

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до виконання контрольних робіт  
і розрахунково-графічних завдань з  
дисципліни «Теоретична механіка»  
на тему «Плоска статика»  
для студентів спеціальності G9 (131)  
«Прикладна механіка» всіх форм навчання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт і розрахунково-графічних завдань з дисципліни «Теоретична механіка» на тему «Плоска статика» для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка» всіх форм навчання/ Укл.: В.І. Пожуєв, А.В. Пожуєв, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко — Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 76 с.

Укладачі:

д-р ф-м. наук, професор  
к.т.н., доцент  
к.т.н., доцент  
ст. викладач

В.І. Пожуєв,  
А.В. Пожуєв,  
В.Г. Шевченко,  
О.С. Омельченко

Рецензент,

к.т.н., доцент

А.А. Скребцов

Відповідальний

за випуск:

ст. викладач

О.С. Омельченко

Затверджено

на засіданні кафедри

«Теоретична та прикладна механіка»

Протокол № 1 від 3.09.2025 р.

Рекомендовано до видання

НМК ТФ

Протокол № 1 від 11.09. 2025р.

## ЗМІСТ

Загальні вказівки.....	С 4
1. Основні теоретичні відомості зі статички абсолютно твердого тіла.....	5
2. Приклад використання рівнодійної і теореми про три непаралельні сили для визначення реакцій балки на двох шарнірних опорах.....	15
3. Приклад виконання розрахунково-графічного завдання С1 «Зведення плоскої системи сил до рівнодійної».....	22
4. Приклади розв'язання мініконтрольної С3 «Визначення реакцій балки на двох опорах під дією паралельних сил і моменту».....	28
5. Приклади розв'язання мініконтрольної С4 «Визначення реакцій консольної балки під дією довільної плоскої системи активних сил».....	34
6. Приклади розв'язання мініконтрольної С5 «Визначення реакцій опор плоскої рами».....	39
7. Приклади розв'язання мініконтрольної С6 «Визначення зовнішніх і внутрішніх реакцій плоскої рами, складеної із двох частин».....	43
8. Приклади виконання розрахунково-графічного завдання С2 «Визначення реакцій плоскої складеної конструкції».....	57
Перелік джерел посилань .....	76

## ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

В технічних університетах, як правило, вивчення курсу теоретичної механіки розпочинається з розділу «Статика». Це пов'язано з кількома факторами, зокрема з тим, що уже в цьому розділі студенти зустрічаються з основними поняттями усієї механіки – силою і парою сил, і на більш простих ніж в розділі «Динаміка» задачах отримують навички оперування у системах сил, зокрема знайомляться з приведенням системи сил до найпростішого вигляду. Крім того, освоєння вже на початку курсу методів визначення реакцій накладених на абсолютно тверде тіло в'язей необхідне для підготовки до вивчення уже в наступному семестрі матеріалів курсу опору матеріалів.

Дані методичні вказівки присвячені виключно задачам так званої плоскої статички, коли усі задані активні сили і реакції накладених на конструкцію в'язей розташовані в одній площині. Особливу увагу приділено тому факту, що в таких ситуаціях довільна плоска система активних сил завжди має рівнодійну, що дозволяє у всіх подібних ситуаціях після необхідних попередніх перетворень вважати, що до конструкції прикладена одна зосереджена сила. Цей факт проілюстровано на класичних задачах теоретичної механіки про визначення реакції двох опор за допомогою теореми про три непаралельні сили, а також наведено приклад виконання розрахунково-графічного завдання С1 «Зведення плоскої системи сил до рівнодійної». Наведені методичні вказівки і розв'язані приклади на чотири міні контрольні роботи з статички С3 «Визначення реакцій балки на двох опорах під дією паралельних сил і моменту С4 «Визначення реакцій консольної балки під дією довільної плоскої системи активних сил», С5 «Визначення реакцій опор плоскої рами», С6 «Визначення зовнішніх і внутрішніх реакцій плоскої рами, складеної із двох частин». Детально на конкретному прикладі проаналізовано особливості виконання розрахунково-графічного завдання С2 «Визначення реакцій опор складеної конструкції (система двох тіл)». Усі основні теореми, на яких базуються розглянуті тут методи розв'язання задач викладені в підручниках [1, 2], на які робляться усі необхідні посилання.

## 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТАТИКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

Коротко нагадаємо лише ті основні поняття і результати, які в подальшому будуть використовуватися в даному посібнику. Звернемо увагу на те, що в статистиці розв'язуються дві основні задачі.

**Перша задача:** для заданої системи сил, прикладених до **абсолютно твердого тіла**, знайти еквівалентну їй систему сил.

**Друга задача:** вивести умови рівноваги системи сил, прикладених до **вільного твердого тіла**, а потім використовувати ці умови для визначення наперед невідомих реакцій накладених на тіло в'язей.

Як правило, значно більша увага при вивченні теоретичної механіки приділяється другій задачі, оскільки визначення реакцій є першим кроком для знаходження напружено-деформованого стану реальних елементів конструкцій в курсах опору матеріалів, теорії пружності, будівельній механіці та ряді інших дисциплін. Методом розв'язання таких задач, зокрема у так званій плоскій постановці, коли усі задані активні сили і невідомі реакції знаходяться в одній площині, буде присвячена переважна більшість матеріалів даного посібника, але спочатку хотілося б зупинитися на деяких теоретичних і практичних аспектах розв'язання першої задачі статички, оскільки у зв'язку з обмеженістю часу на лекційних і практичних заняттях останнім часом питанням приведення заданої системи сил до більш простого еквівалентного виду приділяється менше уваги.

Зазначимо, що розв'язання обох основних задач статички ґрунтується на основній теоремі статички (теоремі Пуансо), з якої, зокрема, випливає, що довільну просторову систему сил в найбільш загальному випадку завжди можна привести (замінити) до однієї сили (головного вектора) і однієї пари сил з моментом рівним головному моменту системи сил відносно довільного наперед обраного центру приведення. Детально теорія такого спрощення системи сил і методи визначення головного вектора і головного моменту описані в навчальних посібниках [1, 2], зокрема в параграфі 1.22 [1] і параграфі 1,5 [2] проаналізовані подальші можливості спрощення системи сил в залежності від значень модулів векторів  $\vec{R}$  і  $\vec{M}_0$ , а також кута між ними.

Показано, що в двох випадках система сил має рівнодійну. Зупинимося детальніше на аналізі цих ситуацій.

1. Якщо виконується умова, що в деякому обраному центрі  $O$  головний момент системи сил дорівнює нулю, то саме в цьому центрі система приводиться до рівнодійної, яка за величиною і напрямком співпадає з головним вектором даної системи сил. При цьому рівнодійну (головний вектор) можна знайти двома методами – геометричним і аналітичним. Відомо також, що в іншому центрі приведення  $O_0$ , який не лежить на лінії дії головного вектора, система не буде приводитися до рівнодійної.

**Увага!** Слід пам'ятати, що саме така ситуація має місце для класу сил, який називається **збіжна система сил** і стає зрозумілим, чого при аналізі таких систем треба обов'язково обирати центр приведення у точці перетину ліній дії усіх сил.

2. Якщо  $\bar{R} \neq 0$  і  $\bar{M}_O \neq 0$ , але  $R \perp \bar{M}_O$ , то в [1, 2] показано, що система сил знову приводиться до рівнодійної, але ця рівнодійна, яка за модулем і напрямком така ж, як і головний вектор не проходить через точку  $O$ , а проходить через нову точку  $O_1$ , положення якої визначається відповідною формулою [1, 2].

**Увага!** Це дуже важливий момент, оскільки записаній умові перпендикулярності головного вектора і головного моменту відповідають дві важливі з практичної точки зору системи сил, а саме – плоска система сил і просторова система паралельних сил.

У випадку плоскої системи сил знаходження рівнодійної необхідно виконувати у такому порядку.

1. Знайти головний вектор для заданої системи сил, пар сил і розподіленого навантаження, попередньо замінивши усі розподілені навантаження зосередженими силами і врахувавши, що моменти пар не впливають ні на величину, ні напрямок головного вектора. При цьому при аналітичному знаходженні вектора  $\bar{R}$  використовується відома з математики теорема про проекції вектора суми і ланцюжок формул для знаходження вектора  $\bar{R}$  виглядає так

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad (1)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}. \quad (3)$$

**Увага!** Для порівняння і перевірки, а також для оволодіння графічним методом розв'язання задач статки доцільно, а в РГЗ С1 і необхідно, знайти вектор  $\bar{R}$  шляхом побудови силового багатокутника із заданих активних сил.

2. Обрати на заданій балці (рамі, фермі), або за її межами довільну (найбільш зручну з точки зору обчислень моментів) точку  $O$  (центр приведення – точку, в якій попередньо прикладемо визначений двома методами головний векторі  $R$ ), знайти аналітично головний момент  $M_0$  (алгебраїчну величину) заданої системи активних сил. В результаті виконання цих двох пунктів замість початкової ситуації з довільним числом сил, навантажень на ділянках і пар сил в нами обраній точці  $O$  будемо мати головний вектор і головний момент (рис. 1.1), де для прикладу показана ситуація, коли  $M_0 < 0$ .

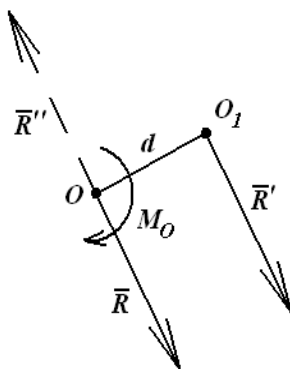


Рисунок 1.1 – Приведення головного вектора та головного моменту до центру приведення

3. Оскільки згідно з властивостями пари на площині відомому моменту  $M_0$  можна поставити у відповідність нескінченно багато пар з різними силами і відповідними плечами, то оберемо в якості сил пари такі, щоб  $\bar{R}' = \bar{R}$ ,  $\bar{R}'' = -\bar{R}$ , причому силу  $\bar{R}''$  прикладаємо в точці  $O$ , тоді через точку  $O$  проводимо перпендикуляр до лінії дії сили  $\bar{R}$  і відкладаємо на ньому відрізок  $OO_1$  у той бік, щоб момент пари  $(\bar{R}', \bar{R}'')$  мав той самий знак, який має головний момент  $M_0$  (очевидно, що в

нашому прикладі це рух по вказаному перпендикуляру догори). Довжина відрізка знаходиться за очевидною формулою:

$$O_1 = d = \frac{|M_0|}{R}. \quad (4)$$

Оскільки  $\bar{R}$  і  $\bar{R}'$  з точки зору першої аксіоми статичної механіки є механічним нулем, то згідно з другою аксіомою їх можна відкинути і тоді ми бачимо, що в точці  $O_1$  задана система активних навантажень замінилася однією силою, тобто ми отримали рівнодійну – одну силу, яка замінила все, що початково було прикладене до об'єкту дослідження.

**Увага!** Як правило, при практичному використанні такого підходу з попередньою заміною усіх сил однією, виникає бажання, щоб рівнодійна була прикладена не в якійсь знайденій за описаною схемою точці  $O_1$ , а в конкретній точці реального тіла, до якого прикладались усі силові фактори. Якщо рис. 1.1 і тіло навантаження зображені в масштабі, то таку точку можна знайти графічно, переміщуючи силу  $\bar{R}'$  по своїй лінії дії до перетину з даним тілом (балкою, рамою, фермою). Більш точно це можна зробити аналітичним методом.

Для цього треба обрати системи координат з початком у центрі приведення  $O$ , тоді згідно з показаним в підручнику [1] в такій системі координат  $Oxy$  рівняння лінії дії рівнодійної записується так:

$$y = \frac{R_y}{R_x} \cdot x - \frac{M_0}{R_x}. \quad (5)$$

Підставляючи сюди визначені вище значення  $R_x, R_y$  і  $M_0$ , отримуємо у вказаній вище системі координат  $Oxy$  конкретну пряму. Щоб знайти координати точки бажаного прикладення до нашого об'єкту рівнодійної треба це рівняння розв'язати разом з рівнянням конкретної горизонтальної ( $y = b$ ), або вертикальної ( $x = a$ ), прямої на нашому об'єкті.

Практична реалізація описаного тут алгоритму знаходження рівнодійної і використання  $\bar{R}'$  для визначення реакцій буде проілюстрована нижче на конкретному прикладі для балки і на прикладі виконання РГЗ С1.

**Теорема про три непаралельні сили** дає тільки необхідну умову рівноваги трьох сил, що лежать в одній площині, згідно з нею, якщо

вільне тіло знаходиться в рівновазі під дією рівно трьох сил, що лежать в одній площині і непаралельні, то лінії дії сил обов'язково проходять через одну точку. Зрозуміло, що з практичної точки зору цю теорему можна використовувати для визначення напрямку, наприклад, реакції шарнірно-нерухомої опори, як це показано на рис. 1.2. На перший погляд може здатися, що такий підхід має обмежену область застосування, оскільки навіть для балки з однією шарнірно – нерухомою і іншою шарнірно-рухомою опорою, як правило, ми будемо мати справу з навантаженнями, коли одночасно прикладаються кілька зосереджених сил, плюс розподілені навантаження, плюс пари сил із заданими моментами. Але, як ми покажемо на прикладах нижче, таку загальну ситуацію завжди у випадку плоскої системи сил, можна довести до ситуації, аналогічної наведеній на рис. 1.2, якщо попередньо привести усі задані силові фактори до рівнодійної активних сил і знайти точку її прикладення до балки, ферми або рами.

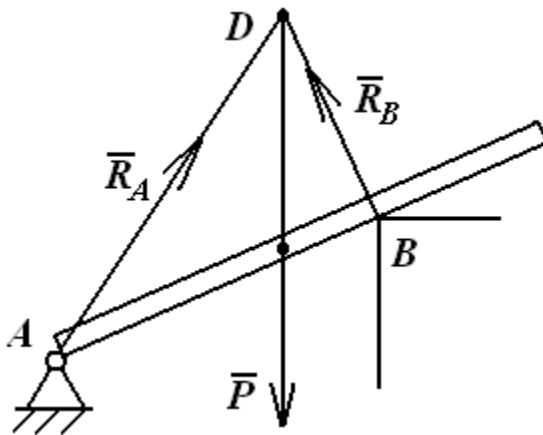


Рисунок 1.2 – Приклад використання теореми про три непаралельні сили для визначення реакцій опор

**Увага!** Звернемо особливу увагу на те, що у випадку плоскої системи сил момент відносно центру можна знаходити **трьома способами**:

**Перший спосіб** полягає в безпосередньому використанні визначення моменту як взятого з відповідним знаком добутку модуля сили на плече, тобто застосуванні формули

$$m_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (6)$$

Покажемо на прикладі, як працює цей спосіб. Розглянемо балку, закріплену в точці  $A$  за допомогою шарнірно нерухомої, а в точці  $B$  – шарнірно-рухомої опори (рис. 1.3). Відомі розміри ділянок такої балки  $a = 3$  м,  $b = 2$  м,  $d = 1$  м. До балки в точці  $C$  прикладена сила  $\vec{F}$ , модуль якої  $F = 8$  Н, а напрямок задається кутом  $\alpha = 60^\circ$ . Визначити моменти сили відносно точок  $A, B$  і  $D$ .

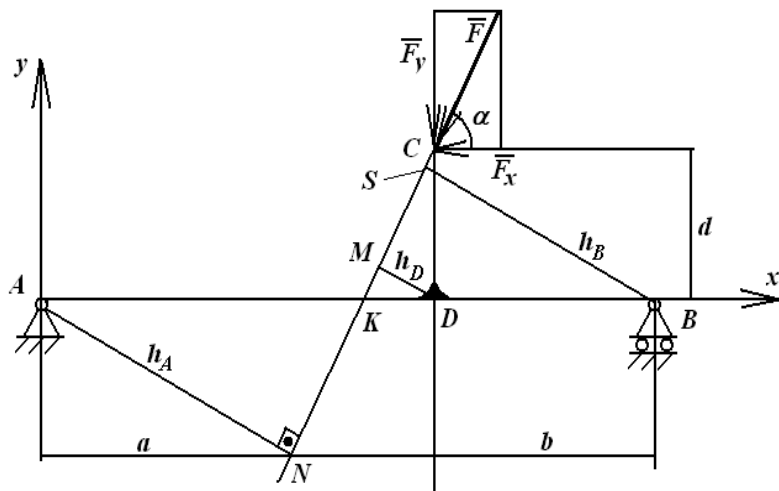


Рисунок 1.3 – Приклад для двоопорної балки

**Увага!** Нагадаємо, що момент сили відносно центру рівний нулю і його не треба обчислювати лише в одному випадку: коли сила проходить через центр. В нашій задачі такою є точка  $C$ , тому  $m_c(\vec{F}) = 0$  без усяких обчислень.

