

П. К. Штанько, О. С. Омельченко

# ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА



в рішеннях задач  
із збірника  
І. В. Мещерського

Частина I  
**СТАТИКА**



Запоріжжя  
СТАТУС  
2024

**ББК 22.2я73**  
**УДК 531 (075.8)**  
**Ш87**

**Штанько П. К., Омельченко О. С.**  
**Ш87**      **Теоретична механіка в рішеннях задач із**  
**збірника І. В. Мещерського. Частина І. Статика :**  
навчальний посібник / сост. П. К. Штанько,  
О. С. Омельченко ; за ред. П. К. Штанька. — Запоріжжя  
: НУ «Запорізька політехніка», 2024. — 200 с.  
**ISBN 978-617-8040-66-6**

Книга являє собою посібник по рішенням задач теоретичної механіки. Короткі відомості з теорії надані в конспективній формі. Мета посібника – навчити користувача самостійно вирішувати основні типи задач з теоретичної механіки. Посібник складається з трьох томів: I «Статика», II «Кінематика», III «Динаміка».

Даний посібник може бути корисним не тільки для здобувачів освіти та викладачів, але й для інженерів-конструкторів, тому що рішення багатьох задач є прикладами реальних інженерних розрахунків.

В першому томі «Статика» розглядається наступні теми: системи збіжних і паралельних сил; пари сил, довільна плоска та просторова системи сил; сили тертя, розрахунки ферм і центр ваги. Всього в томі наведено рішення 108 задач.

**ББК 22.2я73**  
**УДК 531 (075.8)**

© П. К. Штанько, 2024  
© О. С. Омельченко, 2024

## ЗМІСТ

1 ВСТУП. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТАТИКИ.....	4
1.1 Аксиоми статички. Задачі статички.....	4
1.2 В'язі та їх реакції.....	9
1.3 Проекція сили на вісь та на площину.....	13
1.4 Моменти сил і пари сил.....	14
1.5 Тертя .....	16
1.6 Центр ваги твердого тіла .....	19
2. ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ.....	24
2.1 Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (збіжна система сил).....	24
2.2 Сили паралельні та пари сил.....	53
2.3 Довільна плоска система сил.....	69
2.4 Розрахунок плоских ферм.....	104
2.5 Сили тертя.....	115
3 ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ.....	125
3.1 Зведення довільної системи сил до заданого центру.	126
3.2 Просторова збіжна система сил.....	132
3.3 Довільна просторова система сил.....	139
4 ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА.....	164
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	183
Додаток А. Відомості з математики.....	184
Додаток Б. Вказівник задач.....	198

## 1 ВСТУП. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТАТИКИ

Закони та принципи теоретичної механіки широко застосовуються в загально інженерних науках, таких як опір матеріалів, статика споруд, теорія механізмів і машин, деталі машин, а також в інших спеціальних інженерних дисциплінах.

Мета курсу – надати студентам базові знання з загальних методів теоретичних розрахунків, які інженер може використовувати в своїй практичній діяльності.

Успішне вивчення теоретичної механіки потребує не тільки ґрунтовного засвоєння теорії, а й набуття міцних практичних навичок, які здобуваються студентами завдяки самостійному розв'язуванню великої кількості задач із різних розділів теоретичної механіки. У цьому посібнику представлені рішення задач розділу "Статика твердого тіла" Збірника задач Мещерського (1986 р.). Завдання супроводжуються схемами рішень та короткими описами, з коментарями до завдань.

З метою полегшити пошук необхідної літератури на початку кожного параграфу надаються короткі теоретичні відомості по даної темі. Крім загальних вказівок до розв'язання задач, дано докладне рішення типових задач до основних розділів.

Посібник можна рекомендувати для підготовки аспірантів та молодих викладачів. Посібник призначений для ефективної самопідготовки студентів при мінімальних витратах часу, для впорядкування та закріплення набутих знань, а також при дистанційній формі навчання.

### 1.1 Аксиоми статички. Задачі статички

Статика твердого тіла (статика) - це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються методи перетворення систем сил в еквівалентні системи і встановлюються умови рівноваги сил, прикладених до твердих тіл.

**Статика** (від грец. *στατός*, «нерухомий»). Статика як напрямок механіки, виникла з необхідності будувати нерухомі споруди. Стародавні єгиптяни залишали свої пам'ятки як доказ; вони знали прості машини, такі як шків, важелі та похилі площини.

Інші цивілізації античного світу, пам'ятники яких збереглися до наших днів, також знали основоположні принципи, але саме греки почали систематизувати свої дослідження.

Великий грецький фізик Архімед із Сиракуз (287-212 рр. до н.е.) встановив основи використання важеля та рівноваги занурених тіл - гідростатики.

Пізніше інші великі вчені, такі як Леонардо да Вінчі та Галілео Галілей, зробили важливий внесок. Останній встановив, що чиста сила не потрібна для підтримання руху тіла (динамічна рівновага).

Пізніше Ісаак Ньютон (1642-1727) дав формулюванню статички остаточний поштовх своїми трьома законами механіки.

Наступний внесок, про який слід згадати, завдяки його актуальності, до концепції інерційної сили зробив Д'Аламбер. Завдяки цьому можна вивчати динамічні проблеми через концепцію рівноваги.

З довгого списку вчених та інженерів, які сприяли статистиці, слід згадати імена Ейлера та Лагранжа, які розробили математичні методи для її застосування.

### **Основні задачі статички:**

- перетворення систем сил, що діють на тіло, в системи їм еквівалентні;
- визначення умов рівноваги систем сил, що діють на тіло;
- визначення положення центра ваги твердих тіл.

## Основні поняття статyki

**Сила** - векторна величина, яка є мірою механічної взаємодії між тілами, в результаті якої може змінюватися відносно положення тіл, їх швидкості та форма.

**Системи сил** – це сукупність сил, що діють на тіло.

**Рівнодіюча системи сил** – це сила, дія якої на тіло еквівалентна заданій системі сил.

**Зрівноважена система сил** - система сил, прикладання якої до тіла не порушує його стану; рівнодіюча такої системи сил дорівнює нулю.

**Матеріальна точка** – тіло, розмірами якого можна знехтувати.

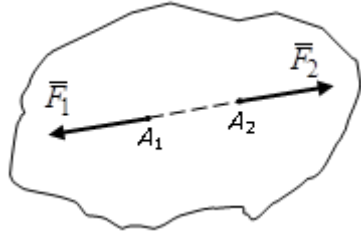
**Абсолютно тверде тіло** – тіло, форма і розміри якого не змінюються під дією прикладеної до нього сили, тобто тіло, яке не деформується.

## Аксиоми статyki

**Аксиома 1** (про дві сили).

Дві сили, прикладені до твердого тіла, будуть зрівноважені (еквівалентні нулю) тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем, діють на одній прямій і спрямовані в протилежні боки (Рис. 1.1):

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  еквівалентна 0;  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ;  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ . Рисунок 1.1



**Аксиома 2** (про приєднання або вилучення зрівноважених сил).

Не змінюючи системи сил, що діє на тіло, до неї можна приєднувати або вилучати з неї будь-яку зрівноважену систему сил.

**Наслідок з аксіом 1 і 2.** Не змінюючи дії сили на тіло, точку прикладання сили можна переносити по лінії її дії.

**Аксиома 3.** (про паралелограм сил).

Дві сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодійну, яка прикладена в тій же точці і визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах (Рис. 1.2).

Згідно з даною аксіомою система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  еквівалентна  $\vec{R}$ . За правилом додавання векторів рівнодійна дорівнює геометричній сумі цих сил:

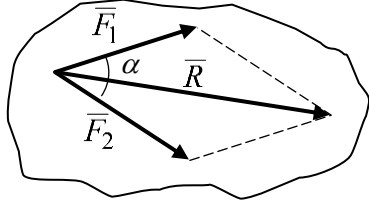


Рисунок 1.2

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

Модуль рівнодійної визначається за формулою:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1 F_2 \cos \alpha},$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ .

**Аксіома 4** (про рівність дії та протидії).

Сили взаємодії двох тіл рівні за модулем і спрямовані по одній прямій в протилежні боки (Рис. 1.3).

**Аксіома 5** (принцип твердіння).

Якщо не абсолютно тверде тіло (тіло, що не деформується) перебуває в стані рівноваги, то рівновага його не порушиться коли воно затвердіє.

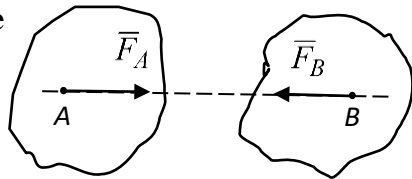


Рисунок 1.3

Принцип твердіння має велике значення при вивченні рівноваги тіл, які деформуються. З цього випливає, що умови рівноваги сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, поширюються на вивчення рівноваги не абсолютно твердих тіл.

Тіла в природі можна поділити на вільні та невольні. **Вільними** називаються тіла, які під дією системи сил можуть переміщатися в просторі у будь-якому напрямку. Тіло, рух якого в просторі обмежений іншими тілами, називається **невільним**. **Тіла, які обмежують рух даного твердого тіла в просторі, називаються в'язями.**

Очевидно, між тілом і в'язями існують механічні взаємодії. Вплив тіла на в'язь називатимемо дією, а вплив в'язі на тіло-протидією. Протидії в'язей називаються **реакціями в'язей**. **Реакція в'язей** – це сила, з якою в'язь діє на тіло. Вона спрямовується протилежно до напрямку можливого руху тіла.

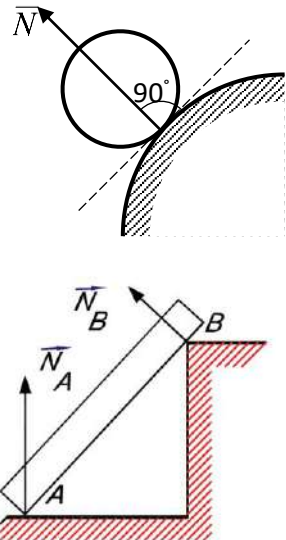
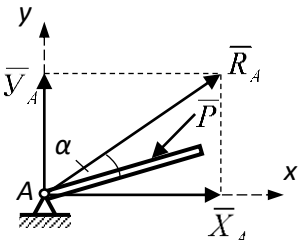
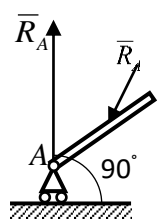
Оскільки в статиці встановлюються умови рівноваги в основному для вільних тіл, то для використання цих умов до невольних тіл слід застосовувати аксіому в'язей.

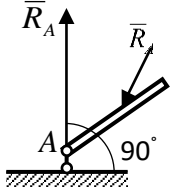
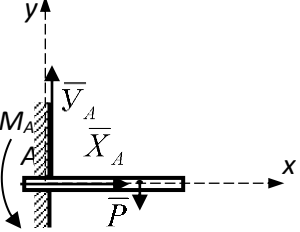
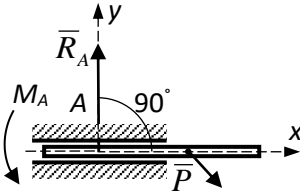
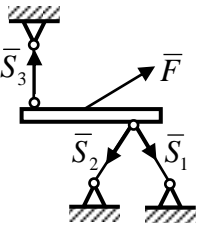
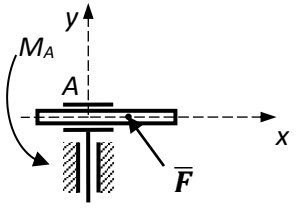
**Аксіома про в'язі** (принцип звільнення від в'язей).

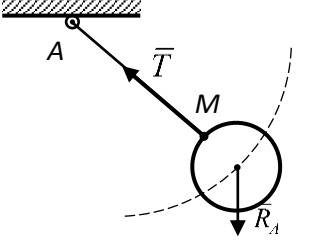
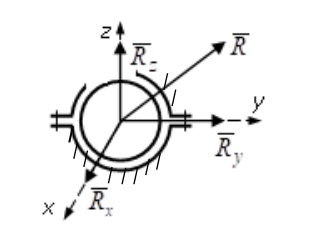
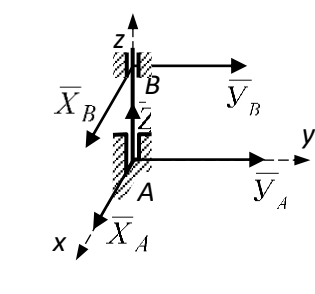
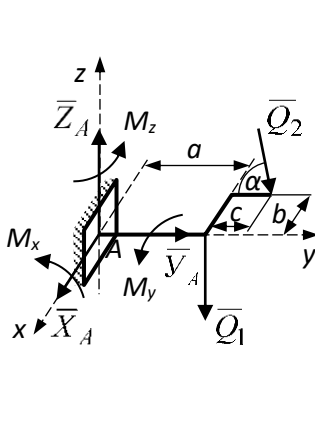
**Не змінюючи кінематичного стану тіла, всяке невольне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі, а їх дію замінити реакціями в'язей.**

## 1.2 В'язі та їх реакції

Таблиця 1.1

№ з/ч	Вид в'язі	Найменування	Напрямок дії і реакції
1.		<p>Гладка поверхня (без тертя)</p> <p>Контакт тіл у точці (без тертя)</p>	<p>По загальній нормалі до поверхонь стичних тіл у точці контакту</p> <p>По нормалі до поверхні</p>
2.		Шарнірно нерухома опора	Реакцію $\bar{R}_A$ розділяють на дві складові – проекції на осі координат $x$ і $y$
3.		Шарнір на рухомій опорі	Перпендикулярно до опорної поверхні

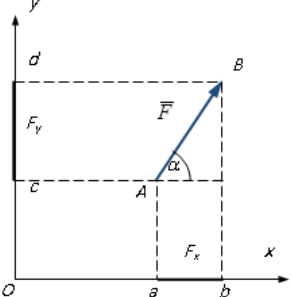
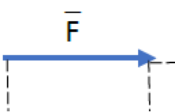
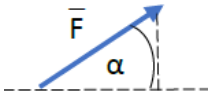
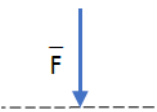
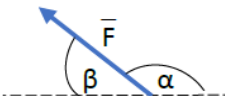

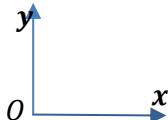
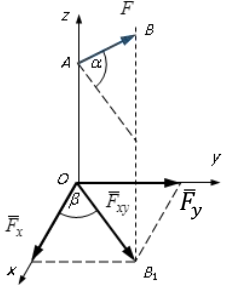
4.		Шарнірно рухома опора	Перпендикулярна до опорної поверхні
5.		Жорстке защемлення	Дві взаємно перпендикулярні складові $\bar{X}_A$ і $\bar{Y}_A$ та реактивний момент $M_A$
6.		Ковзальне защемлення	Перпендикулярно опорній поверхні. Реактивний момент $M_A$ у площині $xu$
7.		Жорсткий невагомий стержень	Вздовж осі стержня
8.		Рухоме затискання	Реактивний момент $M_A$

9.		Гнучка нерозтяжна нитка	Вздовж нитки до точки підвісу
10.		Сферичний шарнір	Загальну реакцію $\bar{R}$ розкладають на складові $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$
11.		Підп'ятник A та підшипник B	Загальні реакції $\bar{R}_A$ і $\bar{R}_B$ розкладають на складові $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ та $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$
12.		Жорстке просторове защемлення	Реакцію защем- лення розділяють на три складові сили $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A,$ спрямовані вздовж осей, та три реак- тивні моменти $M_x,$ $M_y, M_z$ відносно осей координат $x, y, z$

13.		Сферичний нерухомий шарнір $A$	Реакцію розділяють на три складові $\bar{X}_A$ , $\bar{Y}_A$ , $\bar{Z}_A$ , які спрямовані вздовж осей координат $x$ , $y$ , $z$
14.		Шорстка поверхня	Реакція тертя ковзання направлена в бік, протилежний напрямку руху тіла і має максимальне значення $F_{\text{тр max}} = f \cdot N$ , де $f$ – коефіцієнт тертя ковзання; $\bar{N}$ – нормальна реакція.

## 1.3 Проекція сили на вісь та площину

Таблиця 1.2

1 Проекції сили на осі координат		
	$F_x = F \cdot \cos \alpha;$ $F_y = F \cdot \sin \alpha$	<p>Проекція сили на вісь є величина <b>алгебраїчна</b> (скалярна величина)</p>
Варіанти проєкцій		
 $F_x = F$  $F_x = F \cdot \cos \alpha$  $F_x = 0$  $F_x = F \cdot \cos \alpha = -F \cdot \cos \beta$  $F_x = -F$ 		
2 Проекції сили на площину		
	$\overline{F}_{xy} = \overline{OB_1};$ $F_{xy} = F \cdot \cos \alpha;$ $F_x = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta;$ $F_y = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta$	<p>Проекція сили на площину є величина <b>векторна</b></p>

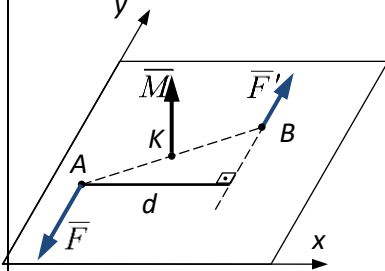
## 1.4 Момент сили і пари сил

Таблиця 1.3

<b>Момент сили відносно точки</b>	
	<p><b>1 Векторний момент сили <math>\vec{F}</math> відносно точки <math>O</math></b></p> $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$ <p>Векторний момент <math>\vec{M}_O(\vec{F})</math> прикладається у точці <math>O</math> і спрямовується перпендикулярно до площини, яка проходить через силу і точку <math>O</math> в той бік, звідки сила намагається повертати тіло проти ходу годинникової стрілки.</p> <p><b>2 Алгебраїчний момент сили <math>\vec{F}</math> відносно точки <math>O</math>:</b></p> $M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h,$ <p>де <math>h</math> – плече сили, найкоротша відстань від точки <math>O</math> до лінії дії сили <math>\vec{F}</math> (<math>h=OC</math>).</p>
<b>Момент сили відносно осі</b>	
	<p><b>1 Момент сили <math>\vec{F}</math> відносно осі <math>z</math></b></p> <p>– це алгебраїчний момент проекції сили <math>\vec{F}</math> на площину <math>xy</math>, перпендикулярну до цієї осі відносно точки перетину осі з площиною <math>xy</math>:</p> $M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h = \pm F \cdot \cos \alpha \cdot h.$ <p><b>2 Момент сили <math>\vec{F}</math> відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– лінія дії сили перетинає вісь;</li> <li>– сила паралельна до осі.</li> </ul>

### Пара сил і її момент

Парою сил називають систему двох однакових за модулем, паралельних, протилежно спрямованих сил, прикладених до абсолютно твердого тіла



$d$  – найкоротша відстань між лініями дії сил  $\vec{F}$  і  $\vec{F}'$ .

#### 1 Векторний момент пари сил

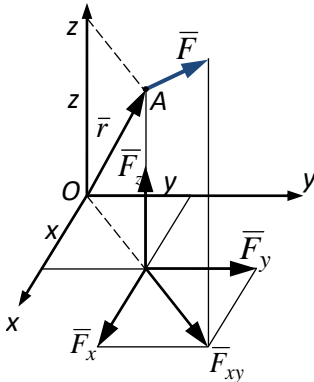
$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{M}_A(\vec{F}') = \\ &= \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{AB} \times \vec{F}' = \vec{BA} \times \vec{F}\end{aligned}$$

Модуль векторного моменту  $M$  дорівнює  $M = \pm F \cdot d$ .

Векторний момент  $\vec{M}$  пари сил спрямовується перпендикулярно до площини дії пари сил так, щоб з кінця цього вектора можна було спостерігати намагання пари сил обертати тіло проти ходу годинникової стрілки. Вектор  $\vec{M}$  є вільним вектором.

#### 2 Алгебраїчний момент пари сил $M = \pm F \cdot d$ .

### Моменти сили відносно осей координат



$$\begin{aligned}\vec{m}_O(\vec{F}) &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{m}_O(\vec{F}) &= m_x(\vec{F})\vec{i} + m_y(\vec{F})\vec{j} + m_z(\vec{F})\vec{k} \\ \vec{r} &= x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \\ \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ \left. \begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y \\ m_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z \\ m_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\},\end{aligned}$$

де  $x, y, z$  – координати точки  $A$ ;  
 $F_x, F_y, F_z$  – проекції  $\vec{F}$  на осі  $x, y, z$ .

## 1.5 Тертя

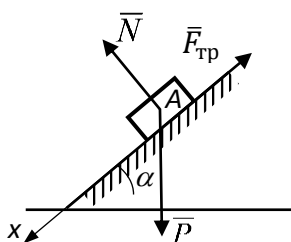
Залежно від руху тіла по поверхні розрізняють тертя ковзання, кочення та вертіння.

### 1.5.1 Тертя ковзання

Сила тертя ковзання – це сила опору, яка виникає при переміщенні або намаганні переміщення одного тіла по поверхні іншого.

Вектор сили тертя ковзання розміщений у спільній дотичній площині поверхонь, що контактують між собою, і напрямлений у бік, протилежний до напрямку руху тіла. Модуль сили тертя перебуває в межах між нулем і максимальним значенням, яке досягається в момент порушення стану рівноваги.

Максимальна сила тертя ковзання не залежить від площі поверхонь контакту тіл і визначається у вигляді:



$$F_{\text{тр max}} = f \cdot N, \quad (1.2)$$

де  $N$  – нормальна реакція;  
 $f$  – коефіцієнт тертя ковзання (статичний коефіцієнт тертя першого роду), безрозмірна величина.

Рисунок 1.4

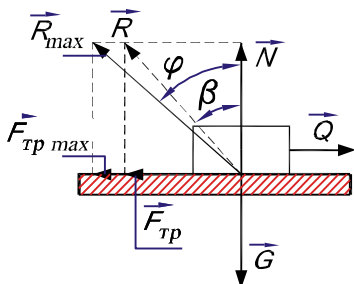


Рисунок 1.5

### Кут і конус тертя

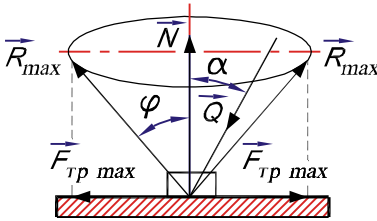
Повна реакція  $\vec{R}$  відхилена від нормалі до опорної поверхні на кут  $\beta$ . Як відомо, зі збільшенням  $\vec{Q}$  зростає і сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  і при цьому повна реакція відхиляється від нормалі на все

більший кут. Це відхилення буде максимальним при  $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{F}_{\text{тр. max}}$ .

Найбільше значення кута  $\beta$  відхилення повної реакції  $\vec{R}$  від нормалі називають **кутом тертя**  $\varphi$ .

З Рис. 1.5 випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\text{тр max}}}{N} = \frac{fN}{N} = f. \quad (1.3)$$



**Рисунок 1.6**

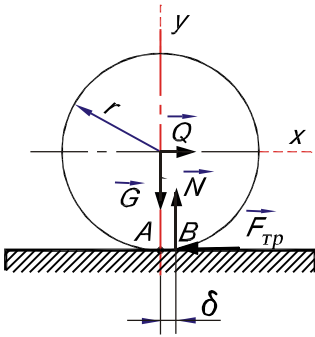
$f$  у всіх напрямках однаковий, то згідно з залежністю (1.3) конус тертя буде круговим. Простір у середині конуса тертя має таку властивість, що якою б великою за модулем не була активна сила  $\vec{Q}$ , лінія дії якої розміщена всередині конуса тертя (Рис. 1.6), вона не виведе тіло зі стану спокою. Це явище називають **заклинюванням**.

Це означає, що для порушення стану рівноваги тіла необхідно, щоб лінія дії активної сили  $\vec{Q}$  проходила за межами конуса тертя.

### 1.5.2 Тертя кочення

**Тертям кочення (тертя другого роду)** називають опір, який виникає при коченні або намаганні кочення одного тіла по поверхні іншого.

До центра котка прикладена горизонтальна сила  $\vec{Q}$ . Під вагою котка опорна поверхня деформується і точка прикладання реакцій  $\vec{N}$  і  $\vec{F}_{\text{тр}}$  переміщується з точки  $A$  в точку  $B$ .



Це свідчить про те, що у разі рівноваги котка до нього прикладені дві пари сил  $(\vec{Q}, \vec{F}_{\text{тр}})$  і  $(\vec{G}, \vec{N})$ .

Рисунок 1.7

Перша пара прагне повернути тіло, тобто надати йому руху. Друга чинить опір повороту. Момент цієї пари будемо називати **моментом опору кочення** і позначимо його  $M_{on}$ , який дорівнює моменту сили  $\vec{N}$  відносно точки  $A$ :

$$M_{on} = m_A(\vec{N}). \quad (1.4)$$

У момент початку кочення момент опору  $M_{on}$  досягне свого максимального значення

$$M_{\max} = \delta N, \quad (1.5)$$

де  $\delta$  - коефіцієнт тертя кочення, або коефіцієнт тертя другого роду. Має розмірність довжини.

### 1.5.3 Тертя вертіння

**Тертя вертіння** – це опір, який виникає внаслідок тертя кулі та поверхні при повороті або намаганні повороту кулі навколо вертикальної осі під дією пари сил з моментом  $M$ .

$$M_{\text{кр}} = \lambda N, \quad (1.6)$$

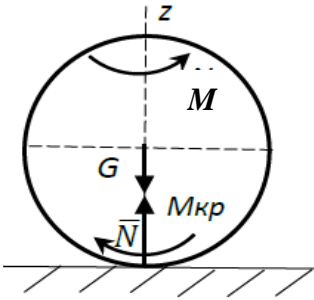


Рисунок 1.8

де  $\vec{N}$  – сила нормального тиску кулі на площину, що дорівнює в даному випадку вазі кулі,  $\lambda$  – коефіцієнт тертя вертіння, який має розмірність довжини.

Таблиця 1.4

Матеріали тіл, між якими виникає тертя	Значення коефіцієнтів тертя		
	ковзання $f$	кочення $\delta$ , мм	вертіння $\lambda$ , мм
Сталь по сталі	0,15	0,01-0,05	~0,001
Деревина по деревині	0,54-0,62	0,5-0,6	
Метал по деревині	0,5-0,6	0,3-0,4	
Сталь по льоду	0,027		

## 1.6 Центр ваги твердого тіла

На всі елементарні частинки твердого тіла, що розміщено в межах поля земного тяжіння, діють сили тяжіння до центра Землі. Але оскільки розміри тіл малі порівняно з радіусом Землі, то ці сили можна вважати паралельними між собою. Виходячи з цих припущень даємо визначення ваги тіла й центра ваги тіла.

**Вага тіла** - це рівнодійна паралельних сил притягання (ваги) його окремих частин  $G = \sum G_i$ .

Центр ваги тіла – це центр цієї системи паралельних сил:

$$X_c = \frac{\sum G_i \cdot x_i}{\sum G_i}; \quad y_c = \frac{\sum G_i \cdot y_i}{\sum G_i}; \quad Z_c = \frac{\sum G_i \cdot z_i}{\sum G_i},$$

де  $x_i, y_i, z_i$  – координати центра ваги  $i$ - тої частини тіла.

### 1.6.1 Центр ваги однорідного тіла

#### Центр ваги об'єму

$$X_c = \frac{\sum V_i \cdot x_i}{V}; \quad y_c = \frac{\sum V_i \cdot y_i}{V}; \quad Z_c = \frac{\sum V_i \cdot z_i}{V},$$

де  $V$  – об'єм всього тіла,  $V_i$  – об'єм  $i$ - тої частини тіла,  $x_i, y_i, z_i$  - координати центрів ваги частин тіла.

#### Центр ваги площі

$$X_c = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{S}.$$

де  $S$  – площа всієї фігури,  $x_i, y_i$  – координати центрів ваги елементарних площ  $S_i$ .

#### Центр ваги лінії

$$X_c = \frac{\sum \ell_i \cdot x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum \ell_i \cdot y_i}{L}; \quad Z_c = \frac{\sum \ell_i \cdot z_i}{L},$$

де  $L$  – довжина всієї лінії,  $\ell_i$  – довжина елементарної лінії,  $x_i, y_i, z_i$  - координати центрів ваги елементарної лінії.

### 1.6.2 Методи знаходження центра ваги

**Експериментальні методи:** метод підвісу і метод зважування.

#### Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр геометричної симетрії, то центр ваги цього тіла лежить у площині, на осі або у центрі симетрії.

**Метод розбиття.**

Положення центра ваги тіла може бути визначено, якщо розбити його на такі частини, центри ваги яких відомо, або їх легко визначити та використовувати формули для визначення центра ваги однорідних тіл.

**Метод додавання (метод від'ємних площ).**

Цей метод є частковим випадком методу розбиття і його використовують для тіл, які мають отвори. Використовують ті ж самі формули для тіла з отвором, приймаючи площу вирізаної частини (отвору) від'ємною.

**Метод інтегрування.**

Центр ваги об'єму:

$$X_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV; \quad Y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV, \quad Z_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV,$$

де

$$V = \iiint_{(V)} dV \text{ — об'єм тіла.}$$

Центр ваги площі:

$$X_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dS, \quad Y_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y dS,$$

де

$$S = \iint_{(S)} dS, \text{ — площа плоскої фігури.}$$

Центр ваги лінії:

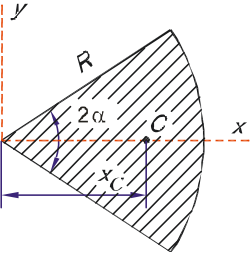
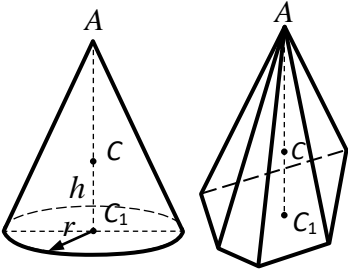
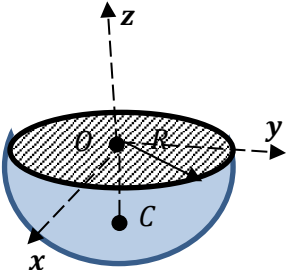
$$X_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x d\ell; \quad Y_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} y d\ell, \quad Z_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} z d\ell,$$

де

$$L = \int_{(L)} d\ell - \text{довжина лінії.}$$

**Таблиця 1.5 – Координати центра ваги деяких однорідних тіл**

	Фігура	Координати центра ваги
Площа трикутника		$y_C = \frac{1}{3}h_a; \quad X_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$ <p>де <math>x_1, x_2, x_3</math> – координати вершин <math>O, A, B</math>.</p> $S_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$
Площа півкруга		$X_C = r; \quad Y_C = \frac{4r}{3\pi}; \quad S = \frac{\pi r^2}{2}$
Дуга кола		<p><b>Центр ваги <math>C</math> знаходиться на осі симетрії <math>Cx</math>:</b></p> $y_C = 0; \quad x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$

Круговий сектор		<p>Центр ваги <math>C</math> розміщений на осі симетрії <math>Ox</math>:</p> $y_C = 0; x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3}$
Об'єм піраміди або конуса		<p>Центр ваги розміщений на лінії, яка з'єднує вершину <math>A</math> піраміди або конуса з центром ваги <math>C_1</math> основи:</p> $CC_1 = \frac{1}{4} AC_1.$ <p>Об'єм кругового конуса (кк):</p> $V_{\text{кк}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h_{\text{к}}.$ <p>Об'єм піраміди (п):</p> $V_{\text{п}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h_{\text{к}}.$ <p><math>h_{\text{к}}, h_{\text{п}}</math> — висота конуса і піраміди відповідно.</p>
Об'єм півкулі		$OC = \frac{3}{8} R$

## 2 ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

### 2.1 Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (збіжна система сил)

**Систему сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називають збіжною.**

Рівнодійна системи збіжних сил дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в точці перетину ліній їх дії

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k.$$

#### I. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0.$$

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник, побудований на цих силах був замкненим.

#### II. Теорема про три непаралельні сили.

Якщо вільне тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

#### III. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил.

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на кожен з координатних осей дорівнювала нулю:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0.$$

**IV. Теорема Варіньона для системи збіжних сил.**  
Момент рівнодійної системи збіжних сил відносно деякого центра дорівнює сумі моментів складових сил відносно того самого центра:

$$m_O(\bar{R}) = \sum m_O(\bar{F}_k).$$

**V. Рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил.**

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо виконання умов:

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0,$$

де пряма  $BC$  не проходить через точку  $A$ , в якій перетинаються лінії дій сил.

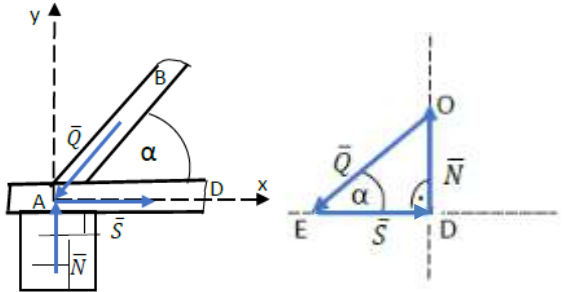
### Задача 2.3

Дано:

$$Q=2,50\text{кН};$$

$$\alpha=45^\circ;$$

Знайти:  $S$  -?,  $N$  - ?



а)

б)

Активна сила  $\bar{Q}$  діє вздовж стропильній нозі  $AB$ . Реакція  $\bar{S}$  напрямлена по горизонтальній зтяжці  $AC$ . Реакція  $\bar{N}$  напрямлена вертикально вздовж стіни. Лінії дії  $\bar{Q}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{N}$  перетинаються в точці  $A$  (Рис. а).

1) Будуємо силовий багатокутник. З т.  $O$  (Рис. б) в обраному масштабі відкладаємо задану силу  $\bar{Q}$ , через початок вектора  $\bar{Q}$  (точку  $O$ ) проводимо лінію дії сили  $\bar{N}$ ; через кінець

вектора  $\bar{Q}$  (точку E) проводимо лінію дії сили  $\bar{S}$ . В отриманому трикутнику  $OED$  розставимо зусилля  $\bar{S}$  та  $\bar{N}$ . Силовий трикутник повинен бути замкненим, стрілки (напрями сил) повинні йти одна за одною в одному напрямі. На початковій схемі (Рис. а) могла бути помилка в напрямі шуканих сил.

З силового трикутника маємо:

$$N = Q \sin \alpha = 2,50 \cdot \sin 45^\circ = 2,50 \cdot 0,707 = 1,77 \text{ кН};$$

$$S = Q \cos \alpha = 2,50 \cdot \cos 45^\circ = 2,50 \cdot 0,707 = 1,77 \text{ кН}.$$

2) Аналітичне рішення. Складаємо рівняння рівноваги (см.

Рис. а):

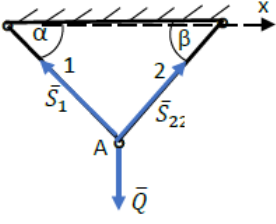
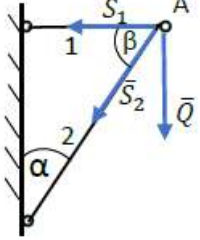
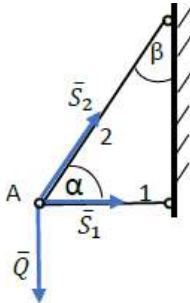
$$\sum F_{kx} = \sum X_k = -Q \cos \alpha + S = 0; \quad S = Q \cos \alpha;$$

$$\sum F_{ky} = \sum Y_k = -Q \sin \alpha + N = 0; \quad N = Q \sin \alpha.$$

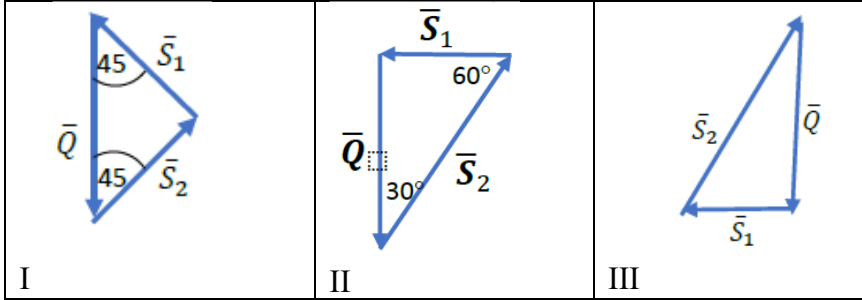
**Відповідь:**  $S = N = 1,77 \text{ кН}$ .

### Задача 2.7

Дано:

I	II	III
		
$\alpha = \beta = 45^\circ$ $Q = 1000 \text{ Н}$	$\alpha = 30^\circ \quad \beta = 60^\circ$ $Q = 1000 \text{ Н}$	$\alpha = 60^\circ \quad \beta = 30^\circ$ $Q = 1000 \text{ Н}$
<b>Знайти:</b>		
$S_1 - ? \quad S_2 - ?$	$S_1 - ? \quad S_2 - ?$	$S_1 - ? \quad S_2 - ?$

В усіх варіантах розглядаємо рівновагу вузла  $A$ . Вважаємо, що всі стержні розтягнуті, зусилля напрямлені від вузла. Будуємо силові трикутники, починаємо з сили  $\bar{Q}$ .



Як бачимо з силових трикутників стержень 2 в схемі II і стержень 1 в схемі III стиснуті.

I.

$$\sum Y_k = -Q = S_1 \sin 45^\circ + S_2 \sin 45^\circ = 0,$$

$$\sum X_k = -S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha = 0, \quad S_1 = S_2.$$

(Обидва стержня розтягнуті)

$$S_1 = S_2 = \frac{Q}{2 \sin 45^\circ} = \frac{Q\sqrt{2}}{2} = 707 \text{ Н.}$$

II.

$$S_2 = -\frac{Q}{\cos 30^\circ} = -1154 \text{ Н}, \quad S_1 = Q \operatorname{tg} 30^\circ = 577 \text{ Н.}$$

(стиснутий)

(розтягнутий)

III.

$$S_1 = -Q \operatorname{tg} 30^\circ = -577 \text{ Н}, \quad S_2 = \frac{Q}{\cos 30^\circ} = 1154 \text{ Н.}$$

(стиснутий)

(розтягнутий)

**Відповідь:**

№ схеми		I	II	III
зусилля в стержнях, Н	$S_1$	<b>0,707</b>	<b>577</b>	<b>-577</b>
	$S_2$	<b>0,707</b>	<b>-1154</b>	<b>1154</b>

## Задача 2.8

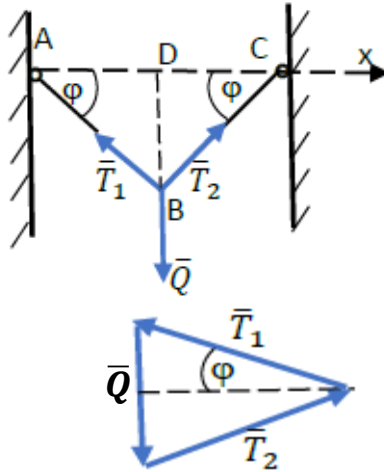
Дано:

$$AD=DC=10 \text{ м;}$$

$$DB=0,1 \text{ м;}$$

$$AC=20 \text{ м;}$$

$$Q=150 \text{ Н.}$$

Знайти:  $T_1$  -?,  $T_2$  - ?

