштабі 10.

Застосування методу максимумів модуля до визначення початку Т-хвилі призводить до певних проблем. Найбільша проблема – це вплив QRS-комплексу. Коли дивишся на ВП PQRS-комплексу на вищих масштабах, стає очевидним, що ефект QRS-комплексу не є достатньо послабленим в околиці початку Т-хвилі. Це робить пошук відповідних характеристичних точок дуже складним. Використання перетворень на малих масштабах істотно не підвищує надійність методу, оскільки амплітуда на початку хвилі не є достатньо більшою від амплітуди шуму, що нерідко з'являється.

Проблеми з QRS-комплексом не стосуються кінця Т-хвилі, тому його можна виявити з достатньою достовірністю за умови відсутності високого рівня шуму.

Значення порогу ξ_{Ton} для визначення початку Т-хвилі обчислюється за формулою (5.19):

$$\xi_{\text{Ton}} = 0.25 \cdot W_{10}x[n_{\text{first}}], \quad (5.19)$$

де n_{first} – відлік, що відповідає першому піку, асоційованому з Т-хвилею на масштабі 10.

Значення порогу ξ_{Toff} для визначення кінця Т-хвилі обчислюється за формулою (5.20):

$$\xi_{\text{Toff}} = 0.25 \cdot W_{10}x[n_{\text{last}}], \quad (5.20)$$

де n_{last} – відлік, що відповідає останньому піку, асоційованому з Т-хвилею на масштабі 10.

5.2.7 Детектування Р-хвилі

Визначити положення Р-хвилі складніше, ніж визначити положення QRS-комплексу. Це пов'язано з малим відношенням сигнал/шум і низькою амплітудою хвилі.

Алгоритм детектування Р-хвилі подібний запропонованому у роботі [34] і наведеному вище алгоритму детектування Т-хвилі з використанням підходящого RR-залежного вікна пошуку та відповідних порогів (ε_P , γ_P , ζ_{Pon} , ζ_{Poff}). У роботі [39] було встановлено, що поріг ε_P часто є близьким до нуля, тому розгляд усіх позитивних максимумів і негативних мінімумів (що логічно еквівалентно встановленню цього порога на нуль) дає кращі результати в більшості випадків. Тому в цій роботі поріг ε_P не використовується.

Так само, як і для Т-хвилі, у роботі [34] не згадувалося вікно пошуку для Р-хвилі. Прийнято рішення використовувати вікно пошуку SW_P , що визначається за формулою (5.21):

$$SW_P = [QRS_{\text{onset}} - (0.2 \cdot RR + 25), QRS_{\text{onset}} - 2], \quad (5.21)$$

де QRS_{onset} – початок QRS-комплексу, що іде за Р-хвилею.

Значення порогу γ_P залежить від амплітуди глобального максимуму модуля в межах вікна пошуку SW_P і обчислюється за формулою (5.22):

$$\gamma_P = 0.125 \cdot \max(|W_{2^k} x[n]|), n \in SW_P, \quad (5.22)$$

де $W_{2^k} x[n]$ – вейвлет-перетворення сигналу на масштабі 2^k ($k=4$ або 5), на якому Р-хвиля була знайдена.

Найбільш проблематичною частиною цього підходу є точність визначення кінця Р-хвилі. Це викликано впливом сусіднього QRS-комплексу. З метою пригнічення цього впливу алгоритм покращено у спосіб, запропонований у роботі [48]. Після визначення точок, які задають положення початку та кінця

QRS-комплексу, QRS-комплекс виключають шляхом лінійної інтерполяції сигналу між цими точками. У такому сигналі залишаються тільки Т- і Р-хвилі. Вейвлет-перетворення обчислюється для модифікованого сигналу, і суміжні з Р-хвилями QRS-комплекси більше не впливають на положення кінців Р-хвиль.

Значення порогу ξ_{Pon} для визначення початку Р-хвилі обчислюється за формулою (5.23):

$$\xi_{Pon} = 0.5 \cdot W_{2^k} x[n_{first}], \quad (5.23)$$

де n_{first} – відлік, що відповідає першому піку, асоційованому з Р-хвилею на масштабі 2^k ($k=4$ або 5) [34].