Для точки  $A$  формула (1) запишеться так

$$m_A(\vec{F}) = -F \cdot h_A.$$

Для знаходження  $h_A$  треба розглянути два трикутника  $KDC$  і  $ANK$ . Оскільки  $\angle CKD = \alpha$ , то з  $\Delta KDC$ ,

$$KD = \frac{CD}{\tan \alpha} = \frac{CD \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{d \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Тоді

$$AK = a - KD = \frac{a \sin \alpha - d \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

В  $\triangle ANK$  сторона  $AK$  – гіпотеза,  $\angle ANK = \alpha$ , але тоді

$$h_A = AN = AK \sin \alpha = a \sin \alpha - d \cos \alpha;$$

і момент записується так

$$m_A(\bar{F}) = -F(a \sin \alpha - d \cos \alpha). \quad (7)$$

Підставляючи сюди задані числові значення, будемо мати

$$m_A(\bar{F}) = -8 \cdot (3 \cdot 0,86 - 1 \cdot 0,5) = -16,64 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для точки  $D$  формула (1) запишеться так

$$m_D(\bar{F}) = +F \cdot h_D.$$

Для визначення  $h_D$  скористаємося подібністю трикутників  $ANK$  і  $KMD$ . Тоді можемо записати:

$$\frac{h_D}{h_A} = \frac{KD}{AK};$$

$$h_D = \frac{KD}{AK} \cdot h_A = \frac{d \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (a \sin \alpha - d \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot (a \sin \alpha - d \cos \alpha)} = d \cos \alpha;$$

і момент відносно точки  $D$  записується так:

$$m_D(\bar{F}) = +F \cdot d \cdot \cos \alpha. \quad (8)$$

Для заданих значень параметрів будемо мати:

$$m_D(\bar{F}) = +8 \cdot 1 \cdot 0,5 = +4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для точки  $B$  формула (1) записується так:

$$m_B(\bar{F}) = F \cdot h_B.$$

Плече  $h_B$  знаходимо із подібності трикутників  $BSK$  і  $DMK$ , тоді:

$$\frac{h_B}{h_D} = \frac{KB}{KD} = \frac{KD + b}{KD} = 1 + \frac{b}{KD};$$

$$h_B = \left(1 + \frac{b}{KD}\right) \cdot h_D = \left(1 + \frac{b \cdot \sin \alpha}{d \cos \alpha}\right) \cdot d \cos \alpha = d \cos \alpha + b \sin \alpha,$$

і момент відносно точки  $B$  записується так:

$$m_B(\bar{F}) = F \cdot (d \cos \alpha + b \sin \alpha). \quad (9)$$

При заданих значеннях параметрів маємо таке:

$$m_B(\bar{F}) = 8 \cdot (1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,86) = 17,76 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

**Другий спосіб** полягає у використанні аналітичної формули для обчислення моменту і вимагає, щоб початок плоскої системи координат кожен раз обирався в тій точці, відносно якої момент знаходиться. Якщо ця умова виконана, то знаючи в такій системі координат проекції сили і координати точки її прикладення можемо використовувати наступну формулу:

$$m_0(\bar{F}) = xF_y - yF_x. \quad (10)$$

Покажемо, як працює формула (10) в нашому прикладі. В системі координат, показаній на рис. 3 будемо мати наступне аналітичне завдання прикладеної до балки сили

$$\bar{F} = (F_x, F_y), \quad F_x = -F \cos \alpha, \quad F_y = -F \sin \alpha,$$

де точка  $C(x, y)$ ,  $x = a$ ,  $y = d$ .

Тоді за формулою (5) знаходимо

$$m_A(\bar{F}) = a(-F \sin \alpha) - d(-F \cos \alpha) = F(-a \sin \alpha + d \cos \alpha), \quad (11)$$

що співпадає з формулою (7), отриманою першим способом.

**Увага!** Щоб знайти цим способом момент відносно точки  $B$  треба перенести початок координат у цю точку і аналітично (у вигляді чотирьох чисел) задати силу  $\bar{F}$  в такій системі. Будемо мати:

$$F_x = -F \cos \alpha, \quad F_y = -F \sin \alpha, \quad x = -b, \quad y = d.$$

З формули (10) отримуємо:

$$m_B(\bar{F}) = -b \cdot (-F \sin \alpha) - d \cdot (F \cos \alpha) = F(b \sin \alpha + d \cos \alpha), \quad (12)$$

що співпадає з формулою (9).

Для знаходження  $m_D(\bar{F})$  обираємо систему координат з початком у точці  $D$ . В такій системі координат сила аналітично описується таким чином

$$F_x = -F \cos \alpha, \quad F_y = -F \sin \alpha, \quad x = 0, \quad y = d,$$

і формула (5) записується так:

$$m_D(\bar{F}) = 0 \cdot (-F \sin \alpha) - d \cdot (-F \cos \alpha) = F \cdot d \cos \alpha, \quad (13)$$

що співпадає з формулою (8).

**Третій спосіб** ґрунтується на використанні **теорему Варіньона** про момент рівнодійної плоскої системи збіжних сил, згідно з якою момент рівнодійної відносно довільної точки площини дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил даної системи відносно того ж центра. Згідно з цим способом усяку похилу силу на площині треба попередньо на основі аксіоми паралелограма (в даному випадку – прямокутника) розкласти на горизонтальну і вертикальну складові, окремо знайти моменти для кожної складової; а потім знайти алгебраїчну суму цих моментів. Основною перевагою такого підходу є те, що плечі для складових сили відносно усіх необхідних центрів, як правило, наперед відомі і залишається лише визначитися із знаками моментів для кожної складової.

Покажемо реалізацію такого підходу в нашому прикладі. На рис. 3 показано розкладання сили  $\bar{F}$  на складові. Тоді

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y.$$

Легко бачити, що

$$|\bar{F}| = F \cos \alpha, \quad |\bar{F}| = F \sin \alpha.$$

**Увага!** Важливо пам'ятати, що при подібному розкладанні сили її складові прикладені до тіла у тій же точці, що і сила  $\bar{F}$ .

Запишемо теорему Варіньона відносно точки  $A$

$$\begin{aligned} m_A(\bar{F}) &= m_A(\bar{F}_x) + m_A(\bar{F}_y) = |\bar{F}_x| \cdot d - |\bar{F}_y| \cdot a = \\ &= F(d \cos \alpha - a \sin \alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Видно, що це співпадає з формулами (7) і (11).

Аналогічно, для точки  $B$  знаходимо

$$\begin{aligned}
 m_B(\bar{F}) &= m_B(\bar{F}_x) + m_B(\bar{F}_y) = |\bar{F}_x| \cdot d - |\bar{F}_y| \cdot b = \\
 &= F(d \cos \alpha - b \sin \alpha).
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Цей результат співпадає з формулами (9) і (12). Для точки  $D$  будемо мати наступне:

$$m_D(\bar{F}) = m_D(\bar{F}_x) + m_D(\bar{F}_y) = |\bar{F}_x| \cdot d - |\bar{F}_y| \cdot 0 = Fd \cos \alpha. \tag{16}$$

Це відповідає результатам за формулами (8) і (13).

**Увага!** Порівнюючи на даному конкретному прикладі математичні складнощі кожного з трьох способів зазначимо наступне: 1) при використанні формули (1) у випадку похилої сили для визначення плеча необхідно використовувати знання з елементарної геометрії (планіметрії), зокрема в даному випадку ознаки і властивості подібності трикутників, а також елементарні відомості з тригонометрії (про сторони і кути прямокутного трикутника); 2) для застосування формули (5) треба завжди пам'ятати, що початок системи координат обов'язково обирається саме в тій точці, відносно якої треба обчислити момент; 3) при використанні теореми Варіньона треба пам'ятати, що складові (горизонтальна і вертикальна) похилої сили завжди входять в ту точку, до якої прикладена початкова сила, або виходять саме з цієї точки, це дуже важливо для вказання плеча кожної такої складової. Якщо підвести підсумки цим порівнянням, то можна зазначити наступне: найбільш простим для практичного застосування є третій спосіб, тому можна рекомендувати студентам у всіх задачах, де є похилі сили, перед записом рівнянь рівноваги провести підготовчу роботу, розклавши усі такі сили на горизонтальні і вертикальні складові.

## 2. ПРИКЛАД ВИКОРИСТАННЯ РІВНОДІЙНОЇ І ТЕОРЕМИ ПРО ТРИ НЕПАРАЛЕЛЬНІ СИЛИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ БАЛКИ НА ДВОХ ШАРНІРНИХ ОПОРАХ

Для балки, показаної на рис. 2.1 визначити реакції опор в точках  $A$  і  $B$ , якщо  $a = 0,3$  м,  $b = 0,1$  м,  $c = 0,2$  м,  $d = 0,1$  м,  $e = 0,3$  м,  $F_1 = 20$  Н,  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $F_2 = 16$  Н,  $\alpha_2 = 60^\circ$ ,  $q = 14$  Н/м,  $M = 8$  Н · м.

Розв'язання.

Покажемо балку в масштабі довжин 1:10

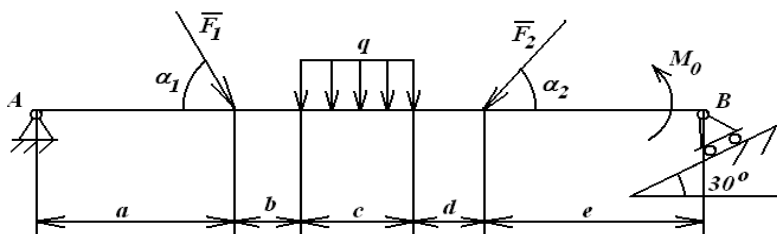


Рисунок 2.1 – Схема навантаження балки на двох шарнірних опорах

1. Попередньо зробимо підготовчу роботу, а саме – замінимо розподілене навантаження зосередженою силою за формулою.

$$Q = q \cdot c = 14 \cdot 0,2 = 2,8\text{Н}$$

і розкладемо обидві похилі сили на горизонтальну і вертикальну складові. Будемо мати:

$$|\bar{F}_{1x}| = F_1 \cos \alpha_1 = 20 \cdot 0,7 = 14\text{Н},$$

$$|\bar{F}_1| = F_1 \sin \alpha_1 = 20 \cdot 0,7 = 14\text{Н},$$

$$|\bar{F}_{2x}| = F_2 \cos \alpha_2 = 16 \cdot 0,5 = 8\text{Н},$$

$$|\bar{F}_{2y}| = F_2 \sin \alpha_2 = 16 \cdot 0,86 = 13,8\text{Н}.$$

2. Визначимо головний вектор заданих активних сил аналітичним методом, використовуючи формули (1)-(3)

$$R_x = \sum_{k=1}^3 F_{kx} = |\bar{F}_{1x}| - |\bar{F}_{2x}| = 14 - 8 = 6,$$

$$R_y = \sum_{k=1}^3 F_{ky} = |\bar{F}_{1y}| - Q - |\bar{F}_{2y}| = -14 - 2,8 - 13,8 = -30,6,$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6^2 + 30,6^2} = 31,2H,$$

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = -5,1 \quad \alpha = 78,9,$$

3. Графічне визначення головного вектора. Оберемо масштаб сил 1:4 (в 1 см – 4Н) (рис. 2.2):

$$R_{\text{гр}} = 31,2H; \alpha_{\text{гр}} = 80^\circ$$

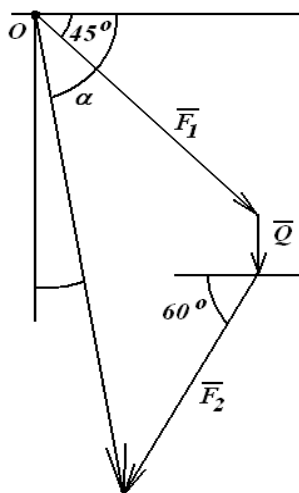


Рисунок 2.2 – Графічне визначення головного вектора

Ці результати практично співпадають з аналітичними.

4. З метою деякого скорочення обчислень оберемо в якості центру приведення точку  $O$  (рис. 2.3).

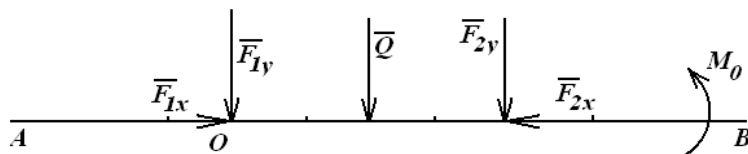


Рисунок 2.3 – Вибір точки приведення

$$M_0 = -Q \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right) - |\bar{F}_{2y}| \cdot (b + c + d) + M =$$

$$= -2,8 \cdot 0,2 - 13,8 \cdot 0,4 + 8 = 1,9 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тоді згідно з описаним вище для визначення (побудови) рівнодійної усіх заданих навантажень спочатку замість рис. 2.3 схема прикладених до балки активних сил має вигляд, показаний на рис. 2.4.

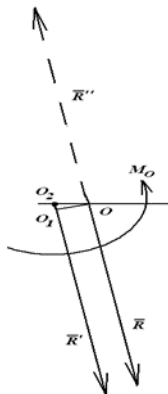


Рисунок 2.4 – Схема прикладених до балки активних сил

Тут масштаб довжини 1:10 (в 1 см рис. 10 см, довжини балки), а масштаб сил 1:4 (в 1 см – 4 Н). Згідно з формулою (4) довжина відрізка  $OO_1$  знаходиться так

$$OO_1 = d = \frac{|M_0|}{R} = \frac{1,9}{31,2} = 0,06 \text{ м}.$$

В системі координат з початком у точці  $O$  рівняння лінії дії рівнодійної (5) запишеться так:

$$y = \frac{R_y}{R_x} x - \frac{M_0}{R_x} = -\frac{30,6}{6} x - \frac{1,9}{6} = -5,1x - 0,32.$$

Координата точки перетину з віссю  $Ox$  знаходимо із умови  $y = 0$ ; тоді

$$x_1 = -\frac{0,32}{5,1} = -0,063 \text{ м} = -6,3 \text{ см}.$$

5. Тепер, знаючи напрямок і точку прикладення рівнодійної можемо застосовувати теорему про три непаралельні сили і **графічним методом** знайти реакції в точках  $A$  і  $B$ . Для цього спочатку графічно знайдемо точку перетину сил  $\vec{R}'$  і  $\vec{R}_B$  (рис. 2.5) і знімаємо за допомогою транспортиру кут  $\theta$ , який реакція  $\vec{R}_A$  утворює з горизонтом.

**Увага!** Цей кут можна також знайти аналітично, якщо застосовувати до трикутників  $O_1BE$  і  $O_1AE$  теореми синусів і косинусів, але цей шлях буде значно складнішим.

Тепер за графічним методом в масштабі в  $1 \text{ см} - 2 \text{ Н}$  будемо силовий прямокутник, починаючи з сили  $\vec{R}'$ , з її кінця ввідкладаємо напрямок сили  $\vec{R}_B$ , а з початку сили  $\vec{R}'$  – напрямок сили  $\vec{R}_A$  (рис. 2.6).

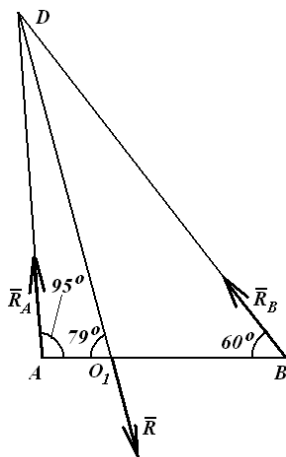


Рисунок 2.5 – Графічне знаходження точки перетину реакцій

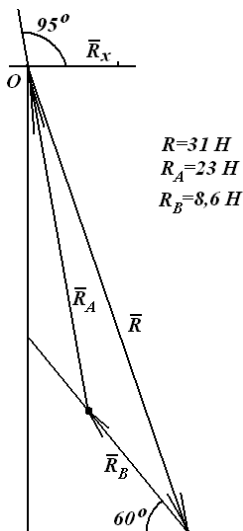


Рисунок 2.6 – Побудова силового прямокутника

6. Використовуючи знайдену **рівнодійну** і точку її прикладення розв'яжемо задачу **аналітичним методом** (рис. 2.7).

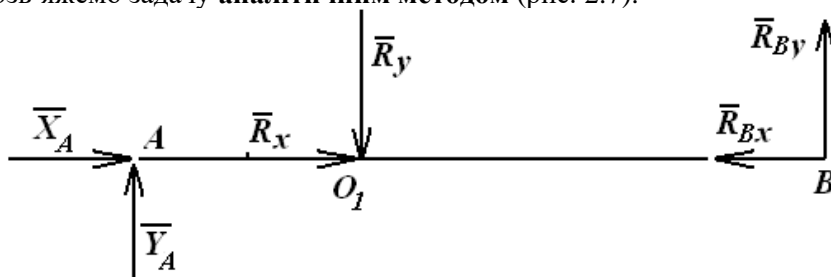


Рисунок 2.7 – Схема для розв'язання аналітичним методом

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A + |\bar{R}_x| - R_B \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A - |\bar{R}_y| + R_B \cdot \sin 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad - |R_y| \cdot 0,237 + R_B \sin 60^\circ \cdot 1 = 0.$$

З третього рівняння знаходимо:

$$R_B = \frac{0,237}{0,866} \cdot 30,6 = 8,44.$$

Тоді

$$Y_A = |\bar{R}_y| - R_B \cdot \sin 60^\circ = 30,6 - 7,25 = 23,35H,$$

$$X_A = -|\bar{R}_x| + R_B \cdot \cos 60^\circ = -6 + 4,2 = -1,8H,$$

$$R_A = \sqrt{1,8^2 + 23,35^2} = 23,5H.$$

7. Для порівняння розв'яжемо задачу третім способом – **без попереднього знаходження рівнодійної** аналітичним (традиційним) способом

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A + |\bar{F}_{1x}| - |\bar{F}_{2x}| - R_B \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A + |\bar{F}_{1y}| - Q - |\bar{F}_{2y}| + R_B \sin 60^\circ = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left(a + b + \frac{c}{2}\right) - |\bar{F}_{2y}| \cdot (a + b + c + d) + \\ & + M_0 + R_B \sin 60^\circ \cdot (a + b + c + d + e) = 0. \end{aligned}$$

Із третього рівняння знаходимо

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{1}{\sin 60^\circ} \left( |\bar{F}_{1y}| a + Q \left( a + b + \frac{c}{2} \right) + |\bar{F}_{2y}| \cdot (a + b + c + d) - M_0 \right) = \\ &= \frac{1}{0,866} (14 \cdot 0,3 + 2,8 \cdot 0,5 + 13,8 \cdot 0,7 - 8) = \frac{7,26}{0,866} = 8,38H, \end{aligned}$$

$$X_A = -|\bar{F}_{1x}| + |\bar{F}_{2x}| + R_B \cos 60^\circ = -14 + 8 + 4,19 = -1,81H,$$

$$Y_A = |\bar{F}_{1y}| + Q + |\bar{F}_{2y}| - \\ -R_B \sin 60^\circ = 14 + 2,8 + 13,8 - 8,4 \cdot 0,866 = 23,3 \text{ Н.}$$

Звідси видно, що результати, отримані третім методом практично співпадають з тими, що знайдені раніше.

Таким чином, дана задача розв'язана трьома способами а саме:

1. Ми визначили **аналітично** і **графічно** головний вектор системи активних сил, а також знайшли аналітично головний момент цих сил і заданої пари відносно обраної нами на балці довільної точки. Після цього знайшли рівнодійну усіх заданих силових факторів і точку перетину лінії дії рівнодійної з нашою балкою. В результаті таких дій ми прийшли до задачі, коли до балки в одній конкретній точці прикладена одна відома сила.

2. За допомогою теореми про три непаралельні сили **графічно** знайшли напрямок повної реакції шарнірно-нерухомої опори, а потім шляхом побудови силового трикутника **графічно** визначили реакції обох опор.