Розглядається рівновага вузла  $B$ . Будуємо силувий трикутник, починаючи з сили  $\bar{Q}$ .

$$tg\varphi = \frac{BD}{AD} = \frac{0,1}{10} = 0,01; \quad \varphi = 0^\circ 36'; \quad \sin 0^\circ 36' = 0,01.$$

$$\frac{Q}{2} = T_1 \sin\varphi; \quad T_1 = \frac{Q}{2 \sin\varphi};$$

$$T_1 = \frac{150}{2 \cdot 0,01} = 7,50 \text{ кН}; \quad T_1 = T_2.$$

Виходячи з силового трикутника, або з рівнянь рівноваги:

$$\sum X_k = -T_1 \cos\varphi + T_2 \cos\varphi = 0, \quad T_1 = T_2;$$

$$\sum Y_k = (T_1 + T_2) \sin\varphi - Q = 0,$$

$$T_1 = T_2 = \frac{Q}{2 \sin\varphi}.$$

**Відповідь:**  $T_1 = T_2 = 7,50 \text{ кН.}$

## Задача 2.9

Дано:

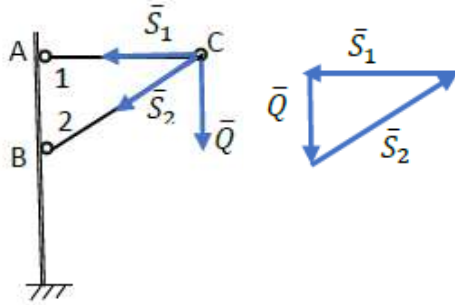
A, B, C - шарніри;

$BC=1,5$  м;

$AC=1,2$  м;

$Q=300$ Н.

Знайти:  $S_1$  -?,  $S_2$  - ?



Розглядається рівновага вузла C. Будуємо силний трикутник, починаючи з сили  $\bar{Q}$ .

$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 0,9$  м (єгипетський трикутник).

Відношення сторони до сили використовуємо співвідношення сторін в єгипетському трикутнику:

$$\frac{Q}{0,9} = \frac{S_1}{1,2}; S_1 = Q \frac{1,2}{0,9} = 400 \text{ Н (розтягання);}$$

$$\frac{Q}{0,9} = \frac{S_2}{1,5}; S_2 = Q \frac{1,5}{0,9} = -500 \text{ Н (стискання).}$$

Тому що стержні 1 і 2 розтягнуті, зусилля в них напрямлені від вузла C. З силового трикутника видно, що стержень 2 стиснутий.

**Відповідь:**  $S_1 = 400$  Н;  $S_2 = -500$  Н.

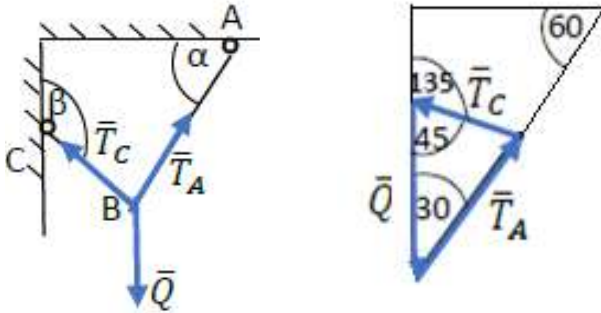
## Задача 2.10

Дано:

$Q=20\text{H};$

$\alpha=60^\circ;$

$\beta=135^\circ.$

Знайти:  $T_A$  -?,  $T_C$  - ?

Розглядається рівновага вузла  $B$ . Будуємо силувий трикутник.

Використовуємо теорему синусів:

$$\frac{Q}{\sin 105^\circ} = \frac{T_C}{\sin 30^\circ} = \frac{T_A}{\sin 45^\circ};$$

$$T_C = \frac{Q \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{20 \cdot 0,5}{\cos 15^\circ} = \frac{10}{0,965} = 10,4 \text{ H};$$

$$T_A = \frac{Q \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{20 \cdot 0,707}{\cos 15^\circ} = \frac{14,14}{0,965} = 14,6 \text{ H}.$$

Відповідь:

$$T_A = 14,6 \text{ H}, T_C = 10,4 \text{ H} (\text{обидва стержня розтягнуті}).$$

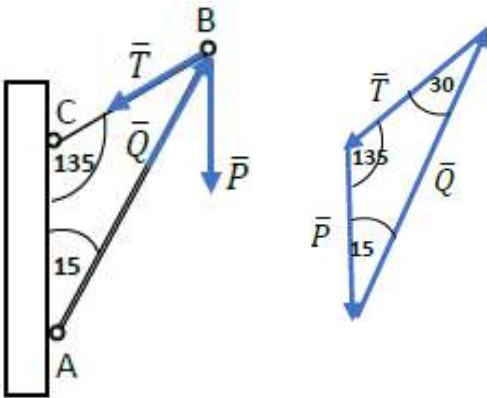
## Задача 2.11

Дано:

$$P=2,00 \text{ Н};$$

$$\angle BAC=15^\circ;$$

$$\angle ACB=135^\circ.$$

Знайти:  $T$  -?,  $Q$  - ?

За теоремою синусів

$$\frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{Q}{\sin 135^\circ} = \frac{T}{\sin 15^\circ}.$$

Зусилля в канатах напрямлені по канатам. Стержень  $AB$  стиснутий. Силовий трикутник починаємо будувати з заданої сили  $\bar{P}$ :

$$Q = \frac{P \cdot \sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2,0 \cdot 0,707}{0,5} = 2,83 \text{ кН},$$

$$T = \frac{P \cdot \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2,0 \cdot 0,26}{0,5} = 1,04 \text{ кН}.$$

Відповідь:  $Q = 2,83 \text{ кН}; T = 1,04 \text{ кН}.$

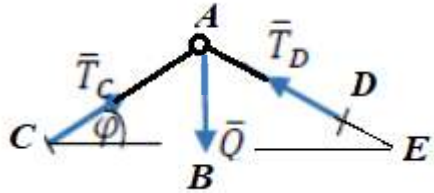
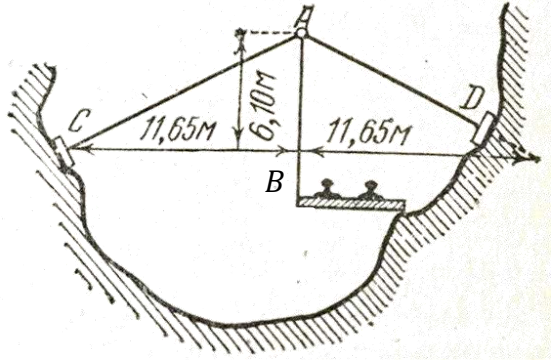
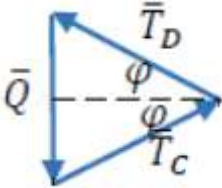
## Задача 2.12

Дано:

$$AB = 6,1 \text{ м};$$

$$CB = BE = 11,65 \text{ м};$$

$$Q = 500 \text{ кН}.$$

Знайти:  $T_C$  -?,  $T_D$  - ?

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{CB} = \frac{6,1}{11,65} = 0,523;$$

$$\varphi = 27^{\circ}40'; \sin \varphi = 0,465;$$

$$T_D = T_C = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{\sin 27^{\circ}40'} = \frac{500}{2 \cdot 0,465} = 539 \text{ кН}.$$

Відповідь:  $T_D = T_C = 539 \text{ кН}.$

### Задача 2.14

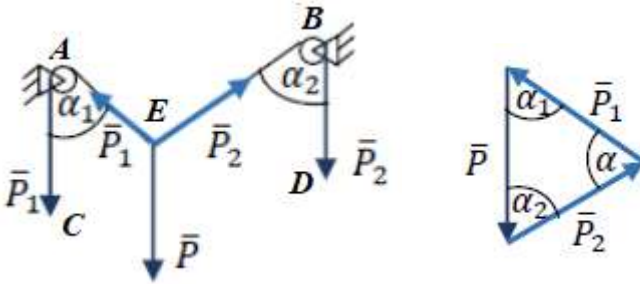
Дано:

$$P_1 = 20 \text{ Н};$$

$$P = 25 \text{ Н};$$

$$\sin \alpha_1 = 0,6.$$

Знайти:  $P_2$  -?,  $\sin \alpha_2$  - ?



Тертям в блоках  $A$  і  $B$  нехтуємо, тому зусилля в мотузці на ділянках  $CA$  і  $AE$  дорівнюють  $\bar{P}_1$ , на ділянках  $BE$  і  $BD$  дорівнюють  $\bar{P}_2$ .

$$\sin \alpha_1 = 0,6; \quad \cos \alpha_1 = 0,8.$$

$$\alpha = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2);$$

$$\sin \alpha = \sin[180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)] =$$

$$= \sin 180^\circ \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos 180^\circ \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) =$$

$$= 0,6 \cdot \cos \alpha_2 + 0,8 \cdot \sin \alpha_2.$$

Розглянемо рівновагу вузла  $E$ , де перетинаються лінії дії сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ . З силового трикутника маємо:

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{P_2}{\sin \alpha_1} = \frac{P_1}{\sin \alpha_2};$$

$$\frac{25}{0,6 \cdot \cos \alpha_2 + 0,8 \cdot \sin \alpha_2} = \frac{20}{\sin \alpha_2};$$

$$25 \cdot \sin \alpha_2 = 20 \cdot (0,6 \cdot \cos \alpha_2 + 0,8 \cdot \sin \alpha_2);$$

$$9 \cdot \sin \alpha_2 = 12 \cdot \cos \alpha_2; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{12}{9} = 1,333;$$

$$\alpha_2 = 53,1^\circ; \quad \sin \alpha_2 = 0,8;$$

$$\frac{P_2}{\sin \alpha_1} = \frac{P_1}{\sin \alpha_2}; \quad \frac{P_2}{0,6} = \frac{20}{0,8}; \quad P_2 = \frac{20 \cdot 0,6}{0,8} = 15 \text{ H.}$$

**Відповідь:**  $P_2 = 15 \text{ H}; \sin \alpha_2 = 0,8.$

### Задача 2.15

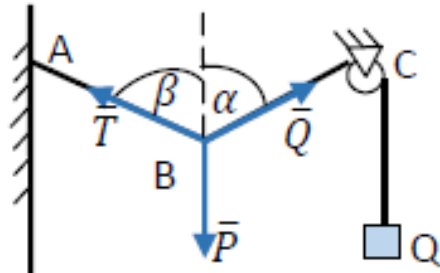
**Дано:**

$$Q = 100 \text{ H};$$

$$\alpha = 45^\circ;$$

$$\beta = 60^\circ.$$

**Знайти:**  $T$  -?;  $P$  - ?



Якщо тертям в блоці знехтувати, то це говорить о том, що на тертя не витрачаються зусилля і зусилля  $\bar{Q}$  можна перенести по ниті на  $CB$ .

Будуємо силувий трикутник та за теоремою синусів визначаємо  $P$  і  $T$ :

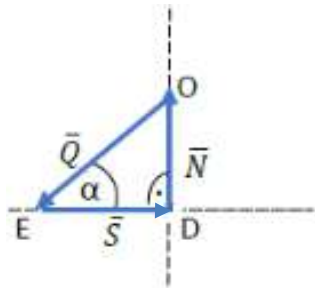
$$\sin 60^\circ = 0,866;$$

$$\sin 75^\circ = 0,966;$$

$$\sin 45^\circ = 0,707.$$

$$\frac{P}{\sin 75^\circ} = \frac{T}{\sin 60^\circ} = \frac{Q}{\sin 45^\circ};$$

$$P = \frac{Q \cdot \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 137 \text{ H}; \quad T = \frac{Q \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 122 \text{ H.}$$



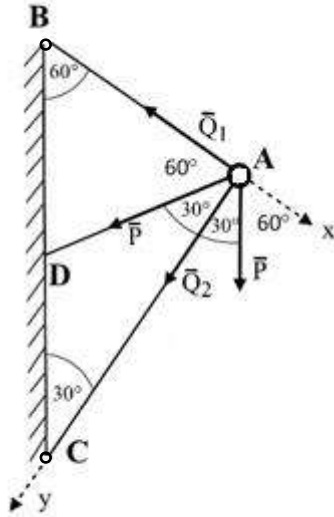
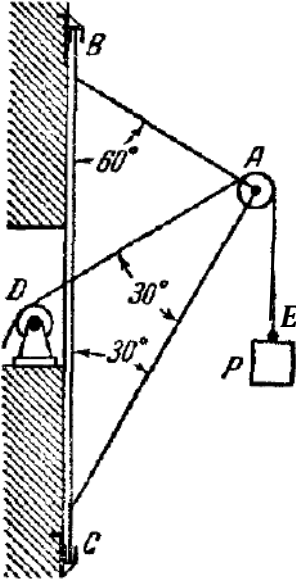
**Відповідь:**  $T = 122 \text{ H}; P = 137 \text{ H}.$

## Задача 2.16

Дано:

$$\angle CAD = 30^\circ; \angle ABC = 60^\circ; \angle ACB = 30^\circ; \angle CAB = 90^\circ;$$

$$P=20 \text{ кН.}$$

Знайти:  $Q_1$ —?,  $Q_2$ —?

Так як блок  $A$  без тертя, то в нитях  $AD$  та  $AE$  зусилля рівні.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad -Q_1 - P \cdot \cos 60^\circ + P \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad Q_1 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Q_2 + P \cdot \cos 30^\circ + P \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

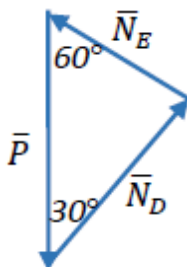
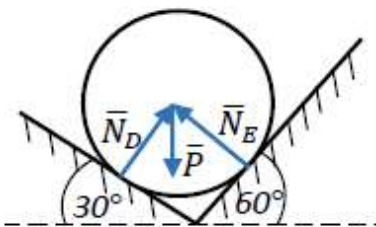
$$Q_2 = -2P \cos 30^\circ = -34,6 \text{ кН. Стержень } AC \text{ стиснутий.}$$

**Відповідь:**  $Q_1 = 0, Q_2 = -34,6 \text{ кН.}$

## Задача 2.18

Дано:

$$P=60 \text{ Н}; \alpha=30^\circ; \beta=60^\circ.$$

Знайти:  $N_E$ —?;  $N_D$ —?

$N_E$  лежить в трикутнику напротив кута  $30^\circ$ , тому

$$N_E = \frac{1}{2}P = 30 \text{ Н}.$$

$$\text{За теоремою Піфагора } N_D = \sqrt{P^2 - N_E^2} = \sqrt{2700} = 52 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $N_E = 30 \text{ Н}; N_D = 52 \text{ Н}.$

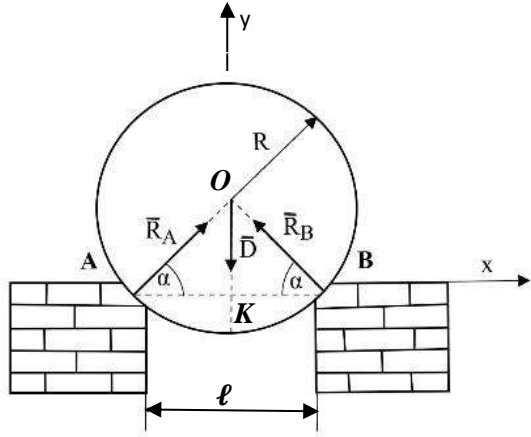
## Задача 2.23

Дано:

$P=40 \text{ кН};$

$R=1 \text{ м};$

$\ell=1,6 \text{ м}.$

Знайти:  $R_A$ —?,  $R_B$ —?Кут  $\alpha$  визначаємо з трикутника  $AOK$ :

$$\cos \alpha = \frac{0,8}{1,0} = 0,8; \quad \sin \alpha = 0,6.$$

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad R_A \cdot \cos \alpha - R_B \cdot \cos \alpha = 0; \quad R_A = R_B.$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -P + R_A \cdot \sin \alpha + R_B \sin \alpha = 0;$$

$$R_A = \frac{P}{2 \sin \alpha} = R_B.$$

$$R_A = R_B = \frac{40}{2 \cdot 0,6} = 33,3 \text{ кН}.$$

Відповідь:  $R_A = R_B = 33,3 \text{ кН}.$

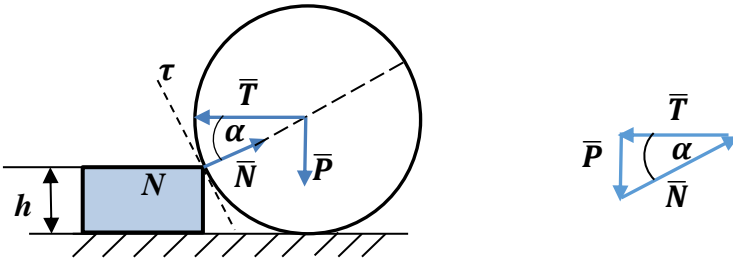
## Задача 2.24

Дано:

$P=20 \text{ Н};$

$R=60 \text{ см};$

$h=8 \text{ см}.$

Знайти:  $T$ —?

Нормаль  $\bar{N} \perp \tau$ ,  $\tau$ - дотична в т.  $N$ .

Визначаємо зусилля  $\bar{T}$  (горизонтальне) для перекочування котка через кам'яну плиту висотою  $h$ . Будуємо силувий трикутник.

Кут  $\alpha$  визначаємо з розрахункової схеми.  $T$  знаходимо з силового трикутника:

$$\sin \alpha = \frac{60 - h}{60} = \frac{52}{60} = 0,867; \quad \alpha = 60^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha = 1,732.$$

$$\frac{P}{T} = \operatorname{tg} \alpha; \quad T = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{20}{1,732} = 11,5 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $T = 11,5 \text{ кН}.$

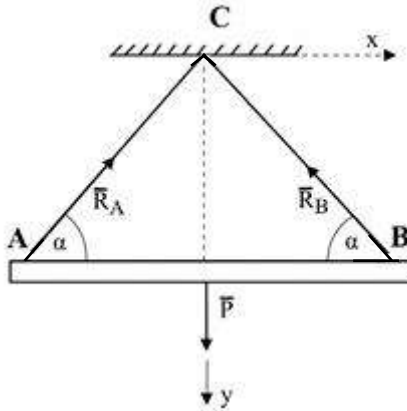
## Задача 2.25

Дано:

$$P = 160 \text{ Н};$$

$$AC = CB = 1 \text{ м (нити)};$$

$$AB = 1,2 \text{ м.}$$

Знайти:  $R_A$ —?,  $R_B$ —?Визначаємо кут  $\alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{0,6}{1,0} = 0,6;$$

$$\alpha = 53^\circ.$$

$$\sin \alpha = \sin 53^\circ = 0,798 \approx 0,8.$$

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad R_A \cdot \cos \alpha - R_B \cdot \cos \alpha = 0; \quad R_A = R_B;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad P - R_A \cdot \sin \alpha - R_B \sin \alpha = 0;$$

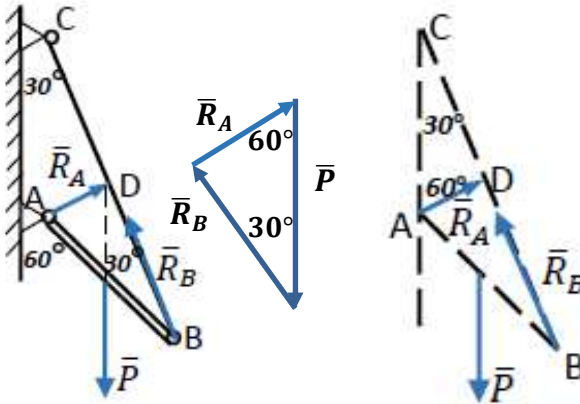
$$R_B = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{160}{2 \cdot 0,8} = \frac{160}{1,6} = 100 \text{ Н};$$

$$R_A = R_B = 100 \text{ Н.}$$

Відповідь:  $R_A = R_B = 100 \text{ Н.}$

## Задача 2.26

Дано:

 $P=20 \text{ Н.}$ Знайти:  $R_A$ —?

Використовуємо теорему о трьох непаралельних силах для визначення напрямку реакції  $\vec{R}_A$ . Так як  $AB$  знаходиться в рівновазі під дію трьох непаралельних сил  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}_B$ ,  $\vec{R}_A$ , які лежать в одній площині, то лінії їх дії перетинаються в одній точці  $D$ .

Побудова: лінія дії сили  $\vec{P}$  в трикутнику  $ACB$  є середньою лінією. Так як трикутник  $ACB$  рівнобічний, то  $R_A \perp CB$ .

$\angle ADB = 90^\circ$ ; кут між  $\vec{P}$  та  $\vec{R}_B$  дорівнює  $30^\circ$ ; кут між  $\vec{R}_A$  та  $\vec{P}$  дорівнює  $60^\circ$ .

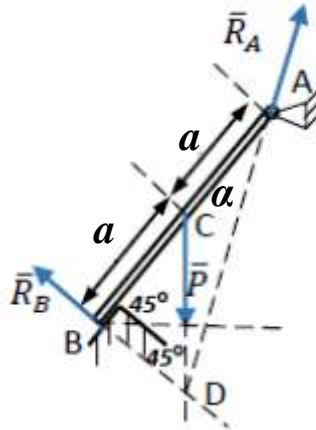
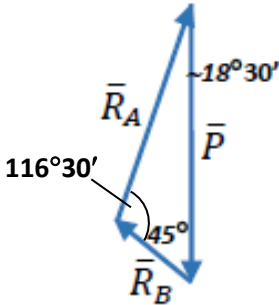
З силового трикутника:  $\vec{R}_A$  лежить навпроти кута  $30^\circ$ , тому  $R_A = \frac{1}{2}P = 1 \text{ кг.}$

**Відповідь:**  $R_A = 1 \text{ кг.}$

## Задача 2.28

Дано:

$$P=89 \text{ Н.}$$

Знайти:  $R_A$ —?,  $R_B$ —?

Перетин ліній дії  $\bar{P}$  і  $\bar{R}_B$  в точці  $D$ . За теоремою лінія дії сили  $\bar{R}_A$  проходить також через точку  $D$ .

З трикутника  $BCD$ :  $BC = BD = a$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = 0,5; \quad \alpha = 26^\circ 30'.$$

З прямокутного трикутника  $ABD$  кут  $BDA$  визначаємо наступним чином:

$$\angle BDA = 180^\circ - 90^\circ - 26^\circ 30' = 63^\circ 30'.$$

Тоді кут між  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$  дорівнює:

$$\angle CDA = \angle BDA - 45^\circ = 18^\circ 30'.$$

В силловому трикутнику кут між  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$  дорівнює  $180^\circ - 45^\circ - 18^\circ 30' = 116^\circ 30'$ .

За теоремою синусів

$$\frac{P}{\sin 116^\circ 30'} = \frac{R_B}{\sin 18^\circ 30'} = \frac{R_A}{\sin 45^\circ};$$

$$R_A = \frac{P \sin 45^\circ}{\sin 116^\circ 30'} = \frac{89 \cdot 0,707}{0,896} = 70,4 \text{ H};$$

$$R_B = \frac{P \sin 18^\circ 30'}{\sin 116^\circ 30'} = \frac{89 \cdot 0,318}{0,896} = 31,5 \text{ H};$$

**Відповідь:**  $R_A = 70,4 \text{ H}; R_B = 31,5 \text{ H}.$

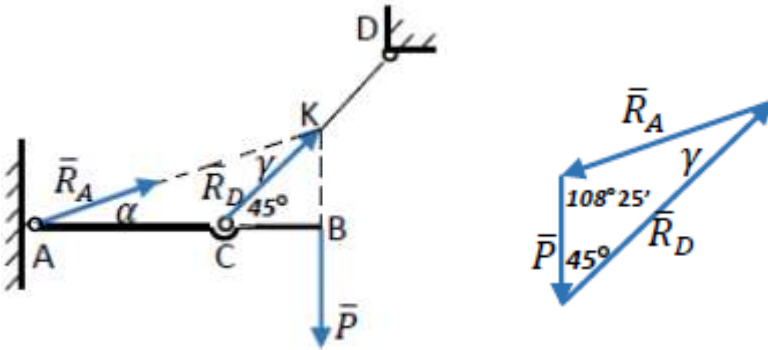
### Задача 2.29

**Дано:**

$AC=2 \text{ м}; CB=1 \text{ м};$

$P=5 \text{ кН}; \angle DCB = 45^\circ.$

**Знайти:**  $R_A$ —?  $R_D$ —?



$$\sin 108^\circ 25' = \sin 71^\circ 35' = 0,95;$$

$$\sin 26^\circ 35' = 0,446.$$

Перетин ліній дії сил  $\vec{R}_D$  і  $\vec{P}$  теж проходить через точку  $K$ .

З трикутника  $ABK$  знайдемо кут  $\alpha$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KB}{AB} = \frac{1}{3} = 0,333; \quad \alpha = 18^\circ 25'; \quad \angle KCA = 135^\circ;$$

$$\angle KAC = 18^\circ 25'; \text{ тоді } \gamma = 180^\circ - 135^\circ - 18^\circ 25' = 26^\circ 35'.$$

$$\text{Кут між } \vec{R}_A \text{ і } \vec{P}: 180^\circ - 45^\circ - 26^\circ 35' = 108^\circ 25'.$$

Із силового трикутника:

$$\frac{P}{\sin 26^\circ 35'} = \frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{R_D}{\sin 108^\circ 25'};$$

$$R_A = \frac{P \cdot \sin 45^\circ}{\sin 26^\circ 35'} = \frac{5 \cdot 0,707}{0,446} = 7,9 \text{ кН};$$

$$R_D = \frac{P \cdot \sin 108^\circ 25'}{\sin 26^\circ 35'} = \frac{5 \cdot 0,95}{0,446} = 10,6 \text{ кН};$$

**Відповідь:**  $R_A = 7,9 \text{ кН}; R_D = 10,6 \text{ кН}.$

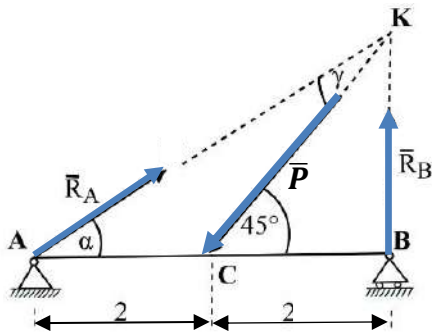
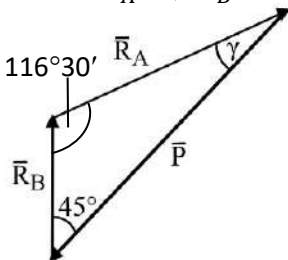
### Задача 2.30 а)

**Дано:**

$$AC = CB = 2 \text{ м};$$

$$P = 2 \text{ кН}.$$

**Знайти:**  $R_A - ?$ ,  $R_B - ?$



З побудови  $KB = 2 \text{ м}$ . З трикутника  $ABK$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KB}{AB} = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$\alpha = 26^{\circ}30';$$

$$\gamma = 180^{\circ} - 135^{\circ} - 26^{\circ}30' = 18^{\circ}30'; \quad \gamma = 18^{\circ}30'.$$

Кут між  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$  дорівнює

$$180^{\circ} - 45^{\circ} - 18^{\circ}30' = 116^{\circ}30';$$

$$\sin 116^{\circ}30' = 0,896;$$

$$\sin 18^{\circ}30' = 0,318.$$

В задачах 2.30 а) та 2.30 б) лінії дії сил  $\bar{R}_B$  і  $\bar{P}$  перетинаються у точці  $K$ , лінія дії сили  $\bar{R}_A$  теж проходить через точку  $K$  (теорема о трьох непаралельних силах).

Із силового трикутника, за теоремою синусів:

$$\frac{P}{\sin 116^{\circ}30'} = \frac{R_A}{\sin 45^{\circ}} = \frac{R_B}{\sin 18^{\circ}30'};$$

$$R_A = \frac{P \cdot \sin 45^{\circ}}{\sin 116^{\circ}30'} = \frac{2 \cdot 0,707}{0,896} = 1,58 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{P \cdot \sin 18^{\circ}30'}{\sin 116^{\circ}30'} = \frac{2 \cdot 0,318}{0,896} = 0,71 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_A = 1,58 \text{ кН}; R_D = 0,71 \text{ кН}.$

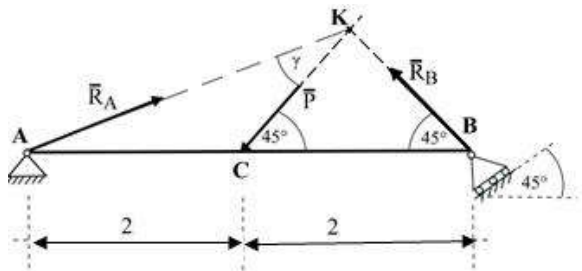
### Задача 2.30 б)

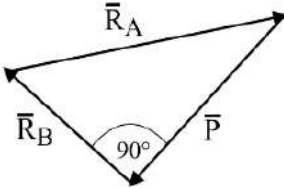
**Дано:**

$$AC = CB = 2 \text{ м};$$

$$P = 2 \text{ кН}.$$

**Знайти:**  $R_A - ?$   $R_B - ?$





З трикутника  $CBK$ :  $KC = \sqrt{2}$ .  
З трикутника  $AKC$ :

$$\frac{2}{\sin \gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\sin [180^\circ - (135^\circ + \gamma)]}; \quad \frac{2}{\sin \gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\sin (45^\circ - \gamma)};$$

$$\sin(45^\circ - \gamma) = \sin 45^\circ \cdot \cos \gamma - \cos 45^\circ \cdot \sin \gamma =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \gamma - \sin \gamma); \quad \frac{2}{\sin \gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \gamma - \sin \gamma)};$$

$$\cos \gamma - \sin \gamma = \sin \gamma; \quad \sin \gamma = \frac{1}{2} \cos \gamma; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2}.$$

Із силового трикутника

$$R_B = P \operatorname{tg} \gamma = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ кН}; \quad R_A = \sqrt{P^2 + R_B^2} = \sqrt{5} = 2,24 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_A = 2,24 \text{ кН}$ ;  $R_B = 1 \text{ кН}$ .

### Задача 2.31 а)

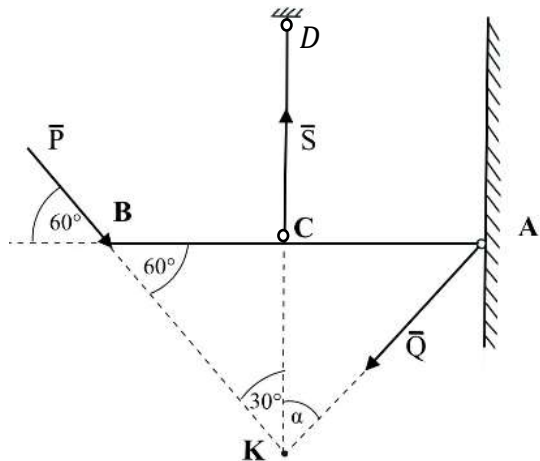
**Дано:**

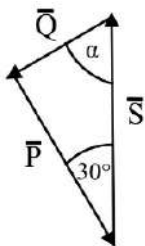
$$CA = 2 \text{ м};$$

$$BC = 1 \text{ м};$$

$$P = 30 \text{ кН}.$$

**Знайти:**  $S$ —?  $Q$ —?





$KB = 2BC = 2$  м, (сторона напротив кута  $30^\circ$ );

$$KC = \sqrt{KB^2 - CB^2} = \sqrt{3} \text{ м};$$

$\alpha = \angle CKA = ?$  – кут між  $\vec{S}$  та  $\vec{Q}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CK} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155; \alpha = 49^\circ.$$

Кут між  $\vec{Q}$  та  $\vec{P}$ :  $180^\circ - 49^\circ - 30^\circ = 101^\circ$ ;

$$\sin 101^\circ = \sin 79^\circ = 0,98;$$

$$\sin 49^\circ = 0,755.$$

З силового трикутника:

$$\frac{P}{\sin 49^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ} = \frac{S}{\sin 101^\circ};$$

$$Q = \frac{P \cdot \sin 30^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{30 \cdot 0,5}{0,755} = 19,8 \text{ кН};$$

$$S = \frac{P \cdot \sin 101^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{30 \cdot 0,98}{0,755} = 39,0 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $Q = 19,8$  кН,  $S = 39,0$  кН.

### Задача 2.31 б)

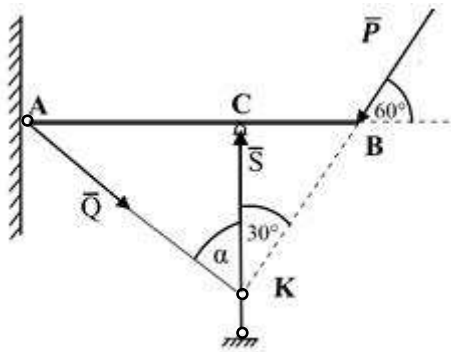
**Дано:**

$$CA = 2 \text{ м};$$

$$BC = 1 \text{ м};$$

$$P = 30 \text{ кН}.$$

**Знайти:**  $S$ –?,  $Q$ –?



$$KB = 2BC = 2 \text{ м};$$

$$KC = \sqrt{KB^2 - CB^2} = \sqrt{3} \text{ м};$$

$\alpha = \angle CKA = ?$  – кут між  $\bar{S}$  та  $\bar{Q}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CK} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155; \alpha = 49^\circ.$$

Кут між  $\bar{Q}$  та  $\bar{P}$ :  $180^\circ - 49^\circ - 30^\circ = 101^\circ$ .

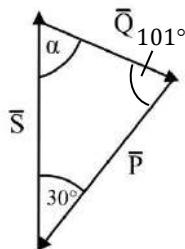
З силового трикутника:

$$\frac{P}{\sin 49^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ} = \frac{S}{\sin 101^\circ};$$

$$Q = \frac{P \cdot \sin 30^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{30 \cdot 0,5}{0,755} = 19,8 \text{ кН},$$

$$S = \frac{P \cdot \sin 101^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{30 \cdot 0,98}{0,755} = 39,0 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $Q = 19,8 \text{ кН}, S = 39,0 \text{ кН}.$



### Задача 2.33

**Дано:**

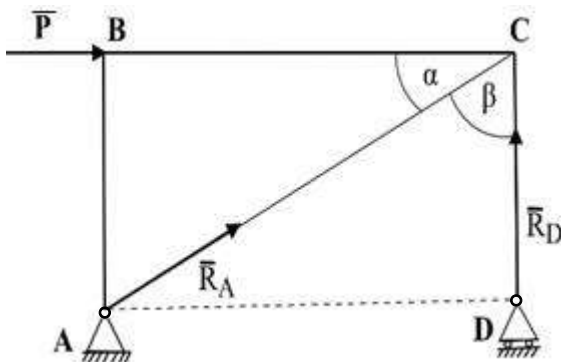
$$BC = 2a;$$

$$CD = AB = a;$$

$$P = 30 \text{ кН}.$$

**Знайти:**  $R_A$ —?,

$R_D$ —?



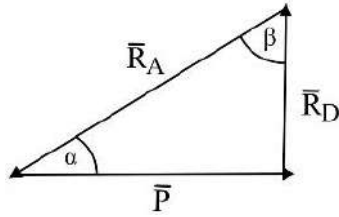
I. Графічне рішення

Сила  $\bar{R}_A$  напрямлена в іншу сторону (це видно з силового трикутника).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2a} = 0,5; \quad \alpha = 26^\circ 30'.$$

$$R_D = P \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,5P.$$

$$R_A = \sqrt{P^2 + R_D^2} = \sqrt{P^2 + \frac{P^2}{4}} = \frac{P\sqrt{5}}{2} = 1,12P.$$

II. Аналітичне рішення

Складемо рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил:

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -P \cdot a + R_D \cdot 2a = 0 \rightarrow R_D = \frac{1}{2}P = 0,5P;$$

$$\sum M_{Di} = 0; \quad -P \cdot a + R_A \sin \alpha \cdot 2a = 0;$$

$$R_A = \frac{-P}{2 \sin \alpha} = -\frac{P}{2 \sin 26^\circ 30'} = \frac{-P}{0,892} = -1,12P.$$

III. Ще одне аналітичне рішення.

Складемо рівняння рівноваги для плоскої системи збіжних сил:

$$\sum X_i = 0; \quad P + R_A \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$R_A = -\frac{P}{\cos 26^\circ 30'} = -\frac{P}{0,892} = -1,12P;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_B + R_A \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$R_B = -R_A \cdot \sin \alpha = \frac{P \cdot 0,446}{0,892} = \frac{P}{2}.$$

**Відповідь:**

$$R_A = -1,12P; \quad R_B = \frac{P}{2}.$$

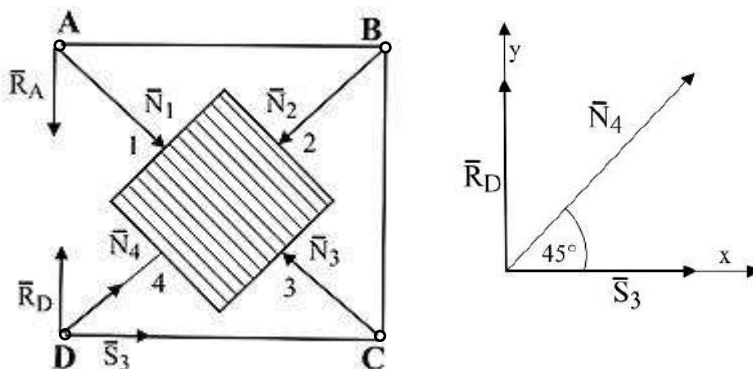
### Задача 2.36

**Дано:**

$$R_A = R_D = 50 \text{ кН.}$$

**Знайти:**  $N_1, N_2, N_3, N_4$ —?

$S_1, S_2, S_3$ —? (зусилля в стержнях  $AB, BC, CD$ ).



