

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи з дисципліни
«Математичні методи оптимізації та дослідження операцій»
для студентів спеціальності 121 "Інженерія програмного
забезпечення"
денної форми навчання

2017

Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Математичні методи оптимізації та дослідження операцій» для студентів спеціальності 121 "Інженерія програмного забезпечення" денної форми навчання / Укладачі: Л.Ю. Дейнега. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. – 34 с.

Укладачі: Л. Ю. Дейнега

Рецензент: В.І. Дубровін

Відповідальний за випуск: Л. Ю. Дейнега

Затверджено
на засіданні кафедри “Програмних
засобів”
Протокол №3 від 21.11.17 р.

ЗМІСТ

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА	4
1.1 Теоретичні відомості.....	4
1.1.1 Постановка транспортної задачі	4
1.1.2 Методи побудови опорного плану транспортної задачі.....	8
1.1.3 Випадок виродження опорного плану транспортної задачі .	14
1.1.4 Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі	17
1.1.5 Приклади розв'язування транспортних задач методом потенціалів	20
1.2 Завдання.....	26
ЛІТЕРАТУРА	34

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

1.1 Теоретичні відомості

1.1.1 Постановка транспортної задачі

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нерациональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод відшукування оптимального плану у вигляді простішої у порівнянні з симплексним методом обчислювальної процедури. Транспортна задача належить до типу розподільчих задач лінійного програмування.

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i -го постачальника до кожного B_j -го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною.

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву **транспортної задачі за критерієм вартості перевезень**.

Запишемо її математичну модель. Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Тоді умови задачі зручно подати у вигляді такої таблиці:

Таблиця 1.1

Споживачі		$B1$	$B2$	...	Bn
Постачальники		$b1$	$b2$	...	bn
$A1$	$a1$	$c11$ $x11$	$c12$ $x12$	...	$c1n$ $x1n$
$A2$	$a2$	$c21$ $x21$	$c22$ $x22$	...	$c2n$ $x2n$
...	...	...	...	...	...
Am	am	$cm1$ $xm1$	$cm2$ $xm2$	...	cmn xmn

Мають виконуватися такі умови:

- сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного i -го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2; \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m; \end{cases}$$

- сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j -му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2; \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n; \end{cases}$$

- сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$\begin{aligned} \min F = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \dots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \end{aligned}$$

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

У скороченій формі запису математична модель транспортної задачі за критерієм вартості перевезень має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}); \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) \quad (1.4)$$

У розглянутій задачі має виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1.5)$$

Транспортну задачу називають *збалансованою*, або *закритою*, якщо виконується умова (1.5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають *незбалансованою*, або *відкритою*.

Домовимося *планом* транспортної задачі називати будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (1.2)—(1.4), який

позначають матрицею $x = x_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$. Значення невідомих

величин x_{ij} — обсяги продукції, що мають бути перевезені від i -х постачальників до j -х споживачів, називатимемо *перевезеннями*.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $x^* = x_{ij}^* (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$, яка задовольняє умови задачі, і для якої цільова функція (1.1) набирає найменшого значення.

Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі): необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної

задачі (1.1)—(1.4) є її збалансованість: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Якщо при перевірці збалансованості (1.5) виявилось, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного)

постачальника A_{ij} у разі перевищення загального попиту над запасами $(\sum_j b_j > \sum_i a_i)$ із ресурсом обсягом $a_{nn} = \sum_j b_j - \sum_i a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $(\sum_i a_i > \sum_j b_j)$, то до закритого типу задача зводиться введенням

фіктивного (умовного) споживача B_{nn} з потребою $b_{nn} = \sum_i a_i - \sum_j b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{nn} (або фіктивного споживача B_{nn}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати $c_{ij} (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n})$. Як правило, у такому разі використовують нульові значення вартостей перевезень, що дає змогу спростити обчислення.

Назвемо **опорним планом** транспортної задачі такий допустимий її план, що містить не більш ніж $m + n - 1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Такий план є не виродженим. Якщо ж кількість базисних змінних менша ніж $m + n - 1$, то маємо вироджений опорний план.

Якщо умови транспортної задачі і її опорний план записані у вигляді табл. 1.1, то клітини, в яких $x_{ij} > 0$ (ненульові значення поставок), називаються заповненими, всі інші — пустими. Заповнені клітини відповідають базисним змінним і для не виродженого плану їх кількість дорівнює $m + n - 1$.

