

УДК 517.954

Сніжко Н.В.¹, Сясін Б.Р.²

¹ канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

² студ. гр. КНТ-814 НУ «Запорізька політехніка»

МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ПОЛЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

Теорема та поняття теорії поля дають багатий математичний апарат для моделювання та дослідження фізичних процесів, зокрема, в області електростатики та електродинаміки.

Розглянемо наступну задачу: необхідно отримати формулу для розрахунку напруженості поля всередині кулі, рівномірно зарядженої по об'єму. Усередині самої кулі проведемо концентричну з нею сферу S радіуса r (рис. 1).

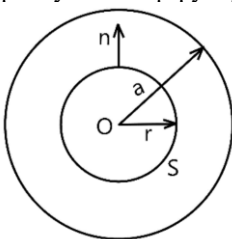


Рисунок 1 – Рівномірно заряджена куля.

Рівномірно заряджена куля створює в зовнішньому просторі таке поле, як і у випадку, якби весь заряд був зосереджений у його центрі [2]. Враховуючи кульову симетрію, маємо:

$$\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1)$$

Запишемо даний вираз у координатній формі:

$$E_x = E(r) \frac{x}{r}, \quad E_y = E(r) \frac{y}{r}, \quad E_z = E(r) \frac{z}{r}. \quad (2)$$

Диференціюємо E_x і враховуємо, що $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ та $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, одержуємо:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr} \frac{x^2}{r^2} - E \frac{x^2}{r^3} + E \frac{1}{r}. \quad (3)$$

Напишемо аналогічні вирази для похідних $\frac{\partial E_y}{\partial y}$, $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ і додамо їх:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr}. \quad (4)$$

За теоремою Гаусса в диференціальному вигляді [1] маємо, що $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, де ρ – об’ємна густина електричного заряду, віднесена до одиниці об’єму. Тоді у внутрішніх точках кулі виконується:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr} = 4\pi\rho. \quad (5)$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо даний вираз, одержуємо:

$$\begin{aligned} \int d(r^2 E) &= \int 4\pi\rho r^2 dr \\ r^2 E &= \frac{4\pi\rho}{3} r^3 + C \end{aligned} \quad (6)$$

Виражаємо E , таким чином знаходимо шукану формулу для розрахунку напруженості поля всередині кулі:

$$E = \frac{4\pi\rho}{3} r + \frac{C}{r^2}. \quad (7)$$

З курсу теоретичної фізики відомо, що напруженість поля E в центрі кулі скінченна, тому стала C повинна дорівнювати нулю. Остаточно маємо:

$$E = \frac{4\pi\rho}{3} r. \quad (8)$$

Використання елементів теорії поля в задачах фізики базується на тому, що будь-який фізичний процес може бути математично змодельований. Застосування диференціальних операторів теорії поля значно спрощує створення моделі фізичних явищ і скорочує розв’язання задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В. Диференціальне числення : навч. посібник. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2021. 308 с.
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальний курс фізики : у 3 т. 2-ге вид., випр. Київ : Техніка, 2006.