Розглянемо тільки один вузол  $D$  (тіло знаходиться в рівновазі, якщо відкинути зв'язки та їх дію замінити реакціями). Складаємо для нього рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad S_3 + N_4 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_D + N_4 \cdot \sin 45^\circ = 0;$$

$$N_4 = -\frac{R_D}{\cos 45^\circ} = \frac{-50 \cdot 2}{\sqrt{2}} = -70,7 \text{ кН;}$$

$$S_3 = -N_4 \cdot \cos 45^\circ = 70,7 \cdot 0,707 = 50 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**

$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -70,7$  кН; (стержні 1, 2, 3, 4 – стиснуті);

$S_1 = S_2 = S_3 = 50$  кН; (стержні  $AB, BC, CD$  – розтягнуті).

*Для нотаток*

*Для нотаток*

*Для нотаток*

## 2.2 Сили паралельні та пари сил

**2.2.1 Рівновага плоскої системи пар сил.** Для рівноваги плоскої системи пар сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів складових пар дорівнювала нулю:

$$\sum m_i = 0.$$

**2.2.2 Рівновага плоскої системи паралельних сил.** Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій сил системи на вісь, паралельну до їх дій, а також сума моментів усіх сил системи відносно довільної точки площини їх дії дорівнювали нулю.

Основні умови рівноваги плоскої системи паралельних сил:

$$\sum Y_i = 0; \sum M_O(\bar{F}_i) = 0,$$

де всі сили  $\bar{F}_i$  паралельні до осі  $Oy$  ( $\bar{F}_i \parallel Oy$ ).

Еквівалентні умови рівноваги плоскої системи паралельних сил:

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad (\bar{F}_i \parallel Oy),$$

де точки  $A$  і  $B$  не повинні лежати на прямій, паралельній до осі  $Oy$ .

**Рівнодіюча двох паралельних сил, діючих на абсолютно тверде тіло, які спрямовані в одну сторону, дорівнює за модулем сумі модулів даних сил, паралельна їм та спрямована в ту ж сторону.**

**Лінія дії рівнодіючої проходить між точками прикладання сил, що складаються, на відстанях зворотно-пропорційних силам.**

**Рівнодіюча** двох паралельних сил не однакою за модулем, які діють на абсолютно тверде тіло, та спрямовані в різні сторони, дорівнює по модулю різниці модулів сил, які додаються, їм паралельна та спрямована у бік більшої сили.

Лінія дії рівнодіючої проходить за межами відрізка, який з'єднує точки прикладання сил, які додаємо, на відстанях зворотно-пропорційних силам.

### Приклад 2.1

Знайти центр двох паралельних сил, спрямованих в один бік, якщо дано:

**Дано:**

$$F_1 = 4 \text{ кг};$$

$$F_2 = 1 \text{ кг};$$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$  – спрямовані в один бік;

$$AB = 6 \text{ м.}$$

**Знайти:**  $AC$ –?,  $BC$ –?

$$R = F_1 + F_2;$$

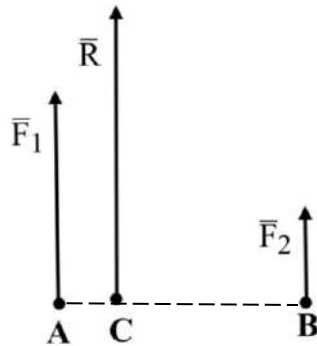
$$\frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{F_1}; \quad AC + BC = 6;$$

$$AC = 6 - BC;$$

$$\frac{6 - BC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}; \quad BC = 4,8 \text{ м};$$

$$AC = 1,2 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $BC = 4,8 \text{ м}; \quad AC = 1,2 \text{ м.}$



## Приклад 2.2

Знайти центр двох паралельних сил, спрямованих в різні боки, якщо дано:

**Дано:**

$$F_1 = 4 \text{ кг};$$

$$F_2 = 1 \text{ кг};$$

$$AB = 6 \text{ м.}$$

**Знайти:**  $AC$ —?;  $BC$ —?

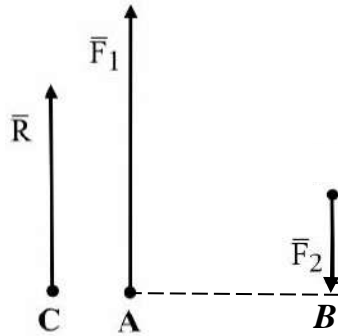
$$R = F_1 - F_2;$$

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R};$$

$$AC = \frac{F_2 \cdot AB}{R} = \frac{1 \cdot 6}{3} = 2 \text{ м};$$

$$BC = \frac{F_1 \cdot AB}{R} = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $BC = 8 \text{ м}; AC = 2 \text{ м.}$



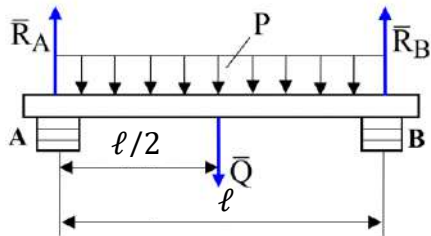
## Задача 3.1

**Дано:**

$$q, \text{ Н/м};$$

$$\ell, \text{ м.}$$

**Знайти:**  $R_A$ —?,  $R_B$ —?



Рівнодіюча рівномірно розподіленого навантаження з інтенсивністю  $q$  дорівнює  $Q = q \cdot \ell$ . Вага балки включена в зовнішнє навантаження. Сили, які діють на балку, паралельні. Рівняння рівноваги:

$$\sum M_{Ai} = -Q \frac{\ell}{2} + R_B \cdot \ell = 0; R_B = \frac{Q}{2} = \frac{q\ell}{2};$$

$$\sum M_{Bi} = Q \frac{\ell}{2} - R_A \cdot \ell = 0; R_A = \frac{Q}{2} = \frac{q\ell}{2}.$$

**Відповідь:**

$$R_A = \frac{q\ell}{2}; R_B = \frac{q\ell}{2}.$$

### Задача 3.3

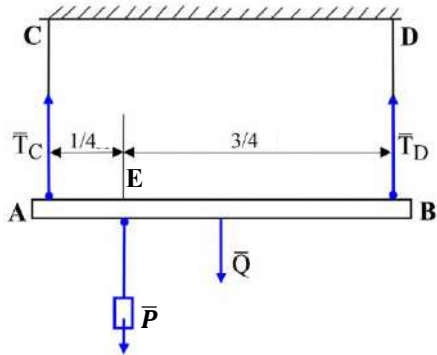
**Дано:**

$$AB = 1 \text{ м};$$

$$AE = \frac{1}{4} \text{ м};$$

$$Q = 20 \text{ Н} - \text{вага } AB;$$

$$P = 120 \text{ Н}.$$



**Знайти:**  $T_C$  —?,  $T_D$  — ?

Користуємось

еквівалентною умовою

рівноваги:

$$1) \sum M_{Bi} = -T_C \cdot 1 + P \cdot \frac{3}{4} + Q \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Тоді

$$T_C = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}Q = 120 \cdot \frac{3}{4} + 20 \cdot \frac{1}{2} = 100 \text{ Н}.$$

$$2) \sum M_{Ai} = T_D \cdot 1 - P \cdot \frac{1}{4} - Q \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Тоді

$$T_D = \frac{1}{4}P + \frac{1}{2}Q = 120 \cdot \frac{1}{4} + 20 \cdot \frac{1}{2} = 40 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $T_C = 100 \text{ Н}, T_D = 40 \text{ Н}.$

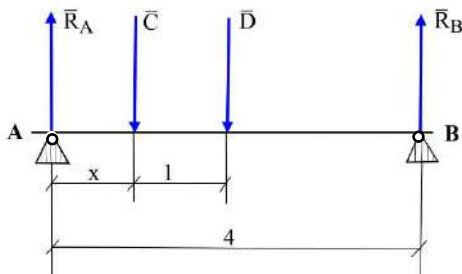
## Задача 3.4

Дано:

$$C = 2,0 \text{ кН};$$

$$D = 1,0 \text{ кН};$$

$$R_A = 2 R_B.$$

Знайти:  $x$ —?

$$R_A + R_B = C + D \quad (\text{з } \sum Y_k = 0)$$

Рівняння рівноваги:

$$\sum M_{Ai} = -Cx - D(x+1) + 4R_B = 0.$$

$$\sum M_{Bi} = D[4 - (x+1)] + C(4-x) - 4R_A = 0.$$

Використовуємо умову  $R_A = 2R_B$ :

$$2 \cdot [-Cx - D(x+1) + 8R_B = 0;$$

$$|C(-x+4) + D[4 - (x+1)] - 8R_B = 0;$$

Перше рівняння помножимо на 2 та складемо з другим.

$$-2Cx + C(4-x) - 2D(x+1) + D[4 - (x+1)] = 0;$$

$$-2Cx - 4Cx - Cx - 2Dx - 2D + 4D - Dx - D = 0;$$

$$-3Cx - 3Dx = -4C - D;$$

$$x = \frac{4C + D}{3C + 3D} = \frac{8,0 + 1,0}{6,0 + 3,0} = 1 \text{ м.}$$

Відповідь:  $x = 1 \text{ м.}$ 

## Задача 3.5

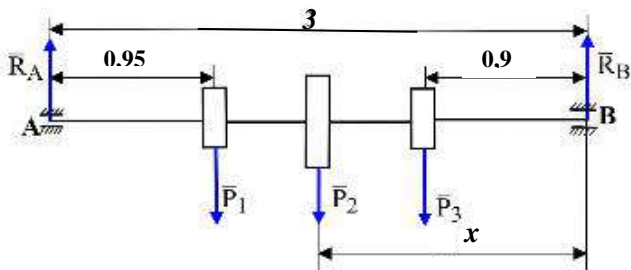
Дано:

$$P_1 = 3,0 \text{ кН};$$

$$P_2 = 5,0 \text{ кН};$$

$$P_3 = 2,0 \text{ кН};$$

$$R_A = R_B.$$

Знайти:  $x$ —?

Вагою вала знехтувати.

Еквівалентні умови рівноваги:

$$\sum M_{Bi} = -3 \cdot R_A + 0,95 \cdot P_3 + x \cdot P_2 + 2,05 \cdot P_1 = 0. \quad (A)$$

$$\sum M_{Ai} = 3 \cdot R_B - 2,05 \cdot P_3 - (3,0 - x) \cdot P_2 - 0,95 \cdot P_1 = 0. \quad (B)$$

Додамо (A) і (B), враховуючи, що  $R_A = R_B$ .

$$-1,1 \cdot P_3 - 3 \cdot P_2 + 2x \cdot P_2 + 1,1 \cdot P_1 = 0.$$

$$-2,2 - 15,0 + 10,0 \cdot x + 3,3 = 0;$$

$$-17,2 + 10,0 \cdot x + 3,3 = 0.$$

$$x = 1,39 \text{ м} = 139 \text{ см}.$$

**Відповідь:**  $x = 139 \text{ см}$ .

### Задача 3.7

**Дано:**

$$AB = 10 \text{ м} = \ell;$$

$$DB = 3 \text{ м}; AC = 2 \text{ м};$$

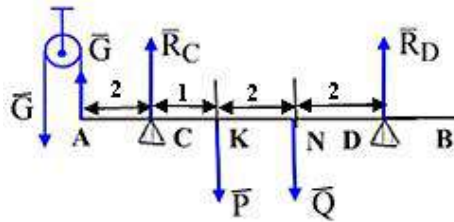
$$AK = 3 \text{ м}; CD = 5 \text{ м};$$

$$ND = 2 \text{ м}; KN = 2 \text{ м};$$

$$Q = 2,0 \text{ кН};$$

$$G = 3,0 \text{ кН};$$

$$P = 8,0 \text{ кН}.$$



**Знайти:**  $R_C$ —?,  $R_D$ —?

(Блок E – без тертя, тому зусилля  $\bar{G}$  перенесемо по ниті в т. A.)

Рівняння рівноваги:

$$\sum M_{Ci} = -G \cdot 2 - P \cdot 1 - Q \cdot 3 + R_D \cdot 5 = 0;$$

$$\sum M_{Di} = Q \cdot 2 + P \cdot 4 - G \cdot 7 - R_C \cdot 5 = 0;$$

$$5R_D = 3,0 \cdot 2 + 8,0 \cdot 1 + 2,0 \cdot 3 = 20,0;$$

$$R_D = \frac{20,0}{5} = 4,0 \text{ кН};$$

$$5R_C = 2,0 \cdot 2 + 8,0 \cdot 4 - 3,0 \cdot 7 = 15,0;$$

$$R_C = \frac{15,0}{5} = 3,0 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_D = 4,0 \text{ кН}; R_C = 3,0 \text{ кН}$ .

## Задача 3.8

Дано:

$Q = 100 \text{ Н}$  (вага  $AB$ );

$F = 500 \text{ Н}$ ;

$P = 150 \text{ Н}$ ;

$\ell = 20 \text{ см}$ .

Знайти:  $x$ —?

(Блок  $C$  – без тертя, тому силу  $\bar{P}$  перенесемо в т.  $B$ .)

Якщо стержень  $AB$  знаходиться в

рівновазі під дією даної системи сил, то повинно виконуватися рівняння рівноваги  $\sum M_{Ai} = 0$ :

$$\sum M_{Ai} = P \cdot x - Q \frac{x}{2} - F(x - 20) = 0.$$

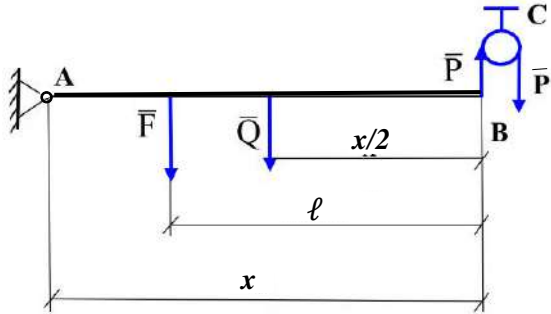
З цього рівняння визначаємо довжину  $AB = x$ :

$$Px - \frac{Qx}{2} - Fx + 20F = 0;$$

$$-x \left( \frac{Q}{2} + F - P \right) = -20F;$$

$$x = \frac{20F}{\frac{Q}{2} + F - P} = \frac{10000}{50 - 150 + 500} = 25 \text{ см}.$$

**Відповідь:** довжина балки  $AB = x = 25 \text{ см}$ .



### Задача 3.12

Дано:

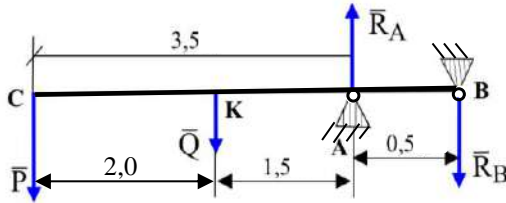
$$KA = 1,5 \text{ м};$$

$$KC = 2 \text{ м};$$

$$AB = 0,5 \text{ м};$$

$$Q = 5 \text{ кН};$$

$$P = 40 \text{ кН}.$$



Знайти:  $R_A$ —?,  $R_B$ —?

Рівняння рівноваги:

$$\sum M_{Ai} = P \cdot 3,5 + Q \cdot 1,5 - R_B \cdot 0,5 = 0;$$

$$R_B = \frac{3,5P + 1,5Q}{0,5} = 295 \text{ кН};$$

$$\sum M_{Bi} = -R_A \cdot 0,5 + Q \cdot 2 + P \cdot 4 = 0;$$

$$R_A = \frac{2Q + 4P}{0,5} = 340 \text{ кН}.$$

Відповідь:  $R_A = 340 \text{ кН}; R_B = 295 \text{ кН}.$

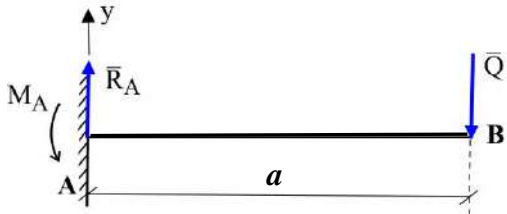
### Задача 3.13

Дано:

$$a = 0,75 \text{ м};$$

$$Q = 1,2 \text{ кН}.$$

Знайти:  $M_A$ —?;  $R_A$ —?



Так як до балки АВ прикладена одна активна вертикальна сила  $\bar{Q}$ , то в защемленні А горизонтальної реакції немає. Є тільки  $M_A$ ,  $\bar{R}_A$ . Використовуємо основну форму рівноваги:

$$1) \sum Y_i = R_A - Q = 0; \quad R_A = Q = 1,2 \text{ кН};$$

$$2) \sum M_{Ai} = M_A - Q \cdot a = 0; \quad M_A = Q \cdot a;$$

$$M_A = 1,2 \cdot 0,75 = 0,90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Відповідь:  $R_A = 1,2 \text{ кН}, M_A = 0,90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

## Задача 3.14

Дано:

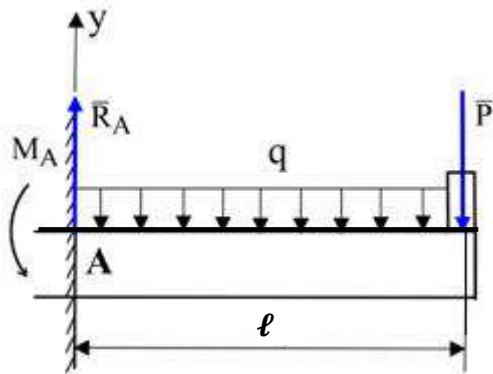
$$q = 2,0 \text{ кН/м};$$

$$P = 2,0 \text{ кН};$$

$$\ell = 1,5 \text{ м.}$$

Знайти:  $M_A$ —?;  $R_A$ —?

В защемленні А горизонтальна складова дорівнює нулю (див. задачу 3.13). Запишемо основні умови рівноваги плоскої системи паралельних сил:



$$\sum M_{Ai} = -P \cdot \ell - q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} + M_A = 0;$$

$$M_A = P \cdot \ell + \frac{q\ell^2}{2} = 3,0 + 2,25 = 5,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum Y_i = -P - q \cdot \ell + R_A = 0;$$

$$R_A = P + q \cdot \ell = 2,0 + 3,0 = 5,0 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $R_A = 5,0 \text{ кН}$ ,  $M_A = 5,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

### Задача 3.15

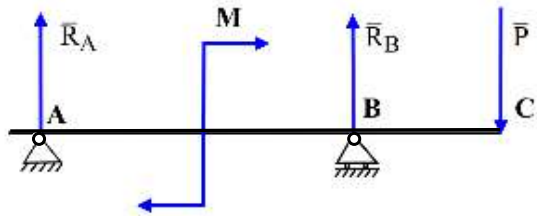
Дано:

$$M = 6,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$P = 2,0 \text{ кН};$$

$$AB = 3,5 \text{ м};$$

$$BC = 0,5 \text{ м}.$$



Знайти:  $R_A$ —?;  $R_B$ —?

Використовуємо еквівалентні умови рівноваги:

$$\sum M_{Bi} = -R_A \cdot 3,5 - P \cdot 0,5 - M = 0;$$

$$R_A = -\frac{M + P \cdot 0,5}{3,5} = -\frac{6 + 1}{3,5} = -2 \text{ кН. Напрямок вниз.}$$

$$\sum M_{Ai} = -M + R_B \cdot 3,5 - P \cdot 4,0 = 0;$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 4,0}{3,5} = \frac{6 + 8}{3,5} = 4,0 \text{ кН. Напрямок вверх.}$$

Відповідь:  $R_A = -2,0 \text{ кН}, R_B = 4,0 \text{ кН}.$

### Задача 3.16

Дано:

$$Q = 2,0 \text{ кН};$$

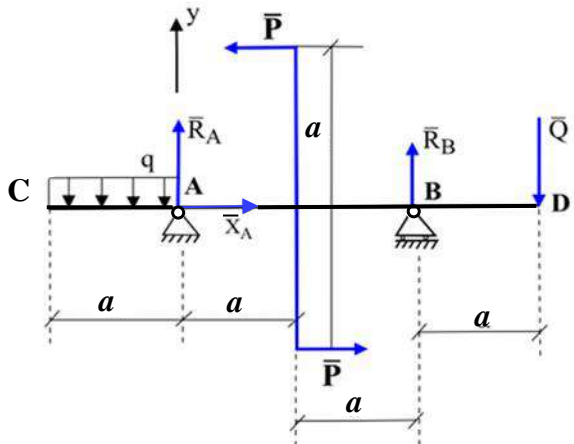
$$P = 1,0 \text{ кН};$$

$$q = 2,0 \text{ кН/м};$$

$$a = 0,8 \text{ м}.$$

Знайти:  $R_A$ —?;

$R_B$ —?



Так як пара сил  $(\bar{P}, \bar{P})$  не може надати горизонтальне переміщення, то рівняння 1) можна не писати,  $X_A$  відсутнє.

$$\sum X_i = X_A = 0;$$

$$\sum Y_i = -q \cdot a + R_A + R_B - Q = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = \frac{qa^2}{2} + R_B \cdot 2a - Q \cdot 3a + P \cdot a = 0;$$

$$2R_B = 2 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 0,8}{2} - 1 = 4,2; \quad R_B = 2,1 \text{ кН.}$$

$$R_A = 2 + 1,6 - 2,1 = 1,5 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $R_A = 1,5 \text{ кН}, R_B = 2,1 \text{ кН}.$

### Задача 3.17

**Дано:**

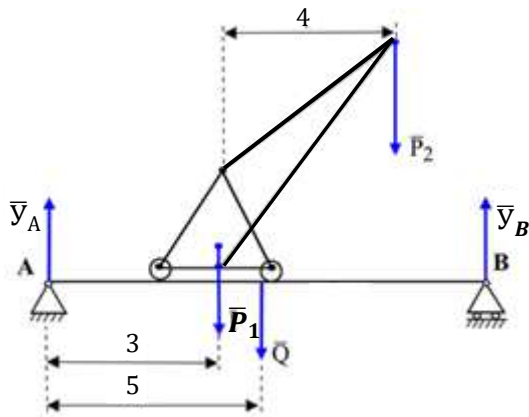
$Q = 30 \text{ кН};$  (вага  $AB$ );

$P_1 = 50 \text{ кН};$

$P_2 = 10 \text{ кН};$

$AB = 10 \text{ м.}$

**Знайти:**  $Y_A$ —?;  $Y_B$ —?;  $X_A$ —?



Так як усі сили паралельні осі  $Ay$ , то горизонтальна складова реакцій відсутня,  $X_A = 0$ .

Рівняння рівноваги:

$$\sum M_{Ai} = Y_B \cdot 10 - P_2 \cdot 7 - P_1 \cdot 3 - Q \cdot 5 = 0;$$

$$Y_B = \frac{10 \cdot 7 + 50 \cdot 3 + 30 \cdot 5}{10} = \frac{370}{10} = 37 \text{ кН.}$$

$$\sum M_{Bi} = -Y_A \cdot 10 + P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 7 + Q \cdot 5 = 0;$$

$$Y_A = \frac{50 \cdot 7 + 10 \cdot 3 + 30 \cdot 5}{10} = \frac{530}{10} = 53 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $Y_A = 53 \text{ кН}$ ;  $Y_B = 37 \text{ кН}$ ;  $X_A = 0$ .

### Задача 3.21

**Дано:**

$$q = 11 \text{ атм} \left( 1 \text{ атм} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right) = 1100 \text{ кПа};$$

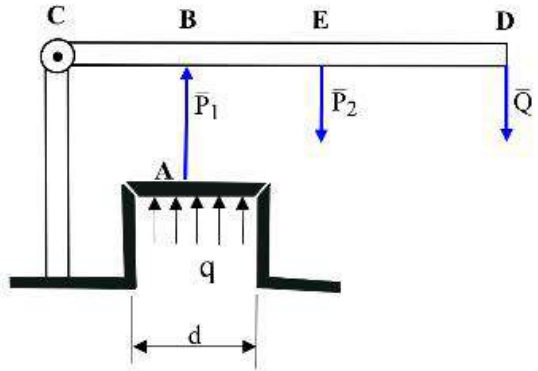
$$d = 6 \text{ см};$$

$$P_2 = 10 \text{ кН};$$

$$CD = 50 \text{ см}; CB = 7 \text{ см};$$

$$CE = 25 \text{ см}.$$

**Знайти:**  $Q$ —?



Тиск на клапан  $A$  визначаємо наступним чином:

$$S_A = \frac{\pi d^2}{4} - \text{площа клапану } A;$$

$$P_1 = S_A \cdot q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot q = \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} \cdot 11 = 99\pi \text{ кГ} = 990\pi \text{ Н};$$

$$\sum M_{Ci} = P_1 \cdot 7 - P_2 \cdot 25 - Q \cdot 50 = 0;$$

$$Q = \frac{P_1 \cdot 7 - P_2 \cdot 25}{50} = \frac{990\pi \cdot 7 - 10 \cdot 25}{50} = \frac{21750 - 250}{50};$$

$$Q = 430 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $Q = 430 \text{ кН.}$

*Для нотаток*

*Для нотаток*

*Для нотаток*

### 2.3 Довільна плоска система сил

Для того, щоб тверде тіло знаходилося в рівновазі під дією довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб виконувалися рівняння:

$$\left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_{A_i} = 0; \end{array} \right\} \text{основна I-а форма рівнянь рівноваги.}$$

Еквівалентні форми умов рівноваги:

$$\left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum M_{A_i} = 0; \\ \sum M_{B_i} = 0; \end{array} \right\} \text{II-а форма рівнянь рівноваги.}$$

Пряма  $AB$  не  $\perp$  до  $Ox$ . ( $AB \not\perp x$ )

#### Теорема про три моменти.

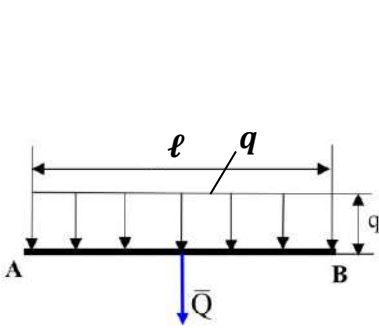
Для того, щоб тверде тіло знаходилося в рівновазі під дією довільної плоскої системи сил, необхідно та достатньо, щоб для трьох точок  $A, B, C$ , які не лежать на одній прямій, сума моментів усіх сил дорівнювала нулю.

$$\left. \begin{array}{l} \sum M_{A_i} = 0; \\ \sum M_{B_i} = 0; \\ \sum M_{C_i} = 0; \end{array} \right\} \text{III-я форма рівнянь рівноваги. Точки } A, B, C$$

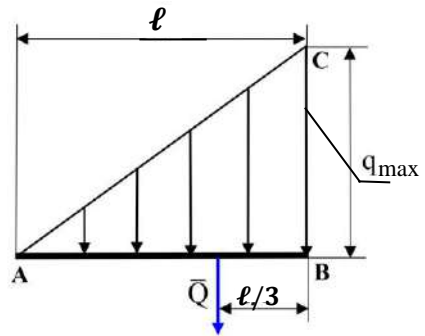
не повинні лежати на одній прямій.

#### Розподілені навантаження.

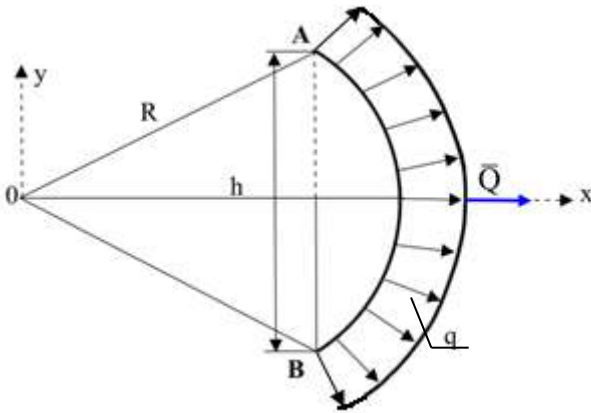
Приклади розподілених сил інтенсивністю  $q$ , що лежать в одній площині.



a)



б)



в)

а) Сили рівномірно розподілені вздовж відрізка прямої  $AB$ . Рівнодійна цієї системи дорівнює  $Q = q \cdot \ell$ . Сила  $\bar{Q}$  прикладена посередині відрізка  $AB$ .

б) Сили розподілені вздовж відрізка прямої за лінійним законом. Рівнодійна за модулем дорівнює:

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot \ell.$$

Прикладена сила  $\bar{Q}$  на відстані  $\ell/3$  від сторони  $BC$ .

в) Сили, рівномірно розподілені по дузі кола радіусом  $R$ . Рівнодійна такої системи за модулем буде дорівнювати:

$$Q = q \cdot h.$$

Лежить сила  $\bar{Q}$  на осі симетрії дуги  $AB$ , на осі  $x$ .

### Задача 4.1

**Дано:**

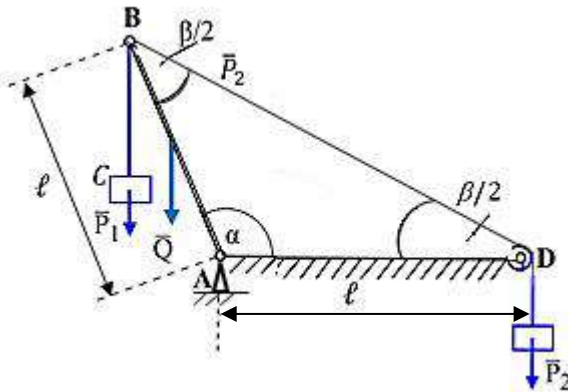
$Q = 20$  Н; (вага стержня  $AB$ );

$P_1 = 10$  Н; (вага гирі  $C$ );

$P_2 = 20$  Н;

$AB = AD$ .

**Знайти:**  $\alpha$ —? (при рівновазі)



Силу  $\bar{P}_2$  переносимо в т.  $B$ , так як блок  $B$  без тертя.

Кут  $\alpha$  визначимо з умови рівноваги  $\sum M_{A_i} = 0$ :

$$P_1 \cdot l \cdot \cos\beta + Q \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\beta - P_2 \cdot l \cdot \sin\frac{\beta}{2} = 0, \quad (1)$$

Скоротимо на  $l$  та  $P_1 = 10$  Н;

$\alpha + \beta = 180^\circ$ ; тому  $\angle ABD = \angle ADB = \frac{\beta}{2}$ , так як трикутник

$ABD$  рівнобічний.

З (1) маємо, підставив дані

$$\cos\beta + \cos\beta - 2\sin\frac{\beta}{2} = 0;$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}};$$

$$2\cos^2\beta + \cos\beta - 1 = 0;$$

$$\cos\beta_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}; \cos\beta_1 = -1; \cos\beta_2 = \frac{1}{2};$$

$$\beta_2 = 60^\circ; \alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

**Відповідь:**  $\alpha = 120^\circ$ .

#### Задача 4.2

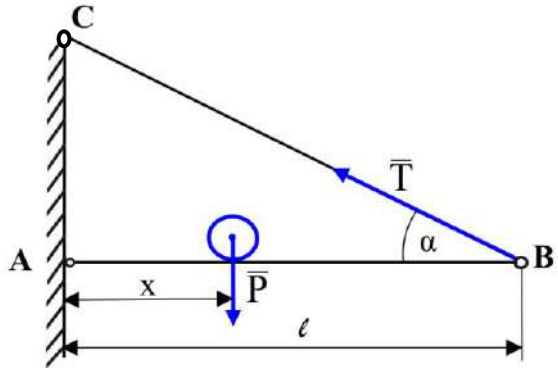
**Дано:**

$$AB = \ell;$$

$$P_{AB} = 0;$$

$$P, \ell, \alpha.$$

**Знайти:**  $T = T(x)$ —?



Натяг  $\bar{T}$  в тязі BC визначаємо з умови рівноваги:

$$\sum M_{A_i} = -P \cdot x + T \cdot \ell \cdot \sin \alpha = 0; \text{ звідси } T \cdot \ell \cdot \sin \alpha = P \cdot x;$$

$$T = \frac{P \cdot x}{\ell \cdot \sin \alpha} = T(x).$$

**Відповідь:**

$$T(x) = \frac{P \cdot x}{\ell \cdot \sin \alpha}.$$

## Задача 4.6

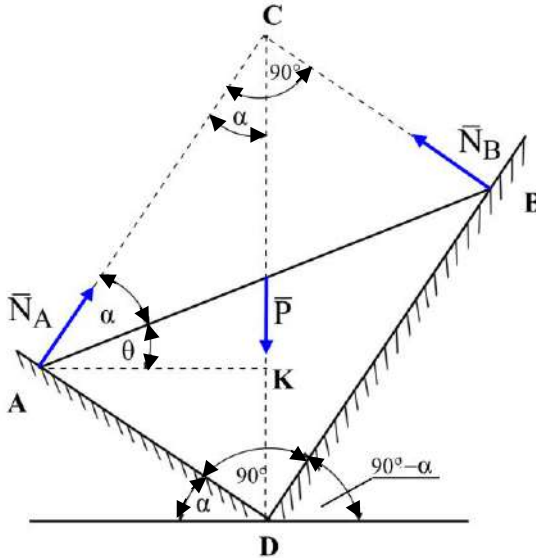
Дано:

$P$  – вага  $AB$ ;

$P, \ell$ , гладка поверхня.

Знайти:  $\angle \theta$  –? - кут рівноваги.

В положенні рівноваги лінії дії сил  $\bar{N}_A, \bar{N}_B, \bar{P}$  перетинаються в т.  $C$  (теорема о трьох  $\nparallel$  силах).



а) Аналітичне рішення

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum M_{A_i} = -P \cdot \frac{\ell}{2} \cos \theta + N_B \cdot \ell \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum M_{B_i} = P \cdot \frac{\ell}{2} \cos \theta - N_A \cdot \ell \cdot \sin \alpha = 0.$$

Звідси

$$N_B = \frac{P \cdot \cos \theta}{2 \cdot \cos \alpha}; \quad N_A = \frac{P \cdot \cos \theta}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

На підставі теореми о трьох силах, лінії дії яких перетинаються в одній точці, точки  $C$  та  $D$  повинні лежати в одній вертикалі. Це дає нам можливість визначити кути:

$$\alpha + \theta = 90^\circ - \alpha; \quad \theta = 90^\circ - 2\alpha;$$

$$\cos \theta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

тоді

$$N_B = \frac{P}{2} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = P \cdot \sin \alpha;$$

$$N_A = \frac{P}{2} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = P \cdot \cos \alpha.$$

б) геометричне рішення

Побудуємо силовий трикутник (система сил збіжна). З силового трикутника маємо:

$$N_A = P \cdot \cos \alpha; \quad N_B = P \cdot \sin \alpha.$$

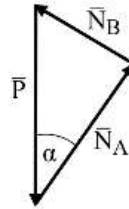
З трикутника  $ACK$  при рівновазі:

$$\alpha + \theta = 90^\circ - \alpha; \quad \theta = 90^\circ - 2\alpha.$$

$\theta$  - кут рівноваги.

**Відповідь:** При виконанні рівноваги  $\theta = 90^\circ - 2\alpha$ ;

$$N_A = P \cdot \cos \alpha; \quad N_B = P \cdot \sin \alpha.$$

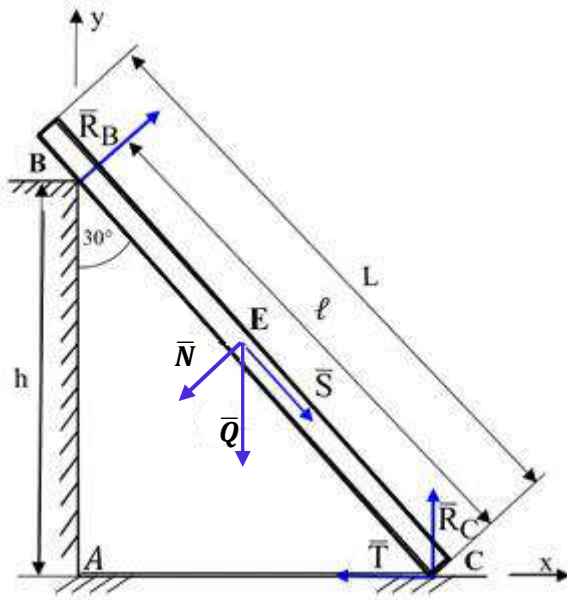


## Задача 4.7

Дано:

 $AC$  – нить. $Q = 600 \text{ Н}$  – вага  $CB$ ; $L = 4 \text{ м}$ ;  $h = 3 \text{ м}$ ; $CE = \frac{1}{2} CB$ .

Знайти:

 $T$ –?;  $R_C$ –?;  $R_B$ –?