Назвемо **циклом** таку послідовність заповнених клітин таблиці 1.1, яка задовольняє умову, що лише дві сусідні клітини містяться або в одному рядку, або в одному стовпці таблиці, причому перша клітина циклу є і його останньою клітиною. Якщо для певного набору заповнених клітин неможливо побудувати цикл, то така послідовність клітин є ациклічною.

Лема. Кількість клітин, які утворюють будь-який цикл транспортної задачі, завжди парна.

Теорема. Щоб деякий план транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо його ациклічності.

Отже, базисні клітини опорного плану завжди утворюють ациклічну послідовність клітин.

Наслідок теореми. Будь-яка сукупність з $m + n$ клітин матриці транспортної задачі утворює цикл.

Теорема. Якщо всі запаси $a_i (i = \overline{1, m})$ і всі потреби $b_j (j = \overline{1, n})$ є невід'ємними цілими числами, то будь-який опорний план складається із значень, що є цілими числами.

1.1.2 Методи побудови опорного плану транспортної задачі

Як і в звичайному симплексному методі, **розв'язування транспортної задачі** полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Існують кілька простих методів побудови опорного плану. Розглянемо методи північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги та метод апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядкам, а споживачі — стовпчикам.

Нехай умови конкретної транспортної задачі подані в табл. 1.2.

Ідея **методу північно-західного кута** полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1 . Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Розглянемо цей процес детальніше на прикладі.

Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовольняють потреби першого споживача B_1 , використовуючи запаси першого постачальника A_1 . У нашому прикладі (табл. 1.2) потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 110$, а запаси постачальника — $a_1 = 150$ одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку A_1B_1 записуємо менше із значень a_1 , b_1 , тобто 110. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, і переходимо до

задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2 . Обсяг його потреб $b_2 = 50$. Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів першого постачальника становить $150 - 110 = 40$. Отже, від першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 40 одиниць продукції, тому в клітину A_1B_2 записуємо число 40. Після цього, оскільки запаси першого постачальника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2 .

Його запаси $a_2 = 60$, а незадоволені потреби другого споживача $50 - 40 = 10$, тому в клітинку A_2B_2 записуємо число 10, і другий споживач у такий спосіб також повністю отримав необхідну кількість продукції. Переходимо до задоволення потреб наступного споживача B_3 . У результаті часткового використання запасів другого постачальника його залишок продукції становить $60 - 10 = 50$. Отже, від другого виробника до третього споживача можна перевезти 50 одиниць продукції. Клітинка A_2B_3 міститиме зазначене число 50, і цим запаси постачальника A_2 будуть повністю вичерпані. Переходимо до розподілу запасів останнього (третього) постачальника A_3 . Залишились незадоволеними потреби третього споживача в обсязі $60 - 50 = 10$. Для їх задоволення скористаємося запасами постачальника A_3 . У клітинку A_3B_3 записуємо число 10, і потреби споживача B_3 також повністю задоволені. Переходимо до останнього споживача B_4 з потребами $b_4 = 80$, які повністю задовольняються за рахунок залишку запасів третього постачальника: $90 - 10 = 80$.

Отже, в таблиці 5.2 у заповнених клітинках знаходяться числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) по рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел по стовпцях — обсягам потреб відповідних споживачів.

Аналогічний результат можна отримати, якщо почати з правого нижнього кута таблиці, рухаючись до лівого верхнього. Процедура методу можна застосовувати також, починаючи розподіл поставок з лівого нижнього кута і рухаючись до правого верхнього по діагоналі. В такому разі спосіб розподілу перевезень можна було б назвати методом південно-західного кута, тому цей метод ще називають діагональним. Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним.

Таблиця 1.2

Постачальники	Запаси	Споживачі			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 одиниць продукції за ціною 4 ум. од. (ціна записана в правому верхньому куті кожної клітини), отже, це коштуватиме ~~110·4=440~~ ум. од. Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 одиниць продукції до другого споживача за ціною 4 ум. од. і т. д. У такий спосіб визначимо загальну вартість усіх перевезень:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880 \text{ (ум. од.)}.$$

Теорема. Опорний план транспортної задачі, знайдений методом північно-західного кута, завжди ациклічний.

