

Диферінтегральна модель геометрично фрактальних фізичних компактів з ередитарними властивостями

В. М. Онуфрієнко, А. В. Засовенко, Н. М. Антоненко

Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна
onvm@i.ua

Міру фрактальних точкових зарядів у вигляді диферінтегральної альфа-форми множин фізичних зарядів (елементів струму) в метаматеріальному середовищі застосовано для побудови диферінтегральної моделі компактів із просторовою та часовою фрактальністю. Одержана за розробленою моделлю функція пам'яті виступає як прояв дофрактальності з можливістю контролю та регулювання ступеню втрачання пам'яті за допомогою величини скейлінгу у природніх та штучно створюваних метаматеріальних компактах. Окреслено перспективи подальшого застосування розробленої математичної концепції для аналізу штучних метаматеріальних фрактальних елементів з необхідними механічними й електродинамічними характеристиками.

Ключові слова: диферінтегральна модель, ередитарність, фрактальний компакт, метаматеріал.

Застосування поняття геометричного фрактала в математичному моделюванні динамічних систем наділяє їх властивостями складних нелінійних систем, (ефектом часової ередитарності, наприклад) у яких ураховується не тільки теперішній стан системи або найближчий попередній стан (тобто початкові значення параметрів стану системи, деякі похідні за часом та просторовими координатами), але також і всі попередні стани, у яких перебувала дана система.

Відомий опис експериментів з електролітичними конденсаторами, що були заряджені різними способами до однакової напруги (Westerlund, 1991). Вимірюваннями виявлено помітні відмінності кривих розрядки конденсаторів, що можна інтерпретувати наявністю пам'яті у складній діелектричній структурі.

Прикладом феноменологічного підходу до проблеми переносу є також дифузійна модель, для якої рівняння дифузії складено із двох рівнянь (рівняння неперервності та закону Фіка). Для одновимірного просторового процесу зі скейлінгом, що описує β -характеристику функції двох змінних у просторі й часі, класична постановка задачі приводить до рівняння виду

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^{1+\beta} u(x, t)}{\partial x^{1+\beta}},$$

розв'язок якого інтерпретується в задачах електродинаміки й механіки: рух електронів і дірок у напівпровідниках, світла в атмосферах планет, нейтронів у ядерних реакторах, заводського диму в атмосфері, квіткового пилку в повітрі, крапель чорнила у воді, поширення тепла в газах, рідинах і твердих тілах (Учайкин, 2009) тощо. При цьому, концепція фрактальності процесів накопичення заряду у просторі й часі демонструє неминучі зміни більшості результатів, отриманих до цього часу звичайними методами. З фрактальної ж моделі

впливають декілька ефектів, які неможливо пояснити класичним підходом застосування рівнянь для середовища-континууму.

Одним з найважливіших з них є ефект пам'яті, що наводить на висновок про наявність її у від'ємних ємнісних (індуктивних) компактах та про керування нею за допомогою часово-частотної та просторової фракталізації.

Міру фрактальних точкових зарядів у вигляді диферінтегральної альфа-форми множин фізичних зарядів (елементів струму) у метаматеріальному середовищі застосовано нами далі для побудови диферінтегральної моделі фізичних фотопровідних фрактальних компактів.

Модель фрактального шару на межі розділу двох конфігурованих середовищ базується на визначенні дробового диференціала у часі $d^\alpha t$ та його зв'язку із дробовою похідною

$$d^\alpha L(x, t) = {}_a D_t^\alpha L(x, t) d^\alpha t,$$

де дробова похідна ${}_a D_t^\alpha L(x, t)$ використовується у формі Рімана — Ліувілля.

Для виявлення ефектів часової α -ередитарності фрактального компакту за схемою побудови рівнянь з розривами зарядів(струмів) $Q(\alpha, x, t)$ у часі виду дробової дельта-функції $\delta^{(\alpha)}(t - t_m)$ моделюємо заряд фрактального компакту з ємністю C і потенціалом U як

$$Q(\alpha, x, t) = C_1(x) U(t) + C_{er} D_t^{1+\alpha} U(t).$$

Диференціальні рівняння дробових порядків, що виникають у подібних моделях (Onufrienko, 2020), знаходять своє самостійне застосування в багатьох областях фізико-математичної і технічної науки (задача про таутохрону, про визначення потенціалу по залежності періоду коливань від енергії, обернена задача теорії розсіювання, руху тіла у в'язкому середовищі тощо) називаються ередитарними (Вольтерра, 1982) і можуть виникати самі по собі у процесі або в результаті розв'язування.