Запишемо основну форму рівнянь рівноваги, де

$$\ell = \frac{h}{\cos 30^\circ}; \quad N = Q \cdot \sin 30^\circ; \quad S = Q \cdot \cos 30^\circ;$$

$$1) \sum M_{C_i} = -R_B \cdot \ell + N \cdot \frac{L}{2} = 0;$$

$$R_B = N \frac{L}{2\ell} = \frac{Q \cdot \sin 30^\circ \cdot L \cos 30^\circ}{2h} = 173 \text{ H.}$$

$$2) \sum X_i = R_B \cdot \cos 30^\circ - T = 0;$$

$$T = R_B \cdot \cos 30^\circ = 173 \cdot 0.866 = 150 \text{ H.}$$

$$3) \sum Y_i = R_B \cdot \sin - Q + R_C = 0;$$

$$R_C = Q - R_B \cdot \sin 30^\circ = 600 - 173,05 = 513,5 \text{ H.}$$

**Відповідь:**  $T = 150 \text{ H}$ ;  $R_B = 173 \text{ H}$ ;  $R_C = 513,5 \text{ H}$ .

### Задача 4.8

**Дано:**

$$Q = 200 \text{ H};$$

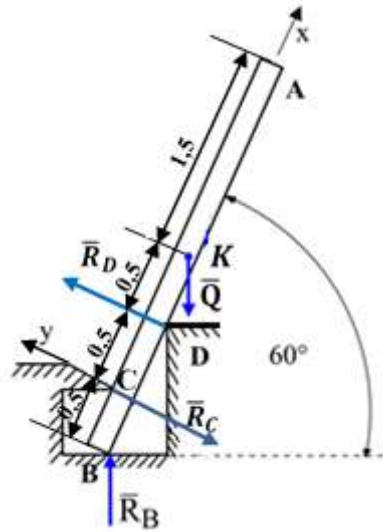
$$CB = 0,5 \text{ м};$$

$$BD = 1 \text{ м};$$

$$AB = 3 \text{ м.}$$

**Знайти:**

$$R_C - ?; R_B - ?; R_D - ?$$



Запишемо рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = R_B \cdot \cos 30^\circ - Q \cdot \cos 30^\circ = 0; R_B = Q = 200 \text{ H.}$$

$$2) \sum M_{C_i} = -R_B \cdot 0,5 \cos 60^\circ + R_D \cdot 0,5 - Q \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$R_D \cdot 0,5 = 200 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 200 \cdot 0,5; R_D = 300 \text{ H.}$$

$$3) \sum M_{D_i} = -R_B \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + R_C \cdot 0,5 - Q \cdot 0,5 \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$R_C \cdot 0,5 = 200 \cdot 0,5 + 200 \cdot 0,25; R_C = 300 \text{ H.}$$

**Відповідь:**  $R_C = R_D = 300 \text{ H}$ ;  $R_B = 200 \text{ H}$ .

## Задача 4.11

Дано:

$$Q = 42 \text{ кН};$$

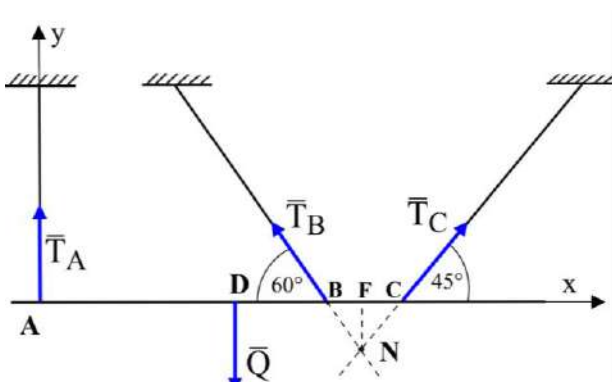
$$AD = 4 \text{ м};$$

$$BD = 2 \text{ м};$$

$$BF = 1 \text{ м}.$$

Знайти:

$$T_A - ?; T_B - ?; T_C - ?$$

3  $\Delta BNF$ 

$$BF = 1 \text{ м}; BN = 2 \text{ м}; \angle BNF = 30^\circ;$$

$$NF = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \text{ м}; AF = 7 \text{ м}.$$

$$1) \sum X_i = -T_B \cdot \cos 60^\circ + T_C \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y_i = T_A + T_B \cdot \sin 60^\circ + T_C \cdot \sin 45^\circ - Q = 0;$$

$$3) \sum M_{N_i} = -7T_A + 3Q = 0.$$

3 (3)

$$T_A = \frac{3Q}{7} = \frac{3 \cdot 42}{7} = 18 \text{ кН}$$

$$(\sin 45^\circ = \cos 45^\circ)$$

$$1) -T_B \cdot \cos 60^\circ + T_C \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$2) T_B \cdot \sin 60^\circ + T_C \cdot \sin 45^\circ - 24 = 0$$

(1)-(2)

$$-T_B(0,5 + 0,866) + 24 = 0$$

$$T_B = \frac{24}{1,366} = 17,57 \text{ кН};$$

$$[-17,57 \cdot 0,5 + T_C \cdot 0,707 = 0 \rightarrow з (1)];$$

$$T_C = \frac{17,57}{0,707} \cdot 0,5 = 12,43 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $T_A=18 \text{ кН}$ ,  $T_B = 17,57 \text{ кН}$ ,  $T_C = 12,43 \text{ кН}$ .

### Задача 4.12

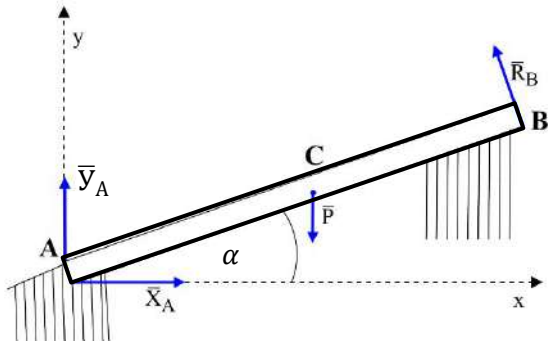
**Дано:**

$$P = 9 \text{ кН};$$

$$AC = CB = \frac{\ell}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,5;$$

$$\alpha = 26^\circ 30'.$$



**Знайти:**  $X_A$ -?;  $R_B$ -?;  $Y_A$ -?

Складаємо основну форму рівнянь рівноваги:

$$\sum M_{A_i} = R_B \cdot \ell - P \cos \alpha \cdot \frac{\ell}{2} = 0;$$

$$R_B = \frac{P}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{9}{2} \cdot 0,895 = 4,02 \text{ кН}.$$

$$\sum X_i = X_A - R_B \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$X_A = R_B \cdot \sin \alpha = 4,02 \cdot 0,445 = 1,8 \text{ кН}.$$

$$\sum Y_i = Y_A + R_B \cdot \cos \alpha - P = 0;$$

$$Y_A = P - R_B \cdot \cos \alpha = 9,0 - 4,02 \cdot 0,895 = 5,4 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $X_A = 1,8 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 5,4 \text{ кН}$ ,  $R_B = 4,02 \text{ кН}$ .

### Задача 4.13

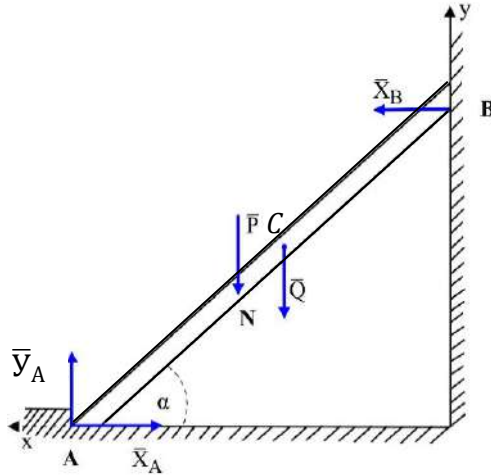
**Дано:**

$P = 600 \text{ H}$  (вага людини);

$Q = 200 \text{ H}$  – вага  $P_{AB}$ ;

$AB = \ell, AC = \frac{\ell}{2}; \alpha = 45^\circ; AN = 1/3\ell.$

**Знайти:**  $X_A$ –?;  $X_B$ –?;  $Y_A$ –? (сили тиску в т.  $A$  та  $B$ ).



В т.  $A$  та  $B$  розставимо реакції опор. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = -X_A + X_B = 0; \quad X_A = X_B;$$

$$\sum Y_i = Y_A - P - Q = 0; \quad Y_A = 600 + 200 = 800 \text{ H};$$

$$\sum M_{A_i} = -P \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \cos 45^\circ - Q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \cos 45^\circ + X_B \cdot \ell \cdot \sin 45^\circ = 0;$$

$$X_B = \frac{P}{3} + \frac{Q}{2} = 300 \text{ H}.$$

**Відповідь:** Тиск драбини на опору  $A$ :  $X_A = 300 \text{ H}$ ,  
 $Y_A = 800 \text{ H}$ ; на стіну в т.  $B$ :  $X_B = 300 \text{ H}$ .

P.S. На рисунку зображені реакції опор, а не тиск! Тиск напрямлений в протилежний бік!

### Задача 4.14

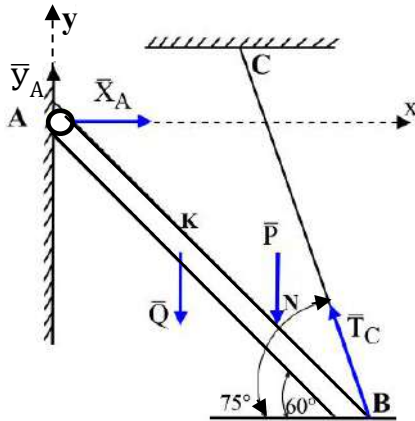
**Дано:**

$P = 0,8 \text{ кН}$ ;  $Q = 2,4 \text{ кН}$  – вага  $AB$ ;

$AB = 6 \text{ м}$ ,  $BK = 3 \text{ м}$ ;  $BN = 2 \text{ м}$ .

Кути - дивись рисунок.

**Знайти:**  $X_A$ –?;  $T_C$ –?;  $Y_A$ –?



Розставимо реакції опор і складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum M_{A_i} = 6 \cdot T_C \cdot \cos 75^\circ - Q \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ - P \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$T_C = \frac{Q \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + P \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ}{6 \cdot \cos 75^\circ} = 3,35 \text{ кН};$$

$$\sum Y_i = Y_A - P - Q + T_C \cdot \cos 15 = 0;$$

$$Y_A = 2,4 + 0,8 - 3,2344 = -0,0344 \text{ кН};$$

$$\sum X_i = X_A - T_C \cdot \cos 75^\circ = 0; \quad X_A = 0,867 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $X_A = 0,867 \text{ кН}$ ,  $Y_A = -0,0344 \text{ кН}$ ,

$T_C = 3,35 \text{ кН}$ .

## Задача 4.16

Дано:

$$P = 2Q = 9,6 \text{ кН};$$

$$Q = 4,8 \text{ кН};$$

$$AB = 1,8 \text{ м};$$

$$BC = 2,4 \text{ м}.$$

Знайти:  $R_A$ —?;  $R_B$ —?(сили тиску на опори  $A$  та  $B$ )

Шлюпка вагою  $P = 9,6 \text{ кН}$  висить на двох шлюпбалках. Реакції визначаємо для одної шлюпбалці від сили  $Q = \frac{P}{2}$ .

$$\sum Y_i = Y_A - Q = 0; \quad Y_A = 4,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_{A_i} = -R_B \cdot 1,8 - Q \cdot 2,4 = 0;$$

$$R_B = \frac{-4,8 \cdot 2,4}{1,8} = -6,4 \text{ кН};$$

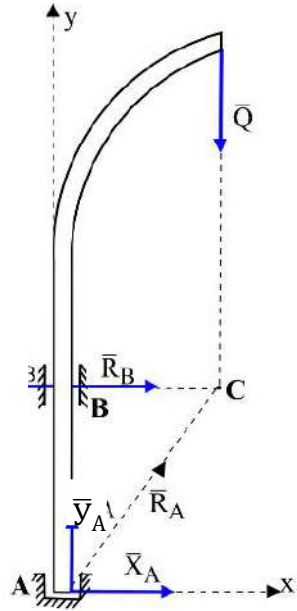
$$\sum M_{B_i} = X_A \cdot 1,8 - Q \cdot 2,4 = 0;$$

$$X_A = \frac{4,8 \cdot 2,4}{1,8} = 6,4 \text{ кН};$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{480^2 + 640^2} = 800 \text{ кН}.$$

Відповідь: Реакції опор:  $X_A = 6,4 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 4,8 \text{ кН}$ ,

$$R_B = -6,4 \text{ кН}, R_A = 800 \text{ кН}.$$

Тиск на опори:  $X_A = -6,4 \text{ кН}$ ,  $Y_A = -4,8 \text{ кН}$ ,  $R_B = 6,4 \text{ кН}$ .

### Задача 4.17

**Дано:**

$P = 30 \text{ кН}$  (вага груза);

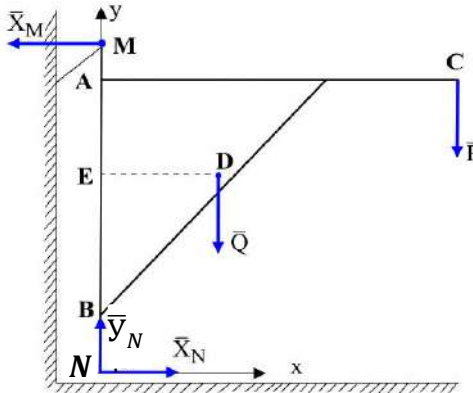
$Q = 20 \text{ кН}$  (вага крана);

$MN = 5 \text{ м}$ ;  $AC = 5 \text{ м}$ ;

$ED = 2 \text{ м}$ .

**Знайти:**  $X_N$ —?;  $Y_N$ —?;  $X_M$ —?

Розставимо реакції опор. Складаємо рівняння рівноваги:



$$\sum M_{N_i} = -2Q - 5P + 5X_M = 0;$$

$$X_M = \frac{20 \cdot 2 + 5 \cdot 30}{5} = 38 \text{ кН}.$$

$$\sum X_i = -X_M + X_N = 0; \quad X_M = X_N = 38 \text{ кН}.$$

$$\sum Y_i = Y_N - Q - P = 0; \quad Y_N = 20 + 30 = 50 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $X_M = X_N = 38 \text{ кН}$ ;  $Y_N = 50 \text{ кН}$ .

## Задача 4.18

**Дано:**

$P = 40 \text{ кН}$  – вага вантажу;

$Q = 20 \text{ кН}$  – вага крана;

$DD = 5 \text{ м}$ ;  $CC = 2 \text{ м}$ ;

$AB=2 \text{ м}$ .

**Знайти:** реакції  $X_A$ –?;  $Y_A$ –?;  $X_B$ –?

Розставимо реакції опор.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$1) \sum Y_i = Y_A - Q - P = 0;$$

$$Y_A = Q + P = 20 + 40 = 60 \text{ кН}$$

$$2) \sum X_i = X_B + X_A = 0; \quad X_B = -X_A.$$

$$3) \sum M_{A_i} = -2X_B - 2Q - 5P = 0;$$

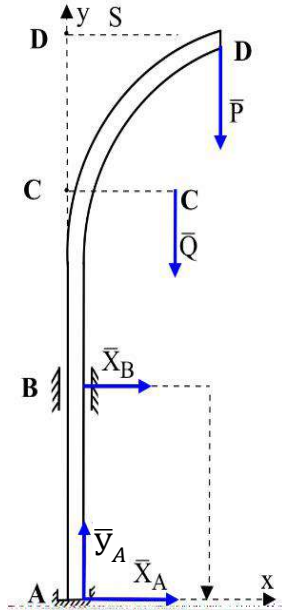
$$X_B = -\frac{1}{2}(2Q + 5P) =$$

$$= -\frac{1}{2}(40 + 200) = -120 \text{ кН}.$$

$$X_A = -X_B = 120 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $X_A = 120 \text{ кН}$ ,

$Y_A = 60 \text{ кН}$ ,  $X_B = -120 \text{ кН}$ .



## Задача 4.19

Дано:

$P = 2,0 \text{ кН}$  – вага вантажу;

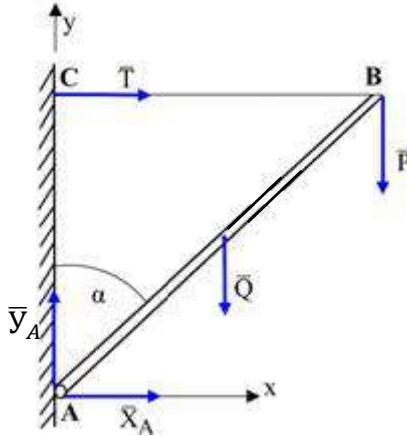
$Q = 1,0 \text{ кН}$  – вага балки АВ;

$AB = \ell$ ;  $CB$  – трос;

$\alpha = 45^\circ$ .

Знайти: реакції  $X_A$ –?;

$T$  –?;  $Y_A$ –?



Розставимо реакції опор. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = X_A + T = 0; \quad X_A = -T.$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q - P = 0;$$

$$Y_A = Q + P = 1,0 + 2,0 = 3,0 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{A_i} = -T \cdot \ell \cdot \cos 45^\circ - Q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin 45^\circ - P \cdot \ell \cdot \sin 45^\circ = 0;$$

$$T = -\left(\frac{Q}{2} + P\right) = -2,5 \text{ кН}; \quad (\sin 45^\circ = \cos 45^\circ)$$

**Відповідь:**  $X_A = 2,5 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 3,0 \text{ кН}$ ,  $T = -2,5 \text{ кН}$ .

## Задача 4.20

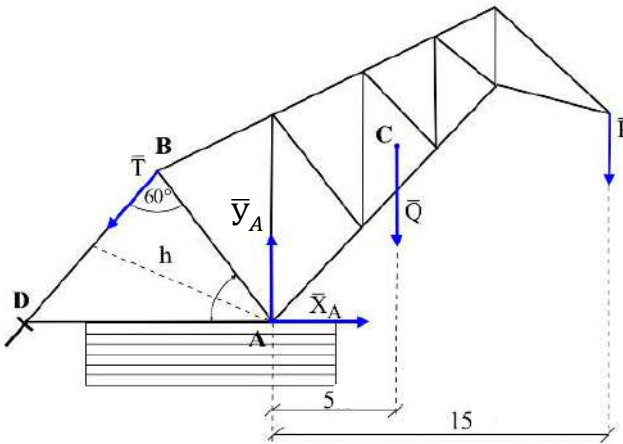
Дано:

$$P = 200 \text{ кН};$$

$$Q = 120 \text{ кН};$$

$$AB = BD = DA = 8 \text{ м.}$$

Інші розміри див. рис.

Знайти: реакції  $T$ —?;  $X_A$ —?;  $Y_A$ —? ( $\bar{T}$  - натяг стержня  $BD$ ).

$$\text{З } \triangle ABD \quad h = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ м.}$$

Розставимо реакції опор. Складемо рівняння рівноваги:

$$1) \sum M_{A_i} = T \cdot 4\sqrt{3} - Q \cdot 5 - P \cdot 15 = 0;$$

$$T = \frac{600 + 3000}{4\sqrt{3}} = 520 \text{ кН.}$$

$$2) \sum X_i = X_A - T \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$X_A = T \cdot \cos 60^\circ = 520 \cdot 0,5 = 260 \text{ кН};$$

$$3) \sum Y_i = Y_A - Q - P - T \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

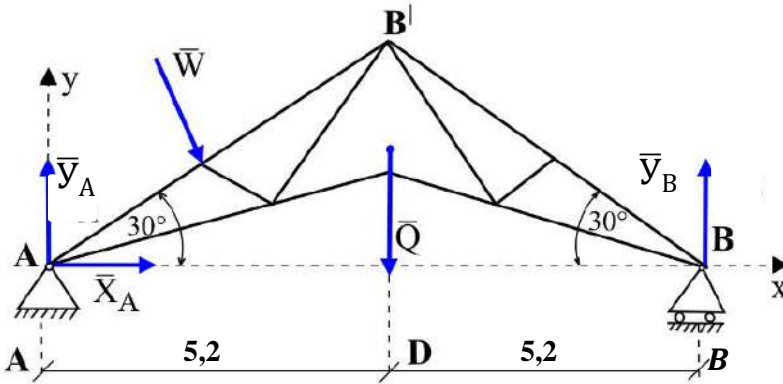
$$Y_A = Q + P + T \cdot \cos 30^\circ;$$

$$Y_A = 120 + 200 + 450 = 770 \text{ кН.}$$

Відповідь:  $X_A = 260 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 770 \text{ кН}$ ,  $T = 520 \text{ кН}$ .

## Задача 4.21

Дано:

 $W = 8 \text{ кН}$  (тиск вітру); $Q = 100 \text{ кН}$  – вага ферми; $\angle B'AB = 30^\circ$ ; $AB' = B'B = 6 \text{ м}$ .Знайти: опорні реакції  $X_A$ –?;  $Y_A$ –?;  $Y_B$ –?

$$DB = AD = AB' \cdot \cos 30^\circ = 5,2 \text{ м.}$$

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = X_A + W \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$X_A = -W \cdot \cos 60^\circ = -8 \cdot 0,5 = -4 \text{ кН.}$$

$$\sum M_{A_i} = -W \cdot 3 - Q \cdot 5,2 + Y_B \cdot 10,4 = 0;$$

$$Y_B = \frac{3W + 5,2Q}{10,4} = 52,3 \text{ кН};$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q - W \cdot \cos 30^\circ + Y_B = 0;$$

$$Y_A = Q + W \cdot \cos 30^\circ - Y_B = 54,6 \text{ кН.}$$

Відповідь:  $X_A = -4 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 54,6 \text{ кН}$ ,  $Y_B = 52,3 \text{ кН}$ .

### Задача 4.22

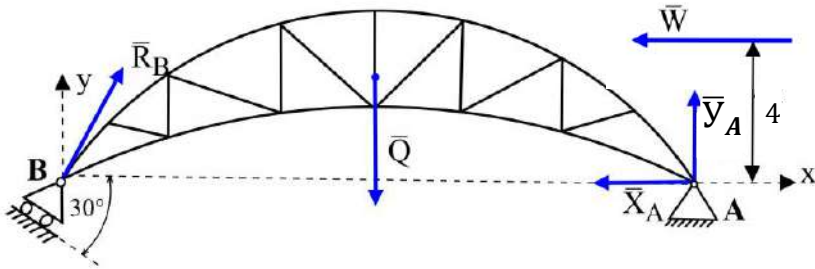
Дано:

$W = 20 \text{ кН}$  (тиск вітру);

$Q = 100 \text{ кН}$  – вага ферми;

$AB = 20 \text{ м}$ .

Знайти: опорні реакції  $X_A$ –?;  $Y_A$ –?;  $R_B$ –?



Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_{A_i} = W \cdot 4 + Q \cdot 10 - R_B \cdot 20 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$R_B = \frac{4W + 10Q}{20 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{80 + 1000}{20 \cdot 0,87} = 62,4 \text{ кН}.$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A = Q - R_B \cdot \cos 30^\circ = 46 \text{ кН};$$

$$\sum X_i = -X_A - W + R_B \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$X_A = R_B \cdot \cos 60^\circ - W = 11,2 \text{ кН}.$$

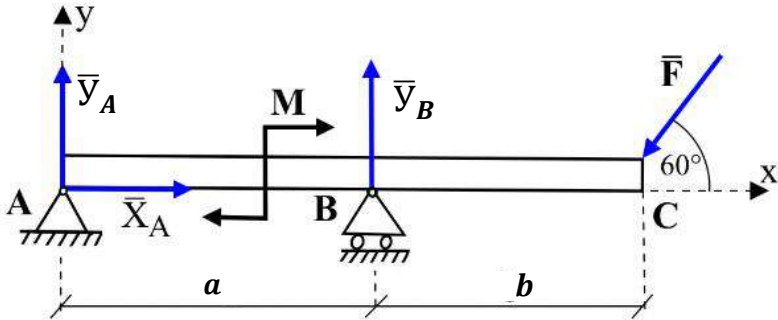
**Відповідь:**  $X_A = 11,2 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 46 \text{ кН}$ ,  $R_B = 62,4 \text{ кН}$ .

## Задача 4.25

Дано:

$$F = 4 \text{ кН}; M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$a = 3 \text{ м}; b = 2 \text{ м}.$$

Знайти: опорні реакції  $X_A$ —?;  $Y_A$ —?;  $Y_B$ —?

Розглянемо рівновагу балки  $ABC$ , відкинувши в'язі та вважаючи її вільною. Тоді на балку будуть діяти задана сила  $\bar{F}$  та пара з моментом  $M$ , а також реакції опор  $X_A$ ;  $Y_A$ ;  $Y_B$ .

В цієї задачі буде зручніше скласти умови рівноваги в формі:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum M_{A_i} = 0; \quad \sum M_{B_i} = 0.$$

Тоді в кожне з рівнянь увійде по одній невідомій силі.

Складаємо умови рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A - F \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$X_A = F \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН}.$$

$$2) \sum M_{A_i} = 0; \quad -M + Y_B \cdot a - F \cdot \sin 60^\circ (a + b) = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{a} [M + F \cdot \sin 60^\circ (a + b)] = \frac{1}{3} [6 + 4 \cdot 5 \cdot 0,866] = 7,78 \text{ кН};$$

$$3) \sum M_{B_i} = 0; \quad -Y_A \cdot a - M - F \cdot \sin 60^\circ \cdot b = 0;$$

$$Y_A = \frac{1}{a} [-M - F \cdot \sin 60^\circ \cdot b] = \frac{1}{3} [-6 - 4 \cdot 2 \cdot 0,866] = -4,32 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $X_A = 2 \text{ кН}; \quad Y_A = -4,32 \text{ кН}; \quad Y_B = 7,78 \text{ кН}.$

## Задача 4.26

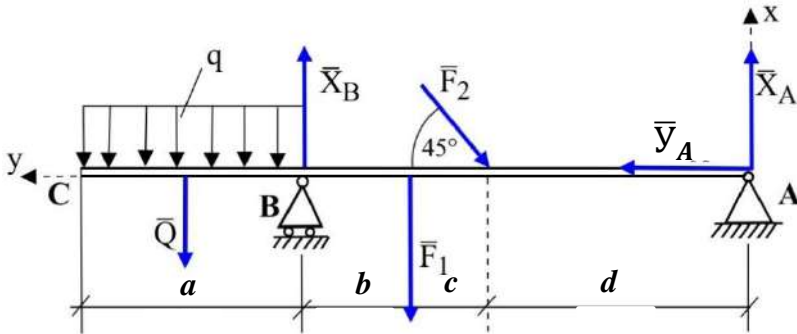
Дано:

$$F_1 = 8 \text{ кН}; F_2 = 6 \text{ кН};$$

$$q = 3 \text{ кН/м};$$

$$a = 2 \text{ м}; b = c = 1 \text{ м};$$

$$d = 2 \text{ м}.$$

Знайти: опорні реакції  $X_A$ —?;  $X_B$ —?;  $Y_A$ —?

В даній задачі прийнято ліве розташування осей координат.

Відкинувши в'язі, замінимо їх реакціями  $X_A$ ;  $Y_A$ ;  $Y_B$ . Розглянемо рівновагу балки  $AB$ , яка знаходиться під дією активних сил  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ , реакцій і розподіленого навантаження  $q$ .

На ділянці  $BC$  рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю  $q$  замінимо на зосереджену силу:

$$Q = q \cdot a = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН}, \text{ яка прикладена посередині } BC.$$

Складаємо умови рівноваги:

$$1) \sum Y_i = 0; \quad Y_A - F_2 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$Y_A = F_2 \cdot \cos 45^\circ = 6 \cdot 0,707 = 4,2 \text{ кН}.$$

$$2) \sum M_{A_i} = F_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot d + F_1(c + d) - X_B(b + c + d) +$$

$$+Q \left( \frac{a}{2} + b + c + d \right) = 0;$$

$$X_B = \frac{1}{(b + c + d)} [F_2 \sin 45^\circ d + F_1(c + d) +$$

$$+Q \left( \frac{a}{2} + b + c + d \right)] = \frac{1}{4} [6 \cdot 0,707 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 5] \\ = 15,6 \text{ кН.}$$

$$3) \sum M_{B_i} = 0;$$

$$Q \frac{a}{2} - F_1 b - F_2 \sin 45^\circ (b + c) + X_A (b + c + d) = 0;$$

$$X_A = \frac{1}{(b + c + d)} \left[ -Q \cdot \frac{a}{2} + F_1 b + F_2 \sin 45^\circ (b + c) \right] = \\ = \frac{1}{4} [-6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0,707 \cdot 2] = 2,66 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $X_A = 2,6 \text{ кН}, Y_A = 4,2 \text{ кН}, X_B = 15,6 \text{ кН}.$

### Задача 4.27

**Дано:**

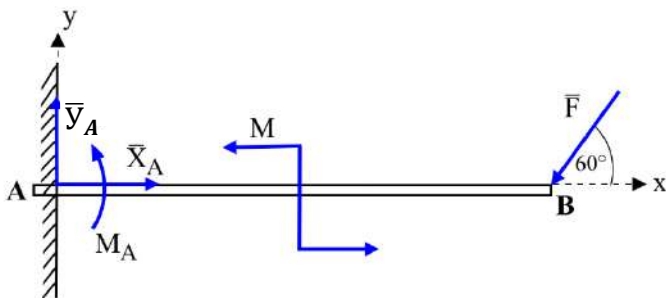
$$F = 2 \text{ кН}; M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\underline{AB = a = 2 \text{ м.}}$$

**Знайти:** опорні реакції  $X_A$ —?;  $Y_A$ —?;  $M_A$ —?

Розглянемо рівновагу балки  $AB$ , яка жорстко закріплена в стіну кінцем  $A$ , відкинувши в'язі та вважаючи її вільною.

На балку діє сила  $\bar{F}$ , пара сил з моментом  $M$  та реакції в защемленні  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$  і реактивний момент  $M_A$ .



Складаємо умови рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A - F \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$X_A = F \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ кН};$$

$$2) \sum Y_i = 0; \quad Y_A - F \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$Y_A = F \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ кН}.$$

$$3) \sum M_{A_i} = M_A + M - F \cdot \sin 60^\circ \cdot AB = 0;$$

$$M_A = F \cdot \sin 60^\circ \cdot AB - M = 2 \cdot 0,866 \cdot 2 - 3 = 0,47 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Відповідь: } X_A = 1 \text{ кН}, Y_A = 1,73 \text{ кН}, M_A = 0,47 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

### Задача 4.28

**Дано:**

$$F = 4 \text{ кН}; \quad M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$a = 3 \text{ м}; \quad b = 2;$$

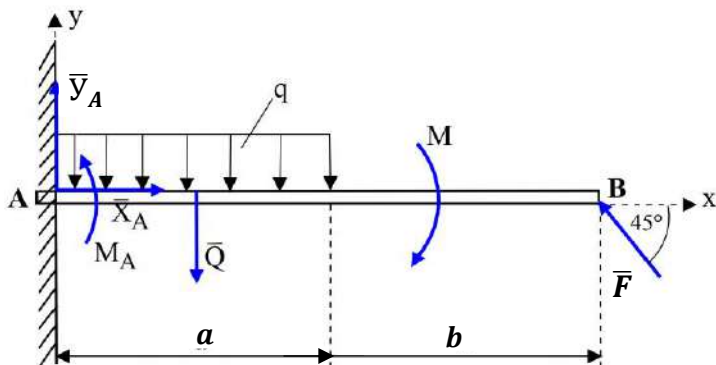
$$q = 1,5 \text{ кН/м}.$$

**Знайти:** опорні реакції  $X_A$ —?;  $Y_A$ —?;  $M_A$ —?

На защемлену балку  $AB$  діють зосереджена сила  $\bar{F}$ , пара сил з моментом  $M$ , рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю  $q$ .

Замінімо розподілене навантаження з інтенсивністю  $q$  на зосереджену силу

$Q = q \cdot a = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ кН}$ , яка прикладена посередині  $a$ .



Зв'язки замінюємо реакціями  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $M_A$  та складаємо умови рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A - F \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$X_A = F \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot 0,707 = 2,8 \text{ кН}.$$

$$2) \sum Y_i = 0; \quad Y_A - Q + F \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$Y_A = Q - F \cdot \sin 45^\circ = 1,7 \text{ кН}.$$

$$3) \sum M_{A_i} = M_A - M - Q \cdot \frac{a}{2} + F \cdot \sin 45^\circ \cdot (a + b) = 0$$

$$M_A = M + Q \cdot \frac{a}{2} - F \sin 45^\circ (a + b) =$$

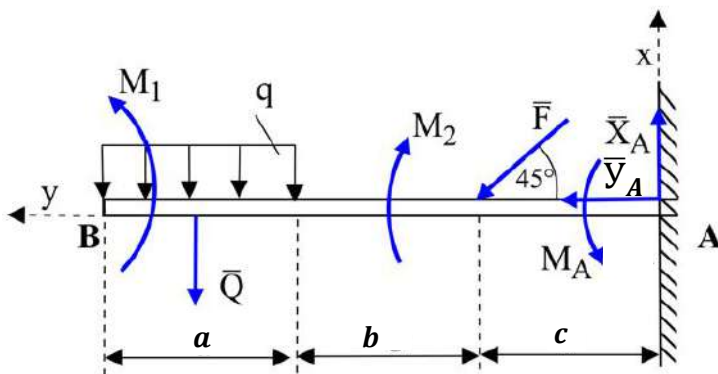
$$= 4,5 \cdot \frac{3}{2} + 2 - 4 \cdot 0,707 \cdot 5 = -5,35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

**Відповідь:**  $X_A = 2,8 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 1,7 \text{ кН}$ ,  $M_A = -5,35 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

## Задача 4.29

Дано:

$F = 4 \text{ кН}$ ;  $M_1 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_2 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $a = b = 3 \text{ м}$ ;  $c = 4 \text{ м}$ ;  
 $q = 3 \text{ кН/м}$ .

Знайти: опорні реакції  $X_A$ —?;  $Y_A$ —?;  $M_A$ —?

На защемлену балку  $AB$  діють зосереджена сила  $\bar{F}$ , дві пари сил з моментами  $M_1$  та  $M_2$ , розподілене навантаження  $q$ , яке замінюємо зосередженою силою  $Q = q \cdot a = 3 \cdot 3 = 9 \text{ кН}$ .

Відкинувши зв'язки та замінивши їх дії реакціями  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A$ , складаємо умови рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A - Q - F \cdot \sin 45^\circ = 0;$$

$$X_A = Q + F \cdot \cos 45^\circ = 11,8 \text{ кН}.$$

$$2) \sum Y_i = 0; \quad Y_A + F \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$Y_A = -F \cdot \sin 45^\circ = -4 \cdot 0,707 = -2,8 \text{ кН}.$$

$$3) \sum M_{A_i} = M_A + M_1 - M_2 + Q \cdot \left(\frac{a}{2} + b + c\right) + F \cdot \sin 45^\circ \cdot c = 0$$

$$M_A = M_2 - M_1 - Q \cdot 8,5 - F \cdot 0,707 \cdot 4 = -86,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

**Відповідь:**  $X_A = 11,8 \text{ кН}$ ,  $Y_A = -2,8 \text{ кН}$ ,  $M_A = -86,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

### Задача 4.30

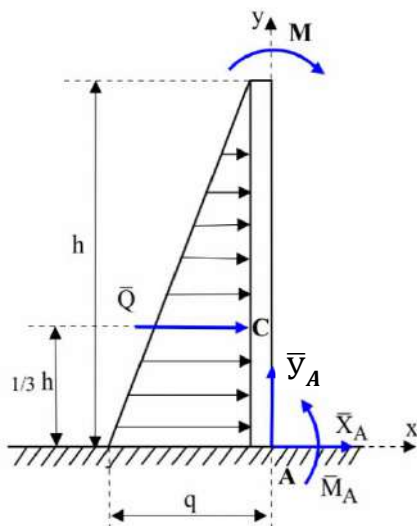
Дано:

$$M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$q = 1,5 \text{ кН/м};$$

$$h = 12 \text{ м.}$$

Знайти: опорні реакції  $X_A$ —?;  $Y_A$ —?;  $M_A$ —?



На зацмлену балку  $AB$  діють пара сил з моментом  $M$  та розподілене за лінійним законом навантаження  $q_{max} = q$ , яке замінюємо зрівноваженою силою

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot h = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 12 = 9 \text{ кН}, \text{ прикладеної до балці на висоті } \frac{1}{3} h \text{ від } A.$$

Відкинувши в'язі та замінивши їх дії реакціями  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A$ , складаємо умови рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A + Q = 0; \quad X_A = -Q = -9 \text{ кН.}$$

$$2) \sum Y_i = 0; \quad Y_A = 0.$$

$$3) \sum M_{A_i} = M_A - M - Q \cdot \frac{1}{3} h = 0.$$

$$M_A = M + \frac{Q \cdot h}{3} = 4 + \frac{9 \cdot 12}{3} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

**Відповідь:**  $X_A = -9 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 0 \text{ кН}$ ,  $M_A = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

### Рівновага системи тіл

При статичному розрахунку інженерних конструкцій, які складаються з декількох тіл, що з'єднаних будь якими в'язями, конструкцію умовно розділяють в місцях з'єднань на окремі тіла та складають умови рівноваги для кожного з тіл.

При цьому реакції внутрішніх в'язів будуть попарно дорівнюватися за модулем та протилежними за напрямом (III закон Ньютона).

Якщо система складається з двох тіл, то можна скласти три рівняння для всієї системи, а потім три для одної з частин. Вирішуючи сумісно систему з шести рівнянь, знайдемо всі невідомі реакції.

## Задача 4.34

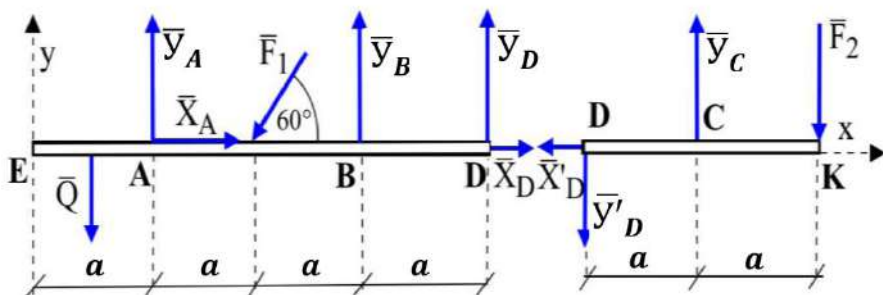
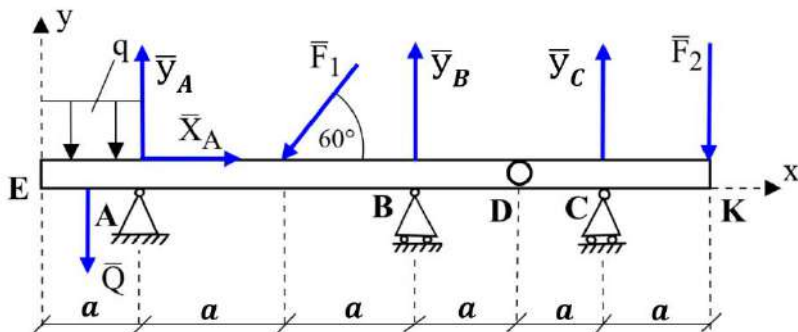
Дано:

$$F_1 = 6 \text{ кН}; F_2 = 5 \text{ кН};$$

$$q = 1,75 \text{ кН/м};$$

$$a = 4 \text{ м};$$

$$Q = q \cdot a = 7 \text{ кН}.$$

Знайти: опорні реакції  $X_A, Y_A, Y_B, Y_C, X_D, Y_D$ —?

Конструкція складається з двох балок  $ED$  та  $DK$ , з'єднаних шарніром  $D$ . Розділяємо систему на дві балки, замінюємо шарнір  $D$  реакціями  $\bar{X}_D = -\bar{X}'_D$  та  $\bar{Y}_D = -\bar{Y}'_D$  (мінус на рис).

вже враховано). Невідомих реакцій було 4 ( $X_A, Y_A, Y_B, Y_C$ ), додалося ще дві ( $X_D, Y_D$ ). Складемо по три рівняння для кожної балки та вирішимо систему з шести рівнянь.