3. Розв'язали задачу про балку, навантажену рівнодійною, **аналітично**, за допомогою трьох рівнянь рівноваги плоскої системи чотирьох сил  $(\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Y}_B, \bar{R})$  і порівняли отримані результати зі знайденими графічно.

4. Розв'язали задачу традиційним аналітичним методом без попереднього знаходження рівнодійної заданого навантаження і точки її прикладення до балки. За всіма трьома методами результати добре погоджені.

### 3. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ С1 «ПРИВЕДЕННЯ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО РІВНОДІЙНОЇ»

Дано:

$$F_1 = 8H, \quad F_2 = 10H, \quad F_3 = 12H, \quad F_4 = 6H, \quad F_5 = 14H, \quad F_6 = 9H, \\ a_1 = 45^\circ, \quad a_2 = 60^\circ, \quad a_4 = 30^\circ, \quad a_5 = 30^\circ, \quad a_6 = 45^\circ, \quad a = 2\text{м}.$$

Необхідно:

1. Привести систему активних сил до центру  $O$ , при цьому головний вектор системи  $\bar{R}$  визначити графічно і аналітично.
2. Побудувати лінію дії рівнодійної, тобто показати вздовж якої прямої система активних сил приводиться до рівнодійної, а також записати рівняння цієї лінії.
3. Знайти координати точки прикладення рівнодійної до нижнього поясу ферми і прикласти рівнодійну у цій точці.
4. Перевірити справедливість теореми Вариньона відносно точки  $C$ .
5. Визначити за допомогою рівнодійної опорні реакції.
6. Для порівняння і взаємної перевірки обчислити опорні реакції без попереднього знаходження рівнодійної, виходячи з рис. 3.1.

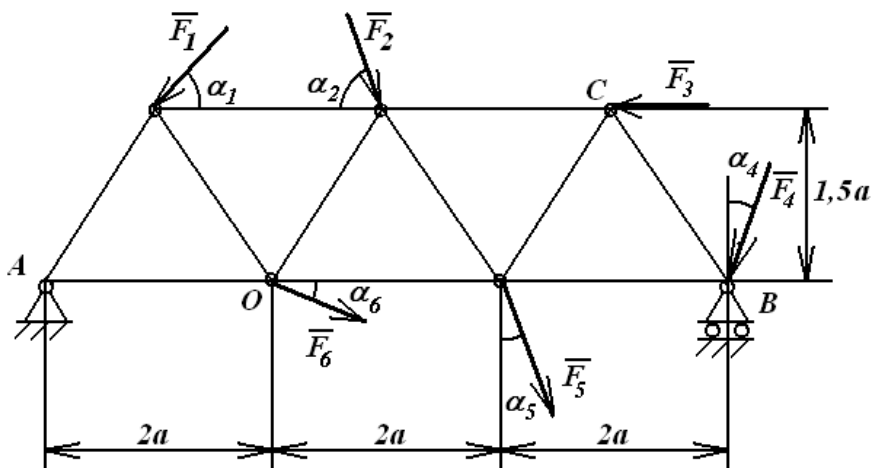


Рисунок 3.1 –Схема ферми з прикладеними навантаженнями

Розв'язання.

1. Графічне знаходження головного вектора заданої системи сил (масштаб в 1 см – 2 Н) (рис. 3.2).

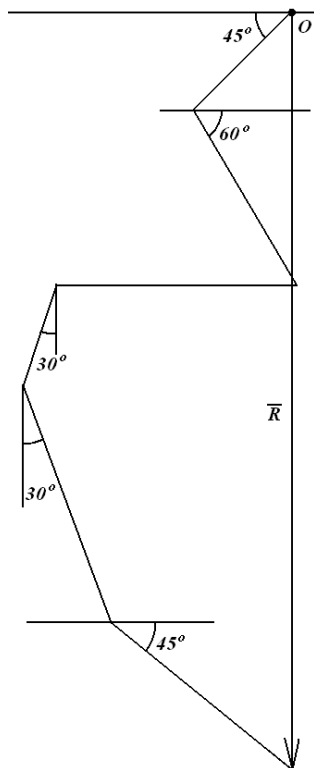


Рисунок 3.2 – Графічне знаходження головного вектора  
Аналітичне визначення  $\bar{R}$ .

$$|\bar{F}_{1x}| = F_1 \cos \alpha_1 = 8 \cdot 0,7 = 5,6 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{1y}| = F_1 \sin \alpha_1 = 8 \cdot 0,7 = 5,6 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{2x}| = F_2 \cos \alpha_2 = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{2y}| = F_2 \sin \alpha_2 = 10 \cdot 0,86 = 8,6 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{3x}| = F_3 = 12 \text{ H}; \quad |\bar{F}_{3y}| = 0 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{4x}| = F_4 \sin \alpha_4 = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{4y}| = F_4 \cos \alpha_4 = 6 \cdot 0,86 = 5,2 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{5x}| = F_5 \sin \alpha_5 = 14 \cdot 0,5 = 7 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{5y}| = F_5 \cos \alpha_5 = 14 \cdot 0,86 = 12,04 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{6x}| = F_6 \cos \alpha_6 = 9 \cdot 0,7 = 6,3 \text{ H};$$

$$|\bar{F}_{6y}| = F_6 \sin \alpha_6 = 9 \cdot 0,7 = 6,3 \text{ H};$$

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = -|\bar{F}_{1x}| + |\bar{F}_{2x}| - |\bar{F}_{3x}| - |\bar{F}_{4x}| + |\bar{F}_{5x}| + |\bar{F}_{6x}| =$$

$$= -5,6 + 5 - 12 - 3 + 7 + 6,3 = -2,3 \text{ H};$$

$$R = 19 \cdot 2 = 38 \text{ H};$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = -|\bar{F}_{1y}| - |\bar{F}_{2y}| - |\bar{F}_{4y}| - |\bar{F}_{5y}| + |\bar{F}_{6y}| =$$

$$= -5,6 - 8,6 - 5,2 - 12 - 6,3 = -37,5 \text{ H},$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{2,3^2 + 37,5^2} = \sqrt{1411,5} = 37,6 \text{ H}.$$

Визначення  $M_o$ .

$$M_o = |\bar{F}_{1y}| \cdot a + |\bar{F}_{1x}| \cdot 1,5a - |\bar{F}_{2x}| \cdot 1,5a -$$

$$- |\bar{F}_{2y}| \cdot a + F_3 \cdot 1,5a - |\bar{F}_{4y}| \cdot a - |\bar{F}_{5y}| \cdot 2a =$$

$$= 5,6 \cdot 2 + 5,6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 8,6 \cdot 2 + 12 \cdot 3 -$$

$$- 5,2 \cdot 8 - 12,04 \cdot 4 = -58 \text{ H} \cdot \text{м}.$$

$$d = \frac{|M_o|}{|\bar{R}|} = \frac{58}{37,6} = 1,54 \text{ м}.$$

$$y = \frac{R_y}{R_x} x - \frac{M_o}{R_x} = + \frac{37,5}{2,3} x - \frac{58}{2,3} = 16,3x - 25,2.$$

$$M_o = |\bar{F}_{1y}| \cdot a + |\bar{F}_{1x}| \cdot 1,5a - |\bar{F}_{2x}| \cdot 1,5a - |\bar{F}_{2y}| \cdot a + F_3 \cdot 1,5a -$$

$$- \cdot 4a - |\bar{F}_{5y}| \cdot 2a = 5,6 \cdot 2 + 5,6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 8,6 \cdot 2 + \\ + 12 \cdot 3 - 5,2 \cdot 8 - 12,04 \cdot 4 = -58 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$d = \frac{|M_o|}{|\bar{R}|} = \frac{58}{37,6} = 1,54 \text{ м}.$$

$$y = \frac{R_y}{R_x} x - \frac{M_o}{R_x} = + \frac{37,5}{2,3} x - \frac{58}{2,3} = 16,3x - 25,2.$$

Координата т.  $O_1$

$$x_1 = \frac{25,2}{16,3} = 1,54 \text{ м}.$$

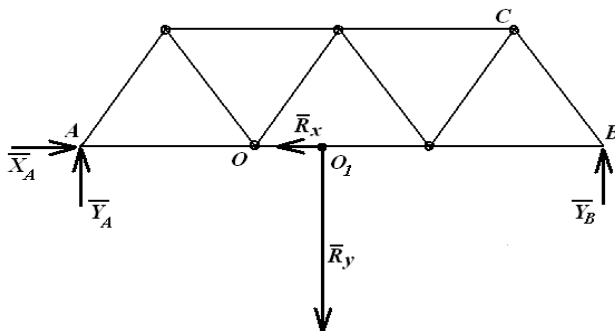


Рисунок 3.3 – Реакції опор

4. Теорема Варіньона відносно точки  $C$ .

$$m_c(\bar{R}) = m_c(\bar{R}_x) + m_c(\bar{R}_y) = -|\bar{R}_x| \cdot 1,5a + |\bar{R}_y| \cdot (2a - OO_1 + a) = \\ = -2,3 \cdot 3 + 37,5 \cdot (6 - 1,54) = 160 \text{ Нм}.$$

$$\sum_{k=1}^6 m_c(\bar{F}_k) = +|\bar{F}_{1y}| \cdot 4a + |\bar{F}_{2y}| \cdot 2a - |\bar{F}_{4y}| \cdot a - |\bar{F}_{4x}| \cdot 1,5a + \\ + |\bar{F}_{5x}| \cdot 1,5a + |\bar{F}_{5y}| \cdot a + |\bar{F}_{6x}| \cdot 1,5a + |\bar{F}_{6y}| \cdot 3a = \\ = 5,6 \cdot 8 + 8,6 \cdot 4 - 5,2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 6,3 \cdot 6 = 161,5 \text{ Нм}.$$

Перевірити помилки округлення. В цілому збіг добрий.

5.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - |\bar{R}_x| = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - |\bar{R}_y| = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -|\bar{R}_y| \cdot (2a + x_1) + Y_B \cdot 6a = 0;$$

$$Y_B = \frac{2a + x_1}{6a} \cdot |\bar{R}_y| = \frac{4 + 1,54}{12} \cdot 37,5 = 17,3 \text{ H};$$

$$Y_A = |\bar{R}_y| - Y_B = 37,5 - 17,3 = 20,2 \text{ H};$$

$$X_A = |\bar{R}_x| = 2,3 \text{ H}.$$

6. Без знаходження рівнодійної

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A - |\bar{F}_{1x}| + |\bar{F}_{2x}| - F_3 - |\bar{F}_{4x}| + |\bar{F}_{5x}| + |\bar{F}_{6x}| = 0,$$

$$X_A = |\bar{F}_{1x}| - |\bar{F}_{2x}| + F_3 + |\bar{F}_{4x}| - |\bar{F}_{5x}| - |\bar{F}_{6x}|$$

$$= 5,6 - 5 + 12 + 3 - 7 - 6,3 = 2,3 \text{ H}.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A + Y_B - |\bar{F}_{1y}| - |\bar{F}_{2y}| - |\bar{F}_{4y}| - |\bar{F}_{5y}| - |\bar{F}_{6y}| = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad |\bar{F}_{1x}| \cdot 1,5a - |\bar{F}_{1y}| \cdot a - |\bar{F}_{2x}| \cdot 1,5a - |\bar{F}_{2y}| \cdot 3a +$$

$$+ F_3 \cdot 1,5a - |\bar{F}_{4y}| \cdot 6a - |\bar{F}_{5y}| \cdot 4a - |\bar{F}_{6y}| \cdot 2a +$$

$$+ Y_B \cdot 6a = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{12} (5,6 \cdot 3 + 5,6 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8,6 \cdot 6 - 12 \cdot 3 + 5,2 \cdot 12 +$$

$$+ 12 \cdot 8 + 6,3 \cdot 4) = 17,4 \text{ H};$$

$$\begin{aligned} Y_A &= |\bar{F}_{1y}| + |\bar{F}_{2y}| + |\bar{F}_{4y}| + |\bar{F}_{5y}| + |\bar{F}_{6y}| - Y_B = \\ &= 5,6 + 8,6 + 5,2 + 12 + 6,3 - 17,4 = 20,3 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Все практично співпадає.

#### 4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНКОНТРОЛЬНОЇ СЗ «ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ БАЛКИ НА ДВОХ ОПОРАХ ПІД ДІЄЮ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І МОМЕНТУ»

**Приклад 1.** Балка закріплена в точці  $A$  за допомогою шарнірно-нерухомої опори, а в точці  $B$  – шарнірно-рухомої. Задані розміри  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $c = 4$  м. Інтенсивність прикладних розподілених навантажень  $q_1 = 2 \frac{H}{m}$ ,  $q_2 = 2 \frac{H}{m}$ ,  $q_2 = 3$  Н/м. Момент прикладеної до балки пари сил  $M_0 = 4$  Н · м. Визначити реакції опор в точках  $A$  і  $B$  (рис. 4.1).

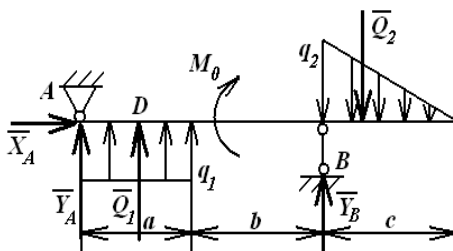


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема

Розв'язання.

1. Замінімо розподілене навантаження зосередженими силами за такими правилами.

Якщо навантаження рівномірно розподілене на ділянці довжиною  $a$ , то рівнодійна такого навантаження прикладена посередині ділянки (рис. 4.2), а її величина рівна площі прямокутника, тобто обчислюється за такою формулою  $Q = q \cdot a$ .

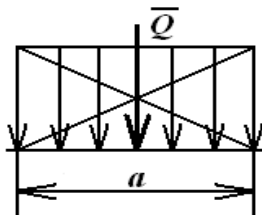


Рисунок 4.2 – Рівномірно розподілене навантаження

Якщо навантаження розподіляється по ділянці згідно до лінійного закону (прямокутним трикутником) (рис. 4.3), тоді точка прикладення зосередженої сили ділить ділянку довжиною  $a$  у відношенні 1:2, тобто сила  $Q$  прикладена на  $1/3a$  від основи прямокутного трикутника (рис. 4.3), а її модуль дорівнює площі трикутника

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot a.$$

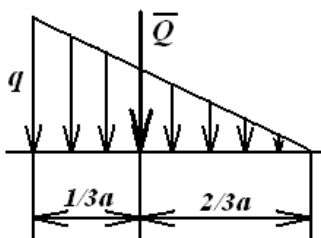


Рисунок 4.3 – Навантаження, розподілене за лінійним законом

**Увага!** У випадку, коли навантаження розподілене за законом трапеції, треба подумки розділити трапецію горизонтальною прямою на прямокутник і трикутник і замінити двома зосередженими силами (рис. 4.4):

$$Q_1 = q_1 \cdot a;$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} (q_2 - q_1) \cdot a;$$

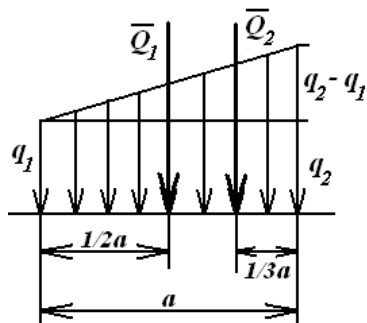


Рисунок 4.4 – Навантаження, розподілене за законом трапеції

В нашій задачі будуть дві зосереджені сили:  $\bar{Q}_1$ , яка прикладена посередині ділянки довжиною  $a$  і напрямлена вертикально вгору, і  $\bar{Q}_2$ , яка прикладена на  $1/3c$  правіше від точки  $B$  і напрямлена вертикально вниз. При цьому

$$Q_1 = q_1 \cdot a = 2 \cdot 2 = 4H,$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} q_2 \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6H.$$

2. На балку накладені в'язі в точках  $A$  і  $B$ , при цьому в шарнірно-нерухомій опорі виникають дві реакції, які треба визначити із умов рівноваги, а саме – горизонтальна  $\bar{X}_A$ , яку ми завжди будемо попередньо направляти вправо (в додатному напрямку осі  $O_x$ ), і вертикальна  $\bar{Y}_A$ , яку ми попередньо напрямляємо вгору (в додатному напрямку осі  $O_y$ ). Тоді, якщо після розв'язання задачі ми отримаємо відповідні значення із знаком мінус, це означатиме, що попередньо показаний напрямок не відповідає дійсності, але на рисунку нічого змінювати не треба, достатньо знати дійсний знак у відповіді. В шарнірно-рухомій опорі (або стержні, як це показано на рис. 4.1) виникає тільки одна реакція, яку ми також попередньо будемо показувати направленою догори.

3. Для визначення трьох невідомих реакцій треба записати три умови рівноваги: два рівняння, як рівність нулю суми проекцій всіх активних сил і реакцій в'язей на осі  $O_x$  і  $O_y$  і рівняння суми моментів відносно довільної точки.

**Увага!** Третє рівняння у всіх наступних задачах треба складати відносно точки, через яку проходять дві невідомі реакції. Це дозволяє в подібних задачах отримати рівняння з однією невідомою.

Рівняння рівноваги даної задачі записуються так

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A + Q_1 + Y_B - Q_2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad q_1 \cdot \frac{a}{2} - M_o + Y_B \cdot (a + b) - Q_2 \cdot \left(a + b + \frac{1}{3}c\right) = 0.$$

**Увага!** Слід пам'ятати, що у всіх наступних задачах моменти пар (активних і реактивних) входять лише в третє рівняння (рівняння моментів) і при складанні рівнянь в проекціях їх не треба враховувати.

4. Послідовно розв'язуючи отриману систему алгебраїчних рівнянь (розпочинати треба з тих рівнянь, в які входять по одній невідомій реакції), знаходимо три невідомі

$$X_A = 0,$$

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{1}{a+b} \left( -Q_1 \cdot \frac{a}{2} + M_o + Q_2 \left( a + b + \frac{1}{3}c \right) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( -4 \cdot 1 + 4 + 6 \cdot \frac{19}{3} \right) = \frac{38}{5} = 7,6 \text{ Н}, \end{aligned}$$

$$Y_A = -Q_1 - Y_B + Q_2 = -4 - 7,6 + 6 = -5,6 \text{ Н}.$$

**Увага!** Знаки в отриманих відповідях означають наступне: реакція  $\bar{Y}_B$  насправді направлена вгору, а знак мінус для  $\bar{Y}_A$  означає, що в точці  $A$  вертикальна реакція направлена вниз.

