

УДК 539.3:621.39

Онуфрієнко В.М.¹, Слюсарова Т.І.², Козак В.С.³

¹ д-р фіз.-мат. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»

² асист. НУ «Запорізька політехніка»

³ студ. гр. М-314 НУ «Запорізька політехніка»

ДИФЕРЕНТЕГРАЛЬНА МОДЕЛЬ МЕМРИСТИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ІМПЕДАНСУ ФРАКТАЛЬНОКОНФІГУРОВАНОГО МЕТАМАТЕРІАЛУ

Необхідність побудови механічних моделей для метаматеріалів обумовлена незастосовністю звичайних рівнянь пружності і в'язкості для такої фізико-геометричної конфігурації тіл, поведінка яких в одних випадках моделюється засобами теорії пружних тіл, а в інших - в'язких.

Механічна поведінка метаматеріалів не задовольняється ні виконанням закону Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon$, ні закону Ньютона $\sigma = \eta \cdot d\varepsilon/dt$, де σ – напруга, ε – деформація, E – модуль пружності, η – коефіцієнт в'язкості. Найпростіші механічні моделі в'язко-пружного матеріалу у вигляді послідовного з'єднання пружного елемента (пружини) і в'язкого елемента (демпфера) (модель Максвелла) та у вигляді паралельного з'єднання пружного елемента і в'язкого елементів (модель Фойгта) узагальнюються стандартною математичною моделлю в'язко-пружного тіла [1] з дробовими похідними у вигляді

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^n a_k D^{\alpha_k} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^m b_k D^{\beta_k} \varepsilon(t),$$
 де $\sigma = \sigma(t)$ та $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – напруга і деформація тіла в момент часу t ; a_k, b_k, E_0 - величини, що задаються; D^{α} і D^{β} - оператори дробового диференціювання. Застосування емпіричної моделі Капуто і Майнарді [2] найбільш точно описує поведінку реальних

в'язко-пружних матеріалів і асоціюється з дробовими аналогами моделей Максвелла, Фойгта і Кельвіна.

Історично індуктор L був відомим пристроєм третього роду. Для метаматеріального фрактально конфігурованого середовища з виявленими магнітними властивостями відгук на зовнішні збурення вимагає введення в механічний імпеданс четвертої складової мемристичного типу, що спонукало висуненню гіпотези про мемристор M .

Безмасовий механічний досконалий резистор пам'яті є точним механічним аналогом M і був знайдений до введення інертної маси, яка є аналогом реального індукторного пристрою L .

Мемристор – це двоконтактний пристрій, опір якого залежить за законом Ома від однієї або декількох внутрішніх змінних стану пристрою. Вперше його математично описав теоретик Леон Чуа [3]. Опір мемристора залежить від усієї минулої форми сигналу прикладеної напруги або струму через мемристор. Завдяки мемристору можна досягти функціональності, яка неможлива за допомогою існуючих елементів схеми.

Теорії механічних кіл з інертною масою m і без неї є за своєю конструкцією математично точними аналогами теорій електричних кіл з індукованим магнетизмом і без нього.

Схему механічного мемристора Бернуллі розглядаємо далі для вводу фрактально конфігурованого елемента, що керується сигналом управління $q(t)$, напругою $v(t)$ і вихідним сигналом та мемристансом $M(q(t))$:

$$\frac{d^\alpha q(t)}{dt^\alpha} = \frac{v(t)}{M(q(t), \alpha)}; D^\alpha i(t) = \frac{d^\alpha q(t)}{dt^\alpha}. \quad (1)$$

В теорії електричних кіл з індукованим магнетизмом у відповідності до закону електромагнітної індукції Фарадея і Максвелла вводиться у розгляд коефіцієнт взаємоіндукції контурів $M = \frac{E}{I}$, як відношення е.р.с. у контурі до струму. У межах схеми Бернуллі для визначення взаємоіндукції між фрактально конфігукованими контурами (елементами) з (1) маємо зв'язок $v(t, \alpha) = D^\alpha i(t) M(q(t), \alpha)$.

Використанням закону повного струму у фрактально конфігурованих провідних множинах [4], що впливає з розгляду закону Біо-Савара-Лапласа, для фрактальних контурів з діаметрами δ і розташованими на відстані h один від одного отримуємо формулу для обчислення коефіцієнта взаємоіндукції

$$M = R(\alpha) \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left[1 - 2 \left(1 + \frac{h}{\delta} \right)^{1-\alpha} + \left(1 + \frac{2h}{\delta} \right)^{1-\alpha} \right]. \quad (2)$$

Розрахунки за формулою (2) збігаються з експериментальними даними для значень скейлінгового показника $\alpha = 2$. Порівняння даних обчислення за формулою (2) з різними значеннями скейлінга і збіг з експериментальними для кожного окремого випадку надає можливість оцінювати фрактальні властивості множин зарядів і струмів. Механічна інтерпретація отриманих залежностей надає можливостей для оцінки механічного імпедансу метаматеріалів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Bagley R. L. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity / R. L. Bagley, P. J. Torvik // *Journal of Rheology*. – 1983. – No 27. – P. 201–210. doi: 10.1122/1.549724.
2. Caputo M. A new dissipation model based on memory mechanism / M. Caputo, F. Mainardi // *Pure and applied geophysics*. – 1971. – Vol. 91. – P. 134–137.
3. Chua L. O. Memristor- the missing circuit element / L. O. Chua // *IEEE Trans. Circuit Theory*. – 1971. – Vol. CT-18. – No 5. – P. 507–519.
4. Onufriyenko V. M. Physical and Geometric Interpretation of α -Characteristics / V. M. Onufriyenko // *Telecommunication and Radio Engineering*. – 1999. – Vol. 53, No 4. – P. 136–139.