

УДК (531.36+539.3): 534.1

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, канд. техн. наук Ю. А. Лымаренко,
А. С. Безнос, А. И. Веселов

Государственная инженерная академия, г. Запорожье

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПЧКОЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Предлагается усовершенствованная дискретная модель упругого стержня в виде цепочки, масса элементов которой зависит от вида движения (поступательное или колебательное). В качестве критерия усовершенствования дискретной модели используется близость графиков дисперсионных зависимостей дискретной и континуальной моделей.

Ключевые слова: стержень, дискретная модель, пружинно-массовая цепочка, дисперсионная зависимость.

Введение

В связи с широким использованием в современной промышленности новых классов ультрадисперсных и нанокристаллических материалов возникает необходимость разработки и исследования новых математических моделей сред, способных учитывать дискретный характер структуры вещества, состоящего из не-

точечных частиц (гранул), связанных сложными силами взаимодействия [2]. В данном направлении получены определенные результаты [1, 3–6], однако, в целом, уровень развития дискретных моделей отстает от потребностей практики. Так, при решении классической задачи о распространении упругой продольной волны в пружинно-массовой цепочке полученная в

результате дисперсионная зависимость близка к континуальному решению только при сравнительно больших длинах волн. В настоящей работе ставится цель усовершенствования такой модели. В качестве критерия усовершенствования предлагается использовать близость графиков дисперсионных зависимостей предлагаемой дискретной модели и континуальной.

1 Стержень

Рассмотрим уравнение продольных колебаний стержня [7]:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad T = EF \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1)$$

Здесь u – продольное перемещение произвольной точки стержня; T – продольное усилие; x – продольная координата; t – время; E – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения стержня; ρ – плотность материала; a – скорость распространения возмущения по стержню.

Исследуем распространение по стержню волны вида

$$u = A \sin(\omega t - kx). \quad (2)$$

Подстановка показывает, что решение (2) удовлетворяет уравнению (1) только в случае

$$\omega = ak. \quad (3)$$

Соотношение (3) является дисперсионным соотношением. Оно задает связь между величинами k и ω . Величина k задает частоту изменения по координате x . Она связана с длиной волны (рис. 1) соотношением

$$L = \frac{2\pi}{k} \Leftrightarrow k = \frac{2\pi}{L}. \quad (4)$$

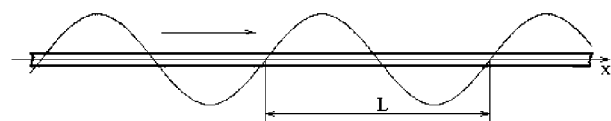


Рис. 1.

Величина ω задает частоту по времени t . Она связана с периодом колебаний T соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (3) получаем

$$\omega = a \frac{2\pi}{L}. \quad (6)$$

Решение (2) описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Все вышесказанное относится и к волне вида

$$u = A \sin(\omega t + kx), \quad (7)$$

распространяющейся в отрицательном направлении оси x .

Рассмотрим сумму двух встречных волн:

$$u = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t + kx) = 2A \sin \omega t \cos kx. \quad (8)$$

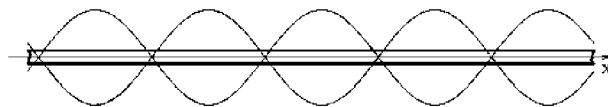


Рис. 2.

Эта сумма описывает так называемые стоячие волны (рисунок 2). Особенностью таких волн является наличие неподвижных (узловых) точек. «Вырезая» из стоячих волн различные участки, можно получать результаты для стержней конечной длины при различных условиях закрепления и различных режимах колебаний.

Например, на рисунке 3 изображен случай вырезания стержня конечной длины b по двум ближайшим узловым точкам. Это отвечает колебаниям стержня с закрепленными концами.

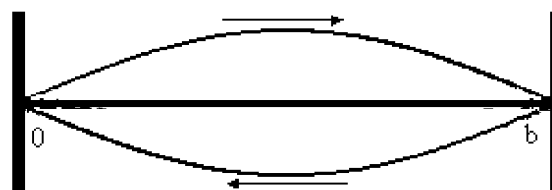


Рис. 3.

В данном случае длина волны равна удвоенной длине стержня, $L = 2b$. В соответствии с этим для частоты колебаний стержня из (6) имеем

$$\omega = a \frac{\pi}{b}. \quad (9)$$

Тот же стержень может совершать колебания по форме, в которой между закрепленными концами укладываются две половинки (рис. 4).