Розгляд фрактальних множин у метриці Хаусдорфа дозволяє порівнювати величину змінюваної хаусдорфової розмірності зі змінним порядком $\alpha(x)$ дробового інтеграла (Гинзбург, 1994; Coimbra, 2003)

$$\left({}_a I^{\alpha(x)} f \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha(x)}} dt, \quad (1)$$

та дробової похідної змінного порядку

$$\left({}_a D^{\alpha(x)} f \right) (x) = \frac{\alpha(x)}{\Gamma(1-\alpha(x))} \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha(x)}} dt + \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha(x)) (x-\alpha(x))^{\alpha(x)}}. \quad (2)$$

Зазначена модель використовується далі для означення фрактального шару типу Гельмгольца та визначення його ередитарних властивостей.

Першою і найпростішою двошаровою моделлю, створеною в 1879 р. Гельмгольцем, вважають концепція поділу заряду на межі між металевим електродом та розчином електроліту. Електрод тримає щільність заряду σ_M , що виникає внаслідок надлишку ($-\sigma_M$) або дефіциту ($+\sigma_M$) електронів на поверхні електрода. Заряд на електроді врівноважується перерозподілом іонів у розчині на рівну, але протилежно заряджену кількість іонів. Розглядаємо два нефрактально конфігуровані шари протилежного заряду, розділені деякою відстанню $l = d / 2$, обмеженою радіусом $d / 2$ залучених іонів, і одним шаром сольвації навколо кожного іона. Лінія, проведена через центр таких іонів, позначає межу, відому як зовнішня площа Гельмгольца, і область усередині неї 2^α -польного електричного шару ($\alpha = 0$).

Потенціал у такому класичному шарі Гельмгольца описується рівнянням Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon \epsilon_0}$$

відносно електричного потенціалу ϕ з розподілом заряду щільності ρ ; x — відстань від електрода, ϵ_0 та ϵ відповідно діелектричні проникності вакууму та середовища.

Якщо розглядати іони як точкові заряди (класичний підхід), то розв'язування задачі базується на переході до рівняння Лапласа $\partial^2 \phi / \partial x^2 = 0$ і класичної схеми плоскопаралельного конденсатора, тобто електричний подвійний шар здатний зберігати електричний заряд. Тому наведену двошарову ємність на одиницю площі можна оцінювати за формулою

$$C_H = \frac{\epsilon \epsilon_0}{l},$$

де l — товщина подвійного шару. Модель не враховує залежність вимірюваної ємності від потенціалу або концентрації електролітів. Ще одним недоліком моделі класичного шару є нехтування взаємодіями, які виникають далеко від зовнішньої площини Гельмгольца.

У задачах про визначення концентрації $\rho(x, t)$ електроактивних елементів на поверхні фрактально конфігурованого зі скейлінгом α електрода $x = 0$, що контактує з електролітом, безпосереднє вимірювання $\rho(0, t)$ є обтяжливим, але експериментально достатньо легко визначається густина струму $j_x(0, t)$ на поверхні

$$-\frac{1}{K} j_x(0, t) = \left. \frac{\partial^{1+\alpha} \rho(x, t)}{\partial x^{1+\alpha}} \right|_{x=0}. \quad (3)$$

З рівняння (3) впливає залежність

$$\rho(0, t) = -K_0^{-\frac{1}{2}} I_t^{\frac{1+\alpha}{2}} j_x(0, t) = -K^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \int_0^t \frac{j_x(0, \tau) d\tau}{(t - \tau)^{\frac{1-\alpha}{2}}}. \quad (4)$$

Наявність у досліджуваному процесі ефекту пам'яті або нелокальності за часом, що міститься в ядрі інтегрального оператора вихідного рівняння (4), можна позиціонувати як функцію пам'яті (Учайкин, 2009)

$$R(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5)$$

що описує прояв ередитарності явища концентрації електроактивних елементів на поверхні контакту середовищ.