Для балки ED:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A - F_1 \cos 60^\circ + X_D = 0;$$

$$X_A = F_1 \cos 60^\circ - X_D = 6 \cdot 0,5 - 0 = 3 \text{ кН.}$$

$X_D = 0$  з рівняння (4).

$$2) \sum M_{A_i} = 0; \quad Q \cdot \frac{a}{2} - F_1 \sin 60^\circ \cdot a + Y_B \cdot 2a + Y_D \cdot 3a = 0;$$

$$Y_B = \left( \frac{Q}{2} + F_1 \sin 60^\circ + Y_D \cdot 3 \right) \frac{1}{2} =$$

$$= (-3,5 + 6 \cdot 0,866 - 3 \cdot 5) \frac{1}{2} = -6,6 \text{ кН.}$$

$Y_D = 5 \text{ кН}$  з рівняння (6).

$$3) \sum Y_i = 0; \quad Y_A - Q - F \sin 60^\circ + Y_D + Y_B = 0;$$

$$Y_A = Q + F \sin 60^\circ - Y_D - Y_B = 13,8 \text{ кН.}$$

Для балки DK:

$$4) \sum X_i = 0; \quad -X_D = 0;$$

$$5) \sum M_{D_i} = 0; \quad Y_C \cdot a - F_2 \cdot 2a = 0; \quad Y_C = 2F_2 = 10 \text{ кН.}$$

$$6) \sum M_{C_i} = 0; \quad Y_D \cdot a - F_2 \cdot a = 0; \quad Y_D = F_2 = 5 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**

$$X_A = 3 \text{ кН}, \quad Y_A = 13,8 \text{ кН}, \quad Y_B = -6,6 \text{ кН}, \quad Y_C = 10$$

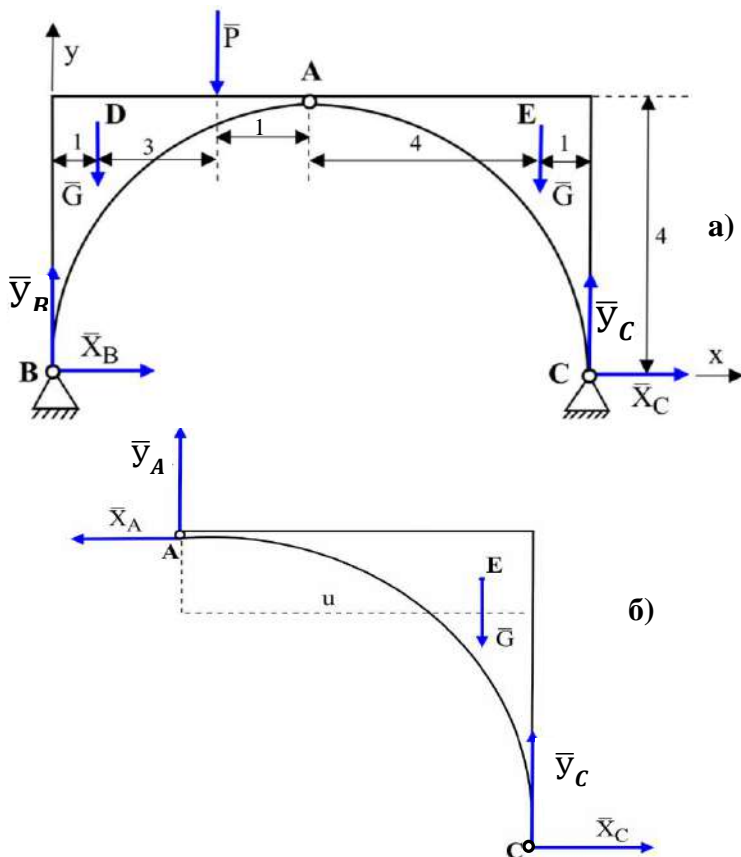
$$Y_C = 10 \text{ кН}, \quad X_D = 0, \quad Y_D = 5 \text{ кН.}$$

## Задача 4.35

Дано:

 $P = 20 \text{ кН}; G = 40 \text{ кН}$  вага частини моста;

Розміри на рис. в метрах

Знайти: опорні реакції  $X_A; Y_A; X_B; Y_B; X_C; Y_C$ ?

Складаємо рівняння рівноваги для всієї системи (рис. а):

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_B + X_C = 0; \quad X_B = -X_C.$$

$$2) \sum M_{B_i} = 0; \quad -G \cdot 1 - P \cdot 4 - G \cdot 9 + Y_C \cdot 10 = 0;$$

$$Y_C = \frac{1}{10}(G \cdot 1 + P \cdot 4 + G \cdot 9) = 48 \text{ кН.}$$

$$3) \sum M_{C_i} = 0; -Y_B \cdot 10 + G \cdot 9 + P \cdot 6 + Q \cdot 1 = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{10}(G \cdot 9 + P \cdot 6 + Q \cdot 1) = 52 \text{ кН.}$$

Складаємо рівняння рівноваги для правої арки (рис. б):

$$1) \sum M_{A_i} = 0; Y_C \cdot 5 - G \cdot 4 + X_C \cdot 4 = 0;$$

$$X_C = \frac{1}{4}(G \cdot 4 - Y_C \cdot 5) = \frac{1}{4}(160 - 240) = -20 \text{ кН.}$$

$$2) \sum X_i = 0; -X_A + X_C = 0; X_A = X_C = -20 \text{ кН.}$$

$$3) \sum Y_i = 0; Y_A + Y_C - G = 0;$$

$$Y_A = G - Y_C = 40 - 48 = -8 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**

$$X_A = X_C = -20 \text{ кН}, \quad Y_A = \pm 8 \text{ кН}, \quad Y_B = 52 \text{ кН}, \\ Y_C = 48 \text{ кН}, X_B = -X_C = 20 \text{ кН.}$$

### Задача 4.38

**Дано:**

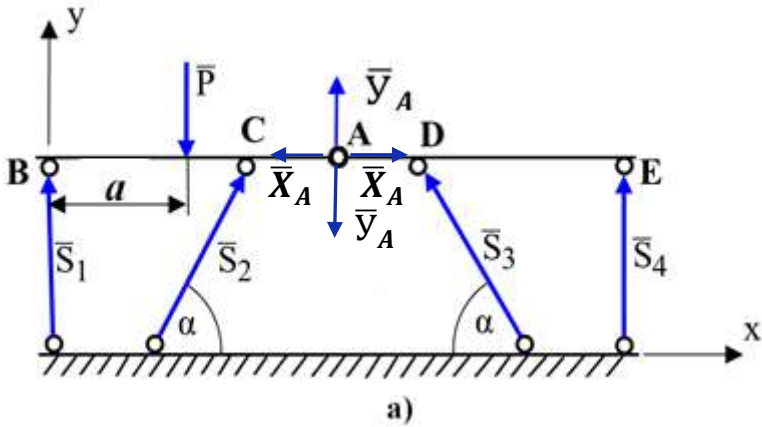
$$P = 15 \text{ кН}; \alpha = 60^\circ;$$

$$AB = AE = 8 \text{ м}; CA = AD = 2 \text{ м};$$

$$\underline{BC = DE = 6 \text{ м}; a = 4 \text{ м.}}$$

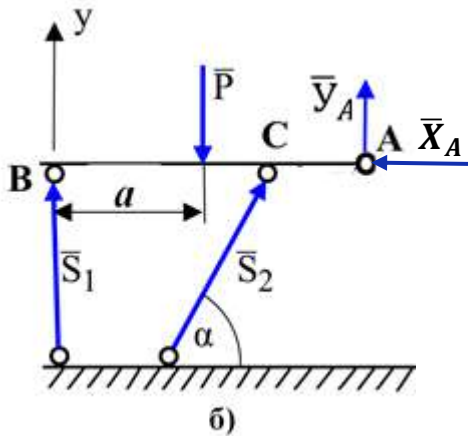
**Знайти:** опорні реакції  $S_1, S_2, S_3, S_4, X_A, Y_A$  -?

Система (Рис. а) складається з двох балок  $AB$  та  $AE$ , з'єднаних в шарнірі  $A$ . На балку  $AB$  діє сила  $\bar{P}$ .

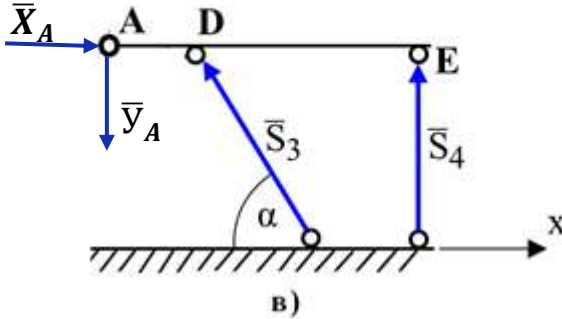


Складаємо рівняння рівноваги для балки AB (Рис. б):

- 1)  $\sum X_i = 0$ ;  $S_2 \cdot \cos 60^\circ - X_A = 0$ ;
- 2)  $\sum M_{B_i} = 0$ ;  $-P \cdot 4 + S_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 6 + Y_A \cdot 8 = 0$ ;
- 3)  $\sum M_{A_i} = 0$ ;  $-S_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 + P \cdot 4 - S_1 \cdot 8 = 0$ ;



Для балки  $AE$  (Рис. в):



$$4) \sum X_i = 0; X_A - S_3 \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$5) \sum M_{E_i} = 0; -S_3 \cdot \cos 30^\circ \cdot 6 + Y_A \cdot 8 = 0;$$

$$6) \sum M_{A_i} = 0; S_3 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 + S_4 \cdot 8 = 0.$$

З рівняння 1)  $X_A = S_2 \cdot \cos 60^\circ$ .

З рівняння 4)  $X_A = S_3 \cdot \cos 60^\circ$ .

$$\underline{S_2 = S_3}$$

Враховуючи це разом, рішаємо систему рівнянь 2) та 5):

$$-P \cdot 4 + S_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 6 + Y_A \cdot 8 = 0;$$

$$-S_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 6 + Y_A \cdot 8 = 0;$$

+

$$-P \cdot 4 + 16Y_A = 0; 16Y_A = 60;$$

$$\underline{Y_A = \pm 3,75 \text{ кН.}}$$

Отримаємо

$$-60 + S_2 \cdot 0,87 \cdot 6 + Y_A \cdot 8 = 0;$$

$$-60 + S_2 \cdot 5,22 + 30 = 0; \underline{S_2 = S_3 = 5,77 \text{ кН.}}$$

З рівняння 3)  $-10 = +60 - 8S_1 = 0; 8S_1 = 50;$

$$\underline{S_1 = 6,25 \text{ кН.}}$$

З рівняння 6)  $5,77 \cdot 0,866 \cdot 2 + S_4 \cdot 8 = 0$ ;  $S_4 = -1,25 \text{ кН}$ ;

$$X_A = S_2 \cdot \cos 60^\circ = 5,77 \cdot 0,5 = 2,89 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $S_1 = 6,25 \text{ кН}$ ;  $S_2 = S_3 = 5,77 \text{ кН}$ ;  $S_4 = -1,25 \text{ кН}$ ;

$$X_A = \pm 2,89 \text{ кН}; Y_A = \pm 3,75 \text{ кН}.$$

### Задача 4.42

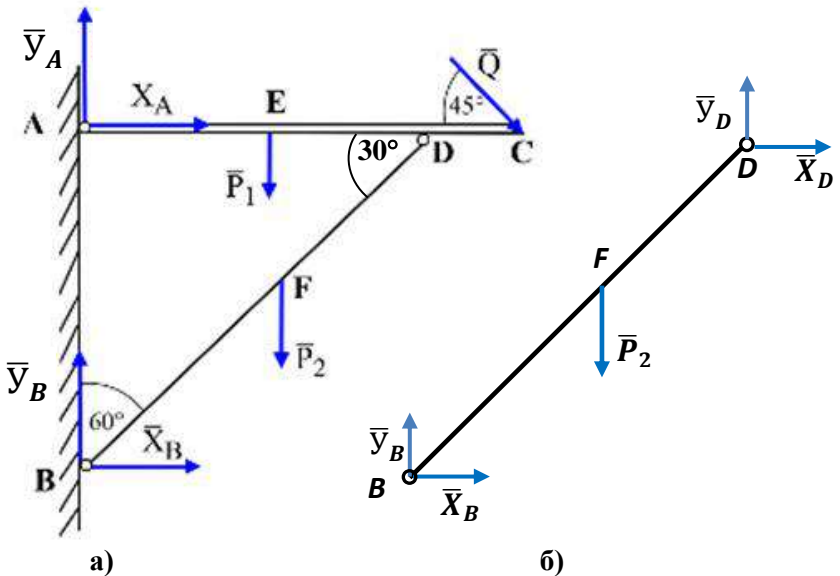
**Дано:**

$$AC = BD = \ell; P_1 = 40 \text{ Н}; P_2 = 40 \text{ Н};$$

$$AE = EC = \frac{\ell}{2}; BF = FD = \frac{\ell}{2};$$

$$Q = 100 \text{ Н}.$$

**Знайти:** опорні реакції  $X_A; Y_A; X_B; Y_B$ —?



Система складається з двох тіл: бруса  $AC$  і бруса  $BD$  (довжиною  $\ell$ ), з'єднаних в т.  $D$  шарніром. Так як тиск в шарнірі

$D$  не потрібно визначати, то складаємо три рівняння для всієї системи (Рис. а), а потім одне рівняння для бруса  $BD$  (Рис. б) ( $\sum M_{Di} = 0$ ).

$AB = \frac{\ell}{2}$  з  $\triangle ABD$ , як сторони протилежні кутам  $30^\circ$ ;

1) Для всієї системи:

$$\sum M_{Bi} = 0; -X_A \ell \cos 60^\circ - P_1 \frac{\ell}{2} - Q \cos 45^\circ \ell \cos 60^\circ - Q \sin 45^\circ \ell - P_2 \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ = 0; \text{ скорочуємо на } \ell.$$

$$0,5X_A = -\left(\frac{P_1}{2} + \frac{Q}{2} \cdot 0,707 + Q \cdot 0,707 + \frac{P_2}{2} \cdot 0,866\right) =$$

$$= -\left(\frac{40}{2} + \frac{100}{2} \cdot 0,707 + 100 \cdot 0,707 + \frac{40}{2} \cdot 0,866\right) = -143,4$$

$$X_A = -287 \text{ Н.}$$

$$\sum M_{Ai} = 0; X_B \frac{\ell}{2} - P_1 \frac{\ell}{2} - Q \sin 45^\circ \cdot \ell - P_2 \cdot \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ = 0;$$

скорочуємо на  $\ell$ .

$$X_B = \frac{1}{0,5} \left( \frac{P_1}{2} + Q \cdot 0,707 + \frac{P_2}{2} \cdot 0,866 \right) =$$

$$= 2 \left( 20 + 70,7 + \frac{40}{2} \cdot 0,866 \right) = 216 \text{ Н.}$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A + Y_B - P_1 - P_2 - Q \sin 45^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B = 150,7 \text{ Н} \approx 151 \text{ Н.}$$

(А)

2) Розглянемо рівновагу бруса  $BD$  (Рис. б):

$$\sum M_{Di} = 0; -Y_B \cdot \ell \cdot \sin 60^\circ + P_2 \cdot \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ + X_B \cdot \ell \cdot \cos 60^\circ = 0, \text{ скорочуємо на } \ell;$$

$$Y_B = \frac{1}{\sin 60^\circ} \left( \frac{P_2}{2} \sin 60^\circ + X_B \cdot \cos 60^\circ \right) = 145 \text{ Н.}$$

$$\text{З (А) маємо: } Y_A = 151 - Y_B = 151 - 145 = 6 \text{ Н.}$$

**Відповідь:**  $X_A = -287 \text{ Н}; Y_A = 6 \text{ Н}; X_B = 216 \text{ Н}; Y_B = 145 \text{ Н}.$

## 2.4 Розрахунок плоских ферм

**Фермою** називають геометрично незмінну конструкцію, яка складається з прямолінійних стержнів, з'єднаних на кінцях шарнірами.

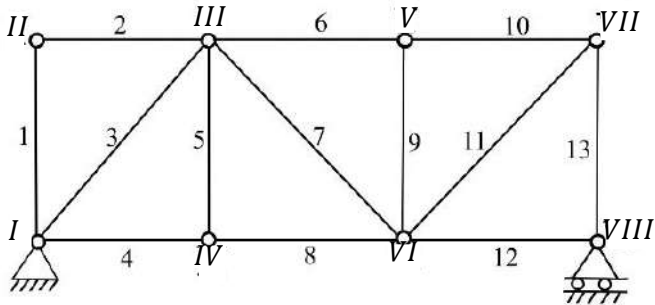


Рисунок 1

### Елементи ферм:

- 1) **вузли** - місця з'єднання стержнів;
- 2) **верхній і нижній пояси** – стержні, що розташовані по контуру вгорі і внизу ферми;
- 3) **стояки** – вертикальні стержні;
- 4) **розкоси** - нахилені стержні;
- 5) Розтягнуті стояки інколи називають **підвісами**. Стояки та розкоси, що розташовані біля опор, називають **опорними**. Горизонтальна проекція відстані між опорами ферми називається **прогоном**.
- 6) Найбільша відстань між вузлами верхнього і нижнього поясів — **висота ферми**.

### Допущення при розрахунках ферм:

- 1) всі стержні ферми з'єднані шарнірно;
- 2) тертя в шарнірах відсутнє;
- 3) задані сили, що діють на ферму, розміщені у площині ферми і прикладені у вузлах;

4) власна вага стержнів мала, порівняно з заданими силами і нею можна знехтувати або розподілити вагу стержнів по вузлах ферми.

**Умова жорсткості ферми** (для статично визначеної ферми):

$$N = 2n - 3,$$

де  $N$  - число стержнів ферми;

$n$  - число вузлів ферми.

Для Рис. 1  $N = 13$  стержнів,  $n = 8$  вузлів;

$$13 = 2 \cdot 8 - 3; 16 - 3 = 13!!!$$

Якщо число стержнів  $N < 2n - 3$  - конструкція буде геометрично змінною (куча металу або механізм).

Якщо число стержнів  $N > 2n - 3$  - ферма містить зайві стержні (статично невизначувана).

**Метод вирізання вузлів** (розрахунковий метод)

Суть методу полягає в тому, що розглядаємо рівновагу кожного вузла окремо, для чого умовно вирізаємо вузли ферми, прикладаємо до них відповідні зовнішні сили і реакції стержнів. Допускаємо, що всі стержні розтягнуті. Тому реакції стержнів направляємо від вузлів. Знайдені реакції стержнів за модулем дорівнюють внутрішнім зусиллям в стержнях.

В вузлах прикладена плоска збіжна система сил. тому розрахунок починають з вузла, в якому прикладені лише дві невідомі реакції.

**Метод Ріггера** (перевірочний метод)

Полягає в тому, що після знаходження реакцій опор, ферму умовно розрізають на дві частини так, щоб у перерізі було не більше трьох стержнів. Потім розглядають рівновагу однієї з частин ферми. Дію відкинutoї частини замінюють

відповідними силами, напрямляючи їх уздовж стержнів від вузлів (вважають, що усі стержні розтягнуті).

Рівняння рівноваги доцільно записувати у вигляді рівності нулю суми моментів усіх сил відносно трьох моментних точок (точок Ріттера), які є точками, де попарно перетинаються лінії дії розрізаних стержнів.

В кожному з рівнянь моментів відносно трьох точок Ріттера лише одна невідома.

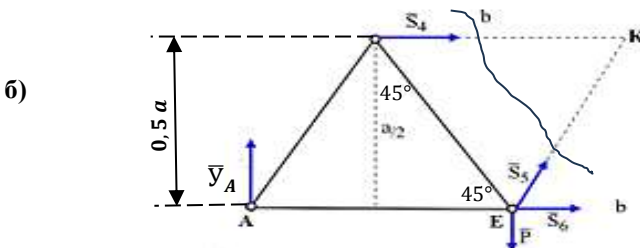
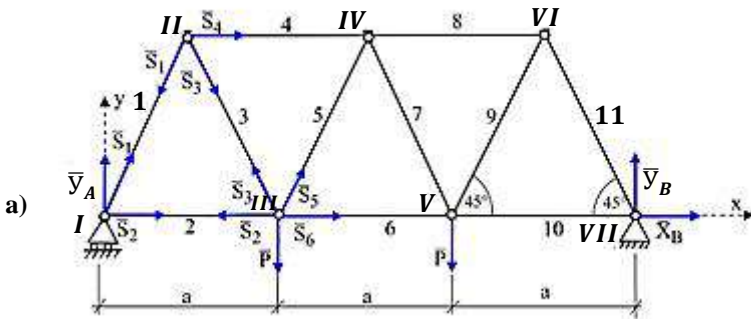
### Задача 4.45

Дано:

$$P = 100 \text{ кН};$$

$$\alpha = 45^\circ.$$

Визначити:  $S_1, \dots, S_6$ —?



1) Перевірка умови жорсткості

$N = 11$  – число стержнів

$n = 7$  - число вузлів

$N = 2n - 3; 11 = 2 \cdot 7 - 3; 11 = 11$  Умова жорсткості

виконується, ферма статично визначувана.

2) Визначення реакцій опор

$$\sum M_{Ai} = 0; Y_B \cdot 3a - P \cdot a - 2P \cdot a = 0; Y_B = P.$$

$$\sum X_i = 0; X_B = 0.$$

$$\sum M_{Bi} = 0; -Y_A \cdot 3a + P \cdot a + 2P \cdot a = 0; Y_A = P.$$

3) Визначаємо зусилля в стержнях методом вирізання вузлів. Умовно вирізаємо вузли, вважаючи усі стержні розтягнутими, зусилля в них напрямляємо від вузлів. В вузлах отримуємо збіжні системи сил (плоскі). Така система допускає тільки два рівняння ( $\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0$ ). Тому розрахунки починаємо з вузла I, де сходяться дві невідомі сили  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  (Рис. а).

Вузол I.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; S_1 \cos 45^\circ + S_2 = 0; \\ \sum Y_i = 0; S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0; \end{cases}$$

$$S_1 = \frac{-Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-P}{0,707} = -141 \text{ кН};$$

$$S_2 = -S_1 \cos 45^\circ = 141 \cdot 0,707 = 100 \text{ кН}.$$

Вузол II.

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0; (-S_1 - S_3) \sin 45^\circ = 0; \\ \sum X_i = 0; (S_3 - S_1) \cos 45^\circ + S_4 = 0; \end{cases}$$

$$S_4 = -200 \text{ кН}; \quad S_3 = -S_1 = 141 \text{ кН}.$$

Вузол III.

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0; S_5 \sin 45^\circ + S_3 \sin 45^\circ - P = 0; \\ S_5 \sin 45^\circ = P - S_3 \sin 45^\circ = 0 \text{ кН}; S_5 = 0; \\ \sum X_i = 0; S_6 + S_5 \cos 45^\circ - S_2 - S_3 \cos 45^\circ = 0; \\ S_6 = S_2 + S_3 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 200 \text{ кН}. \end{cases}$$

4) Перевіримо зусилля в стержнях 4,5,6 методом Ріттера. Умовно розріжемо ферму перерізом  $b - b$  та розглянемо рівновагу лівої частини (Рис. б). Дію видкинутої частини замінимо зусиллями в стержнях  $S_4, S_5, S_6$ . Моментні точки  $K$  і  $E$ .

$$\sum M_{Ki} = 0; -Y_A \cdot 1,5a + P \cdot 0,5a + S_6 \cdot 0,5a = 0$$

$$0,5 S_6 = Y_A \cdot 1,5 - P \cdot 0,5 = P \cdot 1,5 - P \cdot 0,5 = P;$$

$$S_6 = 200 \text{ кН.}$$

$$\sum M_{Ei} = 0; -Y_A \cdot a - S_4 \cdot 0,5a = 0; S_4 = 2Y_A = 200 \text{ кН;}$$

$$\sum Y_i = 0; S_5 \sin 45^\circ + Y_A - P = 0; .$$

$$S_5 \sin 45^\circ = P - Y_A = P - P = 0. \quad S_5 = 0.$$

**Відповідь:**

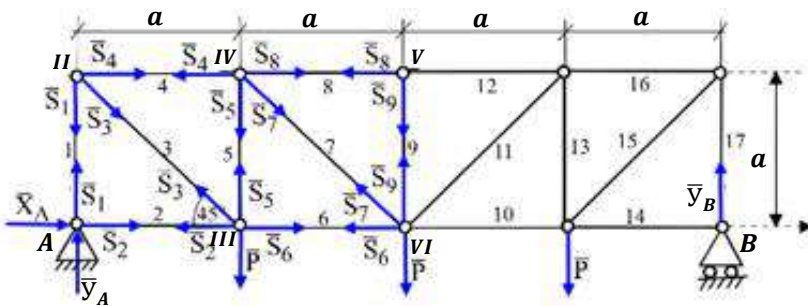
Метод	Зусилля в стержнях, кН					
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
Вирізання вузлів	-141	100	141	200	0	200
Ріттера				200	0	200
Напряманавантаження	стискання	розтяг	розтяг	розтяг		розтяг

### Задача 4.46

**Дано:**

$P = 100 \text{ кН}; \alpha = 45^\circ$  Розміри в м вказані на рисунку.

**Визначити:** реакції опор та зусилля в стержнях  $S_1, \dots, S_9$ —?



1) Умова жорсткості:

$N = 17$  – число стержнів

$n = 10$  - число вузлів

$$N = 2n - 3; 17 = 2 \cdot 10 - 3; 17 = 17$$

Умова жорсткості виконується, ферма статично визначувана.

2) Визначення реакцій опор:

$$\sum X_i = 0; X_A = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; -P \cdot a - P \cdot 2a - P \cdot 3a + Y_B \cdot 4a = 0;$$

$$4Y_B = 6P; Y_B = 1,5P = 150 \text{ кН.}$$

$$\sum M_{Bi} = 0; P \cdot a + 2P \cdot a + 3Pa - 4Y_A a = 0; 4Y_A = 6P;$$

$$Y_A = 1,5P = 150 \text{ кН.}$$

3) Визначаємо зусилля в стержнях методом вирізання вузлів.

Вузол I.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; S_2 + X_A = 0; S_2 = 0; \\ \sum Y_i = 0; S_1 + Y_A = 0; S_1 = -Y_A = -150 \text{ кН.} \end{cases}$$

Вузол II.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; S_4 + S_3 \sin 45^\circ = 0; \\ \sum Y_i = 0; -S_1 - S_3 \cos 45^\circ = 0; S_3 = \frac{-S_1}{\cos 45^\circ} = \frac{150}{0,707} = 212 \text{ кН} \\ S_4 = -S_3 \sin 45^\circ = -212 \cdot 0,707 = -150 \text{ кН.} \end{cases}$$

Вузол III.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; S_6 - S_3 \cos 45^\circ - S_2 = 0; S_6 = S_3 \cos 45^\circ + S_2 = 150 \text{ кН}; \\ \sum Y_i = 0; S_5 - P + S_3 \sin 45^\circ = 0; \\ S_5 = P - S_3 \sin 45^\circ = 100 - 212 \cdot 0,707 = -50 \text{ кН.} \end{cases}$$

Вузол IV.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; S_8 - S_4 + S_7 \sin 45^\circ = 0; \\ S_8 = S_4 - S_7 \sin 45^\circ = -150 - 50 = -200 \text{ кН.} \\ \sum Y_i = 0; -S_5 - S_7 \cos 45^\circ = 0; \\ S_7 = S_5 / \cos 45^\circ = 50 / 0,707 = 71 \text{ кН.} \end{cases}$$

Вузол V.

$$\sum Y_i = 0; -S_9 = 0.$$

**Відповідь:**  $Y_A = 150 \text{ кН}, X_A = 0 \text{ кН}, Y_B = 150 \text{ кН}.$

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	-150	0	212	-150	-50	150	71	-200	0

### Задача 4.67

**Дано:**

$$F_1 = F_2 = 2 \text{ кН}; F_3 = 1 \text{ кН} = F_4;$$

розміри (м) та кути дані на рисунку.

**Визначити:**  $Y_A, X_B, Y_B$  та зусилля в стержнях—?

1) Умова жорсткості:

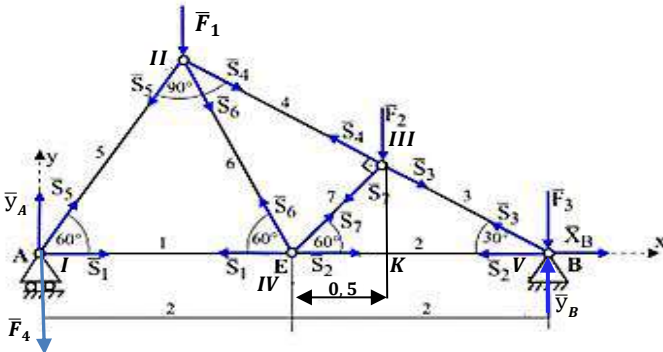
$$N = 7 - \text{число стержнів}$$

$$n = 5 - \text{число вузлів}$$

$$N = 2n - 3; 7 = 2 \cdot 5 - 3; 7 = 7. \text{ Умова жорсткості}$$

виконується, ферма статично визначувана.

2) Визначення реакцій зв'язків ( $\ell_5 = 2\text{ м}; \ell_7 = 1\text{ м};$



$$EK = 1 \cdot \cos 60^\circ = 0,5 \text{ м}.$$

$$\sum M_{Ai} = 0; Y_B \cdot 4 - F_1 \cdot 1,0 - F_2 \cdot 2,5 - F_3 \cdot 4 = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{4}(F_1 \cdot 1,0 + F_2 \cdot 2,5 + F_3 \cdot 4) = \frac{11}{4} = 2,75 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{Bi} = 0; -Y_A \cdot 4 + F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 1,5 + F_4 \cdot 4 = 0;$$

$$Y_A = \frac{1}{4}(F_1 \cdot 3 + F_4 \cdot 4 + F_2 \cdot 1,5) = \frac{13}{4} = 3,25 \text{ кН}.$$

$$\sum X_i = 0; X_B = 0.$$

3) Визначаємо зусилля в стержнях методом вирізання вузлів.

Вузол I.

$$\sum X_i = 0; S_1 + S_5 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A + S_5 \sin 60^\circ - F_4 = 0;$$

$$S_5 = \frac{-Y_A + F_4}{\sin 60^\circ} = \frac{-3,25 + 1}{0,866} = -2,6 \text{ кН};$$

$$S_1 = -S_5 \cos 60^\circ = 1,3 \text{ кН}.$$

Вузол II.

$$\sum Y_i = 0; -(F_1 + S_5 \sin 60^\circ + S_6 \sin 60^\circ + S_4 \sin 30^\circ) = 0;$$

$$\sum X_i = 0; (S_6 - S_5) \cos 60^\circ + S_4 \cos 30^\circ = 0;$$

$$S_4 = -2,5 \text{ кН};$$

$$S_6 = 1,73 \text{ кН}.$$

Вузол III.

$$\sum X_i = 0; (S_3 - S_4) \cos 30^\circ - S_7 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; (S_4 - S_3) \sin 30^\circ - S_7 \sin 60^\circ - F_2 = 0;$$

$$S_7 = -1,73 \text{ кН};$$

$$S_3 = -3,5 \text{ кН}.$$

Вузол IV.

$$\sum Y_i = 0; S_6 \sin 60^\circ + S_7 \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum X_i = 0; S_1 + S_2 + (S_7 - S_6) \cos 60^\circ = 0;$$

$$S_2 = 3,03 \text{ кН};$$

$$S_7 = -S_6 = -1,73 \text{ кН}.$$

Для перевірки розглянемо вузол V (точка B).

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; -S_2 - S_3 \cos 30^\circ + X_B = 0; \\ -3,03 - (-3,5) \cdot 0,866 &= -3,03 + 3,03 \equiv 0 \\ \sum Y_i &= 0; Y_B + S_3 \sin 30^\circ - F_3 = 0; \\ 2,75 - 3,5 \cdot 0,5 - 1 &\equiv 0;\end{aligned}$$

Якщо всі зусилля визначено вірно, то в кожному вузлі рівняння рівноваги повинні дорівнювати  $0 \equiv 0$ .

**Відповідь:**  $Y_A = 3,25 \text{ кН}, X_B = 0, Y_B = 2,75 \text{ кН}$ .

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля, кН	1,3	3,03	-3,5	-2,5	-2,6	1,73	-1,73

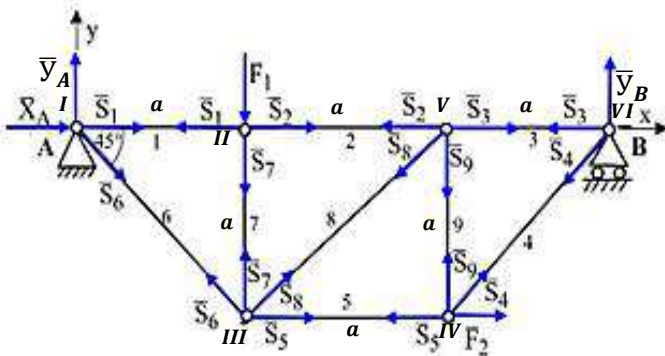
Стержні 3,4,5,7 – стиснуті. Ці стержні потрібно перевірити в розрахунках на стійкість в реальних конструкціях.

### Задача 4.70

**Дано:**

$$F_1 = 4 \text{ кН}; F_2 = 1 \text{ кН};$$

розміри (м) та кути дані на рисунку.



**Визначити:**  $X_A, Y_A, Y_B$  та зусилля в стержнях  $S_1, \dots, S_9$ —?

1) Умова жорсткості:

$N = 9$  – число стержнів

$n = 6$  - число вузлів

$$N = 2n - 3; 9 = 2 \cdot 6 - 3; 9 = 9$$

Умова жорсткості виконується, ферма статично визначувана.

2) Визначення реакцій в'язів

$$\sum X_i = 0; X_A + F_2 = 0; X_A = -F_2 = -1 \text{ кН.}$$

$$\sum M_{Ai} = 0; -F_1 \cdot a + Y_B \cdot 3a + F_2 \cdot a = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{3}(F_1 - F_2) = \frac{1}{3}(4 - 1) = 1 \text{ кН.}$$

$$\sum M_{Bi} = 0; -Y_A \cdot 3a + F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot a = 0;$$

$$Y_A = \frac{1}{3}(F_1 \cdot 2 + F_2) = \frac{1}{3}(8 + 1) = 3 \text{ кН.}$$

3) Визначаємо зусилля в стержнях методом вирізання вузлів.

Вузол I. (Точка A).

$$\sum Y_i = 0; Y_A - S_6 \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum X_i = 0; X_A + S_1 + S_6 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_6 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{0,707} = 4,24 \text{ кН;}$$

$$S_1 = -X_A - S_6 \cos 45^\circ = 1 - 3 = -2 \text{ кН.}$$

Вузол II.

$$\sum X_i = 0; -S_1 + S_2 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; -F_1 - S_7 = 0;$$

$$S_2 = S_1 = -2 \text{ кН;}$$

$$S_7 = -F_1 = -4 \text{ кН;}$$

Вузол III.

$$\sum Y_i = 0; S_6 \cos 45^\circ + S_7 + S_8 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum X_i = 0; (S_8 - S_6) \sin 45^\circ + S_5 = 0;$$

$$S_8 = \frac{-S_7}{\cos 45^\circ} - S_6 = \frac{4}{0,707} - 4,24 = 1,41 \text{ кН;}$$

$$S_5 = -(S_8 - S_6) \sin 45^\circ = -(1,41 - 4,24) \cdot 0,707 = 2 \text{ кН.}$$

Вузол IV.

$$\sum X_i = 0; S_4 \cos 45^\circ + F_2 - S_5 = 0;$$

$$S_4 = \frac{S_5 - F_2}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{0,707} = 1,41 \text{ кН};$$

$$\sum Y_i = S_9 + S_4 \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_9 = -S_4 \sin 45^\circ = -1,41 \cdot 0,707 = -1 \text{ кН}.$$

Вузол V.

$$\sum X_i = 0; S_3 - S_2 - S_8 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_3 = S_2 + S_8 \cos 45^\circ = -2 + 1,41 \cdot 0,707 = -1 \text{ кН}.$$

Для перевірки розглянемо вузол VI (точка B).

$$\sum X_i = 0; -S_3 - S_4 \cos 45^\circ = 0;$$

$$1 - 1,41 \cdot 0,707 = 1 - 1 \equiv 0;$$

$$\sum Y_i = 0; Y_B - S_4 \sin 45^\circ = 0;$$

$$1 - 1,41 \cdot 0,707 = 1 - 1 \equiv 0.$$

**Відповідь:**  $Y_A = 3 \text{ кН}, X_A = -1 \text{ кН}, Y_B = 1 \text{ кН}.$

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	-2	-2	-1	1,41	2	4,24	-4	1,41	-1

## 2.5 Сили тертя

## Задача 5.7

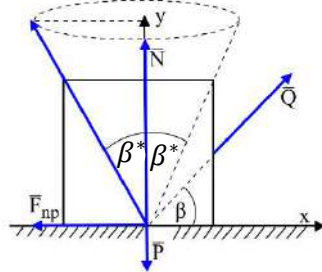
**Дано:**

$P; f.$

**Визначити:**  $Q_{min} - ?, \beta - ?$

при граничній рівновазі.

За умовами задачі необхідно розглянути граничне положення рівноваги ящика (вантажа). В цьому положенні на нього діють сили  $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}$  ( $\bar{F}_{\text{тр}}$  – гранична сила тертя).



Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; Q \cos \beta - F_{\text{тр}} = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; N + Q \sin \beta - P = 0 \quad (2)$$

$$\text{З (2) } N = P - Q \sin \beta.$$

$$\text{Тоді } F_{\text{тр}} = fN = f(P - Q \sin \beta).$$

Підставимо це  $F_{\text{тр}}$  до (1), визначимо найменше значення сили  $\bar{Q}$ , щоб здвинути ящик.

$$Q \cos \beta - f(P - Q \sin \beta) = 0, \text{ звідси } Q_{\min} = \frac{Pf}{\cos \beta + f \sin \beta}.$$

Кут  $\beta^*$  визначимо з співвідношення:

$$\text{tg } \beta^* = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{f(P - Q \sin \beta)}{P - Q \sin \beta} = f; \quad \beta^* = \arctg f..$$

Якщо сила  $\bar{Q}$  буде прикладена нижче кута  $\beta^*$  або на границі (за конусом тертя), то може початися рух ящика!!!

**Відповідь:**

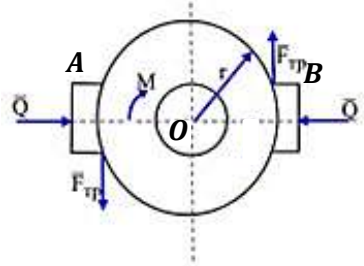
$$Q_{\min} = \frac{Pf}{\cos \beta^* + f \sin \beta^*} \cdot \beta^* = \arctg f.$$

## Задача 5.21

Дано:

$$M=100 \text{ Нм}; r=0,25 \text{ м};$$

$$f = 0,25.$$



**Визначити:**  $Q$  в стані спокою.

До колеса радіуса  $r$  прикладена пара сил з моментом  $M$ . Яку силу  $\bar{Q}$  потрібно прикласти до гальмівних колодок  $A$  і  $B$ , щоб колесо залишалось в спокої?