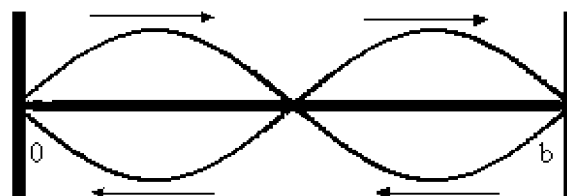


Рис. 4.

В этом случае $L = b$. Из (6) получаем

$$\omega = a \frac{2\pi}{b}. \quad (10)$$

Укорочение длины волны приводит к пропорциональному увеличению частоты колебаний.

Если узловым точкам отвечают неподвижные точки стержня, то точкам с экстремальной (минимальной или максимальной) амплитудой колебаний на рисунке 2 отвечают точки стержня с нулевыми продольными усилиями. Это вытекает из равенства нулю производных в указанных точках и выражения для усилия (1). На рисунке 4 изображены колебания стержня с двумя свободными концами, «вырезанного» из рисунка 2 по двум ближайшим экстремумам.

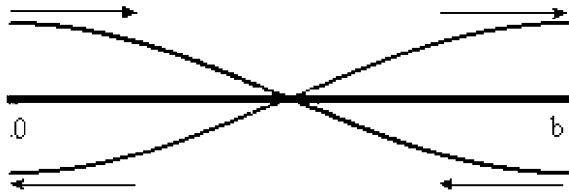


Рис. 5.

Здесь, как и в случае, изображенном на рисунке 3, будет $L = 2b$ и частота колебаний вычисляется по формуле (9).

Можно при вырезании брать одну узловую точку и одну экстремальную, как в случае, изображенном на рисунке 6.

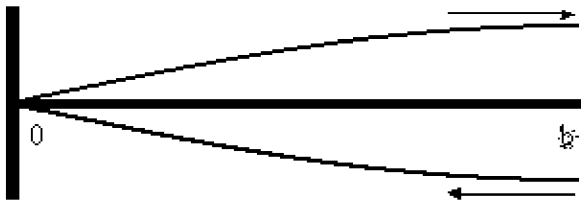


Рис. 6.

Это случай неподвижного левого конца стержня и свободного правого конца. Здесь длина стержня в четверо меньше длины волны L : $L = 4b$. В соответствии с (6) получаем

$$\omega = a \frac{\pi}{2b}. \quad (11)$$

Аналогичным образом можно рассматривать и многочисленные другие подобные случаи.

2 Дискретная цепочка

Рассмотрим дискретный аналог стержня – цепочку из точечных масс величины m , соединенных пружинами жесткости c (рис. 7).

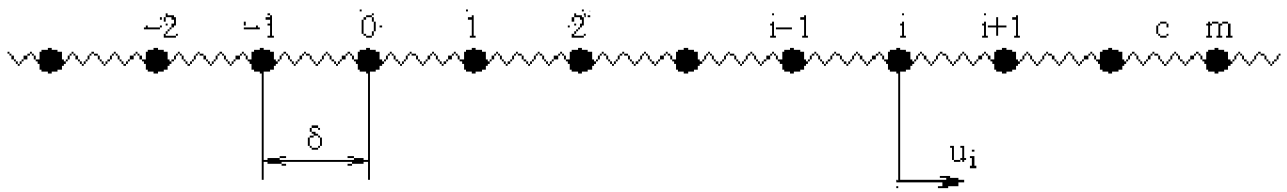


Рис. 7.

Составим дифференциальное уравнение движения i -й массы, обозначая через u_i продольное смещение этой массы из положения равновесия:

$$m\ddot{u}_i + c(u_i - u_{i-1}) + c(u_i - u_{i+1}) = 0 \quad (-\infty < i < \infty) \quad (12)$$

или

$$m\ddot{u}_i + 2cu_i - c(u_{i-1} + u_{i+1}) = 0 \quad (-\infty < i < \infty). \quad (13)$$

Фактически, мы получили не одно уравнение, а систему из бесконечного количества взаимосвязанных уравнений. Решение подобной бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно разыскивать также в виде бегущей волны, как это ранее делалось для непрерывного стержня (2). В данном случае необходимо учитывать дискретное изменение продольной координаты:

$$x_i = i\delta \quad (-\infty < i < \infty), \quad (14)$$

где δ – расстояние между соседними массами цепочки.