Наведені властивості опорних планів стосуються і тих планів, що отримані розглянутими нижче іншими способами, які певною мірою є модифікаціями методу північно-західного кута.

Очевидно, якщо за побудови опорного плану враховувати вартості перевезень, то сумарна вартість всіх поставок може бути зменшена, і отриманий опорний план буде ближчим до оптимального.

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Складемо за допомогою цього методу план розглянутої задачі (табл. 1.3).

Найменшу вартість мають перевезення, які здійснюються від A_2 до B_3 та від A_3 до B_2 (ціна перевезення одиниці продукції — 1 ум. од.). Заповнимо будь-яку з них, наприклад, A_2B_3 . Оскільки постачальник має 60 одиниць продукції, а споживач потребує саме такої її кількості, то в клітину A_2B_3 ставимо значення 60. У такий спосіб запаси другого постачальника повністю вичерпані, а потреби третього споживача повністю задоволені. Також мінімальною є вартість перевезень від третього постачальника до другого споживача, тому заповнимо також клітину A_3B_2 .

З клітинок таблиці, що залишилися незаповненими, вибираємо наступне мінімальне значення вартості перевезень, яке дорівнює 2 ум. од. — для клітин A_1B_3 , A_2B_4 , A_3B_1 та A_3B_4 . Заповнення клітин A_2B_4 та A_1B_3 неможливе, оскільки постачальник A_2 вже повністю вичерпав власний обсяг запасів, задовольняючи потреби споживача B_3 , а споживач B_3 повністю задовольнив свої потреби. Отже, можна заповнити тільки клітину A_3B_1 чи A_3B_4 . Заповнимо A_3B_1 . Обсяг запасів $a_3 = 90$, причому 50 одиниць продукції вже надано другому споживачеві. Отже, маємо залишок $90 - 50 = 40$, а потреби $b_1 = 110$, тому від третього постачальника до першого споживача плануємо перевезти 40 одиниць продукції. Тепер у клітину A_3B_4 не можна записати будь-який обсяг постачання, оскільки запаси третього постачальника вже повністю вичерпані.

Знову вибираємо найменшу вартість для клітин таблиці, що залишилися пустими, і продовжуємо процес доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби — задоволені.

Таблиця 1.3

b_j a_i	$b_1 =$ 110	$b_2 =$ 50	$b_3 =$ 60	$b_4 =$ 80
150 $a_1 =$	4 70	4	2	5 80
60 $a_2 =$	5	3	1 60	2
90 $a_3 =$	2 40	1 50	4	2

В результаті таких міркувань отримали початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становить:

$$F = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 90 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 870 \text{ (ум. од.)}.$$

Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить цей план ближчий до оптимального.

Метод подвійної переваги. Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється. В такому разі спростити пошук клітин з найменшими вартостями можна, застосовуючи метод подвійної переваги.

Згідно з процедурою цього методу перед початком заповнення таблиці необхідно позначити будь-якими символами клітинки, які містять найменшу вартість у рядках, а потім — у стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (які містять вартості, що є мінімальними і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (що містять мінімальні вартості або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Таблиця 1.4

	b_j a_i	$b_1 =$ 110	$b_2 =$ 50	$b_3 =$ 60	$b_4 =$ 80
150	$a_1 =$	4 110	4	V 2	5 40
60	$a_2 =$	5	3 1	VV 60	V 2
90	$a_3 =$	V 2	1 50	VV 4	V 2 40

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 830 \text{ (ум. од.)}.$$

Застосування для побудови опорного плану даного методу уможливорює отримання найменшого у зіставленні з розглянутими вище значення цільової функції. Отже, такий план є найближчим до оптимального.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці — знизу та справа

у кілька рядків та стовпчиків, що відповідають крокам заповнення таблиці. З-поміж усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Даний метод побудови опорного плану враховує не лише маршрути з мінімальними витратами перевезень продукції, але й співвідношення витрат у рядку чи стовпчику, тобто розраховується наскільки, може збільшитися вартість постачання на наступних кроках процедури, якщо не здійснити на поточному кроці постачання в клітину з мінімальною вартістю.

Метод апроксимації Фогеля дає змогу особливо для задач великих розмірностей скласти найкращий опорний план.