Між колесом та гальмами сила тертя дорівнює:

$$F_{\text{тр}} = Q \cdot f.$$

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_{O_i} = 0; -M + F_{\text{тр}} \cdot 2r = 0 \text{ або } -M + Q \cdot 2r \cdot f = 0$$

звідси

$$Q = \frac{M}{2r \cdot f} = \frac{100}{2 \cdot 0,25 \cdot 0,25} = \frac{100}{0,125} = 800 \text{ Н}.$$

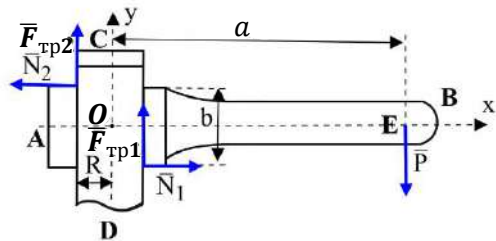
**Відповідь:**  $Q = 800 \text{ Н}$ .

## Задача 5.26

Дано:

$$b = 2 \text{ см}; f = 0,1; P$$

**Визначити:**  $a = ?$



До стержня  $AB$  з втулкою в точці  $E$  на відстані  $OE = a$  прикладена сила  $P$ . Втулка довжиною  $b$  натягнута на

вертикальний стержень  $CD$  радіуса  $R$ . На якій відстані  $a$  треба прикласти силу  $\bar{P}$ , щоб система знаходилася в рівновазі?

Коефіцієнт тертя втулки по стержню -  $f$ .

$$\sum X_i = 0; N_1 - N_2 = 0; N_1 = N_2,$$

$$F_{\text{тр}1} = f N_1 = F_{\text{тр}2} = f N_2 = F_{\text{тр}};$$

$$\sum Y_i = 0; F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} - P = 0; 2 F_{\text{тр}} = P;$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{P}{2}.$$

$$\sum M_{O_i} = 0; F_{\text{тр}1} \cdot R - F_{\text{тр}2} \cdot R + N_1 \cdot \frac{b}{2} + N_2 \cdot \frac{b}{2} - P \cdot a = 0;$$

Звідси

$$N \cdot b = P \cdot a; F_{\text{тр}} = N \cdot f = \frac{P}{2} \rightarrow N = \frac{P}{2f}.$$

$$\frac{Pb}{2f} = Pa \rightarrow a = \frac{b}{2f} = \frac{2}{2 \cdot 0,1} = 10 \text{ см.}$$

**Відповідь:**  $a = 10$  см.

При  $a \geq 10$  см під дією сили  $\bar{P}$  система буде знаходитися в рівновазі. При  $a \leq 10$  см стержень  $AB$  почне переміщуватися вниз по стійці  $CD$ .

## Задача 5.27

Дано:

$$f_A = f_1; f_B = f_2; P; n; m; a.$$

Визначити:  $N_A, N_B, \alpha$  в

положенні рівноваги.

$$F_{\text{тр}A} = N_A \cdot f_1;$$

$$F_{\text{тр}B} = N_B \cdot f_2.$$

Вага драбини з людиною -  $\bar{P}$ ,  
 $f_1, f_2$  - коефіцієнти тертя для  
 стін та підлоги. Напишемо  
 рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; N_A - F_{\text{тр}B} = 0; N_A - N_B \cdot f_2 = 0; N_A = N_B \cdot f_2.$$

$$2) \sum Y_i = 0; F_{\text{тр}A} + N_B - P = 0; N_A \cdot f_1 + N_B - P = 0 \rightarrow$$

$$N_B \cdot f_1 \cdot f_2 - P + N_B = 0$$

$$N_B = \frac{P}{1 + f_1 \cdot f_2}; N_A = \frac{P \cdot f_2}{1 + f_1 \cdot f_2}.$$

$$3) \sum M_{Bi} = 0; P \sin \alpha \cdot ma - N_A(n + m)a \cdot \cos \alpha - N_A \cdot f_1(n + m)a \cdot \sin \alpha \leq 0.$$

$$\sin \alpha [P \cdot m - N_A \cdot f_1(n + m)] = \cos \alpha \cdot N_A(n + m), \text{ звідси}$$

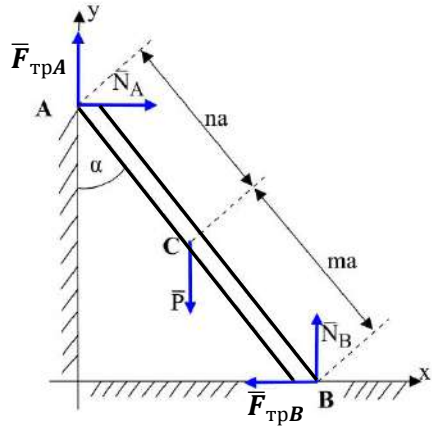
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N_A(n + m)}{P \cdot m - N_A \cdot f_1(n + m)},$$

Підставимо сюди  $N_A$  та отримаємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_2(n + m)}{m - n \cdot f_1 \cdot f_2}.$$

Відповідь:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_2(n + m)}{m - n \cdot f_1 \cdot f_2}; N_A = \frac{P \cdot f_2}{1 + f_1 \cdot f_2}; N_B = \frac{P}{1 + f_1 \cdot f_2}.$$



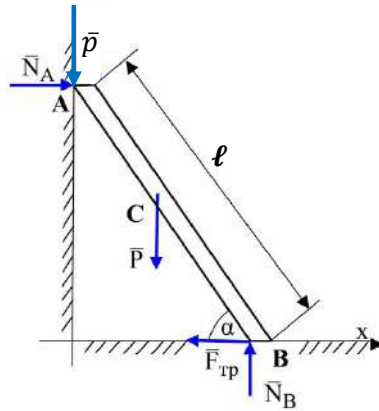
## Задача 5.28

**Дано:** $\bar{P}$  – вага драбини; $\bar{p}$  – вага людини; $f_{ст} = 0$  коефіцієнт тертя

стіни;

 $f$  – коефіцієнт тертя

підлоги.



**Визначити:**  $\alpha$  в коли людина на верху (т.  $A$ ).

Кут  $\alpha$  визначаємо з рівноваги системи для моменту, коли людина піднялася в точку  $A$ .

$$\sum Y_i = 0; \quad N_B - P - p = 0; \quad N_B = P + p.$$

$$F_{тр} = N_B \cdot f = (P + p)f.$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad N_B \cdot l \cos \alpha - P \frac{l}{2} \cos \alpha - F_{тр} l \sin \alpha = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N_B - P/2}{F_{тр}} = \frac{P + p - P/2}{(P + p)f} = \frac{P + 2p}{2(P + p)f}.$$

**Відповідь:**

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{P + 2p}{2(P + p)f}.$$

## Задача 5.38

**Дано:**

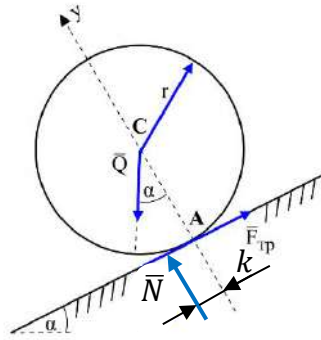
$\bar{Q}$  - вага ролика;

$r = 50$  ;  $k = 0,05$  мм

(коефіцієнт тертя кочення).

**Визначити:**  $\alpha$  при рівномірному коченні ( $\bar{v}_C = const$ ).

Ролик вагою  $\bar{Q}$  котиться по гладкої поверхні.  $k$  – коефіцієнт тертя кочення (сталь-сталь). Визначити кут  $\alpha$  - нахилу площини при рівномірному коченні.



Складемо рівняння рівноваги (в стані спокою або рівномірного руху – I закон Ньютона)

$$\sum Y_i = 0; N - Q \cos \alpha = 0 \rightarrow N = Q \cos \alpha.$$

$$F_{\text{тр}} = Nf = Q \cdot f \cos \alpha.$$

$$\sum M_{Ai} = 0; -N \cdot k + Q \sin \alpha \cdot r = 0$$

Підставимо сюди  $N = Q \cos \alpha$ , отримаємо

$$-Q \cos \alpha \cdot k + Q \sin \alpha \cdot r = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{r}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,05}{100} = 0,001;$$

$$\alpha = 3'26''.$$

**Відповідь:**  $\alpha = 3'26''$ . При такому куті нахилу буде стан рівноваги або рівномірний рух.

## Задача 5.39

Дано:

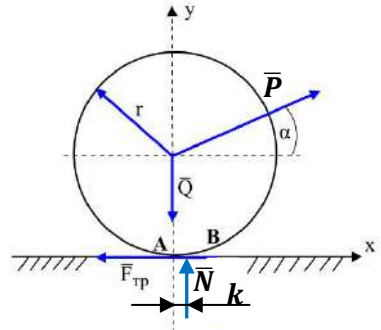
$$Q=300 \text{ Н}; d=60 \text{ см}$$

$$\alpha = 30^\circ, k = 0,5 \text{ см}$$

**Визначити:**  $P$  при рівномірному коченні.

Визначити силу  $\bar{P}$  при рівномірному коченні.

$k$  – коефіцієнт тертя кочення.



Рівняння рівноваги:

$$\sum Y_i = 0; N - Q + P \sin \alpha = 0 \rightarrow N = Q - P \sin \alpha;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; N \cdot k - P r \cos \alpha = 0$$

Підставивши сюди  $N$ , отримаємо

$$(Q - P \sin \alpha) k - P r \cos \alpha = 0.$$

$$P = \frac{Q \cdot k}{r \cos \alpha + k \sin \alpha} = \frac{300 \cdot 0,5}{30 \cdot 0,866 + 0,5 \cdot 0,5} = 5,72 \text{ Н}$$

**Відповідь:**  $P = 5,72 \text{ Н}$ .

*Для нотаток*

*Для нотаток*

*Для нотаток*

### 3. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

**Лема Пуансо.** Не змінюючи дії сили, прикладеної в точці тіла, на це тіло, її можна переносити паралельно самій собі в іншу довільну точку тіла, додавши при цьому пару сил з моментом, який дорівнює моменту заданої сили відносно нової точки.

**Основна теорема статки.** Довільну систему сил можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, прикладеної у довільно вибраній точці (центр зведення), і яку називають **головним вектором** даної системи сил, і однієї пари сил, момент якої називають **головним моментом** даної системи сил.

$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$  - головний вектор системи сил.

$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_i)$  - головний момент системи сил відносно центра зведення  $O$ .

Проекції головного вектора системи сил на осі координат:

$$R_x = \sum F_{ix}; R_y = \sum F_{iy}; R_z = \sum F_{iz}.$$

Модуль і напрям головного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (3.1)$$

$$\cos\angle(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \cos\angle(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}; \cos\angle(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{R}.$$

Головний момент системи сил відносно центру  $O$ :

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_i).$$

Проекції головного моменту системи сил на осі координат:

$$M_{Ox} = \sum m_x(\vec{F}_i); M_{Oy} = \sum m_y(\vec{F}_i); M_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_i).$$

Модуль і напрям головного моменту:

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}; \quad (3.2)$$

$$\cos\angle(\bar{M}_O, x) = \frac{M_{Ox}}{M_O}; \cos\angle(\bar{M}_O, y) = \frac{M_{Oy}}{M_O}; \cos\angle(\bar{M}_O, z) = \frac{M_{Oz}}{M_O}.$$

Рівняння лінії дії головного вектора (або центральної вісі):

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}. \quad (3.3)$$

### 3.1 Зведення довільної системи сил до заданого виду

#### Інваріанти системи довільної просторової системи сил.

При зміні центра зведення не змінюються головний вектор ( $J_1$ ) і скалярний добуток ( $J_2$ ) головного вектора і головного моменту:

$$J_1 = \bar{R} = \sum \bar{F}_k; \quad J_2 = \bar{R} \cdot \bar{M}_O. \quad (3.4)$$

$$\text{Тут } \bar{R} \cdot \bar{M}_O = R_x \cdot M_{Ox} + R_y \cdot M_{Oy} + R_z \cdot M_{Oz}. \quad (3.5)$$

При зміні центра зведення проекція головного моменту на напрям головного вектора не змінюється. (При  $R \neq 0$  цей висновок можна прийняти за визначення другої інваріанти).

Проекція головного моменту ( $M^* = M_{min}$ ) на напрям головного вектора визначається рівнянням:

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{(\bar{R} \cdot \bar{M}_O)}{R} = \\ &= \frac{1}{R} (R_x \cdot M_{Ox} + R_y \cdot M_{Oy} + R_z \cdot M_{Oz}) = M_{min}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Якщо другий статичний інваріант не дорівнює нулю ( $J_2 \neq 0$ ), то систему можна звести до динамічного гвинта

(динами). Динамічний гвинт – це сукупність сили (головний вектор  $\bar{R}$ ) і пари сил з моментом  $M_{min} = M^*$ . Параметр гвинта

$$\rho = \frac{M_{min}}{R}. \quad (3.7)$$

### Випадки зведення довільної просторової системи сил.

1. Головний вектор  $\bar{R}$  і головний момент  $\bar{M}_O$  дорівнюють нулю:

$\bar{R} = \sum(\bar{F}_k) = 0$  і  $\bar{M}_O = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k) = 0$  – рівновага довільної системи сил.

2.  $\bar{R} = 0$ ;  $\bar{M}_O \neq 0$ .

Система зводиться до пари сил з моментом  $\bar{M}_O$ . В даному випадку головний момент системи сил  $\bar{M}_O$  не залежить від вибору центру зведення.

3.  $\bar{R} \neq 0$ ;  $\bar{M}_O = 0$ .

Система сил зводиться до рівнодіючої  $\bar{R}$ , яка прикладена до центру зведення.

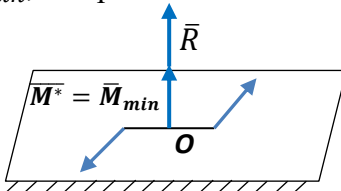
4.  $\bar{R} \neq 0$ ;  $\bar{M}_O \neq 0$ ;  $\bar{R} \perp \bar{M}_O$ .

Система сил зводиться до рівнодіючої  $\bar{R}' = \bar{R}$ , лінія дії якої розташована від рівнодіючої  $\bar{R}$  на відстані

$$h = \frac{M_O}{R}.$$

5.  $\bar{R} = 0$ ;  $\bar{M}_O \neq 0$  і  $\angle(\bar{R}; \bar{M}_O) \neq 90^\circ$ .

Система зводиться до динами - сукупності сили  $\bar{R}$  і пари сил  $M^* = M_{min}$ , яка розташована в площині, перпендикулярній до  $\bar{R}$ .

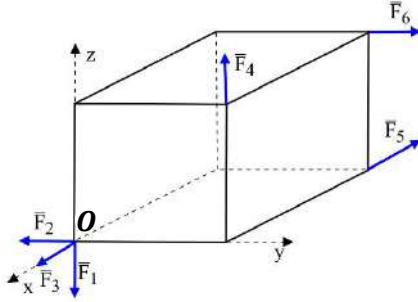


## Задача 7.1

**Дано:**

$F_1, F_2 \dots F_6$ ; куб з  
сторонами  $a$ .

**Визначити:** якими  
повинні бути сили, щоб  
система знаходилася в  
рівновазі?



Визначаємо головний вектор і головний момент системи.

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = F_3 - F_5; \\ R_y &= \sum F_{iy} = -F_2 + F_6; \\ R_z &= \sum F_{iz} = F_4 - F_1. \end{aligned} \right\} (1) R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum M_{ix} = F_4 \cdot a - F_6 \cdot a; \\ M_y &= \sum M_{iy} = 0; \\ M_z &= \sum M_{iz} = F_5 \cdot a - F_1 \cdot a \end{aligned} \right\} (2) M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}.$$

Для того, щоб система знаходилася в рівновазі необхідно та достатньо, щоб  $R = 0$  і  $M_O = 0$ .

Для цього потрібно, щоб в модулях головного вектору і головного моменту всі складові дорівнювали нулю.

$$R_x = R_y = R_z = 0, M_x = M_y = M_z = 0.$$

**Відповідь:**

Для цього необхідно, щоб були рівні між собою усі сили, тобто

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6.$$

Або усі сили дорівнюють нулю  $F_1 = F_2 = \dots = F_6 = 0$ .

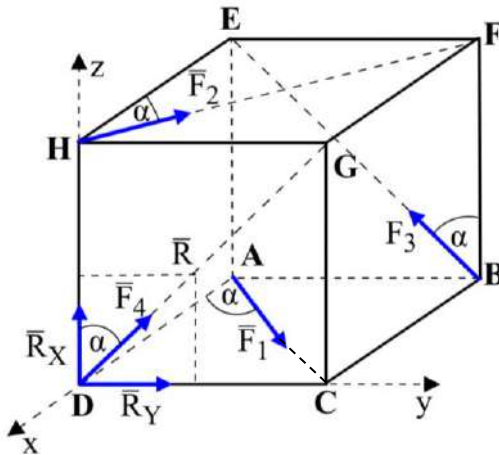
## Задача 7.3

Дано:

$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$ ; куб з сторонами  $a$ ,  
 $\alpha = 45^\circ$ .

Визначити:

$R, M_D$ —?



Визначаємо головний вектор:

$$R_x = F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha = 0;$$

$$R_y = (F_1 + F_2 - F_3 + F_4) \sin \alpha = 2F \sin 45^\circ;$$

$$R_z = (F_3 + F_4) \cos \alpha = 2F \cos 45^\circ.$$

$$R = \sqrt{R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{4F^2 + 4F^2} \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2F.$$

Визначаємо головний момент:

$$M_x = -F_2 \sin \alpha \cdot a + F_3 \cos \alpha \cdot a = 0;$$

$$M_y = -F_2 \cos \alpha \cdot a + F_3 \cos \alpha \cdot a = 0;$$

$$M_z = -F_1 \sin \alpha \cdot a + F_3 \sin \alpha \cdot a = 0.$$

$$M_D = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0.$$

**Відповідь:**

Система звелася до однієї сили  $R = 2F$  (рівнодіючої), яка лежить в площі  $CDH$  і напрямлена по  $DG$  ( $R_x = 0$ ) та до головного моменту  $M_D = 0$ .

### Задача 7.10

**Дано:**

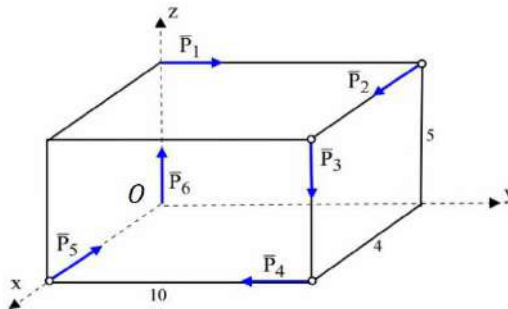
$$P_1 = 4 \text{ Н}; P_2 = 6 \text{ Н}; P_3 = 3 \text{ Н};$$

$$P_4 = 2 \text{ Н}; P_5 = 6 \text{ Н}; P_6 = 8 \text{ Н};$$

Сили  $P_1, \dots, P_6$  напрямлені по ребрам паралелепіпеда; розміри вказані на рисунку в м.

**Визначити:** 1) головний вектор та головний момент системи;

2) координати  $x$  та  $y$  точки перетину центральної гвинтової осі з площиною  $Oxy$ .



1) Визначаємо модуль та напрямляючі косинуси головного вектору:

$$R_x = P_2 - P_5 = 6 - 6 = 0;$$

$$R_y = P_1 - P_4 = 4 - 2 = 2 \text{ H};$$

$$R_z = -P_3 + P_6 = -3 + 8 = 5 \text{ H}.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5,4 \text{ H}.$$

Напрявляючи косинуси:

$$\cos \alpha = \cos \angle(\bar{R}, x) = \frac{R_x}{R} = \frac{0}{5,4} = 0; \alpha = 90^\circ;$$

$$\cos \beta = \cos \angle(\bar{R}, y) = \frac{R_y}{R} = \frac{2}{5,4} = 0,37; \beta = 68^\circ;$$

$$\cos \gamma = \cos \angle(\bar{R}, z) = \frac{R_z}{R} = \frac{5}{5,4} = 0,93; \gamma = 22^\circ.$$

Вектор  $\bar{R} \perp$  до осі  $x$  та лежить в площині  $\parallel zOy$ .

1) Визначаємо модуль та проекції головного моменту:

$$M_x = \sum M_{ix} = -P_1 \cdot 5 - P_3 \cdot 10 = -50 \text{ H} \cdot \text{м};$$

$$M_y = \sum M_{iy} = P_2 \cdot 5 + P_3 \cdot 4 = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 42 \text{ H} \cdot \text{м};$$

$$M_z = \sum M_{iz} = -P_2 \cdot 10 - P_4 \cdot 4 = -68 \text{ H} \cdot \text{м};$$

Модуль головного моменту:

$$\begin{aligned} M_O &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{50^2 + 42^2 + 68^2} = \sqrt{8888} = \\ &= 94,276 = 94,3 \text{ H} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

З рівняння лінії дії рівнодіючої визначимо координати  $x$  і  $y$  точки її перетину з площею  $Oxy$ .

З початку перевіримо ортогональність (перпендикулярність)  $\bar{R}$  і  $\bar{M}_O$ :  $R_x \cdot M_x + R_y \cdot M_y + R_z \cdot M_z = 0$ .

$$0 \cdot (-50) + 2 \cdot (42) - 5 \cdot 68 \neq 0, \text{ тобто}$$

$\bar{R}$  не перпендикулярний до  $\bar{M}_O$ .

Рівняння лінії дії головного вектору :

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}. \quad (\text{A})$$

Дорівнюючи перші дві дробі в (А), отримаємо:

$$R_y(M_x - yR_z + zR_y) = R_x(M_y - zR_x + xR_z);$$

$$2(-50 - y \cdot 5 + z \cdot 2) = 0 \text{ при } z = 0; y = -10 \text{ м.}$$

Дорівнюючи другу та третю дробі в (А), отримаємо:

$$(42 + x \cdot 5) \cdot 5 = (-68 - x \cdot 2 + y \cdot 5) \text{ при } y = 0;$$

$$x = -11,9 \text{ м.}$$

Координати точки на площі  $Oxy$ , через яку проходить лінія дії головного вектора будуть:  $x = -11,9 \text{ м}; y = -10 \text{ м}; z = 0$ .

**Відповідь:**

$$R = 5,4 \text{ Н}, M_O = 94,3 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\alpha = 90^\circ; \beta = 68^\circ; \gamma = 22^\circ;$$

$$\text{або } \cos \alpha = 0; \cos \beta = 0,37; \cos \gamma = 0,93;$$

$$x = -11,9 \text{ м};$$

$$y = -10 \text{ м.}$$

### 3.2 Просторова збіжна система сил

(I) Геометрична умова рівноваги просторової системи збіжних сил (СЗС):

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0.$$

(II) Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил:

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = 0.$$

Для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на кожен з координатних осей дорівнювала нулю.

Рівнодіюча СЗС :

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i.$$

Модуль рівнодіючої

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

де  $R_x = \sum X_i$ ;  $R_y = \sum Y_i$ ;  $R_z = \sum Z_i$ .

Напрявляючі косинуси:

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{x, \vec{R}}) = \frac{R_x}{R};$$

$$\cos\beta = \cos(\widehat{y, \vec{R}}) = \frac{R_y}{R};$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{z, \vec{R}}) = \frac{R_z}{R}.$$

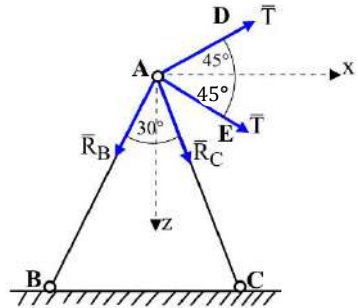
### Задача 6.1

**Дано:**

$T=1$  кН; кути дані на рисунку.

**Визначити:**  $R_B$  та  $R_C$

Площина  $ABC \perp$  площині  $ADE$ .  
Визначити зусилля в брусках  $AB$  та  $AC$ . Розглянемо рівновагу вузла  $A$ , в якому сходяться лінії дії усіх сил:



$$\sum Z_i = R_B \sin 75^\circ + R_C \sin 75^\circ = 0.$$

$$R_B = -R_C;$$

$$\sum X_i = 2T \cos 45^\circ + R_C \cos 75^\circ - R_B \cos 75^\circ = 0;$$

$$(R_C - R_B) \cos 75^\circ = -2T \cos 45^\circ$$

$$2R_C \cos 75^\circ = -2T \cos 45^\circ; R_C = \frac{-T \cos 45^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{-1 \cdot 0,707}{0,2588} =$$

$$= -2,73 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $R_B = 2,73$  кН;  $R_C = -2,73$  кН.

## Задача 6.3

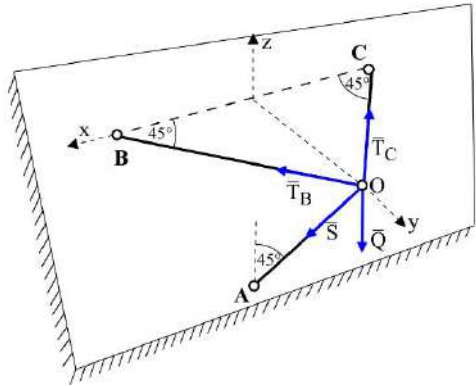
**Дано:**

$Q=100$  Н; кути дані на рисунку.

**Визначити:**  $S$  –? зусилля в стержні  $OA$ ;

$T_C, T_B$  – натяг ланцюгів  $OB$  та  $OC$ .

Розглянемо рівновагу вузла  $O$ , з урахуванням, що стержень  $OA$  та ланцюги  $OC$  і  $OB$  розтягнуті, зусилля в них напрямляємо від вузла  $O$ :



$$\sum X_i = 0; T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 45^\circ = 0;$$

$$T_B = T_C = T.$$

$$\sum Z_i = 0; -Q - S \cos 45^\circ = 0;$$

$$S = \frac{-Q}{\cos 45^\circ} = \frac{-100}{0,707} = -141 \text{ Н.}$$

Стержень  $OA$  стиснутий.

$$\sum Y_i = 0; -(T_C + T_B) \sin 45^\circ - S \sin 45^\circ = 0;$$

$$2T = -S \rightarrow T = \frac{-S}{2} = 70,5 \text{ Н.}$$

**Відповідь:**  $T_C = T_B = T = 70,5 \text{ Н}; S = -141 \text{ Н.}$

## Задача 6.4

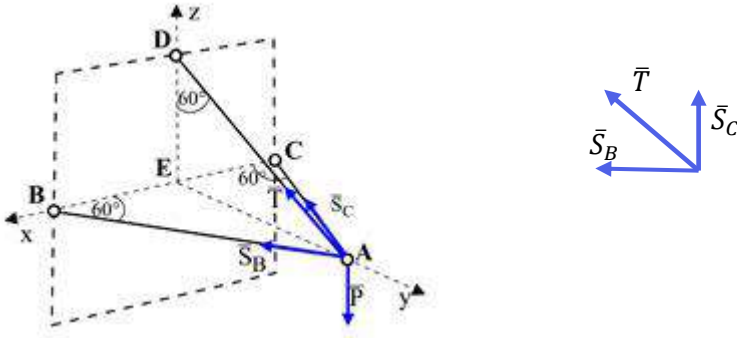
**Дано:**

$P = 300 \text{ H}$ ; кути дані на рисунку.

**Визначити:**  $T$ —? (натяг в тросі  $AD$ );

$S_C, S_B$  – зусилля в стержнях  $AB$  та  $AC$ .

Розглянемо рівновагу вузла  $A$ , з урахуванням, що стержні  $OA$  і  $OB$  розтягнуті, зусилля в них напрямляємо від вузла  $A$ :



$$\sum X_i = 0; S_B \cos 60^\circ - S_C \cos 60^\circ = 0;$$

$$S_B = S_C = S.$$

$$\sum Z_i = 0; -P + T \sin 30^\circ = 0;$$

$$T = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{300}{0,5} = 600 \text{ H}.$$

$$\sum Y_i = 0; -(S_C + S_B + T) \sin 60^\circ = 0;$$

$$S_C + S_B = -T \rightarrow 2S = -T;$$

$$S_C = S_B = \frac{-T}{2} = -300 \text{ H}.$$

Стержні  $AC$  і  $AB$  – стиснуті.

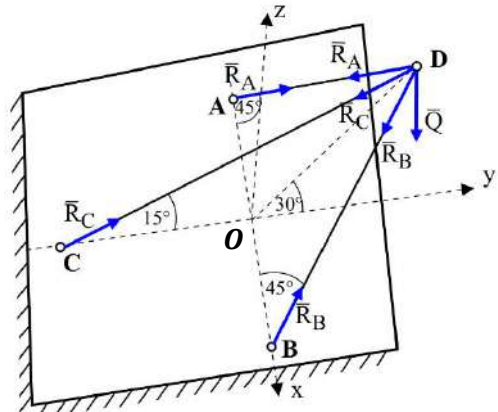
**Відповідь:**  $T = 600 \text{ H}, S_C = S_B = -300 \text{ H}.$

## Задача 6.8

**Дано:**

$Q=1$  кН; всі кути дані на рисунку

**Визначити:**  $R_A$ ,  $R_B$  та  $R_C$ —? (реакції!)  
Реакції опор перенесли за лініями їх дії в точку  $D$ .



Розглянемо рівновагу вузла  $D$ . Вважаємо, що всі стержні розтягнуті.

$$\sum X_i = 0; (R_B - R_A)\cos 45^\circ = 0; R_B = R_A.$$

$$\sum Y_i = 0; -(R_B + R_A)\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - R_C \cos 15^\circ = 0;$$

$$2R_B = -R_C \frac{\cos 15^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}. \quad (1)$$

$$\sum Z_i = 0; -(R_B + R_A)\sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ - R_C \sin 15^\circ - Q = 0;$$

Підставимо сюди (1):

$$R_C \frac{\cos 15^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ} - R_C \sin 15^\circ - Q = 0,$$

Звідси

$$R_C(\cos 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ - \sin 45^\circ) = Q;$$

$$R_C(0,966 \cdot 0,377 - 0,258) = Q;$$

$$R_C = \frac{Q}{0,29} = 3,35 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} 3(1) R_B &= -\frac{1}{2} 3,35 \frac{\cos 15^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ} = -\frac{3,35}{2} \frac{0,966}{0,707 \cdot 0,866} = \\ &= -2,64 \text{ кН}. \end{aligned}$$

**Відповідь:** Реакції  $R_C = 3,35$  кН,  $R_B = R_A = -2,64$  кН

### Задача 6.10

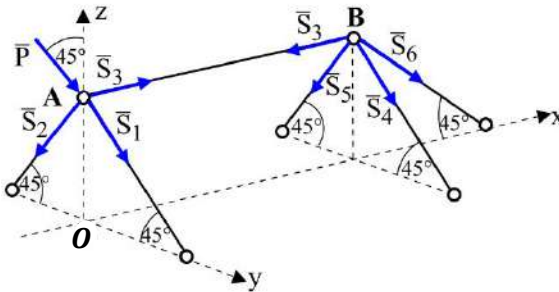
Дано:

$\vec{P} \parallel xOz$  ; всі кути дані на рисунку.

$P = 1 \text{ кН}$ .

Визначити:  $S_1, S_2, \dots, S_6$ —?

зусилля в стержнях ферми.



Розглянемо рівновагу вузлів  $A$  та  $B$ . Стержні – всі розтягнуті – зусилля направлені від вузлів.

Використовуємо метод вирізання вузлів. Зусилля  $\vec{S}_3$  в вузлах  $A$  і  $B$  дорівнюють за модулем та протилежні по знаку (на рис. це враховано).

Вузол  $A$ .

$$\sum X_i = 0; S_3 + P \sin 45^\circ = 0; S_3 = -P \sin 45^\circ = -0,707 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_i = 0; (S_1 - S_2) \cos 45^\circ = 0; S_1 = S_2.$$

$$\sum Z_i = 0; -(S_1 + S_2) \sin 45^\circ - P \cos 45^\circ = 0; 2S_1 = -P;$$

$$S_1 = \frac{-P}{2} = -0,5 \text{ кН.}$$

Вузол  $B$ .

$$\sum X_i = 0; -S_3 + S_6 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_6 = \frac{S_3}{\sin 45^\circ} = \frac{-0,707}{0,707} = -1 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_i = 0; (S_4 - S_5) \cos 45^\circ = 0; S_4 = S_5.$$

$$\sum Z_i = 0; -(S_5 + S_4) \sin 45^\circ - S_6 \sin 45^\circ = 0; 2S_5 = -S_6;$$

$$S_5 = S_4 = \frac{-S_6}{2} = 0,5 \text{ кН. (Стержні 4 і 5 – розтягнуті).}$$

**Відповідь:**

$$S_1 = S_2 = -0,5 \text{ кН, } S_3 = -0,707 \text{ кН, } S_4 = S_5 = 0,5 \text{ кН, } S_6 = -1 \text{ кН.}$$

### Задача 6.13

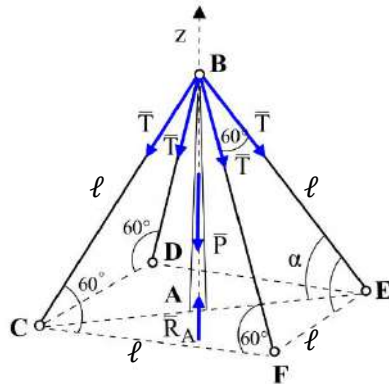
**Дано:**

$P=2$  кН;  $T=1$  кН; кути

при вершині  $B$  всі

дорівнюють  $60^\circ$ .

$P$  – вага мачти,  $T$  – натяг в тросах.



**Визначити:**  $R_A$  – ?

В усіх трикутниках кути при вершині  $B$  дорівнюють

$60^\circ$ , так як трикутники рівнобічні, то знизу кути теж по  $60^\circ$ . В основі піраміди  $BCDEF$  – квадрат з діагоналлю  $CE = l\sqrt{2}$ , а

$AE = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ . В трикутнику  $ABE$ :

$$\cos \alpha = \frac{AE}{BE} = \frac{l\sqrt{2}}{2l} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707; \alpha = 45^\circ.$$

(В піраміді всі сторони рівні).

Для визначення тиску мачти  $AB$  на ґрунт  $R_A$  складаємо рівняння:

$$\sum Z_i = 0; -4T \sin 45^\circ - P + R_A = 0.$$

$$R_A = 4T \sin 45^\circ + P = 4 \cdot 1 \cdot 0,707 + 2 = 4,83 \text{ кН.}$$

**Відповідь:** тиск мачти  $AB$  на землю в т. А дорівнює 4,83 кН.

### 3.3 Довільна просторова система сил

#### (I) Векторні умови рівноваги довільної системи сил.

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи і головний момент відносно довільно вибраного центра зведення одночасно дорівнював нулю:

$$\bar{R} = 0; \bar{M}_O = 0 \text{ або } \sum \bar{F}_i = 0; \sum \bar{m}_O(\bar{F}_i) = 0.$$

#### (II) Аналітичні умови рівноваги довільної системи сил.

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекції усіх сил системи на три координатні осі та алгебраїчна сума їх моментів відносно цих осей дорівнювала нулю:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = 0; \\ \sum M_{xi} &= 0; \sum M_{yi} = 0; \sum M_{zi} = 0. \end{aligned}$$

#### (III) Аналітичні умови рівноваги просторової системи паралельних сил.

Для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, паралельну цим силам, і алгебраїчна сума їх моментів відносно двох інших осей координат дорівнювали нулю:

$$\sum Z_i = 0; \sum M_{xi} = 0; \sum M_{yi} = 0; (\text{всі } \bar{F}_i \parallel oz).$$

**Момент силі відносно осі дорівнює нулю, якщо:**

- 1) сила паралельна до осі  $\bar{F} \parallel oz$ , проекції на інші осі = 0;
- 2) лінія дії сили перетинає вісь ( $h=0$ );
- 3) сила  $\bar{F} = 0$  (нема сили – нема проблем!)

## Задача 8.7

Дано:

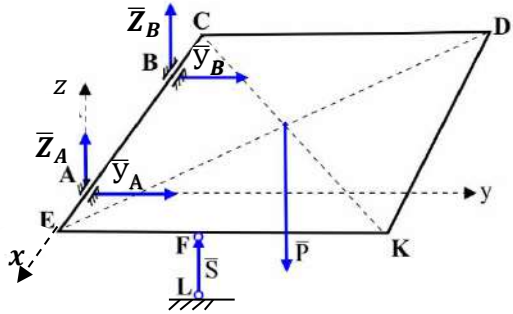
$$P=180 \text{ Н}; EC = 0,75 \text{ м};$$

$$CD = 2,3 \text{ м};$$

$$EF = 1,5 \text{ м};$$

$$AB = 0,45 \text{ м};$$

$$AE = BC = 0,15 \text{ м} .$$

Визначити:  $Y_A, Z_A,$  $Y_B, Z_B, S$ —?

Розглянемо рівновагу плити  $CDKE$  вагою  $P$ , яка закріплена шарнирами  $A$  і  $B$  та опирається на стойку  $FL$ . Розставимо реакції опор та складемо рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i \equiv 0;$$

$$2) \sum Y_i = Y_A + Y_B = 0;$$

$$3) \sum Z_i = Z_A + Z_B + S - P = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0; S \cdot EF - P \cdot \frac{CD}{2} = 0;$$

Звідси

$$S = \frac{P \cdot CD}{2EF} = \frac{180 \cdot 2,3}{2 \cdot 1,5} = 138 \text{ Н}.$$

$$5) \sum M_{yi} = 0;$$

$$Z_B \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} - S \cdot AE = 0.$$

$$AB = EC - AE - BC = 0,45 \text{ м}.$$

Звідси

$$Z_B = \frac{P}{2} + S \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{180}{2} + 138 \cdot \frac{0,15}{0,45} = 136 \text{ Н}.$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; -Y_B \cdot AB = 0; Y_B = 0,$$

(сили  $\bar{P}, \bar{S}, \bar{Z}_B, \bar{Z}_A \parallel Az$ )

$$3) Y_A = -Y_B = 0;$$

$$3) Z_A = -Z_B - S + P = -136 - 138 + 180 = -94 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $S = 138 \text{ кН}$ ;  $Z_A = -94 \text{ кН}$ ;  $Z_B = 136 \text{ кН}$ ;

$$Y_A = Y_B = 0.$$

### Задача 8.8

**Дано:**

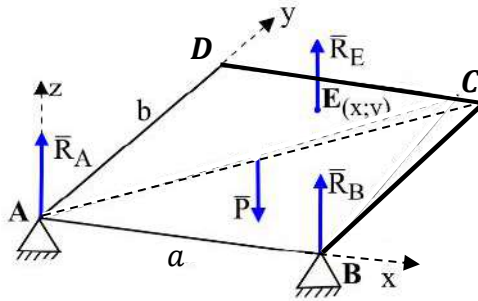
$P$  – вага пластини  $ABCD$  ;

$$R_A = \frac{P}{4}; R_B = \frac{P}{5};$$

$a; b$ .

**Визначити:**

$R_E, x, y$  (координати точки  $E$ ) –?