В итоге получаем

$$u_i = A \sin(\omega t - kx_i) = A \sin(\omega t - ki\delta) \quad (-\infty < i < \infty). \quad (15)$$

При подстановке (15) в (13) учтем соотношение

$$u_{i-1} + u_{i+1} = A \{ \sin[\omega t - k(i-1)\delta] + \sin[\omega t - k(i+1)\delta] \} = 2A \sin(\omega t - ki\delta) \cos k\delta. \quad (16)$$

Окончательно получаем

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{c}{m}} \left| \sin \frac{k\delta}{2} \right|. \quad (17)$$

Дисперсионное соотношение (17) существенно отличается от соотношения (3). Для лучшего сравнения указанных двух соотношений рассмотрим случай, когда дискретная цепочка моделирует сплошной стержень. В этом случае жесткость пружины равна жесткости стержня длины δ :

$$c = \frac{EF}{\delta}. \quad (18)$$

Масса m равна массе стержня той же длины:

$$m = \rho F \delta. \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (17) получаем

$$\omega = \frac{2a}{\delta} \left| \sin \frac{k\delta}{2} \right|, \quad (20)$$

со значением a из (1).

При малых значениях частоты k , что отвечает большим значениям длины волны L , вместо (20) можно приближенно записать:

$$\omega \approx \frac{2a}{\delta} \frac{k\delta}{2} = ak, \quad (21)$$

что совпадает с (3). С увеличением частоты k , т.е. укорочением длины волны результаты вычислений по (3) и (20) начинают существенно отличаться. На рисунке 8 приведены совместно графики зависимости

$$\frac{\omega}{a} = k \quad (22)$$

(прямая линия) и зависимости

$$\frac{\omega}{a} = \frac{2}{\delta} \left| \sin \frac{k\delta}{2} \right| \quad (23)$$

при $\delta = 2$.

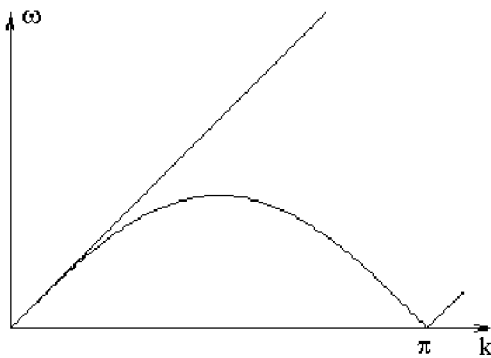


Рис. 8.

Рассмотрим подробнее вопрос о моделировании сплошного стержня дискретной цепочкой. Начнем со стержня конечной длины δ , заменяя его цепочкой той же длины, состоящей из двух масс и соединяющей их пружины (рисунк 9).

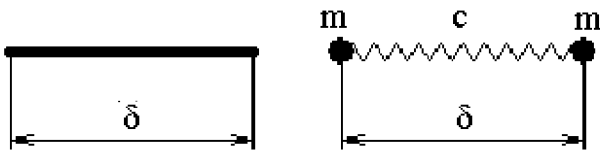


Рис. 9.

Рассмотрим вначале поступательное движение стержня. При этом мерой его инерции будет его полная масса $\rho F \delta$. Следовательно, при таком же движении цепочки ее точечные массы будут

$$m^+ = \frac{1}{2} \rho F \delta. \quad (24)$$

Далее рассмотрим колебания стержня самоуравновешенного вида (рисунк 5). При аналогичном движении цепочки ее частота колебания будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2c}{m}}. \quad (25)$$

Здесь учтено, что при встречном движении масс происходит удвоенная деформация пружины. Будем вычислять жесткость пружины по формуле (18). Тогда из (25) имеем

$$\omega = \sqrt{\frac{2EF}{m\delta}}. \quad (26)$$

Приравняем полученный результат к частоте (9) (при $b = \delta$) и вычислим из этого равенства массу, обозначая ее в этом случае через m^- :

$$m^- = \frac{2}{\pi^2} \rho F \delta. \quad (27)$$

Таким образом, мы видим, что мера инерции точечных грузов при движении этих грузов в одинаковом направлении вычисляется по формуле (24), а при движении в противоположных направлениях – по формуле (27). С учетом этого обстоятельства попробуем решить теперь более сложные задачи, считая дискретную цепочку состоящей из элементов, представленных на рисунке 9 с зависимостью масс грузов от направлений их движения.

