

Д.О. Кулагін, канд. техн. наук, доц.

Запорізький національний технічний університет, м.
Запоріжжя, Україна,
e-mail: nemix123@rambler.ru

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЯГОВОГО АСИНХРОННОГО ДВИГУНА З УРАХУВАННЯМ НАСИЧЕННЯ МАГНІТНИХ КІЛ

Д.А. Кулагин, канд. техн. наук, доц.

Запорожский национальный технический
университет, г. Запорожье, Украина,
e-mail: nemix123@rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЯГОВОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЕТОМ НАСЫЩЕНИЯ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

D.O. Kulagin, Cand.Sci. (Tech.), Assoc. Prof.

Zaporizhzhya national technical University,
Zaporizhzhya, Ukraine,
e-mail: nemix123@rambler.ru

THE MATHEMATICAL MODEL OF ASYNCHRONOUS TRACTION MOTOR TAKING INTO ACCOUNT THE SATURATION OF MAGNETIC CIRCUITS

Мета. Розробка математичної моделі тягової асинхронної машини в (d, q) системі координат з урахуванням насичення магнітних кіл.

Методика. В роботі використано метод динамічних індуктивностей, який поєднано з використанням системного дослідження властивостей тягового асинхронного двигуна.

Результати. Створено аналітичну модель магнітних кіл асинхронного тягового двигуна, в якій враховано дію тангенціальної та радіальної динамічної індуктивностей. На основі цього побудовано тензор динамічних індуктивностей насиченої машини, за яким було записано в (d, q) системі координат рівняння роторних та статорних кіл асинхронного тягового двигуна з урахуванням насичення. Обґрунтовано використання методу динамічних індуктивностей при побудові математичної моделі тягового асинхронного двигуна, що дозволив врахувати насичення головного магнітного шляху для режимів з широким діапазоном зміни потоку взаємодії між статором та ротором, насичення шляхів потоків розсіювання для режимів, що характеризуються значними струмами контурів машини, взаємодію, зумовлену процесами насичення між взаємно перпендикулярними контурами машини, а також сумісне насичення робочим потоком та потоками розсіювання для режимів, що характеризуються значною величиною робочого потоку та великими значеннями струмів контурів машини. Дані режими є характерними для тягових асинхронних машин з огляду на режими роботи тягового електрорухомого складу залізниць.

Наукова новизна. Враховано зміну магнітного стану тягового асинхронного двигуна, що є актуальною задачею з огляду на таку зміну в широкому діапазоні робочих режимів тягового електрорухомого складу залізниць.

Практична значимість. Створена математична модель дозволяє враховувати зміну магнітного стану тягового асинхронного двигуна, що є необхідним для побудови адекватних систем керування приводами та систем автоведення тягового електрорухомого складу залізниць.

Ключові слова: *тягова асинхронна машина, насичення, магнітне коло, рівняння стану*

Постановка проблеми. В залежності від багатьох обставин для встановлення оптимальних режимів ведення електрорухомого складу залізниць на похилих профілях залізничного шляху з метою досягнення кутових швидкостей обертання тягових двигунів вище за номінальну, при оптимізації енергетичних характеристик тягової електропедачі в залежності від навантаження на тягову передачу, та при оптимізації динамічних характеристик електрорухомого складу залізниць машиніст або система автоведення поїзда повинні переводити

тягові двигуни у зону роботи зі зниженим значенням модуля вектора потокозчеплення ротора. При такій зміні режимів роботи необхідним є врахування в математичній моделі системи керування тяговою електропедачею зміни параметрів тягового двигуна, що пов'язана з ефектом насичення магнітної системи асинхронної машини [1-5].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для врахування насичення на практиці використовують наступні відомі методи:

1. Метод статистичних індуктивностей [3-6], в якому нелінійність кола намагнічування враховується статистичною залежністю між потокозчепленням та струмом намагнічування, що задається за допомогою таблиці, або за допомогою аналітичної апроксимації:

$$\vec{\psi}_\delta = L_m(i_\mu)\vec{i}_\mu, \quad (1)$$

де $\vec{\psi}_\delta$ - узагальнений вектор головного (або в повітряному зазорі) потокозчеплення тягового асинхронного двигуна;

$\vec{i}_\mu$ - узагальнений вектор струму намагнічування тягового асинхронного двигуна;

L_μ - еквівалентна взаємна індуктивність від головного магнітного поля, що зчеплене з кожною фазною обмоткою машини, яке створюється сумісною дією струмів всіх трьох фазних статорних обмоток машини.

2. Метод динамічних індуктивностей [1, 7, 8], який дозволяє врахувати:

- насичення головного магнітного шляху для режимів з широким діапазоном зміни потоку взаємодукції між статором та ротором;

- насичення шляхів потоків розсіювання для режимів, що характеризуються значними струмами контурів машини;

- взаємодукцію, зумовлену процесами насичення, між взаємно перпендикулярними контурами машини;

- сумісне насичення робочим потоком та потоками розсіювання для режимів, що характеризуються значною величиною робочого потоку та великими значеннями струмів контурів машини.

Останній метод, за дослідженнями авторів [1, 7, 8], дозволяє у зручній формі описати динаміку асинхронної машини та врахувати значну кількість процесів, що відбуваються у двигуні при насиченні. Далі, з огляду на це, будемо використовувати саме його.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Для роторів тягових електричних машин змінного струму, за відомим дослідженням К. П. Ковача та Й. Раца, часто є характерною електрична або магнітна несиметричність, тобто різна магнітна провідність в двох взаємно перпендикулярних напрямках – повздовжній (d) та поперечній (q) осях. Відповідно до цього розрізняють нерівні одне одному повні опори роторних обмоток у повздовжній та поперечній осях.