Таблиця 1.5

b_j a_i	b_1 = 110	b_2 = 50	b_3 = 60	b_4 = 80	Різниця по рядках		
150 a_1	= 4 110	4 40	2	5	2	2	0
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2	1	2	
$a_3 = 90$	2	1 10	4	2 80	1	1	1
Різниця по стовпцях	2	2	1	3			
	2	2	1				
	2	3					

У таблиці 1.5. навпроти кожного рядка і стовпчика записані величини, які знайдені як різниця між мінімальним значенням вартості та наступним за ним по рівню. Максимальне значення такої різниці на першому кроці відповідає четвертому стовпчику і означає, що у разі, коли не буде задоволена потреба четвертого споживача перевезенням продукції від третього постачальника за ціною 2 ум. од. за одиницю, то на наступних кроках вартість перевезення може бути на 3 ум. од. більшою. Тобто інакше може статися, що потребу четвертого

споживача необхідно буде задовольняти перевезенням продукції від першого постачальника, що призведе до збільшення вартості цього перевезення в 2,5 рази. Водночас для всіх інших споживачів та постачальників такі різниці є меншими. Отже, найдоцільніше на першому кроці заповнити клітину $A3B4$. Після цього потреби $B4$ повністю задоволені, і всі клітини четвертого стовпчика виключаються з наступного розрахунку різниць по рядках і стовпцях.

На другому кроці максимальна різниця дорівнює 2 і відповідає першому і другому рядкам та першому і другому стовпчикам, тому можна заповнювати будь-яку їх клітину з мінімальною вартістю, наприклад, $A2B3$. Після цього з розгляду виключаються одразу всі клітини другого рядка та третього стовпця, оскільки потреби третього споживача повністю задоволені, а запаси другого постачальника вичерпані.

Останній розрахунок різниць (найбільше значення 3 відповідає другому стовпчику) свідчить про доцільність введення поставки від третього постачальника до другого споживача. Решту клітин заповнимо методом мінімальної вартості та визначимо загальну вартість перевезень:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 80 \cdot 2 = 830 \quad (\text{ум. од.}).$$

Результат збігся із значенням цільової функції для опорного плану, що складений за попереднім методом. Ефективність методу апроксимації Фогеля, як вже згадувалось, є очевидною для задач більшої розмірності.

Зазначимо, що ефективність наведених методів можна оцінювати лише в середньому, оскільки можлива ситуація, що методом мінімальної вартості отримано опорний план транспортної задачі кращий, ніж методом подвійної переваги.

1.1.3 Випадок виродження опорного плану транспортної задачі

Опорний план транспортної задачі, як зазначалося раніше, має містити не більше ніж $(m + n - 1)$ відмінних від нуля компонент. Якщо їх кількість дорівнює $(m + n - 1)$, то такий опорний план називають *невиродженим*. Якщо ж кількість додатних компонент менша ніж $(m + n - 1)$, то опорний план є *виродженим*. Вироджений план може виникати не лише за побудови опорного плану, але і при його перетвореннях у процесі знаходження оптимального плану.

Найчастіше, щоб позбутися виродженості опорного плану, в деякі клітини таблиці транспортної задачі в необхідній кількості вводять нульові поставання. Обсяги запасів постачальників і потреби споживачів після цього не змінюються, однак клітини зі значенням «нуль» вважаються заповненими.

Головною умовою при введенні нульової поставки є збереження необхідної і достатньої умови опорності плану транспортної задачі — його ациклічності. Клітина має вибиратись у такий спосіб, щоб неможливо було побудувати замкнений цикл.

Нехай маємо такі умови транспортної задачі та початковий опорний план, що подані в табл. 1.6.

Таблиця 1.6

$\begin{matrix} b_j \\ a_i \end{matrix}$	$b_1 = 7$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$
$a_1 = 8$	$\begin{matrix} 0 \\ 7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}$	2
$a_2 = 7$	2	$\begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix}$	4
$a_3 = 6$	1	2	$\begin{matrix} 0 \\ 6 \end{matrix}$
$a_4 = 2$	0	$\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$	0

Перевіримо, чи є отриманий опорний план виродженим. Кількість постачальників $m=4$, а кількість споживачів $n=3$. Для невиродженого опорного плану кількість заповнених клітин таблиці 1.6 має дорівнювати $m+n-1=4+3-1=6$. У наведеному опорному плані кількість заповнених клітин на одну менше (п'ять), отже, він вироджений. Позбудемося виродженості опорного плану введенням нульової поставки в одну з пустих клітин. Враховуючи необхідність збереження ациклічності опорного плану, не можна заповнювати клітини A_2B_1 та A_4B_1 , оскільки це призведе до утворення циклів, які зображені в табл. 1.7. та 1.8.