Пластина вагою  $P$  опирається в точках  $A, B$  та в точці  $E$  з координатами  $(x, y)$ . На пластину діють тільки паралельні сили. Усі сили  $\vec{F}_k \parallel Az$ . Складемо рівняння рівноваги для просторової системи паралельних сил.

$$\sum Z_i = 0; R_E + R_A + R_B - P = 0;$$

$$R_E = P - \frac{1}{4}P - \frac{1}{5}P = P - \frac{9}{20}P = \frac{11}{20}P.$$

$$\sum M_{xi} = 0;$$

$$R_E \cdot y - P \cdot \frac{b}{2} = 0; y = \frac{Pb}{2R_E} = \frac{10}{11}b;$$

$$\sum M_{yi} = 0;$$

$$-R_E \cdot x + P \cdot \frac{a}{2} - R_B \cdot a = 0;$$

$$x = \frac{P \frac{a}{2} - P \frac{a}{5}}{R_E} = \frac{\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{5}\right)}{11} = \frac{6}{11}a.$$

**Відповідь:**

$$R_E = \frac{11}{20}P; x = \frac{6}{11}a; y = \frac{10}{11}b.$$

### Задача 8.13

**Дано:**

$A, B$  – підшипники;

$P = 1 \text{ кН} = 1000 \text{ Н}$ ;

$r = 20 \text{ см}$ ;  $Q = 250 \text{ Н}$ .

$\angle ADE = \frac{\pi}{2}$ ;

розміри на рисунку в см.

---

**Визначити:**  $X_A, X_B, Z_A, Z_B, \ell$ –?



## Задача 8.14

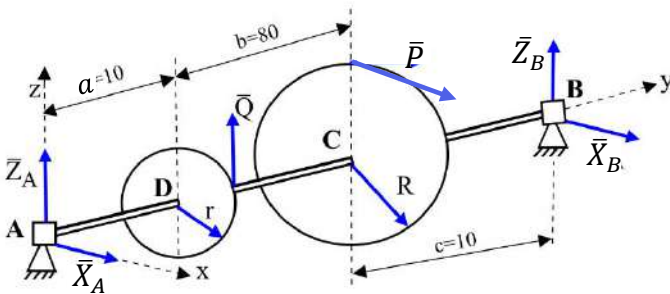
Дано:

$$P = 100 \text{ Н};$$

$$r = 10 \text{ см};$$

$$R = 100 \text{ см};$$

розміри в см.

Визначити:  $Q, X_A, X_B, Z_A, Z_B$  —?Сили  $\bar{P}, \bar{Q}$  напрямлені по дотичним до дисків  $C$  і  $D$ .

Напишемо рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A + X_B + P = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; \quad Z_A + Z_B + Q = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0; \quad Z_B \cdot 100 + Q \cdot 10 = 0;$$

$$5) \sum M_{yi} = 0; \quad P \cdot R - Q \cdot r = 0; \quad Q = \frac{PR}{r} = 1000 \text{ Н} = 1 \text{ кН};$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; \quad -X_B \cdot 100 - P \cdot 90 = 0; \quad X_B = -0,9P = -90 \text{ Н}.$$

3 1)

$$X_A = -X_B - P = 90 - 100 = -10 \text{ Н}.$$

3 4)

$$Z_B = \frac{-10Q}{100} = -100H.$$

3 3)

$$Z_A = -Z_B - Q = 100 - 1000 = -900 H.$$

**Відповідь:**  $Q = 1\text{кН}$ ;  $X_A = -10\text{ Н}$ ;  $X_B = -90\text{ Н}$ ;

$$Z_A = -900\text{ Н}; Z_B = -100\text{ Н}.$$

### Задача 8.15

**Дано:**

$$Q = 800\text{ Н};$$

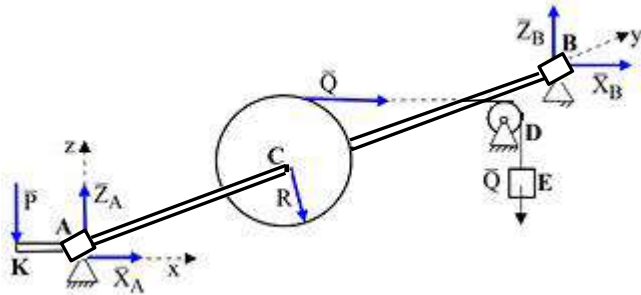
$$AK = 40\text{ см};$$

$$R = 5\text{ см};$$

$$AC = CB = 50\text{ см}.$$

Тертям в блоці  $D$  знехтувати.

**Визначити:**  $P$ ,  $X_A$ ,  $X_B$ ,  $Z_A$ ,  $Z_B$  -?



Так як тертям в блоці  $D$  нехтуємо, то зусилля  $\bar{Q}$  (вага вантажа  $E$ ) перенесемо по тросу до барабану, там сила  $\bar{Q} \parallel$  осі  $x$  та напрямлена по дотичній до барабану  $C$ .

Рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A + X_B + Q = 0;$$

$$2) \sum Y_i \equiv 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; Z_A + Z_B - P = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0; Z_B \cdot AB = 0; Z_B = 0.$$

$$5) \sum M_{yi} = 0; -P \cdot AK + Q \cdot R = 0;$$

$$P = \frac{QR}{AK} = \frac{800 \cdot 5}{40} = 100 \text{ H};$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; -X_B \cdot AB - Q \cdot AC = 0;$$

$$X_B = \frac{-Q \cdot AC}{AB} = -\frac{800 \cdot 50}{100} = -400 \text{ H}.$$

3 1)

$$X_A = -X_B - Q = 400 - 800 = -400 \text{ H}.$$

3 3)

$$Z_A = -Z_B + P = 0 + 100 = 100 \text{ H}.$$

**Відповідь:**  $P = 100 \text{ H}; X_A = X_B = -400 \text{ H}; Z_A = 100 \text{ H};$

$Z_B = 0;$

### Задача 8.16

**Дано:**

$$Q = 1 \text{ кН} = 1000 \text{ H};$$

$$KD = 40 \text{ см}; AD = 30 \text{ см};$$

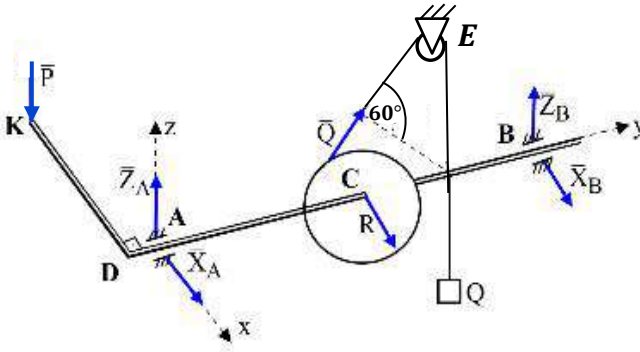
$$AC = 40 \text{ см};$$

$$CB = 60 \text{ см}; \alpha = 60^\circ;$$

$$R = 5 \text{ см}; KD \parallel Ax.$$

---

**Визначити:**  $P, X_A, X_B, Z_A, Z_B$  в рівновазі—?



Тертям в блоці  $E$  нехтуємо. Зусилля  $\bar{Q}$  прикладаємо до барабану  $C$  по дотичній та паралельно до площини  $xAz$ .

Рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A + X_B + Q \cos 60^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; \quad Z_A + Z_B + Q \sin 60^\circ - P = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0; \quad P \cdot AD + Q \sin 60^\circ \cdot AC + Z_B \cdot AB = 0.$$

$$5) \sum M_{yi} = 0; \quad -P \cdot KD + Q \cdot R = 0;$$

$$P = \frac{Q \cdot R}{KD} = \frac{1000 \cdot 0.5}{40} = 125 \text{ H};$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; \quad -X_B \cdot AB - Q \cdot \cos 60^\circ \cdot AC = 0;$$

$$X_B = -Q \cos 60^\circ \frac{AC}{AB} = -1000 \cdot 0.5 \frac{40}{100} = -200 \text{ H}.$$

3 1)

$$X_A = -X_B - Q \cos 60^\circ = 200 - 1000 \cdot 0.5 = -300 \text{ H}.$$

3 4)

$$Z_B = \frac{-P \cdot AD - Q \sin 60^\circ \cdot AC}{AB} = \frac{-125 \cdot 30 - 1000 \cdot 0.866 \cdot 40}{100} = -384 \text{ H}.$$

3 3)



3 1)

$$X_A = T \cos \alpha - X_B = \frac{G \cos \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{G}{4} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{G}{4} \operatorname{ctg} \alpha.$$

3 4)

$$Z_B = \frac{G}{2} - \frac{T \sin \alpha}{2} = \frac{G}{2} - \frac{G \sin \alpha}{4 \sin \alpha} = \frac{G}{4};$$

3 3)

$$Z_A = G + T \sin \alpha - Z_B = G - \frac{G}{2} - \frac{G}{4} = \frac{G}{4}.$$

**Відповідь:**

$$T = \frac{G}{2 \sin \alpha}; \quad X_A = X_B = \frac{G}{4} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$Z_A = Z_B = \frac{G}{4}.$$

**Задача 8.20****Дано:**

$$\alpha = \angle DAx = 30^\circ;$$

$P = 20H$  (вага кришки  $ABCD$ );

$CE \parallel Ax$  (нить).

**Визначити:** реакції в петлях  $A$  і

$B$ ,  $X_A$ ,  $X_B$ ,  $Z_A$ ,  $Z_B$  —?

Рівняння рівноваги:

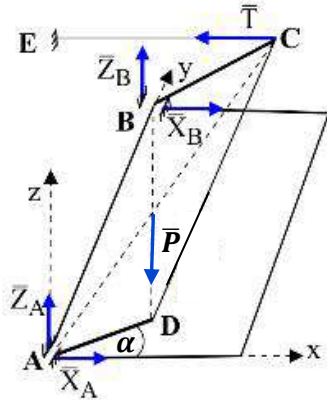
$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - T = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; \quad Z_A + Z_B - P = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0; \quad Z_B \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} = 0.$$

$$Z_B = \frac{P}{2} = 10H;$$



$$3) Z_A = P - Z_B = 20 - 10 = 10H;$$

$$5) \sum M_{yi} = 0; -T \cdot BC \cdot \sin 30^\circ +$$

$$+ P \cdot \frac{BC}{2} \cos 30^\circ = 0; T = \frac{P}{2} \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 0,866P = 17,3 H;$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; -X_B \cdot AB + T \cdot AB = 0;$$

$$X_B = T = 17,3 H;$$

3 1)

$$X_A = T - X_B = T - T = 0.$$

**Відповідь:**

$$Z_A = Z_B = 10 H; X_A = 0; X_B = 17,3 H.$$

### Задача 8.21

**Дано:**

$$\angle DAE = \angle ADE = \angle DEA = 60^\circ;$$

$\triangle ADE$  – рівносторонній;

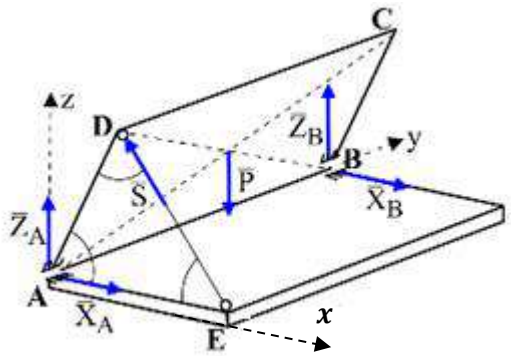
$$P = 120H$$

(вага кришки);

$$AD = AE = \ell;$$

$DE$  – невагомий стержень;

$S$  – зусилля в  $DE$ .



**Визначити:** реакції в

петлях  $A$  і  $B$ ,

$X_A, X_B, Z_A, Z_B, S$  –?

Рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; Z_A + Z_B + S \sin 60^\circ - P = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0;$$

$$Z_B \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} = 0; \quad Z_B = \frac{P}{2} = 60 \text{ H};$$

$$3) Z_A = P - Z_B - S \sin 60^\circ = 30 \text{ H};$$

$$5) \sum M_{yi} = 0;$$

$$P \cdot \frac{\ell}{2} \cos 60^\circ - S \cdot \ell \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$S = \frac{P}{2} \cdot \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = 34,5 \text{ H};$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; \quad -X_B \cdot AB = 0;$$

$$X_B = 0;$$

3) 1)

$$X_A = T \cos 60^\circ - X_B = 34,5 \cdot 0,5 = 17,25 \text{ H}.$$

**Відповідь:**

$$Z_A = 30 \text{ H}; Z_B = 60 \text{ H}; X_A = 17,25 \text{ H}; X_B = 0; S = 34,5 \text{ H}.$$

### Задача 8.24

**Дано:**

$$\angle ACE = \angle CAB = 30^\circ,$$

$$P = 200 \text{ H}$$

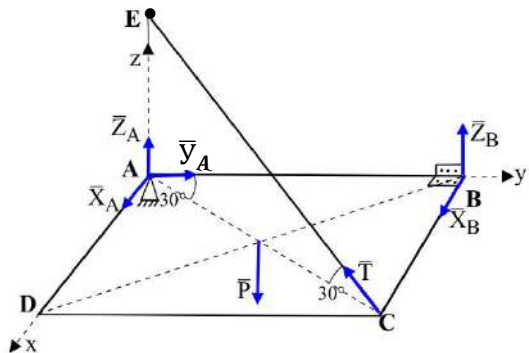
(вага рами  $ABCD$ ),

$A$  – шаровий шарнір;

$B$  – петля;  $CE$  – нить

**Визначити:** реакції в опорах  $A$  і  $B$

$X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B, -?$  і натягіння в ниті  $CE$ .



Рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - T \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0; \quad Y_A - T \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$3) \sum Z_i = 0; \quad Z_A + Z_B + T \sin 30^\circ - P = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0;$$

$$T \sin 30^\circ \cdot AB + Z_B \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} = 0;$$

$$5) \sum M_{yi} = 0;$$

$$-T \sin 30^\circ \cdot CB + P \frac{CB}{2} = 0;$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; \quad -X_B \cdot AB = 0; \quad X_B = 0;$$

3 5)

$$T = \frac{P}{2 \sin 30^\circ} = P = 200 \text{ H};$$

3 1)

$$X_A = T \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ - X_B = 200 \cdot 0,866 \cdot 0,5 - 0 = 86,6 \text{ H}.$$

3 2)

$$Y_A = T \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 200 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 150 \text{ H};$$

3 4)

$$Z_B = \frac{P}{2} - T \sin 30^\circ = \frac{200}{2} - 200 \cdot 0,5 = 0 \text{ H};$$

3 3)

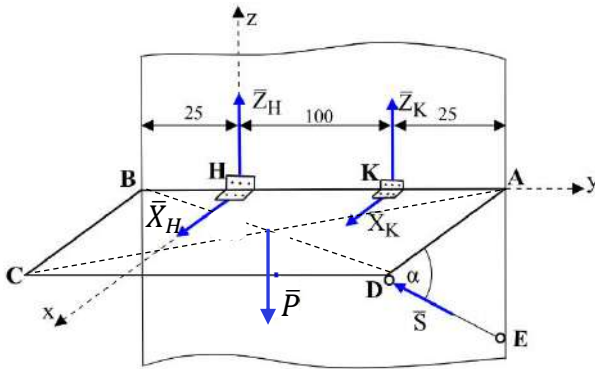
$$Z_A = P - T \sin 30^\circ - Z_B = 200 - 200 \cdot 0,5 - 0 = 100 \text{ H};$$

**Відповідь:**

$$X_A = 86,6 \text{ H}; \quad Y_A = 150 \text{ H}; \quad Z_A = 100 \text{ H}; \quad X_B = 0; \quad Z_B = 0 \text{ H};$$

$$T = 200 \text{ H}.$$

## Задача 8.25



**Дано:**

$$P = 800 \text{ Н}$$

(вага полиці  $ABCD$ ),

$$AD = 60 \text{ см,}$$

$$ED = 75 \text{ см;}$$

$$BH = KA = 25 \text{ см;}$$

$$HK = 100 \text{ см.}$$

**Визначити:**  $X_H$ ,  $Z_H$ ,  $X_K$ ,

$Z_K$ ,  $S$ —?

Визначимо кут  $\alpha$  з  $\triangle ADE$

$$\cos \alpha = \frac{AD}{DE} = \frac{60}{75} = 0,8; \quad \alpha = 36,87^\circ \approx 37^\circ.$$

Рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; \quad X_H + X_K + S \cos 37^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y_i \equiv 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; \quad Z_H + Z_K + S \sin 37^\circ - P = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0; -P \cdot 50 + Z_K \cdot 100 + S \cdot \sin 37^\circ \cdot 125 = 0.$$

$$5) \sum M_{yi} = 0; P \frac{AD}{2} - S \sin 37^\circ \cdot AD = 0;$$

$$S = \frac{P}{2 \sin 37^\circ} = \frac{800}{2 \cdot 0,6} = 666,7 \text{ H}.$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; -X_K \cdot 100 - S \cos 37^\circ \cdot 125 = 0;$$

$$X_K = -\frac{S \cos 37^\circ \cdot 125}{100} = -\frac{666,7 \cdot 0,8 \cdot 125}{100} = -666,7 \text{ H}$$

3 4)

$$Z_K = \frac{P \cdot 50 - S \cdot \sin 37^\circ \cdot 125}{100} = \frac{800 \cdot 50 - 666,7 \cdot 0,6 \cdot 125}{100} = -100 \text{ H};$$

3 3)

$$Z_H = P - S \sin 37^\circ - Z_K = 800 + 100 - 666,7 \cdot 0,6 = 500 \text{ H};$$

3 1)

$$X_H = -S \cos 37^\circ - X_K = 666,7 - 666,7 \cdot 0,8 = 133,3 \text{ H}.$$

**Відповідь:**

$$S = 666,7 \text{ H}; X_H = 133,3 \text{ H};$$

$$Z_H = 500 \text{ H}; X_K = -666,7 \text{ H}; Z_K = -100 \text{ H}.$$

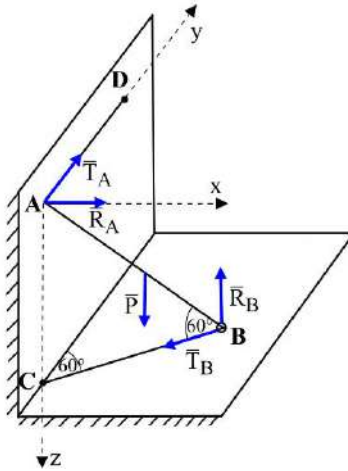


## Задача 8.30

Дано:

$P = 8 \text{ H}$  вага стержня  $AB$ ;  
 $AD, BC$  ниті; підлога та стіни гладкі.

Визначити:  $R_A, R_B, T_A, T_B$ —?



Розглянемо рівновагу стержня  $AB$ .

$$1) \sum X_i = 0; R_A - T_B \sin 60^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0; T_A - T_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; P - R_B = 0;$$

$$4) \sum M_{yi} = 0;$$

$$-R_B \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot AB + P \frac{AB}{2} \cos 60^\circ \cdot \sin 60^\circ +$$

$$+ T_B \cdot \sin 60^\circ \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = 0.$$

$$3) R_B = P = 8 \text{ H};$$

$$3) 4)$$

$$T_B = \frac{(R_B - \frac{P}{2}) \cdot \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{P}{4}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{0,866} = 2,3 \text{ H};$$

3 2)

$$T_A = T_B \cos 60^\circ = 1,15 \text{ H};$$

3 1)

$$R_A = T_B \sin 60^\circ = 2 \text{ H}.$$

**Відповідь:**

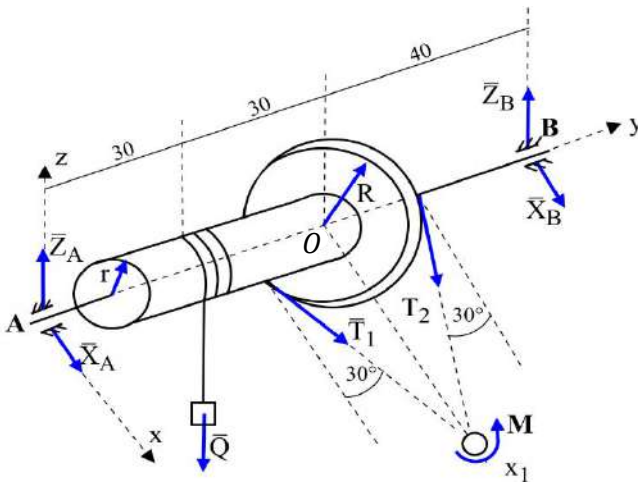
$$T_A = 1,15 \text{ H}; T_B = 2,3 \text{ H}; R_A = 2 \text{ H}; R_B = 8 \text{ H}.$$

**Задача 8.33****Дано:**

$$Q = 10 \text{ кН}; r = 10 \text{ см};$$

$$R = 20 \text{ см}; O x_1 \parallel A x;$$

$$\text{натяг ланцюга } T_1 = 2T_2$$

**Визначити:**  $X_A, Z_A, X_B, Z_B; T_1, T_2 - ?$ 

Вантаж  $Q$  рівномірно переміщується підйомним механізмом АВ.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$1) \sum X_i = 0; X_A + X_B + (T_1 + T_2) \cos 30^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; Z_A + Z_B + (T_1 - T_2) \sin 30^\circ - Q = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0; -Q \cdot 30 + Z_B \cdot 100 + (T_1 - T_2) \sin 30^\circ \cdot 60 = 0.$$

$$5) \sum M_{yi} = 0; Q \cdot r - (T_1 - T_2) \cdot R = 0;$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; -X_B \cdot 100 - (T_1 + T_2) \cos 30^\circ \cdot 60 = 0;$$

3 5)

$$(T_1 - T_2) = \frac{Q \cdot r}{R} = \frac{10 \cdot 10}{20} = \frac{100}{20} = 5 \text{ кН};$$

$$T_1 - T_2 = T_2; T_1 = 2T_2 = 10 \text{ кН}; T_2 = 5 \text{ кН};$$

3 4)

$$Z_B = \frac{1}{100} (30Q - T_2 \sin 30^\circ \cdot 60) = \frac{300 - 5 \cdot 0,5 \cdot 60}{100} = 1,5 \text{ кН};$$

3 3)

$$Z_A = -Z_B - T_2 \sin 30^\circ + Q = -1,5 + 10 - 5 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН};$$

3 6)

$$X_B = \frac{-1}{100} 3T_2 \cos 30^\circ \cdot 60 = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 0,866 \cdot 60}{100} = -7,8 \text{ кН};$$

3 1)

$$X_A = -X_B - 3T_2 \cos 30^\circ = 7,8 - 3 \cdot 5 \cdot 0,866 = -5,2 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**

$$X_A = -5,2 \text{ кН}; X_B = -7,8 \text{ кН}; Z_A = 6 \text{ кН}; Z_B = 1,5 \text{ кН};$$

$$T_1 = 10 \text{ кН}; T_2 = 5 \text{ кН}.$$

## Задача 8.36

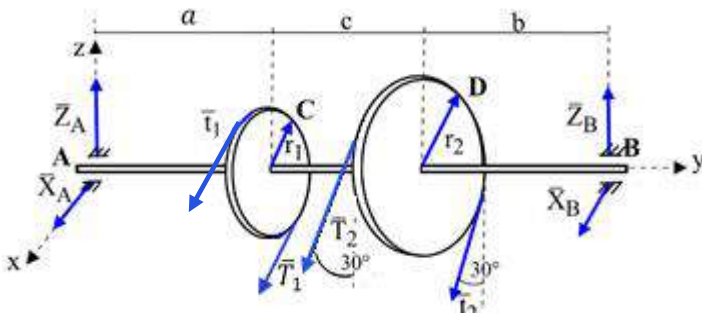
Дано:

$$a + b + c = 200 \text{ см};$$

$$r_1 = 20 \text{ см}; r_2 = 25 \text{ см};$$

$$T_1 = 2t_1 = 5 \text{ кН};$$

$$a = b = 50 \text{ см}; c = 100 \text{ см}; T_2 = 2t_2. \quad \bar{T}_1 \parallel \bar{t}_1 \parallel Ax.$$

Кут між  $\bar{T}_2$  і  $\bar{t}_2$  та вертикаллю  $30^\circ$ .Визначити:  $X_A, Z_A, X_B, Z_B; T_2, t_2$ —?

Розглянемо рівновагу трансмісії з двома шківками  $C$  і  $D$ , яка навантажена натягами ременів  $\bar{T}_1, \bar{t}_1; \bar{T}_2, \bar{t}_2$ .

Зауважимо, що  $T_1 + t_1 = 3t_1; T_2 + t_2 = 3t_2$ ;

$$T_1 - t_1 = t_1; T_2 - t_2 = t_2.$$

$$1) \sum X_i = 0; X_A + X_B + (T_1 + t_1) + (T_2 + t_2) \sin 30^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0; Z_A + Z_B - (T_2 + t_2) \cos 30^\circ = 0;$$

$$4) \sum M_{xi} = 0; Z_B \cdot 200 - (T_2 + t_2) \cos 30^\circ \cdot 150 = 0;$$

$$5) \sum M_{yi} = 0; -(T_1 - t_1) \cdot r_1 + (T_2 - t_2) \cdot r_2 = 0;$$

$$6) \sum M_{zi} = 0; -X_B \cdot 200 - (T_1 + t_1) \cdot 50 -$$

$$-(T_2 + t_2) \sin 30^\circ \cdot 150 = 0;$$

3 5)

$$(T_2 - t_2) = \frac{(T_1 - t_1) \cdot r_1}{r_2} = \frac{2,5 \cdot 20}{25} = 2 \text{ кН};$$

$$t_2 = 2 \text{ кН}; T_2 = 4 \text{ кН}.$$

3 4)

$$Z_B = \frac{1}{200} (3t_2) \cdot 0,866 \cdot 150 = 3,9 \text{ кН}.$$

3 3)

$$Z_A = (T_2 + t_2) \cos 30^\circ - Z_B = 3t_2 \cdot 0,866 - 3,9 = 1,3 \text{ кН}.$$

3 6)

$$\begin{aligned} -X_B &= \frac{1}{200} ((T_1 + t_1) \cdot 50 - (T_2 + t_2) \sin 30^\circ \cdot 150) = \\ &= \frac{3t_1 \cdot 50 + 3t_2 \cdot 0,5 \cdot 150}{200} = 4,125 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 1) X_A &= -(X_B + (T_1 + t_1) + (T_2 + t_2) \sin 30^\circ) = \\ &= -(-4,125 + 7,5 + 3,0) = -6,375 \text{ кН}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**

$$X_A = -6,375 \text{ кН}; X_B = -4,125 \text{ кН}; Z_A = 1,3 \text{ кН};$$

$$Z_B = 3,9 \text{ кН}; T_2 = 4 \text{ кН}; t_2 = 2 \text{ кН}.$$

*Для нотаток*

*Для нотаток*

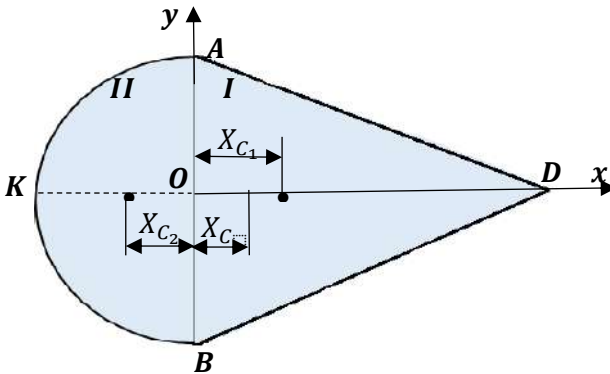
*Для нотаток*

## 4 ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА

## Задача 9.2

Дано:

$$R; KD = 3R; AD = BD; OD = 2R.$$

Визначити:  $X_C, Y_C$ —?

Необхідно визначити координати центру ваги (ЦВ) плоскої фігури  $ADBK$ . З способу симетрії відомо, що ЦВ всій фігури знаходиться на осі  $x$ , ( $KD$ ),  $Y_C = 0$ . Для визначення  $X_C$  використаємо спосіб розбиття; розіб'ємо фігуру на дві ділянки: 1 – трикутник  $ABD$ ; 2 – на півколо  $ABK$ .

Площі:

$$I) S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} 2R \cdot 2R = 2R^2;$$

$$II) S_2 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Координати ЦВ:

$$I) X_{C1} = \frac{1}{3} OD = \frac{2}{3} R; (\Delta) Y_{C1} = Y_{C2} = 0;$$

$$\text{III) } X_{C2} = -\frac{2}{3}R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} = -\frac{2}{3}R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-4R}{3\pi} =$$

$$= -0,4244R. \text{ (півколо)}$$

Знак  $\ominus$  показує, що  $X_{C2}$  знаходиться зліва від початку координат  $O$ .

Визначаємо ЦВ:

$$X_C = \frac{X_{C1} \cdot S_1 + X_{C2} \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{2}{3}R \cdot 2R^2 + \frac{-4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2}}{2R^2 + \frac{\pi R^2}{2}} = 0,19R.$$

**Відповідь:**

$$X_C = 0,19R; Y_C = 0.$$

#### Задача 9.4

**Дано:**

$$r_1; r_2; O_1O_2 = \frac{r_1}{2}.$$

**Визначити:**  $X_C, Y_C$ —?

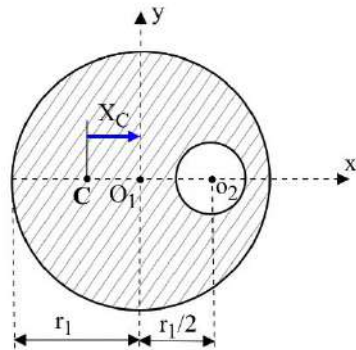
Диск радіусом  $r_1$  з круглим отвором радіуса  $r_2$ . Вісь  $O_1X$  вісь симетрії, тому  $Y_C = 0$ .

Для визначення ЦВ площі цієї однорідної фігури використаємо метод від'ємних площ. Умовно заповнимо отвір площею, а потім в формулах розбиття цю площу віднімаємо.

Площі:

I)  $S_1 = \pi r_1^2$ ; (великий диск);

II)  $S_2 = \pi r_2^2$ . (маленький отвір).



Координати ЦВ:

$$I) X_{C_1} = X_{O_1} = 0;$$

$$II) X_{C_2} = X_{O_2} = \frac{r_1}{2}.$$

$$X_C = \frac{X_{C_1} \cdot S_1 - X_{C_2} \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{0 \cdot \pi r_1^2 - \frac{r_1}{2} \cdot \pi r_2^2}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} = \frac{-r_1 \cdot r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}.$$

**Відповідь:** ЦВ всієї фігури зліва від початку координат (див. рис.)

$$X_C = \frac{-r_1 \cdot r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}; Y_C = 0.$$

### Задача 9.5

**Дано:**

$$R = 3 \text{ см}; r = 1 \text{ см}.$$

(площа чверті кільця)

**Визначити:**  $X_C, Y_C$  – ?

Визначити центр ваги (ЦВ) чв мас:

$$\text{Фігура 1} - OAB: S_1 = \frac{\pi R^2}{4};$$

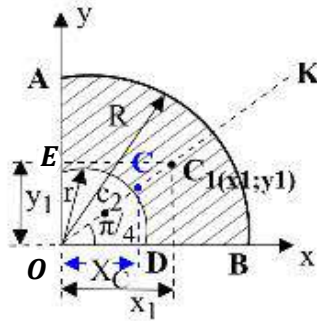
$$\text{Фігура 2:} - OED: S_2 = \frac{\pi r^2}{4}.$$

$OK$  – вісь симетрії.

$OC_1$  та  $OC_2$  – відстані від точк  
2 ( $C_1$  та  $C_2$ ).

$$OC_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8R}{3\pi} \cdot 0,707.$$

$$X_1 = OC_1 \cos 45^\circ = \frac{8R}{3\pi} \cdot 0,707 \cdot 0,707 = \frac{4R}{3\pi}.$$



$$OC_2 = \frac{2}{3}r \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{8r}{3\pi} \cdot 0,707.$$

$$X_2 = OC_2 \cos 45^\circ = \frac{8r}{3\pi} \cdot 0,707 \cdot 0,707 = \frac{4r}{3\pi}.$$

$$X_C = \frac{X_1 \cdot S_1 - X_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{4} - \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{4}}{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(R^2 - r^2)}{\frac{\pi}{4}(R^2 - r^2)}.$$

$$X_C = \frac{(R^3 - r^3)}{\frac{3\pi}{4}(R^2 - r^2)} = \frac{(3^3 - 1^3)}{\frac{3 \cdot 3,14}{4}(3^2 - 1^2)} = \frac{26}{6 \cdot 3,14} = 1,38 \text{ см.}$$

**Відповідь:**

Так як фігура має вісь симетрії  $OK$ , то  $X_C = Y_C = 1,38$  см.

### Задача 9.8 (двома методами)

**Дано:**

$a, b, d.$

---

**Визначити:**  $X_C, Y_C$ —?

Визначити координати ЦВ поперечного перерізу нерівнобічного кутка з полицями  $OA = a, OB = b$  і товщиною  $AF = BD = d.$

1) Метод від'ємних площ.

Доповнюємо фігуру до прямокутника  $OAEB$  та маємо:

площу  $OAEB$ :  $S_1 = ab$ ;

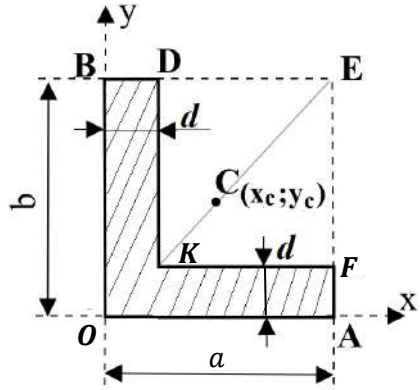
площу  $KFED$ :

$$S_2 = (a - d) \cdot (b - d).$$

Центри ваги:

$$X_1 = \frac{a}{2}; \quad Y_1 = \frac{b}{2};$$

$$X_2 = \frac{a + d}{2}; \quad Y_2 = \frac{b + d}{2}.$$



Визначимо координати центру ваги площі поперечного перерізу кутка.

$$X_c = \frac{X_1 \cdot S_1 - X_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot ab - \left(\frac{a+d}{2}\right) \cdot (a-d) \cdot (b-d)}{ab - (a-d) \cdot (b-d)} = \frac{d(a^2 + bd - d^2)}{2d(a+b-d)} = \frac{(a^2 + bd - d^2)}{2(a+b-d)}.$$

$$Y_c = \frac{Y_1 \cdot S_1 - Y_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{b}{2} \cdot ab - \left(\frac{b+d}{2}\right) \cdot (a-d) \cdot (b-d)}{ab - (a-d) \cdot (b-d)} = \frac{(b^2 + ad - d^2)}{2(a+b-d)}.$$

## II) Метод розбиття.

Умовно розбиваємо кутник на два прямокутника з площами:

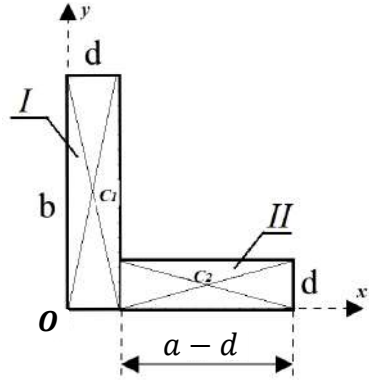
$$S_1 = bd; S_2 = (a - d) \cdot d.$$

Центри ваги:

$$X_1 = \frac{d}{2}; Y_1 = \frac{b}{2};$$

$$X_2 = d + \frac{a - d}{2} = \frac{a + d}{2}; Y_2 = \frac{d}{2}.$$

Визначимо координати центру ваги кутка.



$$X_c = \frac{X_1 \cdot S_1 + X_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{d}{2} \cdot b \cdot d + \frac{(a+d)}{2} \cdot (a-d) \cdot d}{bd + (a-d) \cdot d} =$$

$$= \frac{(bd^2 + (a^2 - d^2) \cdot d^2)}{2d(a+b-d)} = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(b+a-d)};$$

$$Y_c = \frac{Y_1 \cdot S_1 + Y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{b}{2} \cdot bd + \frac{d}{2} \cdot (a-d) \cdot d}{d(a+b-d)} =$$

$$= \frac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}.$$

**Відповідь:** за об'ємом розрахунків методи суттєво не відрізняються.

$$X_c = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(b+a-d)}; Y_c = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}.$$

## Задача 9.10

Дано:

$$d = 2 \text{ см}; a = 20 \text{ см};$$

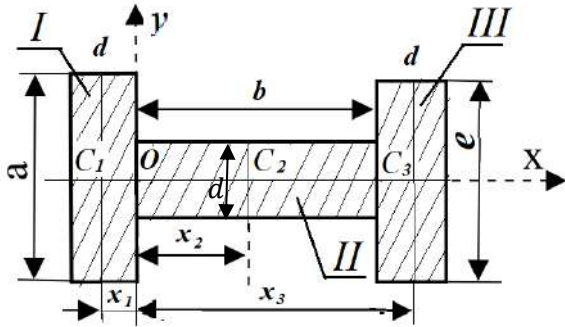
$$b = 20 \text{ см}; e = 15 \text{ см};$$

$X$  – вісь симетрії

Визначити:  $X_C, Y_C$  – ?

Визначаємо  
центр ваги  
поперечного  
перерізу двотавра.  
Метод розбиття.

Так як вісь  $X$  –  
вісь симетрії, то  
 $Y_C = 0$ .



Розбиваємо умовно двотавр на три прямокутні площадки:

$$S_1 = ad = 20 \cdot 2 = 40 \text{ см}^2; X_1 = -1 \text{ см};$$

$$S_2 = bd = 20 \cdot 2 = 40 \text{ см}^2; X_2 = \frac{b}{2} = 10 \text{ см};$$

$$S_3 = ed = 15 \cdot 2 = 30 \text{ см}^2; X_3 = b + \frac{d}{2} = 21 \text{ см}.$$

Визначаємо координату  $X_C$  центра ваги:

$$X_C = \frac{X_1 \cdot S_1 + X_2 \cdot S_2 + X_3 \cdot S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{-1 \cdot 40 + 10 \cdot 40 + 21 \cdot 30}{40 + 40 + 30} =$$

$$= \frac{990}{110} = 9 \text{ см}.$$

Відповідь:

$$X_C = 9 \text{ см}; Y_C = 0.$$

## Задача 9.12

Дано:

Квадрат  $ABND$  з сторонами

$$a = 2 \text{ м};$$

отвір  $EFGH$  з сторонами

$$b = 0,7 \text{ м}.$$

$$OK = O_1K = 0,5 \text{ м}$$

Визначити:  $X_C, Y_C$  - ?

Визначимо ЦВ площі квадратної пластини з квадратним отвором.