5. Для **перевірки** треба скласти рівняння моментів відносно іншої довільної точки, підставити в це рівняння знайдені значення реакцій і якщо в результаті будемо мати тотожність виду  $0 = 0$ , то це означає, що задача розв'язана правильно.

Складемо рівняння моментів відносно точки  $D$  (рис. 4.1), в якій прикладена відома сила  $\bar{Q}_1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_D(\bar{F}_k) &= 0 \quad -Y_A \cdot \frac{a}{2} - M_o + Y_B \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) - Q_2 \cdot \left(\frac{a}{2} + b + \frac{c}{3}\right) = 0, \\ & -(-5,6) \cdot 1 - 4 + 7,6 \cdot 4 - 6 \cdot \left(1 + 3 + \frac{4}{3}\right) = 5,6 - 4 + 30,4 - 6 \cdot \frac{16}{3} = \\ & = 36 - 36 = 0. \end{aligned}$$

Задача розв'язана правильно.

**Приклад 2.** Для показаної на рис. 4.5 балки визначити реакції опор, якщо  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $c = 4$  м,  $q_1 = 2$  Н/м,  $q_2 = 3$  Н/м,  $M_0 = 4$  Н · м.

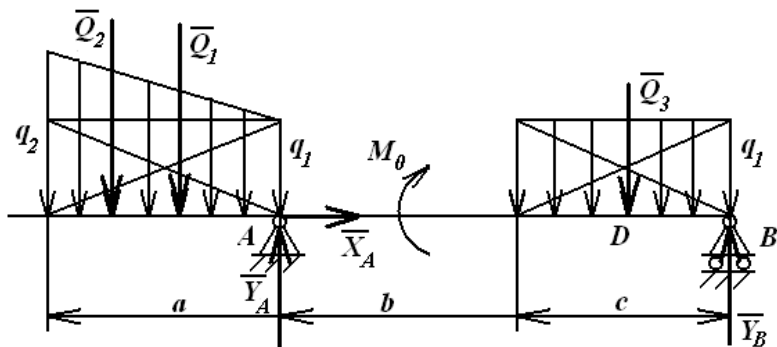


Рисунок 4.5 – Розрахункова схема

Розв'язання.

1. Замінімо розподілені навантаження трьома зосередженими силами за такими формулами:

$$Q_1 = q_1 \cdot a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ Н};$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1) \cdot a = \frac{1}{2} \cdot (3 - 2) \cdot 2 = 1 \text{ Н};$$

$$Q_3 = q_1 \cdot c = 2 \cdot 4 = 8 \text{ Н}.$$

2. В точці  $A$  балка закріплена за допомогою шарнірно-нерухомої опори, тому, в загальному випадку навантаження, тут повинно виникати дві невідомі реакції  $\bar{X}_A$  і  $\bar{Y}_A$ . В точці  $B$  у нас шарнірно-рухома опора або стержень, тому тут виникає лише вертикальна реакція  $\bar{Y}_B$ . Показуємо на рис. 4.5 усі три невідомі реакції направлені у додатних напрямках, про що вже говорилося у прикладі 1.

3. Аналогічно попередньому прикладу складаємо три рівняння рівноваги невідільної балки

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Q_1 - Q_2 + Y_A - Q_3 + Y_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad Q_1 \cdot \frac{a}{2} + Q_2 \cdot \frac{2}{3}a - M_o - q_3 \left(b + \frac{c}{2}\right) + Y_B(b + c) = 0.$$

4. З третього рівняння знаходимо  $Y_B$

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{1}{b+c} \left[ M_o + Q_3 \left(b + \frac{c}{2}\right) - q_1 \cdot \frac{q}{2} - Q \cdot \frac{2}{3}a \right] = \\ &= \frac{1}{7} \left( 4 + 8 \cdot 5 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{4}{3} \right) = \frac{116}{21} = 5 \frac{11}{21} = 5,52 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Тепер з другого рівняння визначаємо  $Y_A$

$$Y_A = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Y_B = 4 + 1 + 8 - 5 \frac{11}{21} = \frac{157}{21} = 7 \frac{10}{21} = 7,48 \text{ Н.}$$

5. Для перевірки складемо рівняння моментів відносно точки  $D$  (рис. 4.5)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_D(\bar{F}_k) = 0 \quad & Q_2 \cdot \left(\frac{2}{3}a + b + \frac{c}{2}\right) + Q_1 \cdot \left(\frac{a}{2} + b + \frac{c}{2}\right) - \\ & - Y_A \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right) - M_o + Y_B \cdot \frac{c}{2} = 0. \end{aligned}$$

Підставляючи сюди знайдені значення  $Y_A$  і  $Y_B$  і задані величини сил і розмірів, будемо мати

$$\begin{aligned} 1 \cdot \left(\frac{4}{3} + 3 + 2\right) + 4 \cdot (1 + 3 + 2) - \frac{157}{21} \cdot (3 + 2) - 4 + \frac{116}{21} \cdot 2 &= 0; \\ \frac{133 + 504 - 785 - 84 + 232}{21} &= \frac{869 - 869}{21} = 0. \end{aligned}$$

Задача розв'язана правильно.

## 5. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНІКОНТРОЛЬНОЇ С4 «ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ АКТИВНИХ СИЛ»

**Приклад 1.** Для показаної на рисунку 5.1 консольної балки визначити реакції в жорсткому защемленні, якщо  $P_1 = 10\text{H}$ ,  $P_2 = 8\text{H}$ ,  $q = \frac{4\text{H}}{\text{м}}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $M_0 = 6\text{H} \cdot \text{м}$ ,  $a = 2\text{м}$ ,  $b = 3\text{м}$ ,  $c = 4\text{м}$ .

Розв'язання.

1. Проведемо попередню підготовчу роботу, замінюючи розподілене навантаження зосередженою силою (рис. 5.1), модуль якої знаходимо за раніше наведеною формулою

$$Q = q \cdot c = 4 \cdot 4 = 16\text{H}.$$

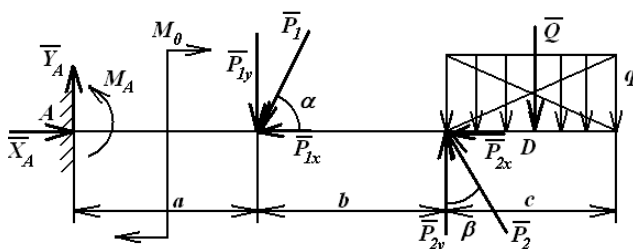


Рисунок 5.1 – Розрахункова схема

Крім того, маючи на увазі використання для обчислення моментів теореми Вариньона, розкладемо обидві похилі сили на вертикальні і горизонтальні складові (рис. 5.1), модулі яких знаходимо так

$$|\bar{P}_{1x}| = P_1 \cos \alpha = 10 \cdot 0,7 = 7 \text{ H};$$

$$|\bar{P}_{1y}| = P_1 \sin \alpha = 10 \cdot 0,7 = 7 \text{ H};$$

$$|\bar{P}_{2x}| = P_2 \sin \beta = 8 \cdot 0,86 = 6,9 \text{ H};$$

$$|\bar{P}_{2y}| = P_2 \cos \beta = 8 \cdot 0,5 = 4\text{H}.$$

2. В жорсткому защемленні виникають три невідомі реакції: горизонтальна  $\bar{X}_A$ , вертикальна  $\bar{Y}_A$  і пара сил з невідомим моментом  $\bar{M}_A$

(рис. 5.1). Попередньо вважаємо, що  $\bar{X}_A$  направлена вправо,  $\bar{Y}_A$  – вгору, момент  $\bar{M}_A$  – проти годинникової стрілки.

3. Ці три невідомі знаходяться з трьох умов рівноваги довільної плоскої системи сил

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A - |\bar{P}_{1x}| - |\bar{P}_{2x}| = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A - |\bar{P}_{1y}| - |\bar{P}_{2y}| - Q = 0.$$

**Увага!** В задачах з консольною балкою рівняння моментів **обов'язково** треба складати відносно точки, в якій балка входить у защемлення

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad M_A - M_o - |\bar{P}_{1y}| \cdot a + |\bar{P}_{2y}| \cdot (a + b) -$$

$$-Q \left( a + b + \frac{c}{2} \right) = 0.$$

4. Якщо завжди складати третє рівняння відносно точки, в якій балка входить у стіну, то тоді в кожному з трьох рівнянь буде рівно одна невідома реакція і ми можемо послідовно всі їх визначити. В даному випадку маємо:

$$X_A = |\bar{P}_{1x}| + |\bar{P}_{2x}| = 7 + 6,9 = 13,9H,$$

$$Y_A = |\bar{P}_{1y}| - |\bar{P}_{2y}| + Q = 7 - 4 + 16 = 19H,$$

$$M_A = M_o + |\bar{P}_{1y}| \cdot a - |\bar{P}_{2y}| \cdot (a + b) + Q \left( a + b + \frac{c}{2} \right) =$$

$$= 6 + 7 \cdot 2 - 4 \cdot 5 + 16 \cdot 7 = 112 H \cdot m.$$

**Увага!** Знаки плюс у всіх трьох відповідях означають, що попередньо показані напрямки невідомих реакцій відповідають дійсності.

5. Перевірка полягає в запису рівняння моментів відносно довільної точки, відмінної від точки  $A$  і наступної підстановки в таке

рівняння знайдених значень невідомих. Якщо обрати точку  $D$ , в якій прикладена сила  $Q$ , то будемо мати наступне рівняння (рис. 5.1)

$$\sum_{k=1}^n m_D(\bar{F}_n) = 0; \quad -Y_A \cdot \left(a + b + \frac{c}{2}\right) + M_A - M_o + |\bar{P}_{1y}| \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right) -$$

$$-|\bar{P}_{2y}| \cdot \frac{c}{2} = 0;$$

$$-19 \cdot 7 + 112 - 6 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 0;$$

$$-147 + 147 = 0.$$

Задача розв'язана вірно.

**Приклад 2.** Визначити реакції в защемленні консольної балки (рис. 5.2), якщо  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $c = 4$  м,  $q = 2$  Н/м,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $P_1 = 8$  Н,  $P_2 = 6$  Н,  $M_o = 4$  Н · м.

Розв'язання.

1. Як і у попередньому прикладі замінюємо розподілене навантаження зосередженою силою, а також розкладаємо похилі сили  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$  на горизонтальні і вертикальні складові

$$Q = q \cdot a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ Н.}$$

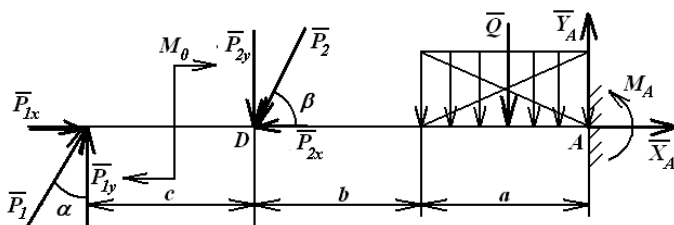


Рисунок 5.2 – Розрахункова схема

$$|\bar{P}_{1x}| = P_1 \sin \alpha = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ Н,}$$

$$|\bar{P}_{1y}| = P_1 \cos \alpha = 8 \cdot 0,86 = 6,9 \text{ Н,}$$

$$|\bar{P}_{2x}| = P_2 \cos \beta = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ Н,}$$

$$|\bar{P}_{2y}| = P_2 \sin \beta = 6 \cdot 0,86 = 5,2 \text{ Н.}$$

2. Невідомими в даній задачі є горизонтальна реакція  $\bar{X}_A$ , яку попередньо направляємо вправо, вертикальна реакція  $\bar{Y}_A$ , яку направляємо вгору і момент  $M_A$ , який попередньо вважаємо направленим проти годинникової стрілки (рис. 5.2).

3. Умови рівноваги записуються так:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad |\bar{P}_{1x}| - |\bar{P}_{2x}| + X_A = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad |\bar{P}_{1y}| - |\bar{P}_{2y}| - Q + Y_A = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(F_k) = 0; \quad -|\bar{P}_{1y}| \cdot (c + b + a) - M_o + |\bar{P}_{2y}| \cdot (b + a) + Q \cdot \frac{a}{2} + M_A = 0.$$

4. По порядку з кожного рівняння знаходимо по одній невідомій:

$$X_A = -|\bar{P}_{1x}| + |\bar{P}_{2x}| = -4 + 3 = -1 \text{ Н.}$$

Знак мінус тут означає, що насправді реакція  $X_A$  направлена не вправо, як ми попередньо вважали, а вліво

$$Y_A = -|\bar{P}_{1y}| + |\bar{P}_{2y}| + Q = -6,9 + 5,2 + 4 = 2,3 \text{ Н.}$$

Знак плюс тут означає, що попередньо показаний на рис. 20 напрямок реакції  $\bar{Y}_A$  відповідає дійсності:

$$\begin{aligned} M_A &= |\bar{P}_{1y}| \cdot (c + b + a) + M_o - |\bar{P}_{2y}| \cdot (b + a) - Q \cdot \frac{a}{2} = \\ &= 6,9 \cdot 9 + 4 - 5,2 \cdot 5 - 4 = 36,1 \text{ Н} \cdot \text{м.} \end{aligned}$$

5. Для перевірки складемо рівняння моментів відносно точки  $D$  (рис. 5.2)

$$\sum_{k=1}^n m_D(\bar{F}_k) = 0; \quad -|\bar{P}_{1y}| \cdot c - M_o - Q \left( b + \frac{a}{2} \right) + Y_A \cdot (b + a) + M_A = 0.$$

$$-6,9 \cdot 4 - 4 - 4 \cdot 4 + 2,3 \cdot 5 + 36,1 = 0; \quad -47,6 + 47,6 \equiv 0.$$

Задача розв'язана вірно.

## 6. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНІКОНТРОЛЬНОЇ С-5 «ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ПЛОСКОЇ РАМИ»

**Приклад 1.** Для показаної на рис. 6.1 плоскої рами визначити реакції в точках кріплення, якщо

$$a = 2\text{м}, \quad b = 3\text{м}, \quad P = 10\text{Н}, \quad M_o = 8\text{Н} \cdot \text{м}, \quad q = 3\text{Н/м}.$$

Розв'язання.

1. Позначимо точки кріплення рами як  $A$  (там де знаходиться шарнірно-нерухома опора) і  $B$  (там де знаходиться горизонтально або вертикально розташований стержень). Тоді в точці  $A$  виникають дві невідомі реакції  $\bar{X}_A$  і  $\bar{Y}_A$ , які ми попередньо направляємо горизонтально вправо і вертикально вгору (рис. 6.1) а реакція стержня направляється вздовж стержня, в даному випадку горизонтально вправо.

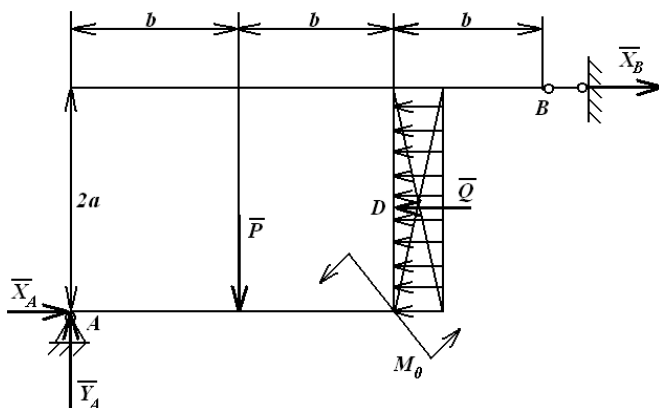


Рисунок 6.1 – Плоска рама

Замінімо розподілене навантаження зосередженою силою  $\bar{Q}$ , величина якої знаходиться так:

$$Q = q \cdot 2a = 3 \cdot 4 = 12 \text{ Н}.$$

2. Умови рівноваги в даній задачі записуються так:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - Q = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -P \cdot b + M_o + Q \cdot a - X_B \cdot 2a = 0.$$

3. З третього рівняння знаходимо

$$X_B = \frac{1}{2a}(-P \cdot b + M_o + Q \cdot a) = \frac{1}{4}(-10 \cdot 3 + 8 + 12 \cdot 2) = 0,5 \text{ Н}.$$

Тоді з першого рівняння будемо мати

$$X_A = Q - X_B = 12 - 0,5 = 11,5 \text{ Н}.$$

З другого рівняння знаходимо

$$Y_A = P = 10 \text{ Н}.$$

**Увага!** Знаки плюс у всіх трьох результатах означають, що попередньо показані на рис. 6.1 напрямки реакцій відповідають дійсності.

4. Для перевірки складемо рівняння моментів відносно точки  $D$  (рис. 6.1).

$$\sum_{k=1}^n m_D(\bar{F}_k) = 0; \quad X_A \cdot a - Y_A \cdot 2b + P \cdot b + M_o - X_B \cdot a = 0,$$

$$11,5 \cdot 2 - 10 \cdot 6 + 10 \cdot 3 + 8 - 0,5 \cdot 2 = 0,$$

$$61 - 61 \equiv 0.$$

Задача розв'язана вірно.

**Приклад 2.** Знайти реакції опор плоскої рами (рис. 6.2), якщо  $P = 10 \text{ Н}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $M_o = 6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $q = 3 \text{ Н/м}$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ,  $b = 2 \text{ м}$ .

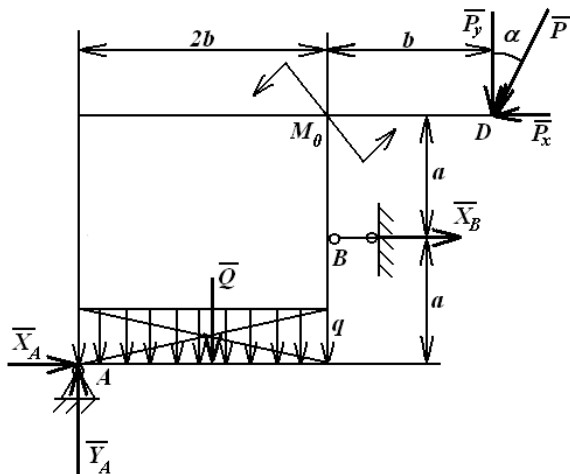


Рисунок 6.2 – Плоска рама

Розв'язання.