Таблиця 1.7

$a_i \backslash b_j$	$b_1 = 7$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$
$a_1 = 8$	7 0	1 5	2
$a_2 = 7$	0 2	7 3	4
$a_3 = 6$	1	2	6 0
$a_4 = 2$	0	2 0	0

Таблиця 1.8

$a_i \backslash b_j$	$b_1 = 7$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$
$a_1 = 8$	7 0	1 5	2
$a_2 = 7$	2	7 3	4
$a_3 = 6$	1	2	6 0
$a_4 = 2$	0 0	2 0	0

Очевидно, введення нульової поставки в будь-яку іншу пусту клітинку не дає змоги утворити цикл. Отже, можна заповнити нулем одну з клітин $A1B3$, $A2B3$, $A3B1$, $A3B2$, $A4B3$. Наприклад, виберемо клітину $A3B2$.

Таблиця 1.9

b_j a_i	$b_1 = 7$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$
$a_1 = 8$	0 7	5 1	2
$a_2 = 7$	2	3 7	4
$a_3 = 6$	1	2 0	0 6
$a_4 = 2$	0	0 2	0

Зазначимо, що необхідність введення нульової поставки є очевиднішою на наступних етапах розв'язування транспортної задачі.

1.1.4 Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі

Для того, щоб плани відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_{ij}^*(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} u_i^* \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^* - a_i \right) = 0, i = \overline{1, m}; \\ v_j^* \left(\sum_{i=1}^m x_{ij}^* - b_j \right) = 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Зауважимо, що друга група умов для транспортної задачі виконується автоматично, оскільки всі обмеження задачі є рівняннями.

Перша умова виконується у двох випадках:

а) якщо $x_{ij}^* = 0$. Другий співмножник $(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) \leq 0$, бо за умовою (5.23) $u_i^* + v_j^* \leq c_{ij}$ ($i = \overline{1, 2, \dots, m}, j = \overline{1, 2, \dots, n}$);

б) якщо $x_{ij}^* > 0$, то за умовою транспортної задачі $x_{ij}^* > 0$, тоді $(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) = 0 \Rightarrow u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ ($i = \overline{1, 2, \dots, m}, j = \overline{1, 2, \dots, n}$).

Необхідність і достатність виконання таких умов для оптимальності планів прямої та двоїстої задач було доведено в розділі 3. Отже, як наслідок другої теореми двоїстості для транспортної задачі отримали необхідні та достатні умови оптимальності плану.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}^*)$ існують числа u_i та v_j , для яких виконуються умови:

$$u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij}^* > 0,$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, x_{ij}^* = 0$$

для всіх $i = \overline{1, m}$ та $j = \overline{1, n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Використовуючи наведені умови існування розв'язку транспортної задачі, методи побудови опорних планів та умову оптимальності опорного плану транспортної задачі, сформулюємо алгоритм методу потенціалів, який по суті повторює кроки алгоритму симплексного методу.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи замкнена). За необхідності слід звести задачу до замкнутого типу.

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.

3. Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові поставання.

4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної задачі. Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких дорівнює $m + n - 1$, а кількість невідомих — $(m + n)$. Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно.

Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$,

то поточний план є неоптимальним, і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Вибір змінної для введення в базис на наступному кроці. Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка має покращити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто

$$\max\{A_{ij} - (u_i + v_j) - c_{ij}\}.$$

Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану. Вибрана порожня клітина разом з іншими заповненими становить $m + n$, отже, з цих клітин обов'язково утвориться цикл (теореми та наслідок § 5.2). У межах даного циклу здійснюють перерахунки, які приводять до перерозподілу поставок продукції. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим — за черговістю знаки «-» та «+». У клітинках зі знаком «-» вибирають значення $q = \min_j$ і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які містяться в клітинках зі знаком «+», та віднімають від чисел, що позначені знаком «-». Якщо значенню q відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає змогу зберегти невикористаність опорного плану.