Значення порогу ξ_{Poff} для визначення кінця Р-хвилі обчислюється за формулою (5.24):

$$\xi_{Poff} = 0.9 \cdot W_{2^k} x[n_{last}], \quad (5.24)$$

де n_{last} – відлік, що відповідає останньому піку, асоційованому з Р-хвилею на масштабі 2^k ($k=4$ або 5) [34].

5.2.8 Опис експериментів по делінеації сигналу ЕКГ

Загальноприйнятим способом оцінювання якості та точності алгоритму делінеації сигналу ЕКГ є порівняння результатів його роботи з анотаціями, виконаними кваліфікованими кардіологами. Результати в анотаціях приймаються за 100% достовірні, тому на основі їх порівняння з результатами роботи алгоритму визначається ефективність алгоритму.

Дослідженню піддавалися записи цифрових сигналів ЕКГ бази даних QT (QTDB) постійно обновлюваного банку даних комплексних фізіологічних сигналів PhysioBank, розташованого у вільному доступі в мережі Інтернет [50, 51]. База даних QTDB містить 105 записів ЕКГ у двох відведеннях по 15 хвилин і частотою дискретизації 250 Гц. Кожний запис має щонайменше 30 анотованих ударів з мітками початку, піку й кінця Р-хвилі та QRS-комплексу і мітками піку й кінця Т-хвилі. У цілому в базі

даних анотовано понад 3600 ударів із різними ЕКГ-морфологіями [52].

QTDB широко використовується в літературі, а результати, одержані з використанням цієї бази даних, дозволяють виконати пряме порівняння відомих алгоритмів делінеації сигналу ЕКГ.

При визначенні характерних точок сигналу ЕКГ можливі чотири випадки [53, 54]:

- істинно позитивні випадки (True Positives) – вірно знайдені точки;

- істинно негативні випадки (True Negatives) – вірно пропущені точки;

- хибно негативні випадки (False Negatives) – «хибний пропуск» (помилка I роду), коли точка, яка нас цікавить помилково не виявляється;

- хибно позитивні випадки (False Positives) – «хибне виявлення» (помилка II роду), коли при відсутності характерної точки помилково виноситься рішення про її наявність.

Для оцінювання якості роботи алгоритму делінеації сигналу ЕКГ використовуються два показники: чутливість і прогностичність позитивного результату (або позитивна прогностичність) [53].

Чутливість алгоритму Se – це здатність алгоритму давати правильний результат. Визначається як частка істинно позитивних випадків серед усіх фактично позитивних випадків за формулою (5.25):

$$Se = \frac{TP}{TP + FN} \cdot 100\%, \quad (5.25)$$

де TP – число істинно позитивних випадків детектування;

FN – число хибно негативних випадків детектування.

Позитивна прогностичність P_+ – це ймовірність фактичної наявності характерної точки при позитивному результаті її детектування. Визначається як частка істинно позитивних випадків серед усіх позитивних випадків детектування за формулою (5.26):

$$P_+ = \frac{TP}{TP + FP} \cdot 100\%, \quad (5.26)$$

де FP – число хибних випадків детектування.

Порівняння результатів роботи розробленого алгоритму делінеації сигналу ЕКГ із опублікованими результатами роботи інших алгоритмів [34, 39, 49] наведено в таблицях 5.2 і 5.3.

Таблиця 5.2 – Чутливість алгоритмів делінеації сигналу ЕКГ

Робота	Характеристична точка та кількість її анотацій						
	Р- початок	Р- пік	Р- кінець	QRS- початок	QRS- кінець	Т- пік	Т- кінець
	3194	3194	3194	3623	3623	3542	3542
Ця робота	99.87	99.87	99.91	99.97	99.97	99.97	99.97
Martinez та ін. [34]	98.87	98.87	98.75	99.97	99.87	99.87	99.87
Laguna та ін. [49]	97.70	97.70	97.70	99.92	99.92	99.00	99.00
Voichat та ін. [39]	99.67	99.67	99.91	99.97	99.97	99.77	99.77