1. Показуємо реакції накладених на плоску раму в'язей, позначаючи місце кріплення шарнірно-нерухомою опорою як точку  $A$ , а в точці  $B$  кріплення відбувається за допомогою стержня. Попередньо направляємо невідомі реакції так, як це показано на рис. 6.2.

2. Замінюємо розподілене навантаження зосередженою силою  $\bar{Q}$  і розкладаємо задану силу  $\bar{P}$  на горизонтальну і вертикальну складові:

$$Q = q \cdot 2b = 3 \cdot 4 = 12 \text{ H};$$

$$|\bar{P}_x| = P \cdot \sin \alpha = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ H};$$

$$|\bar{P}_y| = P \cdot \cos \alpha = 10 \cdot 0,86 = 8,6 \text{ H}.$$

3. Рівняння рівноваги записуємо так:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A + X_B - |\bar{P}_x| = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A - Q - |\bar{P}_y| = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad -Q \cdot b - X_B \cdot a + M_o + |\bar{P}_x| \cdot 2a - |\bar{P}_y| \cdot 3b = 0.$$

4. З другого рівняння знаходимо

$$Y_A = Q + |\bar{P}_y| = 12 + 8,6 = 20,6 \text{ Н.}$$

З третього рівняння будемо мати:

$$\begin{aligned} X_B &= \frac{1}{a}(-Q \cdot b + M_o + |\bar{P}_x| \cdot 2a - |\bar{P}_y| \cdot 3b) = \\ &= \frac{1}{2}(-12 \cdot 2 + 6 + 5 \cdot 4 - 8,6 \cdot 6) = -24,8 \text{ Н.} \end{aligned}$$

**Увага!** Знак мінус тут означає, що насправді реакція  $X_B$  направлена не вправо, як ми попередньо показали на рис. 6.2, а в протилежний бік.

З першого рівняння визначаємо

$$X_A = |\bar{P}_x| - X_B = 5 - (-24,8) = 29,8 \text{ Н.}$$

Знаки плюс у  $X_A$  і  $Y_A$  означають, що попередньо показані на рис. 6.2, напрямки цих реакцій відповідають дійсності.

5. Оберемо в даній задачі для перевірки рівняння моментів відносно точки  $D$ , в якій прикладена задана сила  $\bar{P}$

$$\sum_{k=1}^n m_D(\bar{F}_k) = 0 \quad X_A \cdot 2a - Y_A \cdot 3b + Q \cdot 2b + X_B \cdot a + M_o = 0.$$

Підставимо сюди задані і визначені величини

$$29,8 \cdot 4 - 20,6 \cdot 6 + 12 \cdot 4 - 24,8 \cdot 2 + 6 = 0.$$

$$173,2 - 173,2 = 0.$$

Задача розв'язана вірно.

## 7. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНІ КОНТРОЛЬНОЇ С6 «ВИЗНАЧЕННЯ ЗОВНІШНІХ І ВНУТРІШНІХ РЕАКЦІЙ ПЛОСКОЇ РАМИ, СКЛАДЕНОЇ ІЗ ДВОХ ЧАСТИН»

**Приклад 1.** Знайти реакції опор і тиск у проміжному шарнірі заданої складеної конструкції (рис. 7.1), якщо  $P_1 = 16H$ ,  $P_2 = 12H$ ,  $M = 8H \cdot m$ ,  $q = 3H/m$ .

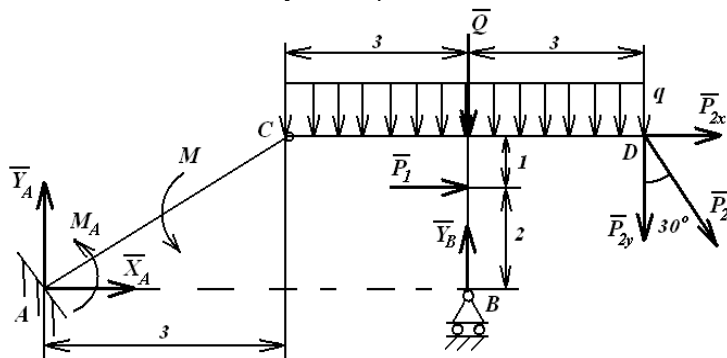


Рисунок 7.1 – Плоска складена рама

Розв'язання.

1. Якщо показати реакції зовнішніх в'язей такої складеної конструкції (рис. 7.1), то ми побачимо, що нам треба знайти чотири невідомі, а рівнянь рівноваги для конструкції в цілому можна записати лише три. Але тут треба звернути увагу на те, що є так званий проміжний шарнір у точці С, який з'єднує між собою два елементи (дві частини) нашої конструкції і через який передається тиск від однієї частини на іншу. Тому задача не являється статично не визначеною (тобто такою, в якій число невідомих реакцій більше ніж число рівнянь рівноваги) тому що тут можна застосувати так званий **метод розчленування** суть якого полягає в наступному: 1) подумки розрізаємо конструкцію на дві частини перетином, який **обов'язково** проходить через **проміжний шарнір**; 2) замінюємо дію однієї частини на іншу двома невідомими внутрішніми реакціями, які входять попарно (дві горизонтальні назустріч одна одній, або одна від одної, і за таким же правилом – дві вертикальні); 3) тепер ми маємо справу з шістьма невідомими реакціями, але ми маємо можливість записати шість рівнянь рівноваги – по три для кожної частини; 4) для перевірки треба

буде скласти три рівняння рівноваги для нерозрізаної конструкції і підставляючи сюди знайдені в попередньому пункті значення чотирьох зовнішніх реакцій в'язей, отримати три тотожності.

2. Як і в попередніх прикладах спочатку замінимо розподілене навантаження зосередженою силою і розкладемо похилу силу на складові.

$$Q = q \cdot 6 = 3 \cdot 6 = 18H,$$

$$|\bar{P}_{2x}| = P_2 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6H,$$

$$|\bar{P}_{2y}| = P_2 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot 0,86 = 10,3H.$$

3. Покажемо дві частини рами після розділення і введення сил  $\bar{Q}$ ,  $\bar{P}_{2x}$  і  $\bar{P}_{2y}$  (рис. 7.2).

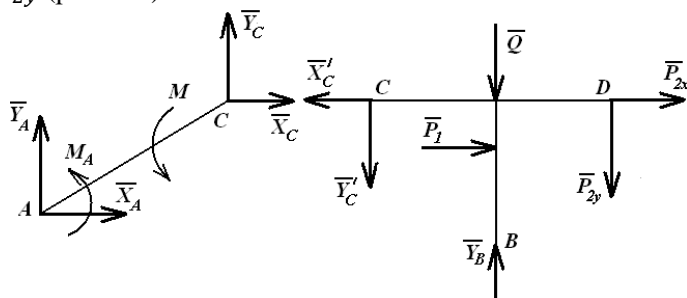


Рисунок 7.2 – Дві частини рами після розділення

**Увага!** Домовимося про наступне: внутрішні реакції в проміжному шарнірі для лівої частини попередньо будемо направляти вліво і вгору, а для правої – відповідно їм на зустріч (рис. 7.2). Це дозволяє підходити до проміжного шарніру однаково у всіх задачах. При цьому, якщо із умов рівноваги лівої чи правої частини якась із цих реакцій буде знайдена зі знаком мінус, то на обох рисунках нічого не змінюємо, але в потрібних місцях ця сила буде підставлятися зі своїм знаком.

4. Складемо умови рівноваги для кожної з двох частин.

Для частини AC

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_C = 0; \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_C = 0; \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad M_A + M - X_C \cdot 3 + Y_C \cdot 3 = 0. \quad (19)$$

**Увага!** З точки зору математики ми отримали три рівняння, в які входять п'ять невідомих. Тому поки що нічого звідси не можемо знайти і переходимо до умов рівноваги правої частини. Зазначимо, що на відміну від лівої частини, для якої рівняння моментів можна було скласти і відносно точки  $A$  і відносно точки  $C$ , для правої частини з двох точок  $B$  і  $C$  доцільно обрати точку  $C$  (через неї проходять дві невідомі сили,

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -X'_x + P_1 + |\bar{P}_{2x}| = 0. \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Y'_c - Q + Y_B - |\bar{P}_{2y}| = 0. \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0; \quad -Q \cdot 3 + P_1 \cdot 1 - |\bar{P}_{2y}| \cdot 6 + Y_B \cdot 3 = 0. \quad (22)$$

**Увага!** Доцільно розв'язувати систему (17) – (22) в такому порядку, якщо це можливо, щоб на кожному з шести кроків ми мали справу з рівнянням з одним невідомим. У нас це можливо, зокрема, якщо рухатися в такому порядку.

5. З рівняння (22) будемо мати

$$Y_B = \frac{1}{3}(3Q - P_1 + 6|\bar{P}_{2y}|) = \frac{1}{3}(54 - 16 + 61,8) = 33,3 \text{ Н.}$$

З рівняння (21) тепер знаходимо

$$Y'_c = Y_B - Q - |\bar{P}_{2y}| = 33,3 - 18 - 10,3 = 5 \text{ Н.}$$

Із (20) випливає, що

$$X'_c = P_1 + |\bar{P}_{2x}| = 16 + 6 = 22 \text{ Н.}$$

**Увага!** Звідси зробимо висновок, що  $X_c = X'_c$  і  $Y_c = Y'_c$  на рисунках і лівої і правої частин показані у напрямках, що відповідають дійсності.

Тепер із (19) визначаємо

$$M_A = -M + 3X_c - 3Y_c = -8 + 66 - 15 = 43 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Із (18) і (17) відповідно будемо мати

$$X_A = -X_c = -22 \text{ Н,}$$

$$Y_A = -Y_c = -5 \text{ Н.}$$

Знаки мінус в останніх двох результатах означають, що дійсні напрямки горизонтальної і вертикальної реакцій в точці  $A$  протилежні попередньо показаним, але на рис. 7.1 і 7.2 нічого змінювати не треба, про все нам вже сказали знаки в отриманих результатах.

6. Для перевірки треба скласти три умови рівноваги для нерозділеної рами. Зрозуміло, що в ці рівняння не ввійдуть внутрішні реакції  $X_c$  і  $Y_c$ , але правильність їх визначення опосередковано перевіриться через чотири інші реакції:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + P_1 + |\bar{P}_{2x}| = 0,$$

$$-22 + 16 + 6 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q + Y_B - |\bar{P}_{2x}| = 0,$$

$$-5 - 18 + 33,3 - 10,3 \cong 0.$$

$$\sum_{k=1}^n m_D(\bar{F}_k) = 0; \quad X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 9 + M_A + M + Q \cdot 3 + P_1 \cdot 1 - Y_B \cdot 3 = 0,$$

$$-22 \cdot 3 - (-5) \cdot 9 + 43 + 8 + 18 \cdot 3 + 16 \cdot 1 - 33,3 \cdot 3 = 0,$$

$$-165,9 + 166 \cong 0.$$

Задача розв'язана вірно.

**Приклад 2.** Знайти реакції опор і тиск у проміжному шарнірі заданої складеної конструкції (рис.7.3), якщо  $P = 10 \text{ Н}$ ,  $M = 8 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $q = 2 \text{ Н/м}$ .

Розв'язання.

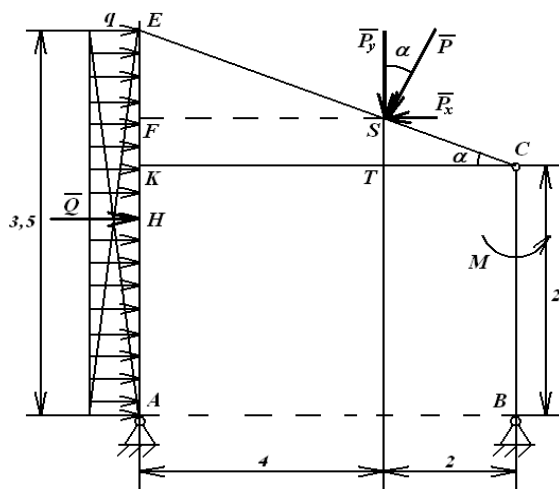


Рисунок 7.3 – Схема складеної конструкції

**Увага!** Звернемо увагу на принципову відмінність даної задачі від попередньої, яка полягає в тому, що раніше зовнішні опори являли об'єднання жорсткого защемлення в точці  $A$  і шарнірно – рухомої опори в точці  $B$ . Це дозволяло нам виходячи з рівнянь рівноваги для правої (більш простої) частини послідовно розв'язувати шість разів рівняння з однією невідомою. В даній задачі і в точці  $A$  і в точці  $B$  ми маємо шарнірно-нерухомі опори і це завжди буде приводити до того, що в отриманій системі із шести алгебраїчних лінійних рівнянь **не буде жодного рівняння з однією невідомою реакцією. Найбільш раціонально** в таких задачах в третій рівняннях для обох частин обирати в якості центру моментів точку  $A$  для лівої частини і точку  $B$  – для правої, а потім в якості системи, з якої знаходяться  $X_C$  і  $Y_C$  взяти третє і шосте рівняння, а далі уже будемо мати справу з чотирма рівняннями, в кожному з яких буде по одній невідомій.

**Увага!** Досить часто в подібних задачах зустрічаються ситуації, коли з геометричних міркувань треба знайти кути, які задані сили або реакції в'язей утворюють з осями координат. В даній задачі таким

являється кут  $\alpha$ , який задана сила  $P$  утворює з вертикальною віссю. Легко бачити, що цей кут дорівнює  $\angle KCE$ , як кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Тоді із прямокутного трикутника  $CKE$  знаходимо

$$\tan \alpha = \frac{1,5}{6} = 0,25 \rightarrow \alpha = \tan^{-1} 0,25 = 14^\circ.$$

2. Цей кут необхідний нам для розкладання сили  $P$  на горизонтальну і вертикальну складові

$$|\bar{P}_x| = P \sin \alpha = 10 \cdot 0,24 = 2,4H.$$

$$|\bar{P}_y| = P \cos \alpha = 10 \cdot \cos 14^\circ = 10 \cdot 0,97 = 9,7H.$$

Розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою:

$$Q = q \cdot 3,5 = 7H.$$

**Увага!** Для обчислення в майбутньому моментів складової  $\bar{P}_x$  для лівої частини і під час перевірки треба знати відстань  $ST$  (рис. 7.3). Вона знаходиться із подібності трикутників  $CKE$  і  $CTS$ .

Тоді:

$$\frac{ST}{KE} = \frac{CT}{CK} \rightarrow ST = \frac{CT}{CK} \cdot KE = \frac{2}{6} \cdot 1,5 = 0,5\text{м}.$$

3. Покажемо поруч обидві частини після проведення розрізу через шарнір  $C$  (рис. 7.4)

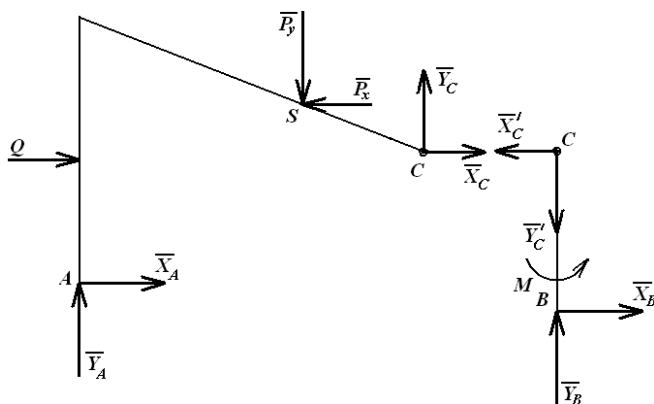


Рисунок 7.4 – Схема проведення розрізу через шарнір

4. Складемо умови рівноваги для кожної з двох частин, враховуючи вище записану рекомендацію про рівняння моментів для кожної частини.

Для частини  $AC$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_C - |\bar{P}_x| + Q = 0; \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_C - |\bar{P}_y| = 0; \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -Q \cdot 1,75 - |\bar{P}_y| \cdot 4 + |\bar{P}_x| \cdot (2 + 0,5) - X_C \cdot 2 + Y_C \cdot 6 = 0. \quad (25)$$

Для частини  $BC$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_B - X'_C = 0; \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad X_B - X'_C = 0; \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_{ky} = 0; \quad Y_B - Y'_C = 0; \quad (27)$$

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad X'_C \cdot 2 + M = 0. \quad (28)$$

**Увага!** Вище ми описали загальну ситуацію, коли треба разом використовувати рівняння (25) і (28), але в даній задачі ситуація спростилася тим, що точки  $B$  і  $C$  лежать на одній вертикальній прямій і тому в рівняння (28) увійшла лише одна невідома і не треба розв'язувати систему двох рівнянь з двома невідомими, а відразу із (28) знайти  $X'_C$ , а потім послідовно знайдемо усі інші невідомі. Якщо трохи

змінити ситуацію на таку (рис. 7.4), то в цьому випадку замість рівняння (28) будемо мати наступне:

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0,$$

$$X'_c \cdot 2 + Y'_c \cdot 1 + M = 0. \quad (29)$$

Ми отримаємо результати із ситуації з рис. 7.3 і з рис. 7.4. Розпочнемо з більш складної ситуації (рис. 7.5).