Пример 1. Консоль. Заменяем консольный стержень (рисунк 6) на дискретную конструкцию (рисунк 10).

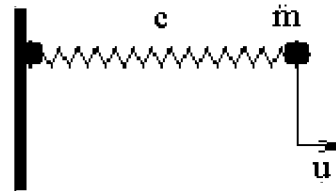


Рис. 10.

Запишем дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{u} + cu = 0. \quad (28)$$

В данном случае движение цепочки является комбинацией поступательного и колебательного движений. Поступательная часть движения описывается средней скоростью двух грузов. Учитывая, что скорость левого груза равна нулю, имеем

$$v^+ = \frac{1}{2}(0 + \dot{u}) = \frac{1}{2}\dot{u}. \quad (29)$$

Колебательная часть описывается полуразностью скоростей двух грузов:

$$v^- = \frac{1}{2}(0 - \dot{u}) = -\frac{1}{2}\dot{u}. \quad (30)$$

Отсюда скорость груза можно записать в виде

$$\dot{u} = v^+ - v^-.$$

Учитывая разницу масс при поступательном и колебательном режимах движения цепочки, представим первое слагаемое в уравнении (28) в виде

$$m\ddot{u} \rightarrow m^+ \dot{v}^+ - m^- \dot{v}^- = \frac{1}{2}(m^+ + m^-)\ddot{u}. \quad (31)$$

В итоге дифференциальное уравнение (28) принимает вид

$$\frac{1}{2}(m^+ + m^-)\ddot{u} + cu = 0. \quad (32)$$

Это отвечает частоте колебаний

$$\omega_d = \sqrt{\frac{2c}{m^+ + m^-}} = \frac{a}{\delta} \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}. \quad (33)$$

Сравним эту частоту дискретной системы с частотой (11):

$$\frac{\omega_d}{\omega} = \frac{4}{\sqrt{\pi^2 + 4}} = 1,074. \quad (34)$$

Попробуем теперь вычислить частоту дискретной системы по формуле (17). Подставляя сюда выражение для k (4) получаем

$$\omega_D = \frac{2a}{\delta} \left| \sin \frac{\pi\delta}{L} \right|. \quad (35)$$

Считая, как и в случае непрерывного стержня, длину консоли равной четвертой части длины волны L , подставляем в (35) значение $L = 4\delta$, получая

$$\omega_D = \frac{2a}{\delta} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \frac{a}{\delta}. \quad (36)$$

В этом случае сравнение с частотой (11) дает

$$\frac{\omega_D}{\omega} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,9. \quad (37)$$

Мы видим, что модель, предполагающая неизменными массы грузов независимо от характера их дви-

жения, дает заниженную частоту (примерно на 10 %), что соответствует графику на рисунке 8, в то время как модель, учитывающая изменения этих масс, дает завышение частоты (примерно на 7,4 %).

Пример 2. Модифицированная цепочка. Рассмотрим вновь бесконечную цепочку, но уже в измененном виде, представленном на рисунке 11.

В отличие от предыдущей цепочки (рисунок 7) данная цепочка состоит из звеньев вида, представленного на рисунке 9, с массами, величины которых зависят от взаимных направлений движения концов звена. Рассматривая вновь дифференциальные уравнения (13) выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} v_{i-1}^+ &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{i-1} + \dot{u}_i), \quad v_{i-1}^- = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i-1} - \dot{u}_i), \quad \dot{u}_i = v_{i-1}^+ - v_{i-1}^-, \\ v_i^+ &= \frac{1}{2}(\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}), \quad v_i^- = \frac{1}{2}(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}), \quad \dot{u}_i = v_i^+ + v_i^-, \\ m\ddot{u}_i &= \frac{1}{2}m\ddot{u}_i + \frac{1}{2}m\ddot{u}_i \rightarrow m^+ \dot{v}_{i-1}^+ - m^- \dot{v}_{i-1}^- + \\ &+ m^+ \dot{v}_i^+ + m^- \dot{v}_i^- = \frac{1}{2}m^+(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) - \frac{1}{2}m^-(\ddot{u}_{i-1} - \ddot{u}_i) + \\ &+ \frac{1}{2}m^+(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) + \frac{1}{2}m^-(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i+1}) = \\ &= \frac{1}{2}(m^+ - m^-)(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_{i+1}) + (m^+ + m^-)\ddot{u}_i. \end{aligned} \quad (38)$$