Внаслідок наведеного правила вибору q дістаємо новий опорний план, який не містить від'ємних перевезень і задовольняє умови транспортної задачі. Оскільки кількість всіх клітин таблиці, що входять у цикл, є парною і до половини з них те саме число q додається, а від половини віднімається, то загальна сума перевезень по всіх колонках і рядках залишається незмінною.

Клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальною величиною x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу перевезень продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану.

Якщо умова оптимальності виконується — маємо оптимальний план транспортної задачі, інакше необхідно перейти до наступного опорного плану.

Зауважимо, що аналогічно з розв'язуванням загальної задачі лінійного програмування симплексним методом, якщо за перевірки оптимального плану транспортної задачі для деяких клітин

виконується рівність $u_i + v_j = c_{ij}$, то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Отримати їх можна, якщо побудувати цикли перерозподілу обсягів перевезень для відповідних клітин.

1.1.5 Приклади розв'язування транспортних задач методом потенціалів

Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3 , здатні виготовляти відповідно 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Вона уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4 , яким потрібно щотижня доставляти відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведена в табл. 1.10.

Таблиця 1.10 - Вартість транспортування продукції

Фабрика	Вартість транспортування 1000 од. продукції замовнику			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити оптимальний план перевезень продукції від кожної фабрики до замовників, що мінімізує загальну вартість транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i -ї фабрики до j -го замовника ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 4}$). Оскільки транспортна задача за умовою є

збалансованою, закритою $\left(\sum_{j=1}^3 a_j = \sum_{i=1}^4 b_i = 290 \right)$, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що може надходити до споживача від трьох фабрик, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з транспортуванням продукції, визначаються як сума добутків обсягів перевезеної продукції на вартості транспортування 1000 од. продукції до відповідного замовника і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому формально це можна записати так:

$$\min Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}.$$

Загалом математична модель сформульованої задачі має вигляд:

$$\min Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80; \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 110; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60; \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Запишемо умови задачі у вигляді транспортної таблиці (табл. 1.11) та складемо її перший опорний план у цій таблиці методом мінімальної вартості.

Таблиця 1.11

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110	4	2 2	5 40	$u_1 = 5$
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2 0	$u_2 = 2$
$a_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Загальна вартість перевезень продукції згідно з першим опорним планом визначається у такий спосіб:

$$Z1 = 4 \times 110 + 5 \times 40 + 1 \times 60 + 1 \times 40 + 2 \times 40 = 820 \text{ (ум. од.)}.$$

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$.

Для дальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку пусту клітинку, яка не утворює замкнутого циклу із заповненими клітинами. Наприклад, заповнимо нулем клітинку $A2B4$. Тепер перший план транспортної

задачі є невивірженим, і його можна перевірити на оптимальність методом потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь (для заповнених клітин таблиці) для визначення потенціалів першого опорного плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4; \\ u_1 + v_4 = 5; \\ u_2 + v_3 = 1; \\ u_2 + v_4 = 2; \\ u_3 + v_1 = 1; \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, узявши, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються з цієї системи рівнянь: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$. Ці значення потенціалів першого опорного плану записуємо у транспортну таблицю.

Потім згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$$A1B2 : u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4;$$

$$A1B3 : u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2;$$

$$A2B1 : u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5;$$

$$A2B2 : u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3;$$

$$A3B1 : u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2;$$

$$A3B3 : u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4.$$

Умова оптимальності не виконується для клітинки $A1B3$. Порушення $D13 = (u_1 + v_3) - c13 = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Отже, перший опорний план транспортної задачі неоптимальний. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку $A1B3$, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки $A1B3$, та позначаємо вершини циклу по чергово знаками «-» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для

цього у порожню клітинку $A1B3$ переносимо менше з чисел x_{ij} , які розміщені в клітинках зі знаком «-». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщені в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщені в клітинках, позначених знаком «-».