Напрямок повздовжньої осі d приймається за дійсну вісь, а напрямок поперечної q осі – за уявну вісь.

Існуючі моделі асинхронних машин потребують додаткових складних перетворень для отримання повної математичної моделі в проєкціях узагальнених векторів на відповідні осі системи

координат (d, q) або громіздких розрахунків, пов'язаних зі знаходженням зворотних матриць при використанні моделей в фазових координатах.

Формулювання мети роботи. Створення математичної моделі тягової асинхронної машини в (d, q) системі координат з урахуванням насичення магнітних кіл.

Викладення основного матеріалу. Система диференціальних рівнянь, в координатах (d, q) , жорстко пов'язаній з ротором тягового асинхронного двигуна (рівняння Парка) має вигляд [9]:

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot r_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_r \cdot \psi_{rq}; \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot r_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{rd}; \\ u_{rd} = i_{rd} \cdot r_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt}; \\ u_{rq} = i_{rq} \cdot r_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt}, \end{cases} \quad (2)$$

де u_{sd}, u_{sq} - проєкції на відповідні осі системи координат (d, q) узагальненого вектора статорної напруги $\vec{U}_s$ тягового асинхронного двигуна;

u_{rd}, u_{rq} - проєкції на відповідні осі системи координат (d, q) узагальненого вектора роторної напруги $\vec{U}_r$ двигуна;

r_{rd}, r_{rq} - відповідні значення опорів роторних обмоток за напрямками системи координат (d, q) ;

r_{sd}, r_{sq} - відповідні значення опорів статорних обмоток за напрямками системи координат (d, q) ;

i_{sd}, i_{sq} - проєкції на відповідні осі системи координат (d, q) узагальненого вектора статорного струму $\vec{i}_s$ тягового асинхронного двигуна;

i_{rd}, i_{rq} - проєкції на відповідні осі системи координат (d, q) узагальненого вектора роторного струму $\vec{i}_r$ тягового асинхронного двигуна;

ψ_{rd}, ψ_{rq} - проєкції на відповідні осі системи координат (d, q) узагальненого вектора потокозчеплення ротора $\vec{\psi}_r$ двигуна;

ψ_{sd}, ψ_{sq} - проєкції на відповідні осі системи координат (d, q) узагальненого вектора потокозчеплення статора $\vec{\psi}_s$ двигуна;

$\frac{d}{dt}$ - оператор диференціювання за часом;

ω_r - відносна кутова швидкість, яка визначається як:

$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt}. \quad (3)$$

Системи координат ротора і статора переміщуються одна відносно одної, причому кут θ

є кутом між осями і саме він визначає значення ω_r [9].

Проекції векторів потокозчеплення статора $\vec{\psi}_s$ та потокозчеплення ротора $\vec{\psi}_r$ двигуна на відповідні осі системи координат (d, q) можна визначити [5]:

$$\begin{cases} \psi_{sd} = i_{sd} \cdot L_{\sigma s} + i_{rd} \cdot L_m; \\ \psi_{sq} = i_{sq} \cdot L_{\sigma s} + i_{rq} \cdot L_m; \\ \psi_{rd} = i_{sd} \cdot L_m + i_{rd} \cdot L_{\sigma r}; \\ \psi_{rq} = i_{sq} \cdot L_m + i_{rq} \cdot L_{\sigma r}. \end{cases} \quad (4)$$

В системі (4) величини $L_{\sigma s}, L_{\sigma r}$ та $L_{\sigma s}, L_{\sigma r}$ є власними індуктивностями, а величина L_m - взаємною індуктивністю статора і ротора.

Для системи (4) складемо еквівалентну схему електромагнітних контурів тягового асинхронного двигуна (рис. 1).

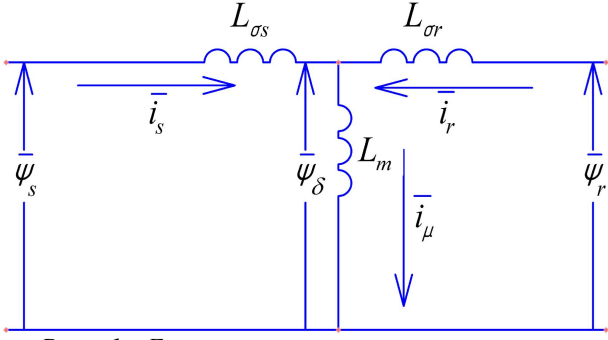


Рис. 1. Еквівалентна схема електромагнітних контурів тягового асинхронного двигуна

Аналогічно до робіт [7, 8] врахуємо також втрати, що виникають у сталі, ввівши до системи (2) величину узагальнюючого опору r_μ , еквівалентного тому, що спричиняє втрати в сталі реального двигуна при проходженні по даному опору відповідних проекцій узагальненого вектора струму намагнічування $\vec{i}_\mu$ на осі системи координат (d, q) :

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot r_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_r \cdot \psi_{rq} + i_{\mu d} \cdot r_\mu; \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot r_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{rd} + i_{\mu q} \cdot r_\mu; \\ u_{rd} = i_{rd} \cdot r_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt}; \\ u_{rq} = i_{rq} \cdot r_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt}. \end{cases} \quad (5)$$