1.  $ABND$ 

$$S_1 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м}^2; X_1 = Y_1 = 0;$$

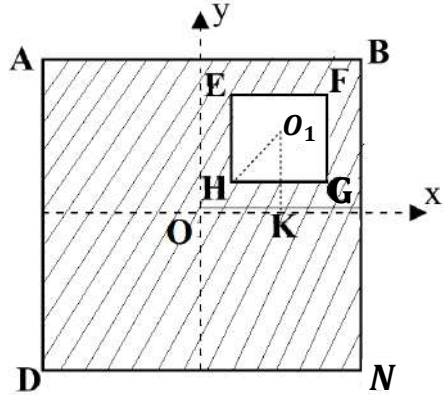
2.  $EFGH$ 

$$S_2 = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49 \text{ м}^2; X_2 = 0,5 \text{ м}; Y_2 = 0,5 \text{ м}.$$

Визначимо координати ЦВ методом від'ємних мас.

$$X_C = \frac{X_1 \cdot S_1 - X_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{-0,49 \cdot 0,5}{4 - 0,49} = -0,07 \text{ м};$$

$$Y_C = \frac{Y_1 \cdot S_1 - Y_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{-0,49 \cdot 0,5}{4 - 0,49} = -0,07 \text{ м}.$$

Відповідь:  $X_C = Y_C = -0,07 \text{ м}$ 

## Задача 9.18

Дано:

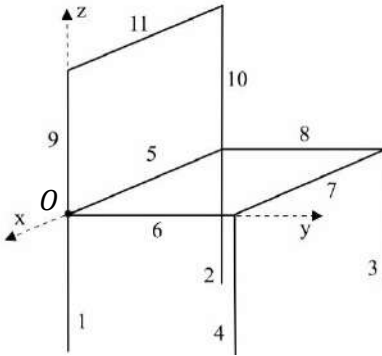
$$P_1 = P_2 = \dots P_{11} = P;$$

$$\ell_1 = \ell_2 = \dots \ell_{11} = \ell = 44 \text{ см.}$$

Визначити:

 $X_C, Y_C, Z_C$ —?

Визначимо ЦВ по формулі центр ваги лінії.

Довжина всіх стержнів  $L = 11 \cdot \ell = 11 \cdot 44 = 484 \text{ см.}$ 

Координати ЦВ всіх стержнів:

$$1: X_1 = 0; Y_1 = 0; Z_1 = -0,5\ell = -22 \text{ см;}$$

$$2: X_2 = \ell = 44 \text{ см; } Y_2 = 0; Z_2 = -0,5\ell = -22 \text{ см;}$$

$$3: X_3 = \ell = 44 \text{ см; } Y_3 = \ell = 44 \text{ см; } Z_3 = -0,5\ell = -22 \text{ см;}$$

$$4: X_4 = 0; Y_4 = \ell; Z_4 = -0,5\ell = -22 \text{ см;}$$

$$5: X_5 = 0,5\ell; Y_5 = 0; Z_5 = 0;$$

$$6: X_6 = 0; Y_6 = 0,5\ell; Z_6 = 0;$$

$$7: X_7 = 0,5\ell; Y_7 = \ell; Z_7 = 0;$$

$$8: X_8 = \ell; Y_8 = 0,5\ell; Z_8 = 0;$$

$$9: X_9 = 0; Y_9 = 0; Z_9 = 0,5\ell;$$

$$10: X_{10} = \ell; Y_{10} = 0; Z_{10} = 0,5\ell;$$

$$11: X_{11} = 0,5\ell; Y_{11} = 0; Z_{11} = \ell.$$

Визначимо координати:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{L}(X_1 \cdot \ell_1 + X_2 \cdot \ell_2 + \dots + X_{11} \cdot \ell_{11}) = \\ &= \frac{\ell}{L}(X_1 + X_2 + \dots + X_{11}) = \\ &= \frac{\ell}{11\ell}(0 + \ell + \ell + 0 + 0,5\ell + 0 + 0,5\ell + \ell + 0 + \ell + 0,5\ell) = \\ &= \frac{\ell \cdot 5,5\ell}{11\ell} = 0,5\ell = 22 \text{ см}; \end{aligned}$$

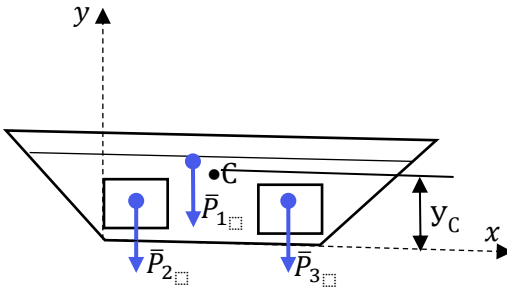
$$\begin{aligned} Y_C &= \frac{\ell}{L}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{11}) = \\ &= \frac{\ell}{11\ell}(0 + 0 + \ell + \ell + 0 + 0,5\ell + \ell + 0,5\ell + 0 + 0 + 0) = \\ &= \frac{\ell}{11\ell}4,0\ell = 16 \text{ см}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_C &= \frac{\ell}{L}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{11}) = \\ &= \frac{\ell}{11\ell}(-0,5\ell \cdot 4 + 2 \cdot 0,5\ell + \ell) = \frac{\ell}{11\ell}(-2\ell + 2\ell) = 0. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $X_C = 22 \text{ см}; Y_C = 16 \text{ см}; Z_C = 0.$

## Задача 9.21

Дано:

 $P_1 = 19000 \text{ кН} ; Y_1 = 6 \text{ м} ;$  (корпус) $P_2 = 4500 \text{ кН} ; Y_2 = 3 \text{ м} ;$  (машини) $P_3 = 5000 \text{ кН} ; Y_3 = 4,6 \text{ м} ;$  (котли)Визначити:  $Y_C$  —?

Крейсер вагою  $P_1$ , вагою машини  $P_2$  та котлів  $P_3$ . Координати  $Y_i$  центрів ваги корпусу, машини та котлів по вертикалі над кілем дорівнюють  $Y_1, Y_2, Y_3$ .

Визначаємо координату центра ваги усього крейсера по вертикалі над кілем:

$$Y_C = \frac{P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + P_3 \cdot Y_3}{P_1 + P_2 + P_3} =$$

$$= \frac{(19 \cdot 6 + 4,5 \cdot 3 + 5 \cdot 4,6) \cdot 10^3}{(19 + 4,5 + 5) \cdot 10^3} = \frac{150,5}{28,5} = 5,28 \text{ м.}$$

Це координата центра ваги всього крейсера з обладнанням (над рівнем кілю).

Відповідь:

$$Y_C = 5,28 \text{ м.}$$

### Задача 9.22

**Дано:**

$P_1 = 45000 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 300 \text{ кН}$ ;  $\ell$  довжина корабля;

Вантаж  $P_2$  переміщений з носу на корму на відстань 60 м.

**Визначити:** переміщення всієї системи (корабель + вантаж).

I) Визначимо координати центра ваги системи для випадку якщо вантаж знаходиться в носовому відсіку:

$$X_{C1} = \frac{P_1 \cdot X_1 + P_2 \cdot X_2}{P_1 + P_2} = \frac{P_1 \cdot \frac{\ell}{2} + P_2 \cdot \ell}{P_1 + P_2},$$

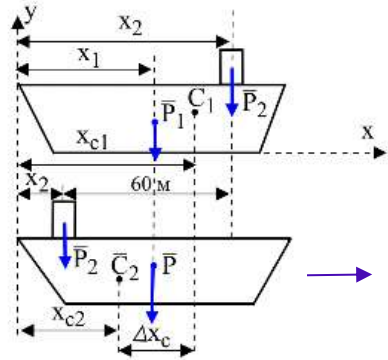
де  $X_1$  і  $X_2$  – координати центра ваги корабля та вантажу для першого варіанту розміщення вантажу.

II) Вантаж переміщений на 60 м в сторону корми, його координата стала  $X_2$ ;  $X_1$  не змінилася, ( $X_2 = \ell - 60$ ).

$$X_{C2} = \frac{P_1 \cdot X_1 + P_2 \cdot X_2}{P_1 + P_2} = \frac{P_1 \cdot \frac{\ell}{2} + P_2 \cdot (\ell - 60)}{P_1 + P_2},$$

Переміщення центра ваги всієї системи:

$$\begin{aligned} \Delta X_C = X_{C1} - X_{C2} &= \frac{P_1 \cdot \frac{\ell}{2} + P_2 \cdot \ell}{P_1 + P_2} - \frac{P_1 \cdot \frac{\ell}{2} + P_2 \cdot \ell - P_2 \cdot 60}{P_1 + P_2} = \\ &= \frac{P_2 \cdot 60}{P_1 + P_2}. \end{aligned}$$



$$\Delta X_C = \frac{300 \cdot 60}{45000 + 300} = \frac{18}{45,3} = 0,4 \text{ м.}$$

**Відповідь:**

$$\Delta X_C = 0,4 \text{ м.}$$

За теоремою о русі центра мас, координата  $X_C$  не зміниться. Корабель переміститься вправо на  $\Delta X_C = 0,4$  м.

### Задача 9.25 (стійкість рівноваги)

**Дано:**

$R$  півкуля +циліндр

**Визначити:**  $h$ —? Для умов граничної рівноваги тіла

Потрібно знайти граничну висоту  $h$  циліндра II, при якій тіло, котре складається з півкулі та циліндра радіуса  $R$ , втрачає стійкість в положенні рівноваги.

**Використовувати**

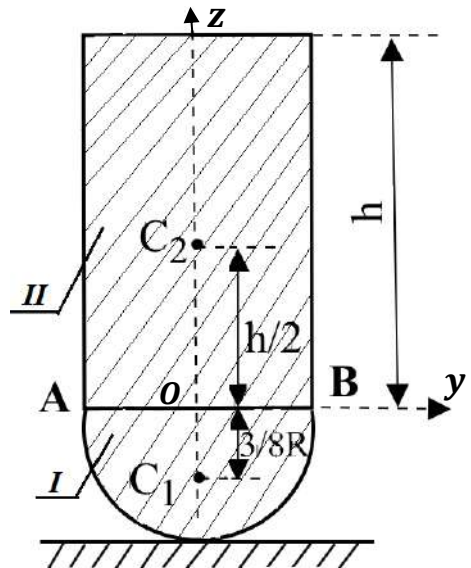
«Приміткі» до задачі 9.26.

Об'єми:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi R^3 \text{ — півкуля;}$$

$$V_2 = \pi R^2 h \text{ — циліндр.}$$

Координати центрів ваги:



$$z_1 = -\frac{3}{8}R; z_2 = \frac{h}{2}.$$

Визначаємо координату ЦВ:

$$Z_C = \frac{Z_1 \cdot V_1 + Z_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{-\frac{3}{8}R \cdot \left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) + \frac{h}{2} \cdot \pi R^2 h}{\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) + \pi R^2 h}. \quad (A)$$

При  $Z_C = 0$ , чисельник (A) дорівнює нулю.

$$-\frac{3}{8}R \cdot \left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) + \frac{h}{2} \cdot \pi R^2 h = 0;$$

$$-\frac{1}{2}R^2 + h^2 = 0 \rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

**Відповідь:**

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

### Задача 9.26 (стійкість рівноваги)

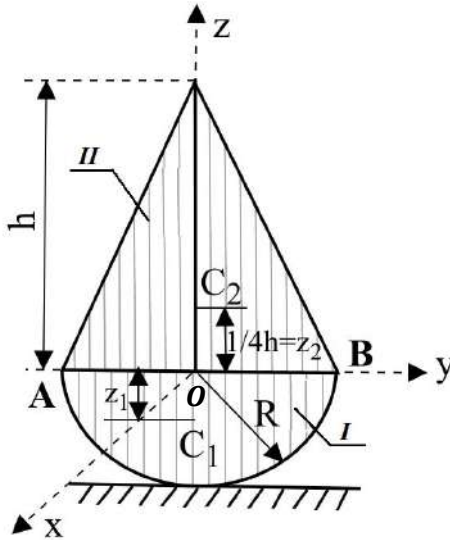
**Дано:**

$h; R.$

**Визначити:**  $h$ —? (для умов стійкої рівноваги)

Знайти граничну висоту  $h$  конуса, при якій тіло, яке складається з однорідних конуса та півкулі радіуса  $R$ , втрачає стійкість в положенні рівноваги.

**Якщо діючі сили прагнуть вернути тіло в положення рівноваги (коли воно виведене з цього положення), то таке положення рівноваги є стійким; в протилежному випадку рівновага нестійка.**



**Примітка 1** (з Мещерського) При стійкій рівновазі центр ваги всього тіла повинен співпадати з центром півкулі (точка  $O$ ). Відстань центра ваги півкулі від основи (лінії  $AB$ )  $z_1 = \frac{3}{8}R$ .

**Примітка 2** ЦВ всього тіла повинен знаходитись в т.  $O$  – в центрі півкулі. Центр півкулі – це центр кулі, а не центр ваги.

Для визначення  $h$  використаємо формулу «центр ваги об'єму»:

$$Z_c = \frac{Z_1 \cdot V_1 + Z_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2},$$

де I – півкуля, II – конус.

Координати центрів ваги:

$$z_1 = -\frac{3}{8}R; z_2 = \frac{1}{4}h.$$

Об'єми:

$$V_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right); V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

$$Z_C = \frac{-\frac{3}{8}R \cdot \left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) + \frac{1}{4}h \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 h}{\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) + \frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{-\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2}{\frac{2}{3}R + \frac{1}{3}h}. \quad (A)$$

За приміткою при стійкій рівновазі  $Z_C = 0$ , чисельник (A) повинен дорівнювати нулю.

$$-\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2 = 0 \rightarrow h = R\sqrt{3}.$$

**Відповідь:**  $h = R\sqrt{3}$ .

*Для нотаток*

*Для нотаток*

*Для нотаток*

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теоретична механіка: навчальний посібник / П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко, Л.Ф. Дзюба, В.Р. Пасіка, О.М. Поляков; за ред. П.К. Штанька. — Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. — 464 с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка (укр.). Видавництво „Техніка”, Київ – 2002.-510 с.
3. Яскілко М.Б. Збірник задач для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. – К.: Вища школа, 1999. – 362 с.
4. Штанько П.К. Теоретична механіка. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт / Укл. П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко / за ред. Штанька П.К. – Запоріжжя: НУ «ЗП», 2019.- 228 с.
5. Штанько П.К. Теоретична механіка. Контрольні питання та білети до рубіжних контролів / Укл. П.К. Штанько, В.Г. Шевченко / за ред. Штанька П.К. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018.- 228 с.
6. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: В 2-х т.: Учеб. Пособие для студ. вузов / Н.В. Бутенин, Д.Р. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. (В 2-х ч. для гос. Ун-тов). Перераб. И доп. С.М. Тарга. Ч. 1-3. – М., «Наука», - 1973. – 467 с.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики [Текст]: учеб. / С.М. Тарг; 13-е изд. Стереотип. – М. Высш. Шк., 2001. – 416 с.
9. Мещерський І.В. Задачі по теоретической механике: учеб. Пособие для вузов. / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Мерина. – 38-е изд. Стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с. – (Ученики для вузов. Специальная литература).
10. Яблонский А.А., ред. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике.: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд. Испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2003. – 384 с.
11. ДСТУ 3008-95. Документація. Звіти у сфері науки і техніки.- /Держстандарт України.- Київ.

## ДОДАТОК А

### Відомості з математики

#### 1. Найпростіші алгебраїчні формули

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b); \quad a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2); \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

#### 2. Формула коренів квадратного рівняння

Рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a, b, c$  - дійсні числа і  $a \neq 0$  має такі корені:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Рівняння:  $x^2 + px + q = 0$ ;  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$

#### 3. Формули подвійного кута

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a;$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1; \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

#### 4. Формули ділення аргументу навпіл

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}; \quad \sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

## 5. Формули зниження степеня

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}; \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

## 6. Формули додавання аргументу

$$\sin(a \pm \beta) = \sin a \cdot \cos \beta \pm \cos a \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(a \pm \beta) = \frac{\operatorname{tga} \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$$\cos(a \pm \beta) = \cos a \cdot \cos \beta \mp \sin a \cdot \sin \beta.$$

## 7. Формули перетворення суми тригонометричних функцій в добуток

$$\sin a \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{a \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{a \mp \beta}{2};$$

$$\cos a + \cos \beta = 2 \cos \frac{a + \beta}{2} \cdot \cos \frac{a - \beta}{2};$$

$$\cos a - \cos \beta = -2 \sin \frac{a + \beta}{2} \cdot \sin \frac{a - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tga} \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(a \pm \beta)}{\cos a \cdot \cos \beta}.$$

## 8. Значення тригонометричних функцій деяких кутів

$\alpha$	$\begin{array}{l} \text{град} \\ \text{рад} \end{array}$	0	15	30	45	60	75	90	180
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin \alpha$		0	0.26	0.50	0.71	0.87	0.97	1	0
$\cos \alpha$		1	0.97	0.87	0.71	0.50	0.26	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$		0	0.27	0.58	1.00	1.73	3.73	$\infty$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$		$\infty$	3.73	1.73	1.00	0.58	0.27	0	$\infty$

### 9. Формули, які пов'язують функції одного і того ж аргументу

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1; \quad \operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a}; \quad \operatorname{ctga} = \frac{\cos a}{\sin a};$$

$$\operatorname{tga} \cdot \operatorname{ctga} = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}.$$

### 10. Співвідношення в довільному трикутнику

Сума кутів трикутника

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Нерівності трикутника

$$b - c < a < b + c;$$

$$a - c < b < a + c;$$

$$a - b < c < a + b.$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ - формула Герона,}$$

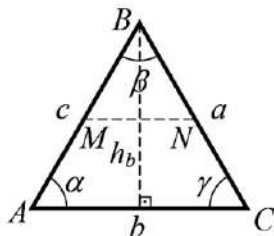
де  $p = (a + b + c)/2$  - півпериметр трикутника;

$a, b, c$  - сторони трикутника;

$\alpha, \beta, \gamma$  - внутрішні кути трикутника;

$MN$  - середня лінія трикутника;

$h_b$  - висота трикутника, що опущена на сторону  $b$ .



Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

## 11. Співвідношення в прямокутному трикутнику

$$\alpha = 90^\circ; \quad \beta + \gamma = 90^\circ;$$

$$S = \frac{1}{2}bc - \text{площа трикутника};$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - \text{теорема Піфагора,}$$

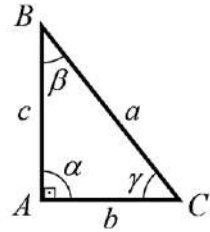
де  $b, c$  - катети;  $a$  - гіпотенуза.

$$\text{Якщо } \beta = 30^\circ, \text{ то } b = \frac{a}{2}.$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{ctg} \gamma = \frac{b}{c};$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{a}; \quad \sin \beta = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b}; \quad \cos \beta = \frac{c}{a};$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c};$$

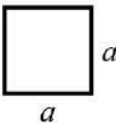
$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{b};$$

$$c = a \cdot \sin \gamma = a \cdot \cos \beta;$$

$$b = a \cdot \sin \beta = a \cdot \cos \gamma.$$

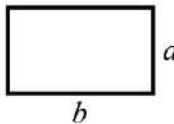
## 12. Площа (S) геометричних фігур

Квадрат



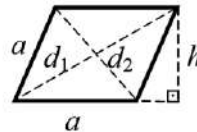
$$S = a^2$$

Прямокутник



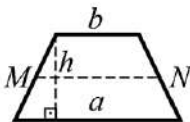
$$S = a \cdot b$$

Ромб



$$S = h \cdot a = d_1 d_2 / 2$$

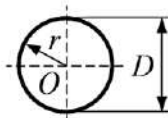
Трапеція



$$S = h \cdot (a + b) / 2$$

Середня лінія  
 $MN = (a + b) / 2.$

Коло і круг



$$S = \pi r^2 = \pi D^2 / 4$$

Кільце



$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi D^2 / 4 - \pi d^2 / 4$$

Довжина кола  
 $\Delta L = 2 \pi r = \pi D.$

## 13. Об'єми і поверхні тіл

<b>Призма:</b> пряма і похила; <b>паралелепіпед</b> $V = S \cdot h.$	<b>Конус круговий, круглий і похилий</b> $V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{12} \pi d^2 h.$
Пряма призма $S_{\text{бок}} = p \cdot h.$	Конус круглий $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} p l = \pi r l = \frac{1}{2} \pi d l.$
Паралелепіпед прямокутний $V = a \cdot b \cdot c; \quad P = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c).$	Усічений конус круговий, круглий і похилий $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{1}{12} \pi h (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2);$
<b>Куб</b> $V = a^3; \quad P = 6a^2.$	Усічений конус круглий $S_{\text{бок}} = \pi (r_1 + r_2) l = \frac{1}{2} \pi (d_1 + d_2) l.$
<b>Піраміда</b> правильна і неправильна $V = \frac{1}{3} S h.$	<b>Куля</b> $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3; \quad P = 4 \pi R^2 = \pi \cdot D^2.$
Піраміда правильна $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} p A.$	<b>Півкуля</b> $V = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{1}{12} \pi D^3; \quad S = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2;$ $S_{\text{бок}} = 2 \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi D^2; \quad P = 3 \pi R^2 = \frac{3}{4} \pi D^2.$
Усічена піраміда правильна і неправильна $V = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) h.$	<b>Сегмент кулі</b> $V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3} h) = \frac{1}{6} \pi h (h^2 + 3r^2);$ $S_{\text{бок}} = 2 \pi R h = \pi (r^2 + h^2); \quad P = \pi (2r^2 + h^2)$
Усічена піраміда правильна $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) A.$	<b>Шар кулі.</b> $V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi (r_1^2 + r_2^2) h; \quad S_{\text{бок}} = 2 \pi R h.$
<b>Циліндр</b> круговий, прямий і похилий $V = S \cdot h = \pi r^2 h = \frac{1}{4} \pi d^2 h.$	<b>Сектор кулі</b> $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h'.$
Циліндр круглий $S_{\text{бок}} = 2 \pi r \cdot h = \pi d \cdot h.$	<b>Порожня куля</b> $V = \frac{4}{3} \pi (R_1^3 - R_2^3) = \frac{1}{6} \pi (D_1^3 + D_2^3);$ $P = 4 \pi (R_1^2 + R_2^2) = \pi (D_1^2 + D_2^2).$

$V$  - об'єм;  $S$  - площа підстави;  $S_{\text{бок}}$  - бічна поверхня;  $P$  - повна поверхня;  $h$  - висота;  $a, b, c$  - виміри прямокутного паралелепіпеда;  $A$  - апофема правильної піраміди і правильної усіченої піраміди;  $l$  - утворююча конуса;  $p$  - периметр або окружність підстави;  $r$  - радіус підстави;  $d$  - діаметр підстави;  $R$  - радіус кулі;  $D$  - діаметр кулі;  $h'$  - висота сегмента, що утримується в секторі;  $R_1, R_2$  - радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь кулі.

## 14. Правила диференціювання функцій

Якщо  $c = \text{const}$  (стала величина),  $u = u(x)$  та  $v = v(x)$  - функції, які можуть бути здиференційовані по  $x$ , то

$$c' = 0; \quad x' = 1; \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v \pm u \cdot v'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (c \cdot u)' = c \cdot u';$$

## 15. Похідні та диференціали елементарних функцій

Похідні	Диференціали	Похідні	Диференціали
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$dx^n = nx^{n-1}dx$	$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$d(\frac{1}{x}) = -\frac{dx}{x^2}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$de^x = e^x dx$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
		$(\int f(x) dx)' = f(x).$	
Похідні		Диференціали	
$(a^x)' = a^x \ln a, (a > 0)$		$d(a^x) = a^x \ln a dx, (a > 0)$	
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$		$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$	
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$		$d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$	

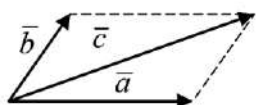
## 16. Таблиця невизначених інтегралів

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln  \cos x  + C$
$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln  \sin x  + C$	$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$
$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left  x + \sqrt{x^2 + a^2} \right  + C$	

## 17. Додавання векторів

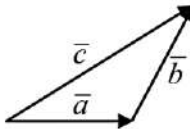
Вектори додаються за правилами:

паралелограма



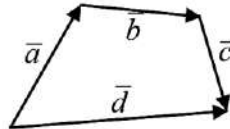
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

трикутника



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

замикаючої



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

## 18. Віднімання векторів

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}, \text{ якщо } \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}.$$

### 19. Координатна форма вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  - орти (взаємно перпендикулярні), які утворюють праву трійку координатних осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ;

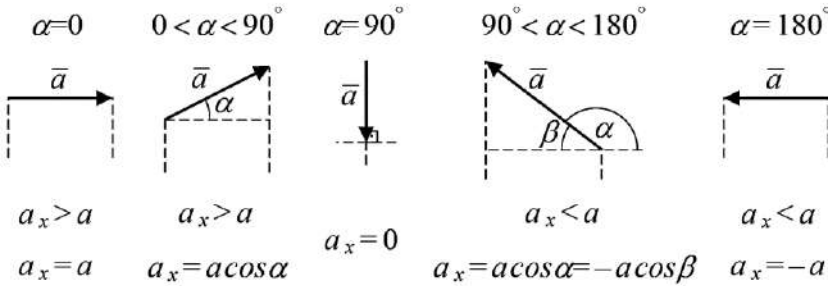
$a_x, a_y, a_z$  - проєкції вектора на осі координат.

### 20. Проєкції вектора на координатні осі

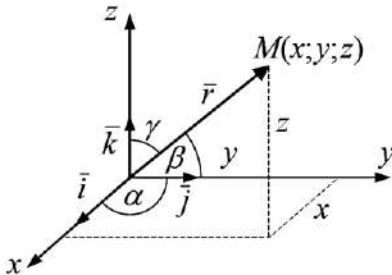
Якщо задані кути  $\alpha, \beta, \gamma$ , ( $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ ), утворені вектором відповідно з координатними осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , то

$$a_x = a \cos \alpha; \quad a_y = a \cos \beta; \quad a_z = a \cos \gamma.$$

Приклади



### 21. Радіус-вектор точки, його модуль та напрямні косинуси



Модуль-радіус вектор

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

причому  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Напрямні косинуси

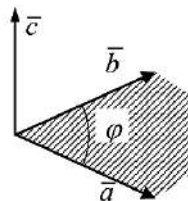
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{r}; \\ \cos \beta &= \frac{y}{r}; \\ \cos \gamma &= \frac{z}{r}. \end{aligned} \right\}$$

**22. Скалярний добуток векторів (скаляр)**

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi, \text{ де } \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

**23. Векторний добуток векторів**

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c}.$$



Вектор  $\vec{c}$  направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори, що перемножуються. Його напрям визначається за правилом правого гвинта: якщо обертати головку гвинта по найкоротшій відстані від першого множника до другого, то напрям руху самого гвинта дає напрям вектора  $\vec{c}$ .

*Модуль векторного добутку*

$$|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin \varphi, \text{ де } \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

**24. Деякі фізичні сталі (константи)**

Швидкість світла у вакуумі	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Відстань Земля-Місяць	384400 км
Гравітаційна стала	$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Прискорення вільного падіння (середнє)	$g = 9.807 \text{ м/с}^2$
Прискорення вільного падіння на Місяці	1,62 м/с <sup>2</sup>
Маса Землі	$M_3 = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Середній радіус Землі	$R_3 = 6.37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Швидкість звуку в повітрі при $t^\circ \text{C} = 0$	331 м/с
1 рад	57.3° (57.29578°)
e	2.72 (2.7182818)

**25. Гіперболічні функції**

гіперболічний синус

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

гіперболічний косинус

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Співвідношення гіперболічних функцій

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1;$$

$$\text{th } x \cdot \text{cth } x = 1.$$

Формули диференціювання і інтегрування

$$\begin{aligned} dshx &= chx \cdot dx; & \int chx \cdot dx &= shx + c; \\ dchx &= shx \cdot dx; & \int shx \cdot dx &= chx + c; \\ dthx &= \frac{dx}{ch^2 x}; & \int \frac{dx}{ch^2 x} &= thx + c; \\ dcthx &= -\frac{dx}{sh^2 x}; & \int \frac{dx}{sh^2 x} &= cthx + c. \end{aligned}$$

26. Диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

▪ Лінійні однорідні рівняння

$$\ddot{x} + p\dot{x} + gx = 0. \quad (\text{E.1})$$

Підставивши  $x=e^{\lambda t}$  в (E.1), отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + g = 0, \quad (\text{E.2})$$

рішення якого має вигляд

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (\text{E.3})$$

Загальне рішення рівняння (E.1) залежить від виду корнів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ .

Якщо  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$ ,

тоді загальне рішення (E.1)

$$x = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\frac{p}{2}t}. \quad (\text{E.4})$$

Якщо  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = b^2 > 0$ ;  $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = b$ ;  $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm b$ ,

то 
$$x = c_1 e^{\left(\frac{p+b}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{p-b}{2}\right)t}. \quad (\text{E.5})$$

Якщо  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = -b^2 < 0$ ;  $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = ib$ ;  $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm ib$ ,

то 
$$x = e^{-\frac{p}{2}t} (c_1 \cos bt + c_2 \sin bt), \quad (\text{E.6})$$

де  $c_1$  і  $c_2$  - постійні інтегрування визначаються з початкових умов задачі.

▪ *Лінійні неоднорідні рівняння*

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t). \quad (\text{E.7})$$

Загальне рішення рівняння (E.7) складається із рішення однорідного рівняння  $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$  і часткове рішення даного рівняння (E.7), вид якого залежить від виду правої частини (E.7)  $f(t)$

$$x = x_{од} + x_{част}. \quad (\text{E.8})$$

♦ Якщо  $f(t) = Q = const$ , то  $x_{част} = A$  ( $A$  - невизначений коефіцієнт). Підставляючи  $x_{част} = A$  в (E.7), визначимо  $A$ , якщо

$$\ddot{x}_{част} = 0; \quad \dot{x}_{част} = 0,$$

то 
$$q \cdot x_{част} = Q \rightarrow q \cdot A = Q \rightarrow A = \frac{Q}{q}, \quad (\text{E.9})$$

звідки 
$$x_{част} = \frac{Q}{q}.$$

♦ Якщо  $f(t) = at + b$ , то  $x_{част} = At^2 + Bt + C$ .

Підставляючи  $x_{част}$  в (E.7) ( $\dot{x}_{част} = 2At + B$ ;  $\ddot{x}_{част} = 2A$ ), отримаємо

$$2A + p \cdot 2At + pB + qAt^2 + qBt + qC = at + b.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $t$  в лівій і правій частинах, отримуємо

$$t^2 : \rightarrow qA = 0 \rightarrow A = 0; \quad t : \rightarrow 2PA + qB = 0 \rightarrow B = \frac{a}{q} \quad (A=0);$$

$$t^0 : \rightarrow 2A + qC = b \rightarrow C = \frac{b}{q} \quad (A=0).$$

Тоді 
$$x_{\text{васм}} = \frac{a}{q}t + \frac{b}{q}. \quad (\text{E.10})$$

### 27. Диференціальні рівняння руху точки під дією сили

▪ Сила  $F = \text{const}$

$$m\ddot{x} = F; \quad \ddot{x} = \frac{F}{m} = Q = \text{const}; \quad (\text{E.11})$$

$$\dot{x} = \int Q dt; \quad \dot{x} = Qt + C_1.$$

Загальне рішення

$$x = Q \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (\text{E.12})$$

▪ Сила  $F = f(t)$

$$m\ddot{x} = F; \quad \ddot{x} = \frac{1}{m} f(t); \quad \dot{x} = \int \frac{1}{m} f(t) dt + c_1.$$

Загальне рішення

$$x = \int \left[ \int \frac{1}{m} f(t) dt + c_1 \right] dt + c_2. \quad (\text{E.13})$$

▪ Сила  $\bar{F} = \alpha \bar{v}$  ( $F_x = \alpha v_x = \alpha \dot{x}$ )

$$m\ddot{x} = F_x; \quad \ddot{x} = \frac{\alpha}{m} v_x; \quad \ddot{x} = \frac{\alpha}{m} \dot{x};$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}; \quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{\alpha}{m} dt \rightarrow \ln|\dot{x}| = \frac{\alpha}{m} t + c_1;$$

Початкові умови:  $t=0; \quad \dot{x}_0 = v_0; \quad x_0 = a;$

$$c_1 = \ln v_0; \quad \ln \left| \frac{\dot{x}}{v_0} \right| = \frac{\alpha}{m} t. \quad (\text{E.14})$$

Загальне рішення

$$\dot{x} = v_0 \cdot e^{\frac{\alpha}{m} t} \rightarrow x = \frac{m v_0}{\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha}{m} t} + c_2.$$

▪ Сила  $F_x = \beta x$

$$m\ddot{x} = \beta x; \quad \ddot{x} = \frac{\beta}{m} x. \quad (\text{E.15})$$

Якщо  $\beta < 0$ , то  $\ddot{x} + k^2 x = 0; \quad \left( k^2 = \frac{\beta}{m} \right); \quad \lambda_{1,2} = \pm ik.$

Загальне рішення  $C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (\text{E.16})$

Якщо  $\beta > 0$ , то підставивши в (E.15) отримаємо

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx}; \quad \frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx} = \frac{\beta}{m} x \rightarrow \dot{x} d\dot{x} = \frac{\beta}{m} x dx;$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{\beta}{m} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1; \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{\beta}{m} x^2 + 2C_1} = \frac{dx}{dt}.$$

Звідси загальне рішення

$$x = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\beta}{m} x^2 + 2C_1}} = t + C_2. \quad (\text{E.17})$$

▪ Сила  $F = \alpha v + \beta \quad (F_x = \alpha \dot{x} + \beta)$

$$m\ddot{x} = F_x; \quad \ddot{x} = \alpha \dot{x} + b, \quad (\text{E.18})$$

$$\text{де } a = \frac{\alpha}{m}; \quad b = \frac{\beta}{m}.$$

$$\frac{d\dot{x}}{a\dot{x}+b} = dt \rightarrow \frac{1}{a} \ln|a\dot{x}+b| = t + C_1.$$

Початкові умови:  $t = 0; \quad \dot{x}_0 = v_0;$

$$C_1 = \frac{1}{a} \ln(\alpha v_0 + b);$$

$$\ln \left| \frac{a\dot{x}+b}{\alpha v_0 + b} \right| = at \rightarrow a\dot{x}+b = (\alpha v_0 + b) \cdot e^{at};$$

$$\dot{x} = \left[ (\alpha v_0 + b) \cdot e^{at} - b \right] \frac{1}{a}.$$

Загальне рішення  $x = \int \left[ (\alpha v_0 + b) e^{at} - b \right] \frac{dt}{a} + C_2. \quad (\text{E.19})$

## ДОДАТОК Б

### Вказівник задач

<b>2. ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ</b>			
<b>2.1 Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (збіжна система сил)</b>			
№ задачі	Сторінка	№ задачі	Сторінка
2.3	25	2.24	38
2.7	26	2.25	39
2.8	28	2.26	40
2.9	29	2.28	41
2.10	30	2.29	42
2.11	31	2.30a	43
2.12	32	2.30б	44
2.14	33	2.31a	45
2.15	34	2.31б	46
2.16	35	2.33	47
2.18	36	2.36	49
2.23	37		
<b>2.2 Сили паралельні та пари сил</b>			
№ задачі	Сторінка	№ задачі	Сторінка
3.1	55	3.13	60
3.3	56	3.14	61
3.4	57	3.15	62
3.5	57	3.16	62
3.7	58	3.17	63
3.8	59	3.21	64
3.12	60		
<b>2.3 Довільна плоска система сил</b>			
№ задачі	Сторінка	№ задачі	Сторінка
4.1	71	4.20	85
4.2	72	4.21	86
4.6	73	4.22	87
4.7	75	4.25	88
4.8	76	4.26	89
4.11	77	4.27	90
4.12	78	4.28	91
4.13	79	4.29	93
4.14	80	4.30	94
4.16	81	4.34	96
4.17	82	4.35	98

4.18	83	4.38	99
4.19	84	4.42	102
<b>2.4 Розрахунок плоских ферм</b>			
<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>	<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>
4.45	106	4.67	110
4.46	108	4.70	112
<b>2.5 Сили тертя</b>			
<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>	<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>
5.7	115	5.28	119
5.21	116	5.38	120
5.26	116	5.39	121
5.27	118		
<b>3. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ</b>			
<b>3.1 Зведення довільної системи сил до спрощеного виду</b>			
<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>	<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>
7.1	128	7.10	130
7.3	129		
<b>3.2 Просторова збіжна система сил</b>			
<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>	<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>
6.0	133	6.8	136
6.3	134	6.10	137
6.4	135	6.13	138
<b>3.3 Довільна просторова система сил</b>			
<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>	<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>
8.7	140	8.21	150
8.8	141	8.24	151
8.13	142	8.25	153
8.14	144	8.28	155
8.15	145	8.30	156
8.16	146	8.33	157
8.18	148	8.36	159
8.20	149		
<b>4 ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА</b>			
<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>	<b>№ задачі</b>	<b>Сторінка</b>
9.2	164	9.18	172
9.4	165	9.21	174
9.5	166	9.22	175
9.8	167	9.25	176
9.10	170	9.26	177
9.12	171		

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**ШТАНЬКО** Петро Костянтинович  
**ОМЕЛЬЧЕНКО** Ольга Станіславівна

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА  
В РІШЕННЯХ ЗАДАЧ  
ІЗ ЗБІРНИКА І. В. МЕЩЕРСЬКОГО.**

**ЧАСТИНА І. СТАТИКА**

Навчальний посібник для студентів інженерних  
спеціальностей



Видавець:

**ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»**

*Адреса редакції:* Україна, 69057, м. Запоріжжя,

Соборний просп., буд. 158, оф. 249.

моб. +38 (068) 448-11-28, [mail@status.zp.ua](mailto:mail@status.zp.ua)

<http://status.zp.ua>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,  
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції *серія ДК № 5316 від 03.04.2017*

Здано в набір 17•IV•2024. Підписано до друку 26•IV•2024. Формат 60x84  $\frac{1}{4}$ к.

Папір офсетний № 1. Гарнітура Таймс. Друк цифровий. Ум. друк. арк. 11,63.

Обл.-вид. арк. 5,95. Друк. арк. відбиток 3487,5. Наклад 300 прим.

Замовлення № 12 039/04.2024-А. Ціна договірна.

Термін придатності книжки *необмежений*.

Макет розроблений:

Ольга Станіславівна ОМЕЛЬЧЕНКО

Макет віддрукований:

поліграфічним підприємством ФОП Яндола О.В.

м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 51, т. 067-270-6000, [www.copy.zp.ua](http://www.copy.zp.ua)