В итоге вместо уравнений (13) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (m^+ + m^-)\ddot{u}_i + \frac{1}{2}(m^+ - m^-)(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_{i+1}) + \\ + 2cu_i - c(u_{i-1} + u_{i+1}) = 0 \quad (-\infty < i < \infty). \end{aligned} \quad (39)$$

Решение этих уравнений вновь разыскиваем в виде бегущей волны (15). Подставляя (15) в (39) получаем, с учетом (16):

$$\omega = \sqrt{\frac{2c(1 - \cos k\delta)}{m^+ + m^- + (m^+ - m^-)\cos k\delta}}. \quad (40)$$

Подставляя сюда значения (18), (24) и (27), окончательно получаем:

$$\omega = \frac{2a}{\delta} \left| \sin \frac{k\delta}{2} \right| \sqrt{\frac{2\pi^2}{\pi^2 + 4 + (\pi^2 - 4)\cos k\delta}}. \quad (41)$$

На рисунке 12 представлен график соответствующей дисперсионной зависимости (жирная линия) совместно с графиками, изображенными ранее на рисунке 8.

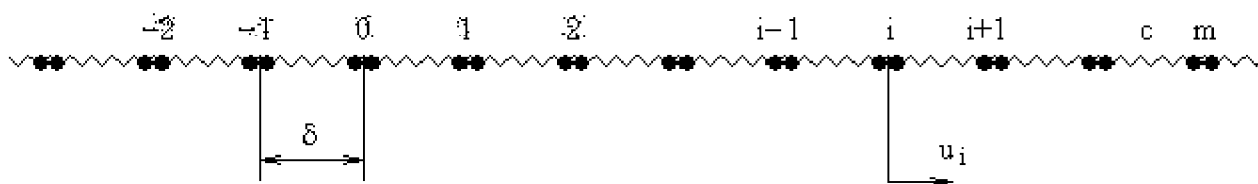


Рис. 11.

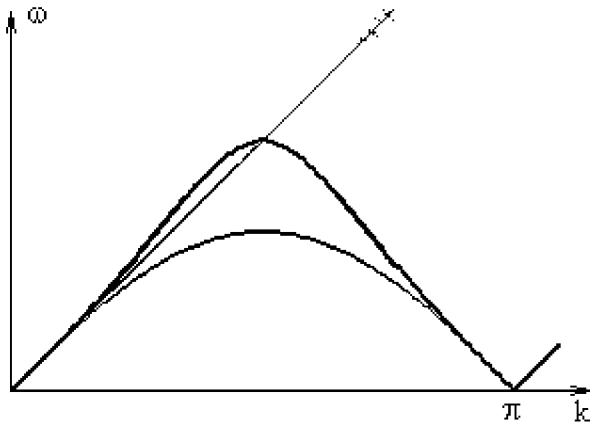


Рис. 12.

Мы видим значительно лучшее приближение дискретной дисперсионной зависимости к непрерывному решению, чем в предыдущем случае, что показывает эффективность принятого рассмотрения двух видов масс.

Проанализируем подробнее полученные результаты. Максимум частоты ω достигается при:

$$\frac{k\delta}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = 2\delta. \quad (42)$$

Такой длине волны отвечает длина полуволны, равная δ . А это случай колебаний дискретного элемента, изображенного на рисунке 9, при движении масс в противоположные стороны. Т.е. случай, когда массы грузов равны m^- . В этом случае частота колебаний дискретного элемента совпадает с частотой колебаний непрерывного стержня той же длины. Как видно из рисунка 12, такой же результат получается и для всей бесконечной цепочки. Однако при длине волны, большей, чем (42) (что отвечает меньшей частоте k), частота колебаний дискретной цепочки несколько превышает соответствующую частоту колебаний непрерывного стержня. Таким образом, добившись совпадения в экстремальной точке, мы понизили точность результатов в других, более важных точках.