За припущення [1, 8], що модуль вектора потокозчеплення в повітряному зазорі ψ_δ залежить тільки від величини результуючої магнітової сили (МРС), або від пропорційного їй модуля вектора струму намагнічування i_μ , при виході на нелінійну

ділянку кривої намагнічування приріст струму намагнічування Δi_μ по одній осі системи координат, призводить до відповідного приросту потокозчеплення $\Delta \psi_\delta$ по всіх осях системи. Як наслідок, виникає потреба введення до системи динамічних індуктивностей по осях системи та елементів зі взаємною індуктивністю між осями, які залежать від приросту модулів векторів потокозчеплення $\Delta \psi_\delta$ та струму намагнічування Δi_μ , значень самих модулів векторів ψ_δ та i_μ , кута, який визначається взаємним розташуванням проекцій узагальненого вектора намагнічуючого струму на відповідні осі $\eta_\mu = \arctg\left(\frac{i_{\mu d}}{i_{\mu q}}\right)$.

У відповідності до вказаного припущення можна записати:

$$i_\mu = \sqrt{i_{\mu d}^2 + i_{\mu q}^2} = \sqrt{(i_{sd} + i_{rd})^2 + (i_{sq} + i_{rq})^2}. \quad (6)$$

Похідна вектора робочого потокозчеплення на основі [1]:

$$\frac{d\vec{\psi}_\delta}{dt} = \frac{d\vec{\psi}_\delta}{d\vec{i}_\mu} \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt} = L^\partial \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt} = \begin{bmatrix} L_d^\partial & M_{dq}^\partial \\ M_{qd}^\partial & L_q^\partial \end{bmatrix} \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt}, \quad (7)$$

де L^∂ - тензор динамічних індуктивностей насиченої машини, який за своїм математичним змістом є оператором [1], що діючи на нескінченно мале прирощення вектора намагнічуючого струму $\vec{i}_\mu$, перетворює його у відповідне прирощення вектора робочого потокозчеплення $\vec{\psi}_\delta$.

У відповідності до дослідження [1] приймаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\psi}_\delta}{dt} &= \frac{d\vec{\psi}_\delta}{d\vec{i}_\mu} \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt} = L^\partial \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt} = \\ &= \begin{bmatrix} L_d^\partial & M_{dq}^\partial \\ M_{qd}^\partial & L_q^\partial \end{bmatrix} \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt}, \end{aligned} \quad (8)$$

де динамічний коефіцієнт взаємоіндукції між осями при зміні струму по осі d :

$$\begin{aligned} M_{qd}^\partial &= \lim_{\Delta i_{\mu d} \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_{\delta q}}{\Delta i_{\mu d}} = \frac{\partial \psi_{\delta q}}{\partial i_{\mu d}} = \\ &= \left(\frac{d\psi_\delta}{dt} - \frac{\psi_\delta}{i_\mu} \right) \cdot \sin \eta_\mu \cdot \cos \eta_\mu = \\ &= 0,5 \cdot \left(\frac{d\psi_\delta}{dt} - \frac{\psi_\delta}{i_\mu} \right) \cdot \sin 2\eta_\mu = M^\partial, \end{aligned} \quad (9)$$

динамічний коефіцієнт самоіндукції контуру по осі d :

$$L_d^{\partial} = \lim_{\Delta i_{\mu d} \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_{\delta d}}{\Delta i_{\mu d}} = \frac{\partial \psi_{\delta d}}{\partial i_{\mu d}} = \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \cos^2 \eta_{\mu} + \frac{\psi_{\delta}}{i_{\mu}} \cdot \sin^2 \eta_{\mu}, \quad (10)$$

динамічний коефіцієнт взаємодукції між осями при зміні струму по осі q :

$$M_{dq}^{\partial} = \lim_{\Delta i_{\mu q} \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_{\delta d}}{\Delta i_{\mu q}} = \frac{\partial \psi_{\delta d}}{\partial i_{\mu q}} = \frac{\partial \psi_{\delta q}}{\partial i_{\mu d}} = \left(\frac{d\psi_{\delta}}{dt} - \frac{\psi_{\delta}}{i_{\mu}} \right) \cdot \sin \eta_{\mu} \cdot \cos \eta_{\mu} = 0,5 \cdot \left(\frac{d\psi_{\delta}}{dt} - \frac{\psi_{\delta}}{i_{\mu}} \right) \cdot \sin 2\eta_{\mu} = M^{\partial}, \quad (11)$$

динамічний коефіцієнт самоіндукції контуру по осі q :

$$L_q^{\partial} = \lim_{\Delta i_{\mu q} \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_{\delta q}}{\Delta i_{\mu q}} = \frac{\partial \psi_{\delta q}}{\partial i_{\mu q}} = \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \sin^2 \eta_{\mu} + \frac{\psi_{\delta}}{i_{\mu}} \cdot \cos^2 \eta_{\mu}. \quad (12)$$