Таблиця 5.3 – Позитивна прогностичність алгоритмів

Робота	Характеристична точка та кількість її анотацій						
	Р- початок	Р- пік	Р- кінець	QRS- початок	QRS- кінець	Т- пік	Т- кінець
	3194	3194	3194	3623	3623	3542	3542
Ця робота	93.98	94.46	92.70	99.98	99.98	99.91	99.50
Martinez та ін. [34]	91.03	91.03	91.03	—	—	97.79	97.79
Laguna та ін. [49]	91.17	91.17	91.17	—	—	97.74	97.71
Voichat та ін. [39]	91.18	92.46	91.70	98.61	98.72	98.91	98.50

Примітка. Прочерк (—) означає, що значення відповідного показника в роботі не повідомлялося.

Результати роботи алгоритму делінеації сигналу ЕКГ порівнювалися з результатами інших опублікованих підходів і показали, що розроблений алгоритм забезпечує надійне і точне розмежування ЕКГ-сигналу, перевершуючи інші подібні алгоритми, і з помилками в межах розходжень, спостережуваних між кардіологами. Найістотніше покращення було виявлено у визначенні положення Р- і Т-хвилі. Можна зробити припущення, що ключем до покращення показників роботи алгоритму є багатомасштабний підхід, який дозволяє послаблювати вплив шуму на великих масштабах, а потім уточнювати положення за допомогою менших масштабів.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 768 с.
2. Большаков А.А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов / А.А. Большаков, Р.Н. Каримов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 522 с.
3. Орлов Ю.Н. Нестационарные временные ряды / Ю.Н. Орлов, К.П. Осминин – М.: ЛИБРОКОМ, 2011. – 384 с.
4. Афанасьев В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев. – М.: Финансы и статистика, 2012. – 320 с.
5. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов. – М.: Солон-Р, 2002. – 448 с.
6. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в Matlab / Н.К. Смоленцев. – М.: ДМК "Пресс", 2005. – 304 с.
7. Mallat S. Singularity Detection and Processing with Wavelets / S. Mallat, W.L. Hwang // IEEE Trans. on Information Theory. – 1992. – Vol. 38 (2). – Pp. 617-643.
8. Mallat S. Zero-crossings of a wavelet transform / S. Mallat // IEEE Trans. on Information Theory. – 1991. – № 37 (4). – Pp. 1019-1033.
9. Mallat S. Characterization of signals from multiscale edge / S. Mallat, S. Zhong // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. – 1992. – № 14. – Pp. 710-732.
10. ГОСТ 2789-73. Шероховатость поверхности. Параметры и характеристики. – Взамен ГОСТ 2789-59; введ. 01.01.75. – М.: Госпотребстандарт, 1975. – 7 с.
11. Захаров В.И. Взаимозаменяемость, качество продукции и контроль в машиностроении / В.И. Захаров. – СПб.: Машиностроение, 1990. – 302 с.

12. ДСТУ 25142-2009. Шероховатость поверхности. Термины и определения. – Взамен ГОСТ 25142-82; введ. 01.02.2009. – К.: Госпотребстандарт, 2009. – 22 с.

13. ISO 468-1982. Surface roughness — Parameters, their values and general rules for specifying requirements. – intr. 01.01.1982. – Switzerland: ISO Central Secretariat. 1982. – 4 p.

14. ДСТУ 2413-94. Основные нормы взаимозаменяемости. Шероховатость поверхности. Термины и определения. – Введ. 01.01.1995. – К.: Госпотребстандарт, 1995. – 41 с.

15. Хусу А.П., Виттенберг Ю.Р. Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход / А.П. Хусу, Ю.Р. Виттенберг. – М.: Наука, 1975. – 344 с.

16. Назаров Ю.Ф. Методы исследования и контроля шероховатости поверхности металлов и сплавов / Ю.Ф. Назаров, А.М. Шкилько // Физическая инженерия поверхности. – 2007. – №3-4. – Т.5. – С. 207-216.

17. Ящерицин П.И. Основы технологии механической обработки и сборки в машиностроении / П.И. Ящерицин. – Минск: Высшая школа, 1974. – 607 с.