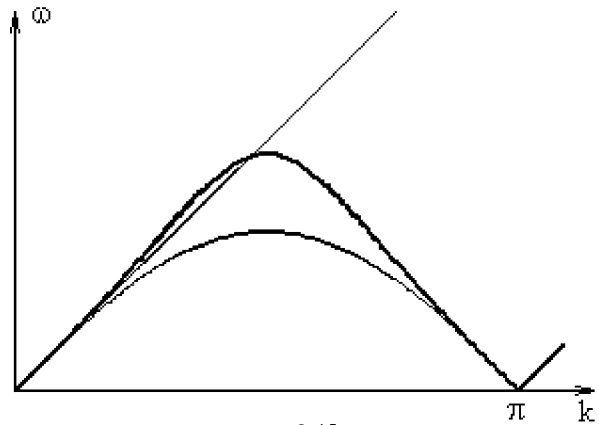
Этот результат можно подкорректировать. Используя выражения (24) и (27) запишем:

$$m^- = \alpha m^+, \quad \alpha = \frac{4}{\pi^2} \approx 0,405. \quad (43)$$

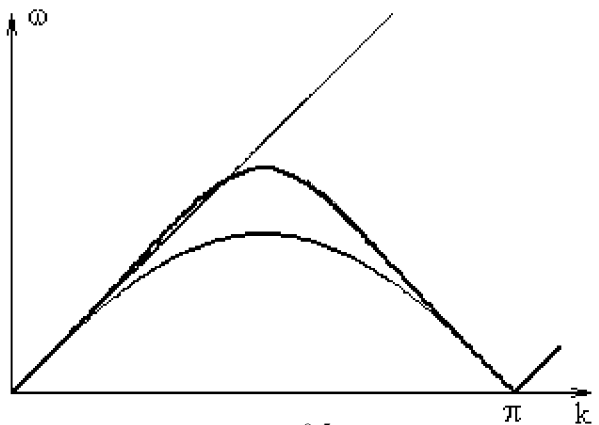
В соответствии с этим перепишем (41) в виде

$$\omega = \frac{2a}{\delta} \left| \sin \frac{k\delta}{2} \right| \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos k\delta}}. \quad (44)$$

Применение этой формулы со значением α (43), естественно, даст прежний результат. Однако теперь мы можем корректировать значение α . На рисунке 13 приведены графики, отвечающие возросшим значениям α .



$\alpha = 0,45$



$\alpha = 0,5$

Как видим, увеличивая α , можно добиться лучшего приближения непрерывных и дискретных результатов в рабочем диапазоне значений k за счет некоторого ухудшения результатов вблизи экстремальной точки.

Вывод

Таким образом, учет изменения масс элементов пружинно-массовой цепочки при разных видах движения этих элементов позволил добиться лучшего приближения дисперсионных зависимостей дискретной и непрерывной моделей в большем диапазоне волнового числа k , чем это имеет место в случае классической пружинно-массовой цепочки, не учитывающей изменения масс.

Перечень ссылок

1. Бриллюэн Л. Распространение волн в периодических структурах; [пер. с франц.] / Л. Бриллюэн, М. Пароди. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 458 с.
2. Гусева, А. А. Румпеля. – М.: Физматлит, 2001. – 224 с.
3. Косевич А. М. Теория кристаллической решетки / А. М. Косевич. – Харьков: Вища школа, 1988. – 304 с.
4. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой / И. А. Кунин. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
5. Лымаренко Ю. А. Дискретное моделирование стационарных волновых процессов в тонком слое при сим-

- метричної деформації / Ю. А. Лымаренко, А. Д. Шамровский // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2005. – Т. 711. – С.68–79.
6. Потапов А. И. Волны деформации в среде с внутренней структурой / А. И. Потапов // Нелинейные волны. – Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2005. – С. 125–140.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела: уч. пособие для вузов / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1979. – 744 с.
- Одержано 14.10.2010*

Шамровський О.Д., Лимаренко Ю.О., Безнос О.С., Веселов А.І. Моделювання пружного стержня дискретним ланцюжком з елементами змінної маси

Пропонується вдосконалена дискретна модель пружного стержня у вигляді ланцюжка, маса елементів якого залежить від виду руху (поступальний або коливальний). У якості критерію удосконалення дискретної моделі використовується близькість графіків дисперсійних залежностей дискретної й континуальної моделей.

Ключові слова: стержень, дискретна модель, пружинно-масовий ланцюжок, дисперсійна залежність.

Shamrovskiy A., Lymarenko Yu., Beznos A., Veselov A. Modeling of elastic rod by discrete chain with variable mass elements

An advanced model of elastic rod is offered. The rod is modeled by spring-mass chain, which elements have variable mass that changes depending on type of motion (forward or oscillatory). Dispersion curves of discrete and solid models are used as discrete model improvement criterion.

Key words: rod, discrete model, springy-mass chain, dispersion dependency.