Для проєкцій узагальненого вектора потокозчеплення на осі системи координат (d, q) мають місце співвідношення:

$$\psi_{sd} = \psi_{\sigma sd} + \psi_{\delta d}; \quad (13)$$

$$\psi_{sq} = \psi_{\sigma sq} + \psi_{\delta q}; \quad (14)$$

$$\psi_{rd} = \psi_{\sigma rd} + \psi_{\delta d}; \quad (15)$$

$$\psi_{rq} = \psi_{\sigma rq} + \psi_{\delta q}. \quad (16)$$

В рівняннях (13) - (16) через $\psi_{\sigma s, r(d, q)}$ позначено відповідні проєкції узагальнених векторів потокозчеплення розсіювання статора та ротора, пов'язаних з дією сталих індуктивностей розсіювання обмоток статора $L_{\sigma s}$ та ротора $L_{\sigma r}$ відповідно. Тобто:

$$\psi_{\sigma sd} = L_{\sigma s} \cdot i_{sd}; \quad (17)$$

$$\psi_{\sigma sq} = L_{\sigma s} \cdot i_{sq}; \quad (18)$$

$$\psi_{\sigma rd} = L_{\sigma r} \cdot i_{rd}; \quad (19)$$

$$\psi_{\sigma rq} = L_{\sigma r} \cdot i_{rq}; \quad (20)$$

Для проєкцій узагальненого вектора струму намагнічування $\vec{i}_{\mu}$ на осі системи координат (d, q) мають місце співвідношення:

$$i_{\mu d} = i_{sd} + i_{rd}; \quad (21)$$

$$i_{\mu q} = i_{sq} + i_{rq}. \quad (22)$$

Запишемо на основі системи (5) систему рівнянь, що визначає контури статора:

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot r_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_r \cdot \psi_{rq} + i_{\mu d} \cdot r_{\mu}; \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot r_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{rd} + i_{\mu q} \cdot r_{\mu}, \end{cases} \quad (23)$$

та систему рівнянь, що визначає контури короткозамкненого ротора:

$$\begin{cases} 0 = i_{rd} \cdot r_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt}; \\ 0 = i_{rq} \cdot r_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt}. \end{cases} \quad (24)$$

Побудуємо схему заміщення тягового асинхронного двигуна, яка відповідає отриманим рівнянням (23), (24) (рис. 2) на основі принципів, закладених в [5, 7].

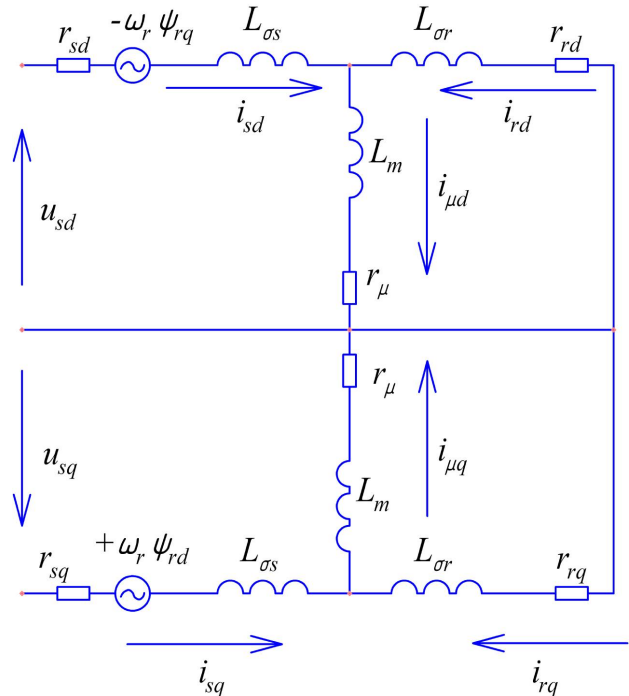


Рис. 2. Схема заміщення тягового асинхронного двигуна, відповідно до системи рівнянь (23), (24)

Виконавши підстановку виразів (13) – (22) в систему рівнянь (23) отримаємо, здійснивши попередньо аналітичні перетворення:

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot (r_{sd} + r_{\mu}) + L_{\sigma s} \frac{di_{sd}}{dt} + \\ + \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} - \omega_r \cdot L_{\sigma r} \cdot i_{rq} - \omega_r \cdot \psi_{\delta q} + i_{rd} \cdot r_{\mu}; \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot (r_{sq} + r_{\mu}) + L_{\sigma s} \frac{di_{sq}}{dt} + \\ + \frac{d\psi_{\delta q}}{dt} + \omega_r \cdot L_{\sigma r} \cdot i_{rd} + \omega_r \cdot \psi_{\delta d} + i_{rq} \cdot r_{\mu}. \end{cases} \quad (25)$$

Виконавши підстановку виразів (13) – (22) в систему рівнянь (24) отримаємо, здійснивши попередньо аналітичні перетворення:

$$\begin{cases} 0 = i_{rd} \cdot r_{rd} + L_{\sigma r} \frac{di_{rd}}{dt} + \frac{d\psi_{\delta d}}{dt}; \\ 0 = i_{rd} \cdot r_{rq} + L_{\sigma r} \frac{di_{rq}}{dt} + \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}. \end{cases} \quad (26)$$

Розглянемо проекції узагальненого вектора струму намагнічування $\vec{i}_{\mu}$ на осі системи координат (d, q) :

$$i_{\mu d} = i_{\mu} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}}; \quad (27)$$

$$i_{\mu q} = i_{\mu} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}}. \quad (28)$$

Модуль просторового вектора робочого потокозчеплення:

$$\psi_{\delta} = \sqrt{\psi_{\delta d}^2 + \psi_{\delta q}^2}. \quad (29)$$

Знайдемо диференціал за часом від виразів (21) та (22), використовуючи (27) – (29):

$$\frac{di_{\mu d}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} \right) \cdot i_{\mu}; \quad (30)$$

$$\frac{di_{\mu q}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} \right) \cdot i_{\mu}. \quad (31)$$