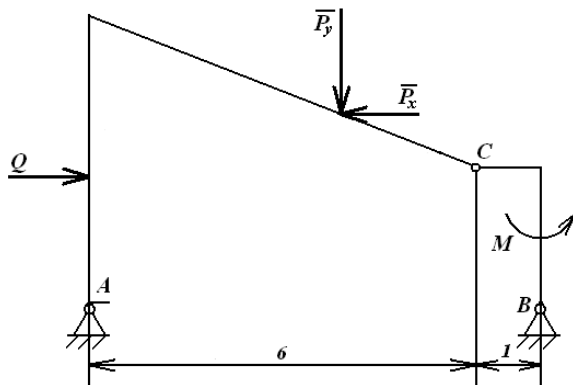


Рисунок 7.5 – Ситуація з двома невідомими

В такій задачі в рівняннях (23) – (27), (29) в кожному є дві невідомі. Тоді розглянемо спочатку систему із двох рівнянь (25) і (29), підставивши сюди задані величини. Маємо таку систему

$$\begin{cases} -2X_c + 6Y_c = 45; \\ 2X'_c + Y'_c = -8; \end{cases}$$

$$7Y_c = 37 \rightarrow Y_c = 5,3H.$$

Для рис. 7.5 тоді із рівняння (29) знаходимо

$$X'_c = \frac{1}{2}(-Y'_c - M) = -\frac{5,3 + 8}{2} = -6,65 H.$$

Для рис. 7.5 із (28) відразу знаходимо

$$X'_c = -\frac{1}{2}M = -4H.$$

Подальші розрахунки для рис. 7.5 із системи (23) – (28) проводимо так:

$$\text{Із (26)} \rightarrow X_B = X'_C = -4 \text{ Н.}$$

$$\text{Із (23)} \rightarrow X_A = -X_C + |\bar{P}_x| - Q = -(4) + 2,4 - 7 = -0,6 \text{ Н.}$$

$$\begin{aligned} \text{Із(25)} \rightarrow Y_C &= \frac{1}{6}(1,75 \cdot Q + 4|\bar{P}_y| - 2,5|\bar{P}_x| + 2X_C) = \\ &= \frac{1}{6}(12,25 + 38,8 - 6 - 8) = 6,2 \text{ Н.} \end{aligned}$$

$$\text{Із (24)} \rightarrow Y_A = -Y_C + |\bar{P}_y| = -6,2 + 9,7 = 3,5 \text{ Н.}$$

$$\text{Із (27)} \rightarrow Y_B = Y'_C = 6,2 \text{ Н.}$$

5. Перевірка для рис. 7.5 полягає в запису трьох рівнянь рівноваги для нерозрізаної конструкції

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad X_A + Q - |\bar{P}_x| + X_B = 0, \\ -0,6 + 7 - 2,4 + (-4) = 0 \quad 7 - 7 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad Y_A - |\bar{P}_y| + Y_B = 0 \\ 3,5 - 9,7 + 6,2 = 0 \quad 9,7 - 9,7 = 0. \end{aligned}$$

**Увага!** Плече сили  $Q$  відносно точки  $S$  визначається так:

$$HF = EH - EF = 0,5 \cdot 3,5 - (1,5 - 0,5) = 1,75 - 1 = 0,75 \text{ м.}$$

$$\sum_{k=1}^n m_S(\bar{F}_k) = 0.$$

$$X_A \cdot (2 + 0,5) - Y_A \cdot 4 + Q(1,75 - 1) + M + X_B \cdot (2 + 0,5) + Y_B \cdot 2 = 0;$$

$$-0,6 \cdot 2,5 - 3,5 \cdot 4 + 7 \cdot 0,75 + 8 - 4 \cdot 2,5 + 6,2 \cdot 2 = 0;$$

$$25,65 - 26,5 \cong 0.$$

Задача розв'язана вірно.

Для рис. 7.5 зовнішні реакції знаходяться так:

$$X_B = X_c = -6,65 \text{ Н.}$$

$$Y_B = Y_c = 5,3 \text{ Н.}$$

$$\text{Із (23)} \rightarrow X_A = -X_c + |\bar{P}_x| - Q = -(6,65) + 2,4 - 7 = 2,05 \text{ Н.}$$

$$\text{Із (24)} \rightarrow Y_A = -Y_c + |\bar{P}_y| = -5,3 + 9,7 = 4,4 \text{ Н.}$$

Перевірка цих результатів проводиться так:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + Q - |\bar{P}_x| + X_B = 0,$$

$$2,05 + 7 - 2,4 - 6,65 = 0; \quad 9,05 - 9,05 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - |\bar{P}_y| + Y_B = 0,$$

$$4,4 - 9,7 + 5,3 = 0; \quad 9,7 - 9,7 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n m_S(|\bar{F}_k|) = 0;$$

$$X_A \cdot 2,5 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 0,75 + M + X_B \cdot 2,5 + Y_B \cdot 3 = 0;$$

$$2,05 \cdot 2,5 - 4,4 \cdot 4 + 7 \cdot 0,75 + 8 - 6,65 \cdot 2,5 + 5,3 \cdot 3 = 0;$$

$$34,225 - 34,275 \cong 0.$$

**Приклад 3.** Знайти реакції опор і тиск у проміжному шарнірі заданої складеної конструкції (рис. 7.6), якщо

$$P_1 = 10 \text{ Н}, \quad M = 8 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad q = 2P/\text{м}, \quad P_2 = 12 \text{ Н.}$$

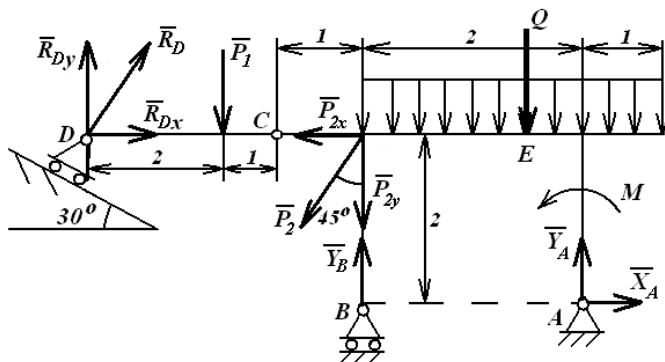


Рисунок 7.6 – Схема складеної конструкції

Розв'язання.

**Увага!** На відміну від двох попередніх прикладів у даному випадку зовнішні кріплення конструкції являють собою дві шарнірно-рухомі опори, в кожній з яких виникає по одній реакції  $\bar{R}_D$  і  $\bar{Y}_B$ , і одну шарнірно-нерухому опору, в якій виникає дві реакції  $\bar{X}_A$  і  $\bar{Y}_A$ . Звернемо увагу на те, що реакція в точці  $D$  являє собою похилу силу, яку доцільно разом із заданими похилими активними силами розкласти на горизонтальну і вертикальну складову. В нашій задачі це розкладання виглядає так

$$|\bar{R}_{Dx}| = R_D \cdot \sin 30^\circ = 0,5R_D; \quad |\bar{R}_{Dy}| = R_D \cdot \cos 30^\circ = 0,86R_D.$$

Слід пам'ятати, що на відміну від точки  $A$  в точці  $D$  у нас в цих формулах горизонтальна і вертикальна складові виражені через одну невідому  $R_D$ . При цьому дані формули записані у припущенні, що  $\bar{R}_D$  направлена перпендикулярно до похилої площини вгору і якщо з розрахунків  $R_D$  отримаємо зі знаком мінус то цей мінус увійде і у формули для  $\bar{R}_{Dx}$  і  $\bar{R}_{Dy}$  відповідною зміною напрямку.

2. Як і в попередніх задачах проведемо заміну розподіленого навантаження зосередженою силою, а також розкладемо задану силу  $\bar{P}_2$  на складові:

$$Q = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ H},$$

$$|\bar{P}_{2x}| = P_2 \cos 45^\circ = 0,7 \cdot 12 = 8,4 \text{ H},$$

$$|\bar{P}_{2y}| = P_2 \sin 45^\circ = 0,7 \cdot 12 = 8,4 \text{ H}.$$

3. Після проведення розрізу через шарнір  $C$  дві частини плоскої конструкції виглядають так (рис. 7.7).

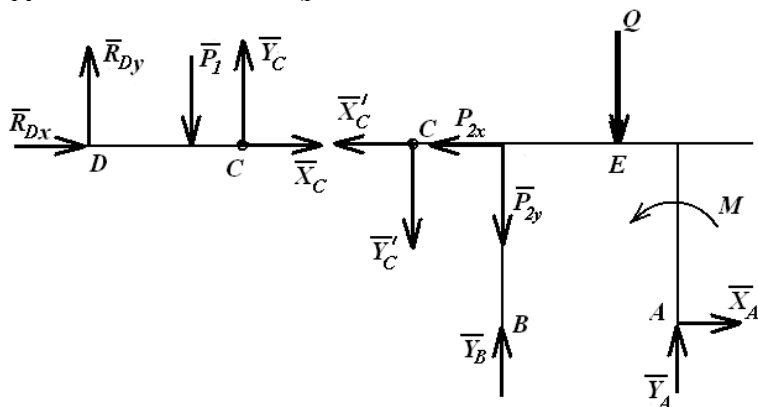


Рисунок 7.7 – Проведення розрізу через шарнір  $C$

**Увага!** Після розділення конструкції на дві частини легко визначитися, яка з них більш проста з точки зору числа невідомих реакцій. Зокрема, в даному випадку на лівій частині таких невідомих реакцій три:  $R_D$ ,  $X_C$  і  $Y_C$ , а на правій – п'ять:  $X'_C$ ,  $Y'_C$ ,  $Y_B$ ,  $X_A$ ,  $Y_A$ . Стає зрозумілим порядок визначення усіх шести невідомих, а саме – з лівої частини три, а потім ще три – з умов рівноваги правої частини.

4. Запишемо умови рівноваги для кожної з двох частин.

Для частини  $DC$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad 0,5R_D + X_C = 0; \quad (30)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad 0,86R_D - P_1 + Y_C = 0; \quad (31)$$

$$\sum_{k=1}^n m_c(\bar{F}_k) = 0; \quad -0,86R_D \cdot 3 + P_1 \cdot 1 = 0. \quad (32)$$

Для частини  $AB$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -X'_c - |\bar{P}_{2x}| + X_A = 0; \quad (33)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Y'_c - |\bar{P}_{2y}| - Q + Y_B + Y_A = 0; \quad (34)$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-X'_c \cdot 2 + Y'_c \cdot 3 + -|\bar{P}_{2y}| \cdot 2 + Q \cdot 0,5 + M - Y_B \cdot 2 = 0. \quad (35)$$

Оптимальний порядок розв'язання цієї системи алгебраїчних рівнянь з шістьма невідомими виглядає таким чином:

Із (32)  $\rightarrow$

$$R_D = \frac{P_1}{3 \cdot 0,86} = \frac{10}{2,58} = 3,9 \text{ Н.}$$

Знак плюс тут означає, що попередньо показаний на рис. 7.6 і 7.7 напрямок  $\bar{R}_D$  вгору відповідає дійсності.

$$\text{Із (30)} \rightarrow X_c = -0,5R_D = -1,95 \text{ Н.}$$

Знак мінус тут означає, що показані на рис. 7.7 напрямки  $\bar{X}_c$  і  $\bar{X}'_c$  не відповідають дійсності, але нічого на рисунках змінювати не будемо.

$$\text{Із (31)} \rightarrow Y_c = P_1 - 0,86R_D = 10 - 0,86 \cdot 3,9 = 6,7 \text{ Н.}$$

Знак плюс означає, що показані на рис. 29 напрямки  $\bar{Y}_c$  і  $\bar{Y}'_c$  відповідають дійсності.

$$\text{Із (33)} \rightarrow X_A = X'_c + |\bar{P}_{2x}| = -1,95 + 8,4 = 6,45 \text{ Н.}$$

$$\begin{aligned} \text{Із (35)} \rightarrow Y_B &= 0,5(2X'_c + 3Y'_c + 2|\bar{P}_{2x}| + 2 \cdot |\bar{P}_{2y}| + 0,5Q + M) = \\ &= 0,5(-3,9 + 20,1 + 16,8 + 16,8 + 3 + +8) = 30,4 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Із (34)  $\rightarrow$

$$Y_A = Y'_c + |\bar{P}_{2y}| + Q - Y_B = 6,7 + 8,4 + 6 - 30,4 = -9,3 \text{ Н.}$$

Знак мінус тут означає, що насправді реакція  $\bar{Y}_A$  направлена вниз.

5. Для перевірки запишемо три умови рівноваги нерозділеної в точці  $C$  конструкції

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad 0,5R_D - |\bar{P}_{2x}| + X_A = 0,$$

$$1,95 - 8,4 + 6,45 = 0, \quad 8,4 - 8,4 \cong 0.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad 0,86R_D - P_1 - |\bar{P}_{2y}| - Q + Y_B + Y_A = 0,$$

$$3,3 - 10 - 8,4 - 6 + 30,4 - 9,3 = 0, \quad 33,7 - 33,7 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n m_E(\bar{F}_k) = 0,$$

$$-0,86 \cdot R_D \cdot 5,5 + P_1 \cdot 3,5 + |\bar{P}_{2y}| \cdot 1,5 - Y_B \cdot 1,5 + M +$$

$$+ Y_A \cdot 0,5 + X_A \cdot 2 = 0$$

$$-18,15 + 3,5 + 12,6 - 45,6 + 8 - 45,6 + 12,9 = 0,$$

$$68,5 - 68,5 \cong 0.$$

Задача розв'язана вірно.

## 8. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ С2 «ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ПЛОСКОЇ СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ»

Надамо спочатку загальні рекомендації, які дозволяють значно простіше розв'язувати систему із шести алгебраїчних рівнянь відносно невідомих зовнішніх і внутрішніх реакцій для механічної системи, яка складається із двох стержневих конструкцій, розташованих в одній площині. Для спрощення такої математичної процедури (розв'язання СЛАР із шести рівнянь) необхідно спеціальним чином обирати точки на кожній з двох частин конструкції, відносно яких складається рівняння моментів (третє для кожного з двох тіл). При цьому найчастіше зустрічаються такі три ситуації.

**Перший випадок.** Одна з двох частин жорстко защемлена в деякій точці, тоді друга частина підкріплена шарнірно-рухомою опорою (рис. 8.1).

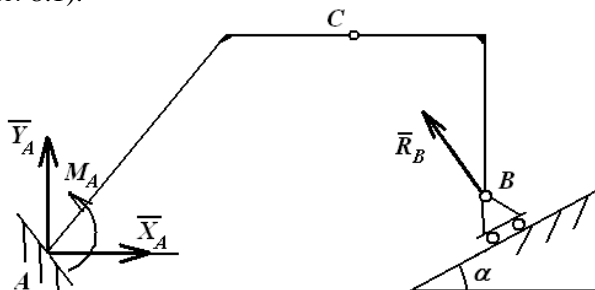


Рисунок 8.1 – Розрахункова схема (3+1)

Таку ситуацію будемо умовно називати випадком 3+1 в тому сенсі, що на правій (або лівій, тобто, одній з двох) частині ми маємо три невідомі зовнішні реакції, а не іншій – одну реакцію.

З точки зору розв'язання системи шести лінійних алгебраїчних рівнянь ситуація значно спрощується, якщо при складанні шостого рівняння (рівняння моментів для правої частини  $BC$  в якості центру брати точку  $C$ ). Тоді в це рівняння увійде одна невідома  $\bar{R}_B$ , після знаходження якої послідовно із п'ятого, четвертого і таке інше рівнянь послідовно (кожного разу із алгебраїчного рівняння з однією невідомою) знаходимо усі шість реакцій.

**Увага!** Слід також пам'ятати що третє рівняння (рівняння моментів для лівої частини) тут доцільно складати відносно точки  $A$ , тоді в ньому буде невідомим реактивний момент  $M_A$  і реакції  $X_C$  і  $Y_C$ , які ми легко знайдемо із четвертого і п'ятого рівнянь для правої частини.

**Увага!** В загальному випадку  $\alpha \neq 0$  і  $\alpha \neq 90^\circ$  невідому реакцію  $\bar{R}_B$  необхідно подавати як суму  $\bar{R}_B = \bar{R}_{Bx} + \bar{R}_{By}$ , аналогічно тому, як це ми робимо для «похилих» активних сил, при цьому  $|\bar{R}_{Bx}| = R_B \sin \alpha$ ,  $|\bar{R}_{By}| = R_B \cos \alpha$ , тобто тут не дві, а одна невідома  $R_B$ . Зрозуміло, що коли  $\alpha = 0$  або  $\alpha = 90^\circ$ , одна з цих складових відсутня і в шосте рівняння  $R_B$  увійде один раз, у той час, як у загальному випадку в шостому рівнянні будемо мати таку частину

$$R_B \sin \alpha \cdot \ell_1 + R_B \cos \alpha \cdot \ell_2 + \dots = 0$$

і тоді

$$R_B = \frac{A}{\ell_1 \sin \alpha + \ell_2 \cos \alpha}.$$

**Другий випадок.** Одна з двох частин закріплена за допомогою однієї шарнірно-нерухомої і однієї шарнірно-рухомої опори, а інша частина – за допомогою шарнірно-рухомої опори (рис. 8.2). З математичної точки зору ця ситуація подібна до попередньої, оскільки ми маємо справу з випадком 3+1.

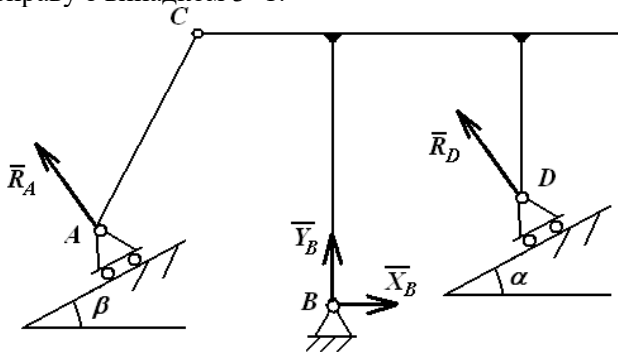


Рисунок 8.2 – Розрахункова схема (3+1)

Тут рекомендації залишаються такими ж, як і у попередньому випадку, тобто, для тієї частини, на якій одна невідома реакція в якості центру моментів обирати точку  $C$ , а для частини з трьома реакціями рівняння моментів складати відносно точки, в якій прикладені дві реакції.

**Третій випадок.** Обидві частини закріплені за допомогою шарнірно-нерухомих опор у точках  $A$  і  $B$  (рис. 8.3). Це ситуація, яку ми позначаємо, як  $2 + 2$ .

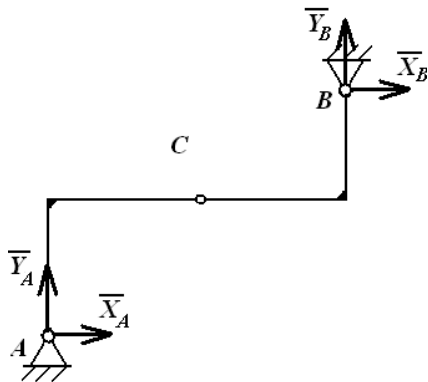


Рисунок 8.3 – Розрахункова схема (2+2)

В даному випадку (з математичної точки зору більш складному ніж два попередні) не вдається за допомогою вдалого вибору точки моментів отримати рівняння з однією невідомою, але, якщо для лівої частини рівняння моментів складати відносно точки  $A$ , а для правої – відносно точки  $B$ , а потім розглянути разом третє і шосте рівняння, то ми прийдемо до системи двох рівнянь з двома невідомими такого виду

$$a_1 X_c + b_1 Y_c = d_1; \quad a_2 X_c + b_2 Y_c = d_2; \quad (36)$$

з якої  $X_c$  і  $Y_c$  знаходяться очевидним способом. Після цього кожне з чотирьох рівнянь, що залишилися після виключення третього і шостого, будуть рівняннями з однією невідомою.