18. Mallat S. A wavelet tour of signal processing / S. Mallat. – USA: Academic Press, 1998 – 805 p.

19. Coifman R.R. Entropy-based algorithms for best basis selection / R.R. Coifman, Wickerhauser M.V. // IEEE Trans. on Inf. Theory. – 1992. – Vol. 38 (2). – P. 713-718.

20. Мартин Н. Математическая теория энтропий / Н. Мартин, Дж. Ингленд. – М.: Мир, 1988. – 387 с.

21. Чумак О.В. Энтропии и фракталы в анализе данных / О.В. Чумак. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 164 с.

22. Мартюшев Л.М. Принцип максимальности производства энтропии в физике и смежных областях / Л.М. Мартюшев, В.Д. Селезнев. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. – 83 с.

23. Шеннон К.Э. Работы по теории информации и кибернетике / К.Э. Шеннон. – М.: ИЛ, 1963. – 829 с.

24. Шитов А.Б. Разработка численных методов и программ, связанных с применением вейвлет-анализа для моделирования и обработки экспериментальных данных: дис. канд. техн. наук: 05.13.18 / А.Б. Шитов. – Иваново, 2001. – 125 с.

25. Карр Дж. Карманный справочник радиоинженера / Дж. Карр, Д. Джон. – М.: Додэка XXI, 2002. – 544 с.

26. Чуи Ч. Введение в вейвлеты / Ч. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

27. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464с.

28. ISO 4287-2002. Geometrical Product Specifications (GPS) – Surface texture: Profile method. Terms, definitions and surface texture parameters. – Instead ISO 4287-1997; interred 01.07.2004. – Switzerland: ISO Central Secretariat, 2004. – 20 p.

29. ISO/TS 16610-2006. Geometrical product specifications (GPS). Filtration. Linear profile filters. Basic concepts. – Interred 31.12.2008. – Switzerland: ISO Central Secretariat, 2008. – 24 p.

30. Внуков Ю.Н. Анализ подходов по учету динамики сил резания при прогнозировании виброустойчивости механической обработки (обзор) / Ю.Н. Внуков, В.А. Логоминов // Резание и инструмент в технологических системах. – 2011. – №79. – С. 132-153.

31. Внуков Ю.Н. Определение динамических характеристик нежестких деталей типа заземленных пластин / Ю.Н. Внуков, В.А. Логоминов, С.А. Бездольный // Современные технологии в машиностроении. – 2011. – №6. – С. 6-13.

32. Akay M. Wavelet Applications in Medicine / M. Akay // IEEE Spectrum. – 1997. – Vol. 34. – No. 5. – Pp. 50-56.

33. Wavelet transform as a potential tool for ECG analysis and compression / J.A. Crowe, N.M. Gibson, M.S. Woolfson, M.G. Somekh // Journal of the Biomedical Engineering. – 1992. – Vol. 14 (3). – Pp. 268-272.

34. A wavelet-based ecg delineator: evaluation on standard databases / J. Martinez, R. Almeida, S. Olmos, A. Rocha, P. Laguna // IEEE Trans. on Biomedical Engineering. – 2004. – Vol. 51 (4). – Pp. 570-581.

35. ECG Feature Extraction Based on Multiresolution Wavelet Transform / S. Mahmoodabadi, A. Ahmadian, M. Abolhasani, M. Eslami, J. Bidgoli // Proceedings of the 2005 IEEE, Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference. – 2005. – Vol. 4. – Pp. 3902-3905.

36. Vitec M. Detection of QRS boundaries and T wave end in multilead ECG signals / M. Vitec // Proceedings of the 14th Conference Student EEICT. – 2008. – Pp. 285-289.

37. Ingole D.T. Feature Extraction via Multiresolution Analysis for ECG Signal / D.T. Ingole, K. Kulat, M.D. Ingole // First International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology. – 2008. – Vol. 1. – Pp. 659-664.

38. Han J.Y. Denoising ECG using Translation invariant Multiwavelet / J.Y. Han, S.K. Lee, H.B. Park // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2008. – Vol. 41. – Pp. 140-144.