У виразах (30), (31) значення похідних, на основі теорії диференціювання складних функцій, можна знайти як:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} \right) = \frac{\psi_{\delta} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} - \psi_{\delta d} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt}}{\psi_{\delta}^2}; \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} \right) = \frac{\psi_{\delta} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt} - \psi_{\delta q} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt}}{\psi_{\delta}^2}. \quad (33)$$

Аналогічно до (8) запишемо для похідних у виразах (30), (31):

$$\frac{di_{\mu}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt}. \quad (34)$$

Виконаємо підстановку (32) – (34) у (30) та (31):

$$\begin{aligned} \frac{di_{\mu d}}{dt} &= \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} + \\ &+ \left(\frac{1}{\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} - \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}^2} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \right) \cdot i_{\mu}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{\mu q}}{dt} &= \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} + \\ &+ \left(\frac{1}{\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt} - \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}^2} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \right) \cdot i_{\mu}. \end{aligned} \quad (36)$$

В роботі [1] введено поняття радіальної динамічної індуктивності, що дорівнює границі відношення прирощення модуля робочого потокозчеплення до прирощення намагнічуючого струму, якщо останнє прямує до нуля і напрямком його співпадає з напрямком намагнічуючого струму:

$$L_{\rho}^{\delta} = \frac{d\psi_{\delta}}{di_{\mu}}. \quad (37)$$

Також в роботі [1] введено поняття тангенціальної динамічної індуктивності, що являє собою границю відношення прирощення робочого потокозчеплення до прирощення намагнічуючого струму, якщо останнє прямує до нуля таким чином, що модуль вектора намагнічуючого струму залишається незмінним:

$$L_{\tau}^{\delta} = \frac{\psi_{\delta}}{i_{\mu}}. \quad (38)$$

У відповідності до дослідження [1] та виразів (8) – (12), (37) на рис. 3 надамо графічну інтерпретацію фізичного змісту радіальної динамічної індуктивності.

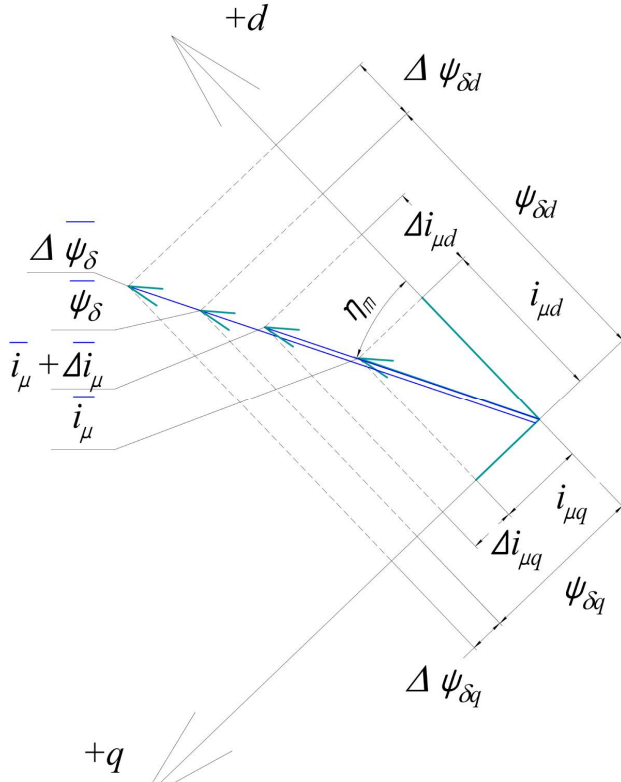


Рис. 3. Графічна інтерпретація фізичного змісту радіальної динамічної індуктивності

У відповідності до дослідження [1] та виразів (8) – (12), (38) на рис. 4 надамо графічну інтерпретацію фізичного змісту тангенціальної динамічної індуктивності.

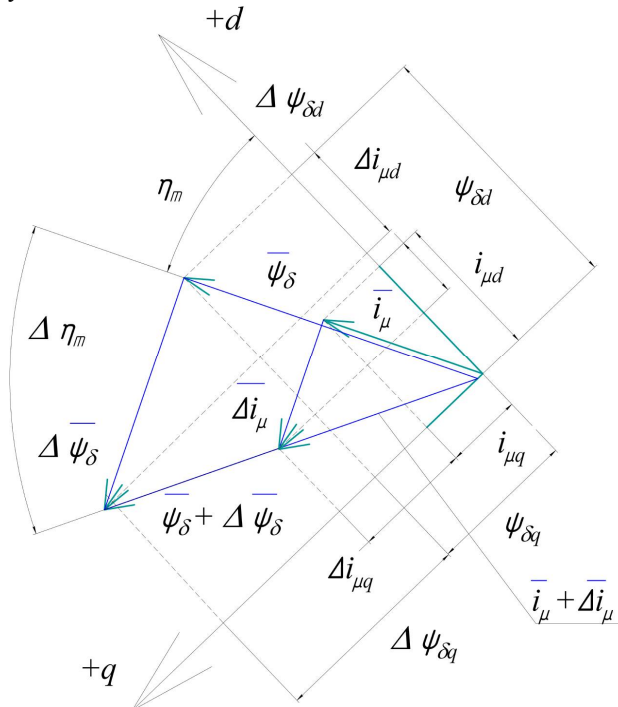


Рис. 4. Графічна інтерпретація фізичного змісту тангенціальної динамічної індуктивності