Якщо функція пам'яті є степеневою (як у наших задачах із фрактальною геометрією контактів і неперервним розподілом фізичних параметрів на них та в задачах з фрактальними розподілами зарядів і струмів на гладких компактах), то виникає природній перехід до рівнянь з дробовими похідними.

Відмічаємо, що у випадку збігу функції пам'яті (5) з виразом для функції Хевісайда розглядуваний процес має повну пам'ять, а для збігу з функцією Дірака пам'ять у процесі відсутня.

Для одержаного нами виду функції пам'яті $R(t - \tau)$ процес має часткову втрату пам'яті і розглядається як прояв дофрактальності з можливістю контролювати, а також регулювати ступінь втрачання пам'яті за допомогою величини скейлінгу α у природніх та штучно створюваних метаматеріальних шарах середовищах, геометричні або фізичні властивості котрих моделюються фракталами (Onufrienko, 2020).

Визначено перспективи подальшого застосування розробленої математичної концепції для аналізу й синтезу штучних метаматеріальних фрактальних елементів з необхідними механічними й електродинамічними характеристиками.

Список літератури

- Coimbra, C. (2003) Mechanics with variable-order. *Annalen der Physik*, 12(11), 692–703.
- Onufrienko, V. M., Slyusarova, T. I., & Onufriyenko L. M. (2020). Modeling characteristics of field-effect fractal nanotransistor. In *Proceedings 15th Intern. Conf. on advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering*, February 25–29 (pp. 586–589). Lviv.
- Westerlund, S. (1991). Dead matter has memory. *Physica Scripta*, 43(2), 174–179.
- Вольтерра, В. (1982). *Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений*. Москва: Наука.
- Гинзбург, А. И., & Карапетянц, Н. К. (1994). Дробное интегро-дифференцирование в гильдеровских классах переменного порядка. *Доклады АН*, 339(4), 439–441.
- Учайкин, В. В. (2009). *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
IX Міжнародної
науково-практичної конференції
Київ, 28–29 грудня 2020 року

Вінниця
2021

УДК 51(082)
М34

Матеріали IX Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28–29 грудня 2020 р. — Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2021. — 330 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы IX Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 28–29 декабря 2020 г. — Винница: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2021. — 330 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Ninth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 28–29, 2020. Vinnytsia: Publisher FOP Kushnir Yu. V., 2021. 330 pp.

ISBN 978-617-7721-27-6

Програмний комітет

IX Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Київ, Україна), (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Київ, Україна)
Проф. О. В. Іванов (Київ, Україна)
Проф. П. В. Задерей (Київ, Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Київ, Україна)

Організаційний комітет

Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»

Доц. В. О. Гайдей (Україна), голова
В. В. Бовсуновська (Київ, Україна)
Ю. Є. Приходько (Київ, Україна)