У даному разі $\min\{60, 40\} - 40$, тобто $\min x_{ij} - 40$. Виконавши перерозподіл перевезень продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: для клітинки $A1B3$ — 40 од. продукції, а для $A2B3$ — $(60 - 40) = 20$ од., а для $A2B4$ — $(0 + 40) = 40$ од. Клітинка $A1B4$ звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості плану, тобто дорівнювати $(n + m - 1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд (табл. 1.12):

Таблиця 1.12

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110 -	4	2 + 40	5	$u_1 = 0$
$a_2 = 60$	5	3	1 - 20	2 + 40	$u_2 = -1$
$a_3 = 80$	2 + 1	1 - 40	4	2 - 40	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Розрахуємо значення цільової функції відповідно до другого опорного плану задачі:

$Z = 4 \times 110 + 2 \times 40 + 1 \times 20 + 2 \times 40 + 1 \times 40 + 2 \times 40 = 740$ (ум. од.).

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий опорний план транспортної задачі також неоптимальний (має місце порушення для клітинки $A3B1$). За допомогою побудованого циклу, виконавши перехід до третього опорного плану транспортної задачі, отримуємо табл. 1.13:

Таблиця 1.13

Ai	Bj				ui
	$b1$ = 110	$b2$ = 40	$b3$ = 60	$b4$ = 80	
150 $a1 =$	4 90	4	2 60	5	$u1 = 2$
60 $a2 =$	5	3	1	2 60	$u2 = 0$
80 $a3 =$	2 20	1 40	4	2 20	$u3 = 0$
vj	$v1$ = 2	$v2$ = 1	$v3$ = 0	$v4$ = 2	

Визначимо загальну вартість витрат на транспортування продукції згідно з третім опорним планом:

$Z3 = 4 \times 90 + 2 \times 60 + 2 \times 60 + 2 \times 20 + 1 \times 40 + 2 \times 20 = 720$ (ум. од.).

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому:

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість перевезень всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

1.2 Завдання

Вирішити транспортну задачу згідно варіанту:

1.2.1

$$C = \begin{array}{c|cccc|c} & & & & & a_i \\ \hline & 1 & 8 & 2 & 3 & 30 \\ & 4 & 7 & 5 & 1 & 50 \\ & 5 & 3 & 4 & 4 & 20 \\ \hline b_i & 15 & 15 & 40 & 30 & \end{array}$$

1.2.2

$$C = \begin{array}{c|cccc|c} & & & & & a_i \\ \hline & 2 & 4 & 5 & 1 & 60 \\ & 2 & 3 & 9 & 4 & 70 \\ & 3 & 4 & 22 & 5 & 20 \\ \hline b_i & 40 & 30 & 30 & 50 & \end{array}$$

1.2.3

$$C = \begin{array}{c||cccc|c} & & & & & a_i \\ \hline & 4 & 5 & 5 & 7 & 100 \\ & 8 & 7 & 5 & 4 & 120 \\ & 9 & 6 & 4 & 5 & 150 \\ & 3 & 2 & 9 & 3 & 130 \\ \hline b_i & 140 & 130 & 90 & 140 & \end{array}$$

1.2.4

$$C = \begin{array}{c|cccc|c} & & & & & a_i \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 60 \\ 2 & 3 & 9 & 4 & 70 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 20 \\ \hline b_i & 40 & 30 & 30 & 50 \end{array}$$

1.2.5

$$C = \begin{array}{c|cccc|c} & & & & & a_i \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 60 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 65 \\ 5 & 4 & 1 & 5 & 70 \\ \hline b_i & 40 & 60 & 70 & 25 \end{array}$$

1.2.6

$$C = \begin{array}{c|ccccc|c} & & & & & a_i \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 8 & 40 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 & 30 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 & 35 \\ \hline b_i & 20 & 34 & 16 & 10 & 15 \end{array}$$

1.2.7

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C= & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right| & & & \\ b_i & 40 & 30 & 35 & 15 \end{array}$$

1.2.8

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C= & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \end{array} \right| & & & \\ b_i & 30 & 25 & 18 & 20 \end{array}$$

1.2.9

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C= & \left| \begin{array}{cccc} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{array} \right| & & & \\ b_i & 15 & 40 & 30 & 15 \end{array}$$

1.2.10

$$C = \begin{array}{ccccc|c} & & & & & a_i \\ \hline & 3 & 2 & 4 & 1 & 50 \\ & 2 & 3 & 1 & 5 & 40 \\ & 3 & 2 & 7 & 4 & 20 \\ \hline b_i & 30 & 25 & 35 & 20 & \end{array}$$