В роботах [7, 8] запропоновано, для спрощення форми запису, використовувати величини, зворотні до радіальної динамічної індуктивності:

$$Y_{\rho}^{\delta} = \frac{1}{L_{\rho}^{\delta}} = \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}}, \quad (39)$$

та тангенціальної динамічної індуктивності:

$$Y_{\tau}^{\delta} = \frac{1}{L_{\tau}^{\delta}} = \frac{i_{\mu}}{\psi_{\delta}}. \quad (40)$$

З урахуванням (39), (40) вирази (35), (36) можна записати:

$$\frac{di_{\mu d}}{dt} = (Y_{\rho}^{\delta} - Y_{\tau}^{\delta}) \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} + Y_{\tau}^{\delta} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt}; \quad (41)$$

$$\frac{di_{\mu q}}{dt} = (Y_{\rho}^{\delta} - Y_{\tau}^{\delta}) \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} + Y_{\tau}^{\delta} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}. \quad (42)$$

На основі (29), як для складної функції, можна записати:

$$\frac{d\psi_{\delta}}{dt} = \frac{\psi_{\delta d} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} + \psi_{\delta q} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}}{\psi_{\delta}}. \quad (43)$$

Виконаємо підстановку (43) в (41), (42):

$$\begin{aligned} \frac{di_{\mu d}}{dt} &= (Y_{\rho}^{\delta} - Y_{\tau}^{\delta}) \times \\ &\times \left(\frac{\psi_{\delta d}^2 \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} + \psi_{\delta q} \cdot \psi_{\delta d} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}}{\psi_{\delta}^2} \right) + Y_{\tau}^{\delta} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{\mu q}}{dt} &= (Y_{\rho}^{\delta} - Y_{\tau}^{\delta}) \times \\ &\times \left(\frac{\psi_{\delta d} \cdot \psi_{\delta q} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} + \psi_{\delta q}^2 \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}}{\psi_{\delta}^2} \right) + Y_{\tau}^{\delta} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}. \end{aligned} \quad (45)$$

З метою спрощення виконаємо перетворення в отриманій моделі, виключивши проекції узагальненого вектора роторного струму на відповідні осі у системі (26). За (21), (22) маємо:

$$i_{rd} = i_{\mu d} - i_{sd}; \quad (46)$$

$$i_{rq} = i_{\mu q} - i_{sq}. \quad (47)$$

Тоді враховуючи (27), (28), (39), (40) маємо:

$$i_{rd} = i_{\mu} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} - i_{sd} = Y_{\tau}^{\delta} \cdot \psi_{\delta d} - i_{sd}; \quad (48)$$

$$i_{rq} = i_{\mu} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} - i_{sq} = Y_{\tau}^{\delta} \cdot \psi_{\delta q} - i_{sq}. \quad (49)$$

Для диференціалів проекцій вектора роторного струму запишемо:

$$\frac{di_{rd}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} \right) \cdot i_{\mu} - \frac{di_{sd}}{dt}; \quad (50)$$

$$\frac{di_{rq}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} \right) \cdot i_{\mu} - \frac{di_{sq}}{dt}. \quad (51)$$

По аналогії з [1] на основі виразів (4), (13) – (20) можна записати:

$$\frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{sd}} = L_{\sigma s} + \frac{\partial \psi_{\delta d}}{\partial i_{sd}} = L_{\sigma s} + \frac{\partial \psi_{\delta d}}{\partial i_{\mu d}} \cdot \frac{\partial i_{\mu d}}{\partial i_{sd}}, \quad (52)$$

що з урахуванням (6), (9) – (12) дає:

$$\frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{sd}} = L_{\sigma s} + L_d^{\delta}, \quad (53)$$

Аналогічно можна записати:

$$\frac{\partial \psi_{sq}}{\partial i_{sq}} = L_{\sigma s} + L_q^{\delta}, \quad (54)$$

$$\frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{rd}} = L_{\sigma r} + L_d^{\delta}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial \psi_{rq}}{\partial i_{rq}} = L_{\sigma r} + L_q^{\delta}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{rd}} = L_d^{\delta}, \quad (57)$$

$$\frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{sd}} = L_d^{\delta}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial \psi_{sq}}{\partial i_{rq}} = L_q^{\delta}, \quad (59)$$

$$\frac{\partial \psi_{rq}}{\partial i_{sq}} = L_q^{\delta}, \quad (60)$$

$$\frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{rd}} = L_{\sigma r} + L_d^{\delta}, \quad (61)$$

а з урахуванням (9), (11):

$$\frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{sq}} = \frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{rq}} = \frac{\partial \psi_{sq}}{\partial i_{sd}} = \frac{\partial \psi_{sq}}{\partial i_{rd}} = M^{\delta}, \quad (62)$$

$$\frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{sq}} = \frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{rq}} = \frac{\partial \psi_{rq}}{\partial i_{sd}} = \frac{\partial \psi_{rq}}{\partial i_{rd}} = M^{\delta}. \quad (63)$$

Останні два вирази підтверджують висновок Р. В. Фільца [1] стосовно симетричності тензора L^{δ} у (7), (8). Це пояснюється тим, що динамічні коефіцієнти взаємодії між контурами d та q задовольняють теоремі взаємності.