39. Wavelet-based ECG delineation on a wearable embedded sensor platform / N. Boichat, N. Khaled, F. Rincon, D. Atienza // Proc 6th IEEE Int Workshop on Body Sensor Networks. – 2009. – Pp. 256-261.

40. Pachauri A. Robust detection of R-wave using wavelet technique / A. Pachauri, M. Bhuyan // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2009. – Vol. 56. – Pp. 901-905.

41. ECG noise Removal and QRS complex detection using UWT / N. Akshay, N.A.V. Jonnabhotla, N. Sadam, N.D. Yeddanapudi // International Conference on Electronics and Information Engineering (ICEIE), IEEE. – 2010. – Vol. 2. – Pp. 438-442.

42. Li C. Detection of eeg characteristic points using wavelet transforms / C. Li, C. Zheng, C. Tai // IEEE Trans. on Biomedical Engineering. – 1995. – Vol. 42 (1). – Pp. 21-28.

43. Sahambi J. S. Using wavelet transform for ECG characterization / J. S. Sahambi, S. Tandon, R. K. P. Bhatt // IEEE Engineering in Medicine and Biology. – 1997. – № 16 (1). – Pp. 77-83.

44. Vitec M. A Wavelet-Based ECG Delineation in Multilead ECG Signals: Evaluation on the CSE Database / M. Vitec, J. Hrubes, J. Kozumplik // IFMBE Proceedings. – 2009. – Vol. 25. – Pp. 177-180.

45. Vitec M. A wavelet-based T wave end detection: prototype wavelets comparison / M. Vitec // Proceedings of the 15th Conference Student EEICT. – 2009. – Pp. 373-377.

46. Fatemian S.Z. A Wavelet-Based Approach to Electrocardiogram (ECG) and Phonocardiogram (PCG) Subject

Recognition / S.Z. Fatemian. – Toronto: Department of Electrical & Computer Engineering, University of Toronto, 2009. – 132 p.

47. Krimi S. T-Wave Detection Based on an Adjusted Wavelet Transform Modulus Maxima / S. Krimi, K. Ouni, N. Ellouze // International Journal of Biological and Life Sciences. – 2005. – Vol. 1. – Pp. 128-132.

48. Vitec M. A Wavelet-Based ECG Delineation with Improved P Wave Offset Detection Accuracy / M. Vitec, J. Hrubes, J. Kozumplik // Analysis of Biomedical Signals and Images. – 2010. – Vol. 20. – Pp. 160-165.

49. Laguna P. Automatic Detection of Wave Boundaries in Multilead ECG Signals: Validation with the CSE Database / P. Laguna, R. Jané, P. Caminal // Computers and Biomedical Research. – 1994. . – Vol. 27. – Pp. 45-60.

50. PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals [Circulation Electronic Pages] / A.L. Goldberger, L.A.N Amaral, L. Glass, J.M. Hausdorff // Circulation – 2000. – Vol. 101 (23). – e215-e220. – Available online: <http://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215>.

51. PhysioNet: the research resource for complex physiologic signals [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.physionet.org>.

52. A database for evaluation of algorithms for measurement of QT and other waveform intervals in the ECG / P. Laguna, R. Mark, A. Goldberg, G. Moody // Computers in Cardiology. – 1997. – Vol. 24. – Pp. 673–676.

53. ANSI/AAMI EC57:1998 Testing and Reporting Performance Results of Cardiac Rhythm and ST Segment Measurement Algorithms.

54. Паклин Н. Логистическая регрессия и ROC-анализ – математический аппарат [Электронный ресурс] / Н. Паклин. – Режим доступа: <http://www.basegroup.ru/library/analysis/regression>.

Навчальне видання

ДУБРОВІН Валерій Іванович
ТВЕРДОХЛІБ Юлія Володимирівна
ХАРЧЕНКО Вікторія Вікторівна

**КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ОБРОБКИ ДАНИХ**

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір Харченко В.В.
Верстання *Зуб С.В.*

Оригінал-макет підготовлено
в редакційно-видавничому відділі ЗНТУ

Підписано до друку 20.05.2010. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 9,1.
Тираж 300 прим. Зам. № 948.

Запорізький національний технічний університет
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
від 27.12.2005 р., серія ДК № 2394