**Четвертий випадок.** Найбільш складною з математичної точки зору є ситуація, коли одна частина закріплена за допомогою шарнірно-нерухомих опори, а для кріплення іншої використовуються дві

шарнірно-рухомі опори (рис. 8.4 – загальна ситуація, рис. 8.5, 8.6, 8.7 – частинні випадки).

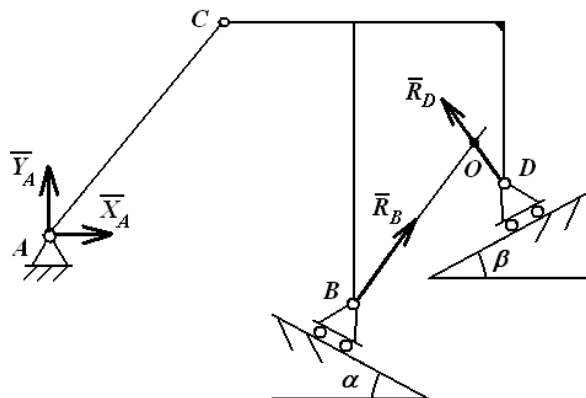


Рисунок 8.4 – Загальна ситуація

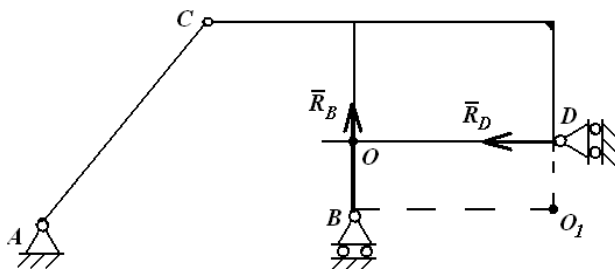


Рисунок 8.5 – Окремий випадок

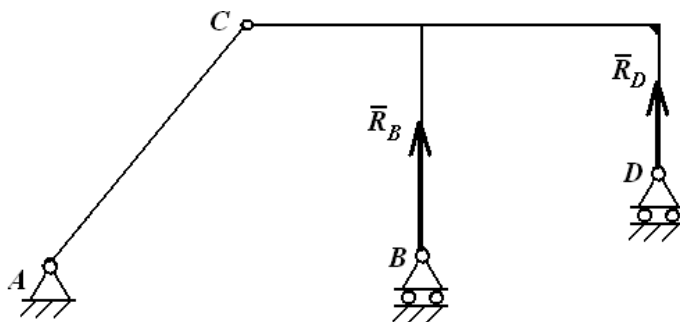


Рисунок 8.6 – Окремий випадок

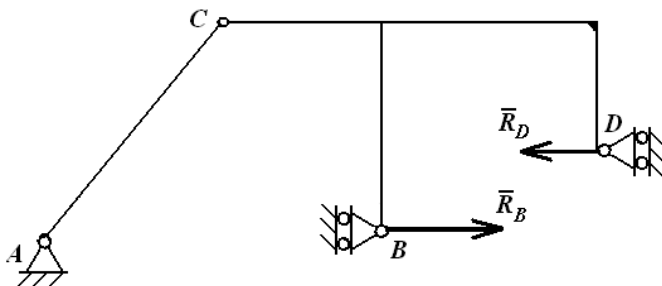


Рисунок 8.7 – Окремий випадок

В цьому випадку необхідно використовувати ідею, подібну до викладеної в третьому випадку, а саме третє рівняння (рівняння моментів для лівої частини) складати відносно точки  $A$ , а шосте рівняння (рівняння моментів для правої частини) обов'язково треба записувати відносно точки перетину напрямків реакцій в точках  $B$  і  $D$  (точки  $O$  на рис. 8.4, 8.5). При такому підході ми знову прийдемо для визначення реакцій в проміжному шарнірі  $C$  до системи виду (36) і в подальшому з використанням знайдених із цієї системи значень  $X_c$  і  $Y_c$  знаходження зовнішніх реакцій з інших чотирьох рівнянь не викликає складнощів.

**Увага!** На рис. 8.5, 8.6, 8.7 показані три частинних випадки наведеної на рис. 8.4 загальної ситуації. Зазначимо, що якщо змінити на рис. 8.5 площини, якими рухаються катки в точках  $B$  і  $D$  на протилежні за напрямком (горизонтальну і вертикальну і навпаки), то замість точки  $O$  рівняння моментів треба буде записати відносно точки  $O_1$ . В ситуації, наведеної на рис. 8.5, визначення плечей усіх сил відносно  $O$  або  $O_1$  не викликає проблем, на відміну від рис. 8.4, про який ми скажемо нижче. На рис. 8.6, невідома внутрішня реакція  $X_c$  відразу знайдеться із четвертого рівняння (рівняння в проекціях на горизонтальну вісь для правої частини). Після цього  $Y_c$  визначимо із третього рівняння (рівняння моментів для лівої частини, записане відносно точки  $A$ ). Для ситуації, наведеної на рис. 36  $Y_c$  знаходиться із п'ятого рівняння (рівняння рівноваги в проекціях на вертикальну вісь), а  $X_c$  з третього рівняння (рівняння моментів для лівої частини відносно точки  $A$ ).

**Увага!** Для ситуацій, показаних на рис. 8.4 визначення плечей реакцій  $X'_c$  і  $Y'_c$  відносно точки  $O$  (або  $O_1$ ) не викликає проблем, але у загальному випадку (рис. 8.4) необхідно використовувати знання з

геометрії з елементами три геометрії, зокрема про кути з взаємно перпендикулярними сторонами. Проілюструємо такі математичні викладки на прикладі правої частини конструкції, наведеної на рис. 8.8.

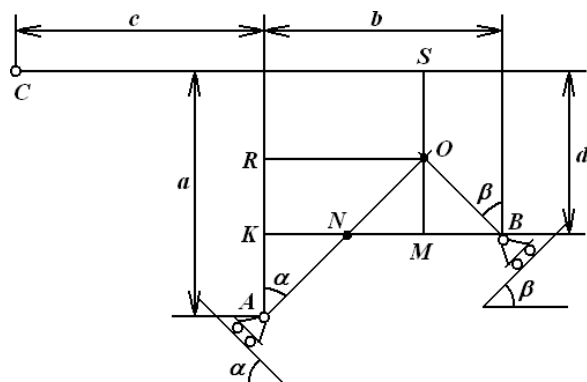


Рисунок 8.8 – Права частина конструкції

В прямокутному трикутнику  $AKN$  сторона  $AK = a - d$ , тоді

$$KN = AK \cdot \tan \alpha = (a - d) \tan \alpha.$$

В трикутнику  $NOB$   $\angle ONB = 90 - \alpha$ ,

$$\angle NBO = 90 - \beta, \quad \angle NOB = \alpha + \beta,$$

сторона

$$NB = b - (a - d) \tan \alpha.$$

Тоді за теоремою синусів можемо записати:

$$\frac{NB}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{ON}{\sin(90 - \beta)} = \frac{OB}{\sin(90 - \alpha)}.$$

Звідси, зокрема, знаходимо

$$ON = NB \cdot \frac{\sin(90 - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = NB \cdot \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Після цього з прямокутного трикутника  $NMO$  будемо мати:

$$NM = ON \cdot \cos(90 - \alpha) = NB \cdot \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

$$OM = ON \cdot \sin(90 - \alpha) = NB \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Тепер очевидним способом знаходимо необхідні нам відстані:

$$OR = KN + NM = (a - d) \tan \alpha + [b - (a - d) \tan \alpha] \cdot \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$OS = d - OM = d - [b - (a - d) \tan \alpha] \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Тепер моменти внутрішніх реакцій  $X'_c$  і  $Y'_c$  відносно точки  $O$  знаходяться так:

$$m_o(\bar{X}'_c) = X'_c \cdot OS; \quad m_o(\bar{Y}'_c) = Y'_c \cdot (c + OR).$$

Наприклад, для таких значень геометричних параметрів задачі  $a = 4\text{ м}$ ,  $b = 3\text{ м}$ ,  $d = 3\text{ м}$ ,  $c = 1\text{ м}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  за отриманими вище формулами будемо мати такі значення  $KN = 1\text{ м}$ ,  $NB = 2\text{ м}$ ,  $ON = 1,03\text{ м}$ ,  $NM = 0,72\text{ м}$ ,  $OM = 0,72\text{ м}$ ,  $OR = 1,72\text{ м}$ ,  $OS = 2,3\text{ м}$ .

**Увага!** В таких задачах для перевірки проведених за подібною схемою обчислень доцільно побудувати фрагмент конструкції в масштабі і знайти необхідні відстані графічно, зокрема для наведених тут значень параметрів на рис. 8.9 в масштабі 1:50 зображено праву частину нашої плоскої конструкції і легко переконатися у практичному збігу аналітичних і графічних результатів.

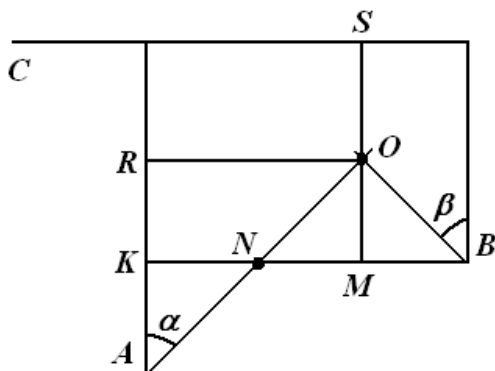


Рисунок 8.9 – Фрагмент конструкції

**Приклад 1.** Визначити зовнішні реакції, а також зусилля у проміжному шарнірі для плоскої складної конструкції, наведеної на рис. 8.9, якщо

$$F_1 = 20 \text{ кН}, F_2 = 26 \text{ кН}, \quad F_3 = 18 \text{ кН}, F_4 = 30 \text{ кН},$$

$$F_5 = 24 \text{ кН}, \quad F_6 = 16 \text{ кН}, \quad q_1 = 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \quad q_2 = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}},$$

$$M_2 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad \alpha_1 = 30^\circ, \quad \alpha_2 = 150^\circ, \quad \alpha_3 = 135^\circ,$$

$$\alpha_4 = 45^\circ, \quad \alpha_5 = 60^\circ, \quad a = 1 \text{ м}.$$

Розв'язання.

Покажемо в масштабі 1:100 (тобто в 1 см рисунка 1 м конструкції) плоску складену з двох частин конструкцію (рис. 8.10). При цьому кути  $\alpha_1 \div \alpha_5$  відкладаємо відразу такими, якими вони задані в умові задачі.

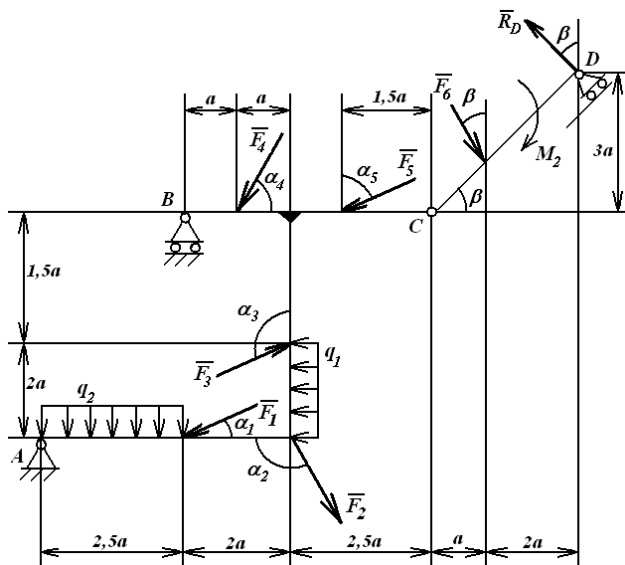


Рисунок 8.10 – Плоска складена з двох частин конструкція

Проведемо попередньо роботу, замінюючи розподілені навантаження з інтенсивністю  $q_1$  і  $q_2$  зосередженими силами, а усі похилі сили  $\bar{F}_1 \div \bar{F}_6$ , а також похилу реакцію в точці  $D$  розкладемо на горизонтальні і вертикальні складові, при цьому попередньо необхідно увести у розгляд допоміжний кут  $\beta$ , який очевидним способом знаходиться із рисунка і необхідний в нашій задачі для розкладання на складові сили  $\bar{F}_6$  і реакції  $\bar{R}_D$ . У нашій задачі

$$\tan \beta = \frac{3\alpha}{3\alpha} = 1 \rightarrow \beta = 45^\circ.$$

**Увага!** Щоб не перевантажувати рис. 8.10 результати вказаних операцій із силами наведемо на рис. 8.11, після розрізання конструкції через шарнір  $C$ , а результати обчислень наведемо нижче:

$$Q_1 = q_1 \cdot 2\alpha = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН}; \quad Q_2 = q_2 \cdot 2,5\alpha = 4 \cdot 2,5 = 10 \text{ кН}.$$

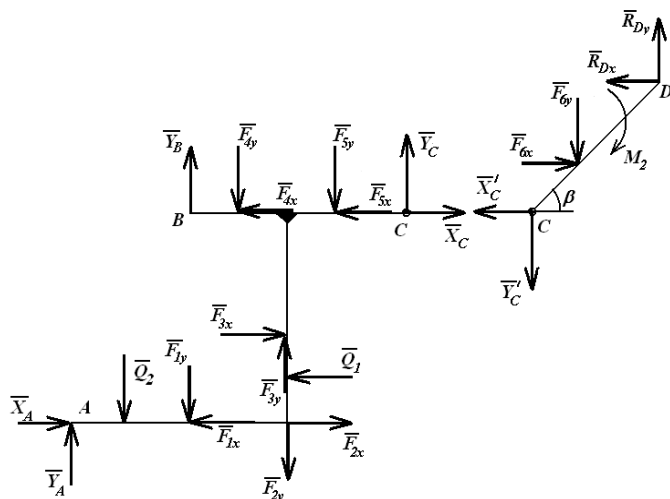


Рисунок 8.11 – Схема розрізання конструкції через шарнір C

$$|\bar{F}_{1x}| = F_1 \cos \alpha_1 = 20 \cdot 0,86 = 17,2 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{1y}| = F_1 \sin \alpha_1 = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{2x}| = F_2 \cos(180 - \alpha_2) = 26 \cdot 0,86 = 22,4 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{2y}| = F_2 \sin(180 - \alpha_2) = 26 \cdot 0,5 = 13 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{3x}| = F_3 \sin(180 - \alpha_3) = 18 \cdot 0,7 = 12,6 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{3y}| = F_3 \cos(180 - \alpha_3) = 18 \cdot 0,7 = 12,6 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{4x}| = F_4 \cos \alpha_4 = 30 \cdot 0,7 = 21 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{4y}| = F_4 \sin \alpha_4 = 30 \cdot 0,7 = 21 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{5x}| = F_5 \sin \alpha_5 = 24 \cdot 0,86 = 20,6 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{5y}| = F_5 \cos \alpha_5 = 24 \cdot 0,5 = 12 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{6x}| = F_6 \sin \beta = 16 \cdot 0,7 = 11,2 \text{ кН};$$

$$|\bar{F}_{6y}| = F_6 \cos \beta = 16 \cdot 0,7 = 11,2 \text{ кН}$$

$$|\bar{R}_{Dx}| = R_D \cdot \sin \beta = 0,7 R_D;$$

$$|\bar{R}_{Dy}| = R_D \cdot \cos \beta = 0,7R_D.$$

Складемо три умови рівноваги для лівої частини

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$$

$$X_A - |\bar{F}_{1x}| + |\bar{F}_{2x}| - Q_1 + |\bar{F}_{3x}| - |\bar{F}_{4x}| - |\bar{F}_{5x}| + X_C = 0; \quad (37)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$Y_A - Q_2 - |\bar{F}_{1y}| - |\bar{F}_{2y}| + |\bar{F}_{3y}| + Y_B - |\bar{F}_{4y}| - |\bar{F}_{5y}| + Y_C = 0; \quad (38)$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-Q_2 \cdot 1,25 - |\bar{F}_{1y}| \cdot 2,5 - |\bar{F}_{2y}| \cdot 4,5 + Q_1 \cdot 1 - |\bar{F}_{3x}| \cdot 2 +$$

$$+ |\bar{F}_{3y}| \cdot 4,5 + Y_B \cdot 2,5 + |\bar{F}_{4x}| \cdot 3,5 + + |\bar{F}_{4y}| \cdot 3,5 +$$

$$+ |\bar{F}_{5x}| \cdot 3,5 - |\bar{F}_{5y}| \cdot 5,5 - X_C \cdot 3,5 - Y_C \cdot 7 = 0. \quad (39)$$

**Увага!** Звернемо увагу на те, що тут ми отримали систему трьох рівнянь з п'ятьма невідомими  $X_A, Y_A, Y_B, X_C, Y_C$  і, зрозуміло, що звідси неможливо визначити невідомі, не доповнивши систему умовами рівноваги правої частини, які в даній задачі записуються так:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -X'_C + |F_{6x}| - |\bar{R}_{Dx}| = 0; \quad (40)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Y'_C - |\bar{F}_{6y}| + |\bar{R}_{Dy}| = 0; \quad (41)$$

$$\sum_{k=1}^n m_c(\bar{F}_k) = 0$$

$$-|\bar{F}_{6x}| \cdot 1 - |\bar{F}_{6y}| \cdot 1 - M_2 + |\bar{R}_{Dx}| \cdot 3 + |\bar{R}_{Dy}| \cdot 3 = 0. \quad (42)$$

**Увага!** Звернемо увагу на те, що складаючи в таких задачах рівняння моментів для правої частини відносно проміжного шарніру,

ми завжди отримаємо рівняння з однією невідомою, оскільки навіть у випадку похилої реакції шарнірно – рухомої опори  $|\bar{R}_{Dx}|$  і  $|\bar{R}_{Dy}|$  виражаються через одну невідому реакцію  $R_D$ . В даному випадку з врахуванням записаних вище виразів для  $|\bar{R}_{Dx}|$  і  $|\bar{R}_{Dy}|$  приходимо до такого рівняння:

$$3R_D(0,7 + 0,7) = |\bar{F}_{6x}| + |\bar{F}_{6y}| + M_2,$$

$$R_D = \frac{11,2 + 11,2 + 16}{4,2} = 9,1 \text{ кН.}$$

Тепер послідовно, рухаючись нашою системою у зворотному напрямку, знаходимо інші п'ять невідомих. Із (41) будемо мати:

$$Y'_c = Y_c = |\bar{R}_{Dy}| - |\bar{F}_{6y}| = 0,7 \cdot 9,1 - 11,2 = -4,8 \text{ кН.}$$

**Увага!** Знак мінус тут означає, що насправді сили  $\bar{Y}_c$  і  $\bar{Y}'_c$  мають напрямки, протилежні показаним на рис. 8.11. Але ми не будемо нічого змінювати на рисунку, а коли нам буде потрібно використовувати  $Y_c$  для знаходження інших реакцій, будемо брати його числове значення зі знаком мінус.