Таким чином з усіх робочих динамічних параметрів машини достатньо знайти тільки три параметри L_d^{δ} , L_q^{δ} та M^{δ} [1], що є елементами тензора L^{δ} у (7), (8).

На основі досліджень [1] можна записати:

$$d\vec{\psi}_{\delta} = (L_d^{\delta} di_{\mu d} + M_{dq}^{\delta} di_{\mu q}) \vec{d} + (L_q^{\delta} di_{\mu q} + M_{qd}^{\delta} di_{\mu d}) \vec{q}, \quad (64)$$

або враховуючи (62), (63):

$$d\vec{\psi}_{\delta} = L_d^{\delta} di_{\mu d} \vec{d} + M^{\delta} di_{\mu q} \vec{d} + L_q^{\delta} di_{\mu q} \vec{q} + M^{\delta} di_{\mu d} \vec{q}, \quad (65)$$

де $\vec{d}$ та $\vec{q}$ - одиничні вектори, що належать відповідним осям системи.

Тоді згідно з (65) використавши (52) – (63) запишемо систему рівнянь (23), що визначає контури статора наступним чином:

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot r_{sd} + (L_{\sigma s} + L_d^{\delta}) \frac{di_{sd}}{dt} + M^{\delta} \frac{di_{sq}}{dt} + L_d^{\delta} \frac{di_{rd}}{dt} + M^{\delta} \frac{di_{rq}}{dt} - \omega_r \cdot \psi_{rq} + i_{\mu d} \cdot r_{\mu}; \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot r_{sq} + (L_{\sigma s} + L_q^{\delta}) \frac{di_{sq}}{dt} + M^{\delta} \frac{di_{sd}}{dt} + L_q^{\delta} \frac{di_{rq}}{dt} + M^{\delta} \frac{di_{rd}}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{rd} + i_{\mu q} \cdot r_{\mu}, \end{cases} \quad (66)$$

та аналогічно систему рівнянь (24), що визначає контури короткозамкненого ротора:

$$\begin{cases} 0 = i_{rd} \cdot r_{rd} + L_d^{\hat{\varphi}} \frac{di_{sd}}{dt} + M^{\hat{\varphi}} \frac{di_{sq}}{dt} + \\ + (L_{\sigma r} + L_d^{\hat{\varphi}}) \frac{di_{rd}}{dt} + M^{\hat{\varphi}} \frac{di_{rq}}{dt}; \\ 0 = i_{rq} \cdot r_{rq} + L_q^{\hat{\varphi}} \frac{di_{sq}}{dt} + M^{\hat{\varphi}} \frac{di_{sd}}{dt} + \\ + (L_{\sigma r} + L_q^{\hat{\varphi}}) \frac{di_{rq}}{dt} + M^{\hat{\varphi}} \frac{di_{rd}}{dt}. \end{cases} \quad (67)$$

Таким чином, отримано математичну модель у вигляді системи рівнянь (66), (67), в якій на основі методу динамічних індуктивностей враховано зміну магнітного стану тягового асинхронного двигуна в процесі його роботи в різних режимах, відповідно до широкого різноманіття режимів роботи тягової електропередачі електрорухомого складу залізниць.

Висновки та перспективи розвитку напрямку.

Отримані результати є базовими при розробці та побудові адекватних систем керування приводами та систем автоведення тягового електрорухомого складу залізниць, адже дозволяють враховувати зміну магнітного стану тягового асинхронного двигуна, що дозволяє досить повно та адекватно реальним електромагнітним процесам описувати дані фізичні процеси та моделювати їх. Створена математична модель показує перспективність подальшого дослідження в цьому напрямку для отримання інших співвідношень для тягової асинхронної машини на основі отриманих рівнянь.