1.2.11

$$C = \begin{array}{cccccc|c} & & & & & & a_i \\ \hline & 2 & 8 & 6 & 8 & 2 & 10 & 130 \\ & 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 90 \\ & 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 & 100 \\ & 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 & 140 \\ \hline b_i & 110 & 50 & 30 & 80 & 100 & 90 & \end{array}$$

1.2.12

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 7 & 60 \\ & 3 & 40 & 15 & 5 & 55 \\ & 6 & 4 & 8 & 3 & 40 \\ & 24 & 3 & 3 & 1 & 35 \\ \hline b_i & 70 & 5 & 45 & 70 & \end{array}$$

1.2.13

$$C = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 3 & 7 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 4 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} a_i \\ 30 \\ 5 \\ 45 \\ 70 \end{array} \\ b_i \quad 10 \quad 35 \quad 15 \quad 25 \quad 35 \end{array}$$

1.2.14

$$C = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{array} \right\| \begin{array}{c} a_i \\ 20 \\ 20 \\ 40 \\ 45 \end{array} \\ b_i \quad 25 \quad 30 \quad 40 \quad 15 \end{array}$$

1.2.15

$$C = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{array} \right| \begin{array}{c} a_i \\ 60 \\ 40 \\ 100 \\ 50 \end{array} \\ b_i \quad 30 \quad 80 \quad 65 \quad 35 \quad 40 \end{array}$$

1.2.16

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C = & \left| \begin{array}{cccc} 18 & 2 & 9 & 7 \\ 30 & 4 & 1 & 55 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{array} \right| & & & \\ b_i & 2 & 3 & 3 & 16 \end{array}$$

1.2.17

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C = & \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{array} \right\| & & & \\ b_i & 16 & 18 & 12 & 15 \end{array}$$

1.2.18

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C = & \left| \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16 \end{array} \right| & & & \\ b_i & 110 & 30 & 50 & 80 & 90 \end{array}$$

1.2.19

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 45 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 35 \\ 3 & 4 & 3 & 8 & 70 \end{array} \\ b_i \quad 20 \quad 60 \quad 55 \quad 45 \end{array}$$

1.2.20

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 30 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 20 \\ 3 & 7 & 9 & 5 & 40 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & 50 \end{array} \\ b_i \quad 35 \quad 20 \quad 55 \quad 30 \end{array}$$

1.2.21

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|c} & & & & & & a_i \\ 2 & 8 & 6 & 8 & 2 & 10 & 130 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 90 \\ 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 & 100 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 & 140 \end{array} \\ b_i \quad 110 \quad 50 \quad 30 \quad 80 \quad 100 \quad 90 \end{array}$$

1.2.22

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C= & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{array} \right| & & & \\ b_i & 25 & 30 & 40 & 15 \end{array}$$

1.2.23

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C= & \left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \end{array} \right| & & & \\ b_i & 20 & 60 & 55 & 45 \end{array}$$

1.2.24

$$\begin{array}{rcccl} & & & & a_i \\ C= & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{array} \right| & & & \\ b_i & 25 & 30 & 40 & 15 \end{array}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Банди Б. Основы линейного программирования / Б.Банди [Пер. с англ.]. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций / Г.Вагнер [в 3х т. Пер. с англ.] – М.: Мир. Т.1, 1972. – 336 с., Т.2, 1973. – 488 с., Т.3, 1973. – 502 с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций./ Е.С.Вентцель. - М.: Сов. радио, 1972. - 552 с.
4. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф.Гилл, У.Мюррей, М. Райт. -М.: Мир, 1985.-509 с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций / Ю.П. Зайченко. – К.: Вища школа, 1979. – 392 с.
6. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Сборник задач / Ю.П.Зайченко, С.А.Шумилова. – К.: Вища школа, 1984. – 224 с.
7. Дж. Моудера. Исследование операций/ Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. Пер. с англ.: В 2х т. – М.: Мир, 1981. Т.1 – 712 с., Т.2 – 678 с.
8. Моисеев Н.Н. Методы оптимизации / Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
9. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций / Хэмди А. Таха. : В 2х кн.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. кн. 1 – 479 с., кн. 2 – 496 с.