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7721-27-6

©Автори

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Borysenko O. V. <i>Non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps</i>	4
Boychuk L. M. <i>A force investigation of automatic systems</i>	8
Kolomiets T. Yu., Pogorui A. A. <i>Monogenic functions in Clifford algebras and their applications</i>	13
Kovalchuk V. <i>Differential equations in modeling the bond behaviour between reinforcement and concrete</i>	17
Sakhno L. M., Hopkalo H. M. <i>Sample paths properties of ϕ-sub-Gaussian processes related to the random heat equation</i>	20
Антоненко Н. М., Ткаченко І. Г. <i>Осесиметрична задача термoprужності для двошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами</i>	23
Антонова А. О., Погребецька Т. О. <i>Про умови існування граничного циклу в моделі економічного циклу Гудвіна з необмеженою “стелею” Хікса</i>	26
Біленко В. І., Боженок К. В. <i>Поліноміальні методи аналізу фрактальних моделей дифузійних процесів</i>	30
Богданов В. Л., Григоренко А. Я., Сороченко Г. В., Тормахов Н. Н. <i>Распределение нагрузки в резбОВОМ соединении имплантата с костью</i>	33
Богун В. А., Маринич О. В. <i>Асимптотика згорток Лебега — Стілтєсса функцій лінійного росту</i>	37
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. <i>Узагальнення математичної моделі навчання нейромережєвих алгоритмів на базі багатошарового перцептрона</i>	40
Гаєвський М. В., Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д. <i>Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссєна</i>	42
Гай В. В., Ванельчук Д. І., Гузик Н. М. <i>Застосування диференціальних рівнянь у військово-прикладних задачах</i>	45
Голуб В. П. <i>Об одном методе определения параметров ядер наследственности с использованием весовых функций</i>	49
Горалік Є.Т., Крюков М. М., Лупіна Т. О. <i>Рівняння фази обертання руху тіла, що скочується з похилої плоскОї опори, в декартових і узагальнених координатах</i>	53
Горленко С. В. <i>Теорема про точки неперервності похідної та її узагальнення</i>	57
Грєчко А. Л. <i>Математична модель сили Коріоліса в метеорології</i>	60
Дудик М. В. <i>Наближений метод розв’язання систем функціональних рівнянь Вінера – Гопфа</i>	62
Зелєнська І. О. <i>Задача Коші для системи сингулярно збурених</i>	65
Капусто А. В., Банщиков Д. О. <i>Моделирование английского аукциона</i>	68
Капусто А. В., Костюкова С. Н. <i>Статистические методы анализа данных в оценке эффективности игровых методик обучения</i>	72
Кобзар Ю. М. <i>Моделювання процесу руйнування стрижня внаслідок втоми в умовах багато циклового кручення за допомогою рекурентних співвідношень</i>	76

Коропов О. В., Скороход Р. В. Диференціальні рівняння радіаційно-індукованої сегрегації в N -компонентних концентрованих металевих стопах	80
Круглова Н. В., Диховичний О. О., Лисенко Д. Р. Використання кластерного аналізу і IRT для поділу респондентів психологічного тестування на групи.....	90
Кукуш О. Г., Яковлев М. С. Побудова консистентних оцінок параметрів	92
Лапач С. М. Обчислювальна стійкість у багатовимірних статистичних методах невидимі небезпеки машинного навчання	95
Лещенко Д. Д., Козаченко Т. А. Вращения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента.....	100
Лисецький Т. Б., Єлейко Я. І. Деякі властивості гіллястих процесів з еміграцією ...	104
Логвиненко С. С., Ральченко К. В. Консистентне оцінювання параметрів змішаного дробового броунівського руху із трендом	108
Маслов Б. П. Моделирование в'язкопружних свойств випадково армованных эластомеров	114
Міцюхін А. І. Выявление рухомага аб'екта у сегментованым участку прасторы ...	118
Онуфрієнко В. М., Засовенко А. В., Антоненко Н. М. Диферінтегральна модель геометрично фрактальних фізичних компактів з ередитарними властивостями ...	121
Онуфрієнко В. М., Слюсарова Т. І., Онуфрієнко Л. М. Математична модель диферінтегрального гістерезису комплексного хвильового опору та провідності фізичних фракталів.....	125
Поліщук О. Д. Пошук «аномалій» в інформаційних моделях складних систем.....	129
Рашитов Б. С. Функціональна центральна гранична теорема для загальних процесів дробового ефекту	133
Резнік В. С. Використання ізохронних діаграм при визначенні параметрів ядер спадковості лінійних вязкопружних матеріалів	138
Рожок Л. С. Про вплив параметрів на напружений стан порожнистих циліндрів із двопараметричним відхиленням форми поперечного перерізу від кругової.....	142
Розанов А. В., Потемкина С. Н., Ткачев С. И. Математическая модель растительного объекта для его цифровой идентификации	145
Ситнікова А. В. Інформаційна система прогнозування поточкових параметрів конвеєра з використанням нейронної мережі	148
Сторожук Є. А. Аналітичне розв'язання задач статистики для циліндричної оболонки з урахуванням трансверсального зсуву й геометричної нелінійності.....	151
Тимофієва Н. К. Комбінаторні конфігурації та їх властивості	155
Ткаченко А. В. Розвиток геометричних концепцій Ешера.....	159
Якимчук Н. А., Сокульська Н. Б. Математичні аспекти розрахунку металевих конструкцій на вогнестійкість	166