Список літератури / References

1. Фильц Р. В. Дифференциальные уравнения напряжений насыщенных неявнополюсных машин переменного тока [Текст] / Р. В. Фильц // Известия ВУЗов. Электромеханика. – 1966. – № 11. – С. 1195-1203.
2. Fil'ts R. V. Differential equations stress saturated not-brushless DC AC machines / R. V. Fil'ts // Izvestiya VUZov. Elektromekhanika. – 1966. – № 11. – pp. 1195-1203.
3. Boldea I. Induction Machines Handbook [Текст] / Ion Boldea, Syed A. Nasar. – CRC Press Boca Raton : London, New York, Washington, D.C, 2002. – 845 p.
4. Виноградов А. Б. Векторное управление электроприводами переменного тока [Текст] / А. Б. Виноградов. – ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина». – Иваново, 2008. – 320 С.
5. Vinogradov A. B. Vector control of AC electric drives / A. B. Vinogradov. – GOUVPO «Ivanovskiy gosudarstvennyy energeticheskiy universitet im. V.I. Lenina». – Ivanovo, 2008. – 320 p.
6. Мищенко В. А. Теория, способы и системы векторного и оптимального векторного управления электроприводами переменного тока. Монография [Текст] / Мищенко В. А. – М. : Издательство «Информэлектро», 2002. – 168 С.
7. Mishchenko V. A. Theory, methods and systems of the vector and the optimal vector control electric drives of an alternating current. Monograph / Mishchenko V. A. – М. : Izdatel'stvo «Informelektro», 2002. – 168 p.
8. Пивняк Г. Г. Современные частотно-регулируемые асинхронные электроприводы с широтно-импульсной модуляцией [Текст] / Пивняк Г. Г., Волков А. В. – Днепропетровск, 2006. – 421 С.
9. Pivnyak G. G. Modern frequency-controlled asynchronous electric drives with pulse-width modulation / Pivnyak G. G., Volkov A. V. – Dnepropetrovsk, 2006. – 421 p.
10. Потапенко Е. М. Робастные алгоритмы векторного управления асинхронным приводом [Текст] / Е. М. Потапенко, Е. Е. Потапенко. – Запорожье : ЗНТУ, 2009. – 353 С.
11. Potapenko E. M. Robust algorithms for vector control asynchronous drive / E. M. Potapenko, E. E. Potapenko. – Zaporozh'e : ZNTU, 2009. – 353 p.
12. Беспалов Б. Я. Математическая модель асинхронного двигателя в обобщенной ортогональной системе координат [Текст] / Беспалов Б. Я., Мощинский Ю. А., Петров А. П. // Электричество. – 2002. – №8. – С. 33-39.
13. Besspalov B. Ya. Mathematical model of the induction motor in a generalized orthogonal coordinate system / Besspalov B. Ya., Moshchinskiy Yu. A., Petrov A. P. // Elektrichestvo. – 2002. – №8. – pp. 33-39.
14. Снегирев Д. А. Дифференциальные уравнения для исследования электромагнитных переходных процессов частотно-регулируемого асинхронного двигателя с учетом насыщения [Текст] / Снегирев Д. А., Тикунов А. В. // Электротехнические комплексы и системы управления. – 2006. – №2. – С. 69-73.
15. Snegirev D. A. Differential equations for research of electromagnetic transients of frequency-controlled asynchronous motor with taking into account the saturation / Snegirev D. A., Tikunov A. V. // Elektrotekhnicheskie komplekсы i sistemy upravleniya. – 2006. – №2. – pp. 69-73.
16. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин [Текст] / Копылов И. П. – М. : Высшая школа, 2001. – 327 С.
17. Kopylov I. P. Mathematical modelling of electrical machines / Kopylov I. P. – М. : Vysshaya shkola, 2001. – 327 p.

Цель. Разработка математической модели тяговой асинхронной машины в (d,q) системе координат с учетом насыщения магнитных цепей.

Методика. В работе использован метод динамических индуктивностей, который объединен с использованием системного исследования свойств тягового асинхронного двигателя.

Результаты. Создана аналитическая модель магнитных цепей асинхронного тягового двигателя, в которой учтено действие тангенциальной и радиальной динамической индуктивностей. На основе этого построен тензор динамических

индуктивностей насыщенной машины, по которому были записаны в (d,q) системе координат уравнения роторных и статорных цепей асинхронного тягового двигателя с учетом насыщения. Обосновано использование метода динамических индуктивностей при построении математической модели тягового асинхронного двигателя, который позволил учесть насыщение главного магнитного пути для режимов с широким диапазоном изменения потока взаимоиндукции между статором и ротором, насыщение путей потоков рассеяния для режимов, которые характеризуются значительными токами контуров машины, взаимоиндукцию, обусловленную процессами насыщения между взаимно перпендикулярными контурами машины, а также совместное насыщения рабочим потоком и потоками рассеяния для режимов, которые характеризуются значительной величиной рабочего потока и большими значениями токов в контурах машины. Данные режимы являются характерными для тяговых асинхронных машин с учетом режима работы тягового электроподвижного состава железных дорог.

Научная новизна. Учтено изменение магнитного состояния тягового асинхронного двигателя, что является актуальной задачей, учитывая такое изменение в широком диапазоне рабочих режимов тягового электроподвижного состава железных дорог.

Практическая значимость. Созданная математическая модель позволяет учитывать изменение магнитного состояния тягового асинхронного двигателя, что является необходимым для построения адекватных систем управления приводами и систем автоведения тягового электроподвижного состава железных дорог.

Ключевые слова: *тяговая асинхронная машина, насыщение, магнитное круг, уравнение состояния*

Purpose. Development of mathematical model of asynchronous traction machines in (d,q) coordinate system with taking into account the saturation of magnetic circuits.

Methodology. In the paper, we used the method of dynamic inductances, which is connected with the use of a systematic study of properties of the traction motor.

Findings. An analytical model of magnetic circuit asynchronous traction motor, which is taken into account action of the tangential and radial dynamic inductances. On the basis of this built tensor dynamic inductances rich machine, which was recorded in (d,q) coordinate system of equations of rotor and stator circles asynchronous traction motor taking into account the saturation. The author suggests using the method of dynamic inductances at construction of mathematical model traction asynchronous engine, that allows to take into account the saturation of the main magnetic path for the modes with a wide range of changes in the flow of mutual induction between the stator and the rotor, saturation flow path, the scattering modes that are characterized by large current circuits of the machine, induction, due to processes of saturation, between mutually perpendicular to the contours of the machine, as well as the joint saturation worker thread and threads scattering modes that are characterized by the significant size of the workflow and large values of currents contours of the machine. These modes are specific to asynchronous traction machines with consideration of the operation mode of traction electric rolling stock of Railways.

Originality. To account for variations in the magnetic state of traction induction motor, which is a topical issue, considering such a change in a wide range of operating modes of traction electric rolling stock of Railways.

Practical value. The mathematical model allows to take into account the change of the magnetic state of asynchronous traction motor is necessary to build adequate systems of control drives and driving traction electric rolling stock of Railways.

Keywords: *asynchronous traction machine, saturation, magnetic circle, equations of state*

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук, проф., акад. Андрієнко П.Д.

Дата надходження рукопису