Із рівняння (40) знаходимо:

$$X'_c = X_c = |\bar{F}_{6x}| - |\bar{R}_{Dx}| = 11,2 - 0,7 \cdot 9,1 = 4,8 \text{ кН.}$$

Знак плюс тут означає, що показані на рис. 8.11 напрямки зусиль  $\bar{X}_c$  і  $\bar{X}'_c$  відповідають дійсним.

**Увага!** Після визначення  $X_c$  і  $Y_c$  із умов рівноваги правої частини бачимо, що третє рівняння для лівої частини дійсно треба складати відносно точки кріплення за допомогою шарнірно – нерухомої опори, оскільки тепер в рівнянні (39) ми маємо одну невідому  $Y_B$ , яку знаходимо так:

$$Y_B = \frac{1}{2,5} (1,25Q_2 + 2,5|\bar{F}_{1y}| + 4,5|\bar{F}_{2y}| - Q_1 + 2|\bar{F}_{3x}| - 4,5|\bar{F}_{3y}| -$$

$$- 3,5|\bar{F}_{4x}| - 3,5|\bar{F}_{4y}| - 3,5|\bar{F}_{5x}| + 5,5|\bar{F}_{5y}| + 3,5X_c - 7 \cdot Y_c) =$$

$$= \frac{1}{2,5} (12,5 + 25 + 58,5 - 12 + 25,2 - 56,7 - 73,5 +$$

$$+ 73,5 - 72,1 + 66 + 16,8 + 33,6) = 38,7 \text{ кН.}$$

Із (38) будемо мати:

$$\begin{aligned} Y_A &= Q_2 + |\bar{F}_{1y}| + |\bar{F}_{2y}| - |\bar{F}_{3y}| - Y_B + |\bar{F}_{4y}| + |\bar{F}_{5y}| - Y_C = \\ &= 10 + 10 + 13 - 12,6 - 38,7 + 21 + 12 + 4,8 = 19,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Із рівняння (37) знаходимо:

$$\begin{aligned} X_A &= |\bar{F}_{1x}| - |\bar{F}_{2x}| + Q_1 - |\bar{F}_{3x}| + |\bar{F}_{4x}| + |\bar{F}_{5x}| - X_C = \\ &= 17,2 - 22,4 + 12 - 12,6 + 21 + 20,6 - 4,8 = 31 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для перевірки складаємо три умови рівноваги для нерозрізаної в точці  $C$  конструкції і підставляємо у ці рівняння значення заданих силових факторів і значення знайдених зовнішніх реакцій. Якщо після такої підстановки ми тричі отримаємо тотожності виду  $0 = 0$ , то реакції знайдені правильно.

**Увага!** Оскільки для перевірки бажано, щоб у рівняння моментів увійшли усі чотири зовнішні реакції, то часто найбільш зручно обирати в якості центру моментів точку  $C$  (проміжний шарнір).

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$$

$$\begin{aligned} X_A - |\bar{F}_{1x}| + |\bar{F}_{2x}| - Q_1 + |\bar{F}_{3x}| - |\bar{F}_{4x}| - |\bar{F}_{5x}| + \\ + |\bar{F}_{6x}| - 0,7R_D = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Після підстановки сюди числових значень будемо мати:

$$31 - 17,2 + 22,4 - 12 + 12,6 - 21 - 20,6 + 11,2 - 6,4 = 0;$$

$$77,2 - 77,2 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$\begin{aligned} Y_A - Q_2 - |\bar{F}_{1y}| - |\bar{F}_{2y}| + |\bar{F}_{3y}| + Y_B - |\bar{F}_{4y}| - |\bar{F}_{5y}| - \\ - |\bar{F}_{6y}| + 0,7R_D = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

$$19,5 - 10 - 10 - 13 + 12,6 + 38,7 - 21 - 12 - 11,2 + 6,4 = 0;$$

$$77,2 - 77,2 \equiv 0.$$

$$\sum_{k=1}^n m_c(\bar{F}_k) = 0.$$

$$\begin{aligned} & X_A \cdot 3,5 - Y_A \cdot 7 + Q_2 \cdot 5,75 + |\bar{F}_{1y}| \cdot 4,5 - \\ & - |\bar{F}_{1x}| \cdot 3,5 + |\bar{F}_{2y}| \cdot 2,5 + |\bar{F}_{2x}| \cdot 3,5 - Q_1 \cdot 2,5 + \\ & + |\bar{F}_{3x}| \cdot 1,5 - |\bar{F}_{3y}| \cdot 2,5 - Y_B \cdot 4,5 + |\bar{F}_{4y}| \cdot 3,5 + |\bar{F}_{5y}| \cdot 1,5 - |\bar{F}_{6x}| \cdot 1 - \\ & - |\bar{F}_{6y}| \cdot 1 - M_2 + 0,7R_D \cdot 3 + 0,7 \cdot R_D \cdot 3 = 0. \quad (45). \\ & 31 \cdot 3,5 - 19,5 \cdot 7 + 10 \cdot 5,75 + 10 \cdot 4,5 - 17,2 \cdot 3,5 + 13 \cdot 2,5 + \\ & + 22,4 \cdot 3,5 - 12 \cdot 2,5 + 12,6 \cdot 1,5 - \\ & - 12,6 \cdot 2,5 - 38,7 \cdot 4,5 + 21 \cdot 3,5 + 12 \cdot 1,5 - 11,2 \cdot 1 - \\ & - 11,2 \cdot 1 - 16 + 4,2 \cdot 9,1 = 0. \\ & 108,5 - 136,5 + 57,5 + 45 - 60,2 + 78,4 + 32,5 - \\ & - 30 + 18,9 - 31,5 - 174,2 + 73,5 + 18 - \\ & - 22,4 - 16 + 38,2 = 470,8 - 470,9 \cong 0. \end{aligned}$$

Зазначимо, що невелика погрішність тут викликана тим, що ми свідомо обмежували розрахунки одним знаком після коми.

Оскільки рівняння (43), (44) і (45) при знайдених значеннях реакцій перетворюються у тотожності, то це означає, що задача розв'язана вірно.

**Приклад 2.** Визначити зовнішні реакції, а також зусилля у проміжному шарнірі для плоскої складеної конструкції, наведеної на рис. 8.12, якщо

$$\begin{aligned} F_1 &= 16 \text{ кН}, & F_2 &= 8 \text{ кН}, & F_3 &= 6 \text{ кН}, \\ F_4 &= 10 \text{ кН}, & F_5 &= 12 \text{ кН}, & F_6 &= 14 \text{ кН}, \\ q_1 &= 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, & q_2 &= 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \\ M_1 &= 12 \text{ кНм}, & \alpha_1 &= 45^\circ, & \alpha_2 &= 30^\circ, \\ \alpha_3 &= 150^\circ, & \alpha_4 &= 60^\circ, & \alpha_5 &= 30^\circ, a = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$

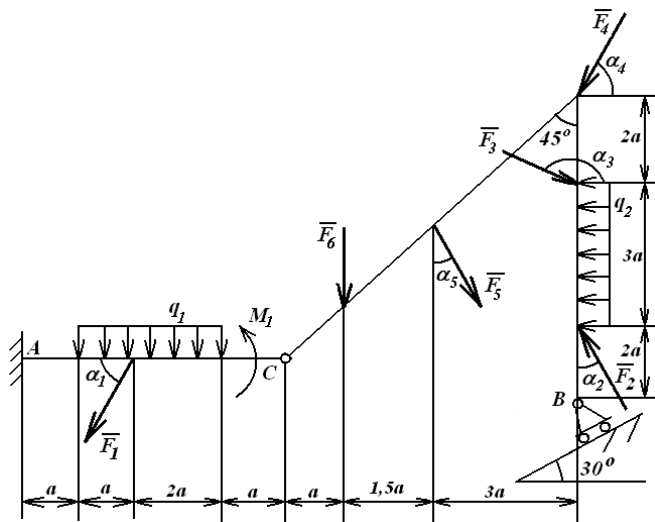


Рисунок 8.12 – Плоска складена конструкція

Розв'язання.

Покажемо в масштабі 1:100 задану плоску конструкцію, яка складається із двох частин: лівої  $AC$  і правої  $BC$ . Відмінність даної задачі від попередньої полягає в тому, що ліва частина закріплена в точці  $A$  за допомогою жорсткого защемлення, в якому виникають три невідомі реакції  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$  і  $M_A$ , у той час як і у першому прикладі в'язями для лівої частини були дві шарнірні опори: нерухома в точці  $A$  і рухома в точці  $B$ . У всьому іншому схема розв'язання даної задачі аналогічна ходу міркувань у попередньому випадку.

Зазначимо, що як і раніше, кути  $\alpha_1 \div \alpha_5$  відкладаємо такими, якими вони задані в умові задачі. Замінімо розподілені навантаження зосередженими силами, а усі похилі сили ( $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_5$ ) розкладемо на горизонтальні і вертикальні складові. За таким же правилом замість похилої реакції шарнірно-рухомої опори в точці  $B$  вводимо виражені через цю одну невідому її горизонтальну і вертикальну складові.

**Увага!** Щоб не перевантажувати рис. 8.12 результати таких операцій наведемо (рис. 8.13).

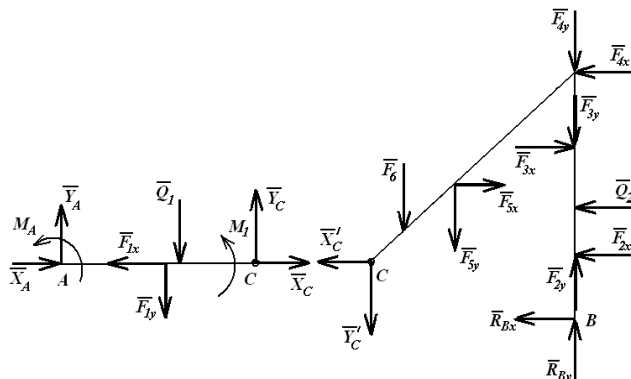


Рисунок 8.13 – Схема розрізання конструкції через внутрішній шарнір

На рис. 8.13, після розрізання конструкції через внутрішній шарнір  $C$ , а самі обчислення приводять до таких результатів

$$Q_1 = q \cdot 3a = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \text{ кН.}$$

$$Q_2 = q_2 \cdot 3a = 3 \cdot 3 = 9 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{1x}| = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 16 \cdot 0,7 = 11,2 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{1y}| = F_1 \cdot \sin \alpha = 16 \cdot 0,7 = 11,2 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{2x}| = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{2y}| = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 8 \cdot 0,86 = 6,9 \text{ кН}$$

$$|\bar{F}_{3x}| = F_3 \cdot \cos(180^\circ - 150^\circ) = 6 \cdot 0,86 = 5,2 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{3y}| = F_3 \cdot \sin(180^\circ - 150^\circ) = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{4x}| = F_4 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{4y}| = F_4 \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot 0,86 = 8,6 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{5x}| = F_5 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН.}$$

$$|\bar{F}_{5y}| = F_5 \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot 0,86 = 10,4 \text{ кН.}$$

$$|\bar{R}_{Bx}| = R_B \cdot \sin 30^\circ = 0,5R_B.$$

$$|\bar{R}_{By}| = R_B \cdot \cos 30^\circ = 0,86R_B.$$

Після цього умови рівноваги для кожної з двох частин записуються так.

Для лівої частини  $AC$  будемо мати:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - |\bar{F}_{1x}| + X_C = 0. \quad (46)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad (47)$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad M_A - |F_{1y}| \cdot 2 - Q_1 \cdot 2,5 + M_1 + Y_C \cdot 5 = 0. \quad (48)$$

**Увага!** Як і у попередньому випадку, для лівої частини ми отримали три рівняння з п'ятьма невідомими, тому необхідно починати знаходження реакцій із умов рівноваги правої частини  $BC$ , які записуються так

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ -X'_C + |\bar{F}_{5x}| - |\bar{F}_{4x}| + |\bar{F}_{3x}| - |\bar{F}_{2x}| - Q_2 - 0,5R_B = 0. \quad (49)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \\ -Y'_C - F_6 - |\bar{F}_{5y}| - |\bar{F}_{4y}| - |\bar{F}_{3y}| + |\bar{F}_{2y}| + 0,86R_B = 0. \quad (50)$$

$$\sum_{k=1}^n m_c(\bar{F}_k) = 0; \\ -F_6 \cdot 1 - |\bar{F}_{5x}| \cdot 2,5 - |\bar{F}_{5y}| \cdot 2,5 + |\bar{F}_{4x}| \cdot 5,5 - |\bar{F}_{4y}| \cdot 5,5 - |\bar{F}_{3x}| \cdot 3,5 - \\ - |\bar{F}_{3y}| \cdot 5,5 + Q_2 \cdot 2 + |\bar{F}_{2x}| \cdot 0,5 + |\bar{F}_{2y}| \cdot 5,5 - \\ - 0,5R_B \cdot 1,5 + 0,86R_B \cdot 5,5 = 0. \quad (51)$$

Із рівняння (51)  $R_B$  знаходимо так

$$R_B = \frac{1}{0,86 \cdot 5,5 - 0,75} (F_6 + 2,5 \cdot |\bar{F}_{5x}| + 2,5 \cdot |\bar{F}_{5y}| - 5,5 \cdot |\bar{F}_{4x}| + 5,5 \cdot |\bar{F}_{4y}| + 3,5 \cdot |\bar{F}_{3x}| + 5,5 \cdot |\bar{F}_{3y}| - Q_2 \cdot 2 - 0,5 \cdot |\bar{F}_{2x}| - 5,5 \cdot |\bar{F}_{2y}|) = \frac{51,3}{4} = 12,8 \text{ кН}.$$

Знак плюс тут означає, що повна реакція  $\bar{R}_B$  в точці  $B$  направлена вгору і вліво, тобто показані на рис. 8.13 складові вектора  $\bar{R}_B$  відповідають дійсним напрямкам.

Послідовно із (50) і (49) тепер знаходимо

$$Y_C = -F_6 - |\bar{F}_{5y}| - |\bar{F}_{4y}| - |\bar{F}_{3y}| + |\bar{F}_{2y}| + 0,86R_B = \\ = -14 - 10,3 - 8,6 - 3 + 6,9 + 0,86 \cdot 12,8 = -18 \text{ кН}.$$

Знак мінус тут означає, що  $\bar{Y}_C$  і  $\bar{Y}'_C$  на обох частинах рис. 42 насправді направлені протилежно попереднім нашим припущенням, при цьому ми нічого не будемо змінювати на рисунках, але в подальшому і в рівнянні (47), і в перевірці будемо підставляти значення  $Y_C$  зі знаком мінус.

Із (49) будемо мати

$$X_C = |\bar{F}_{5x}| - |\bar{F}_{4x}| + |\bar{F}_{3x}| - |\bar{F}_{2x}| - Q_2 - 0,5R_B = \\ = 6 - 5 + 5,2 - 4 - 9 - 6,4 = -13,2 \text{ кН}.$$

Відносно знаку ситуація відповідає сказаному вище для  $Y_C$ .

Тепер із рівняння (46) знаходимо

$$X_A = |\bar{F}_{1x}| - X_C = 11,2 - (-13,2) = 24,4 \text{ кН}.$$

Із рівняння (47) будемо мати

$$Y_A = |\bar{F}_{1y}| + Q_1 - Y_C = 11,2 + 6 - (-18) = 35,2 \text{ кН}.$$

Нарешті із рівняння (48) визначаємо реактивний момент

$$M_A = 2|\bar{F}_{1y}| + 2,5 \cdot Q_1 - M_1 - 5 \cdot Y_C = 22,4 + 15 - 12 + 90 = \\ = 115,4 \text{ кН}.$$

Для перевірки запишемо умови рівноваги цілої (без розрізу у точці  $C$ ) конструкції і підставимо в кожне з них знайдені значення зовнішніх реакцій.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$$

$$X_A - |\bar{F}_{1x}| + |\bar{F}_{5x}| - |\bar{F}_{4x}| + |\bar{F}_{3x}| - |\bar{F}_{2x}| - Q_2 - 0,5R_B = 0,$$

$$24,4 - 11,2 + 6 - 5 + 5,2 - 9 - 4 - 6,4 = 0$$

$$35,6 - 35,6 \equiv 0.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$Y_A - |\bar{F}_{1y}| - Q_1 - F_6 - |\bar{F}_{5y}| - |\bar{F}_{4y}| - |\bar{F}_{3y}| + |\bar{F}_{2y}| + 0,86R_B = 0$$

$$35,2 - 11,2 - 6 - 14 - 10,3 - 8,6 - 3 + 6,9 + 11 = 0$$

$$53,1 - 53,1 \equiv 0.$$

$$\sum_{k=1}^n m_c(\bar{F}_k) = 0;$$

$$M_A - Y_A \cdot 5 + |\bar{F}_{1y}| \cdot 3 + Q_1 \cdot 2,5 + M_1 - F_6 \cdot 1 - |\bar{F}_{5x}| \cdot 2,5 - |\bar{F}_{5y}| \cdot 2,5$$

$$+ |\bar{F}_{4x}| \cdot 5,5 - |\bar{F}_{4y}| \cdot 5,5 - |\bar{F}_{3x}| \cdot 3,5 - |\bar{F}_{3y}| \cdot 5,5 +$$

$$+ Q_2 \cdot 2 + |\bar{F}_{2x}| \cdot 0,5 + |\bar{F}_{2y}| \cdot 5,5 - 0,5R_B \cdot 1,5 + 0,86R_B \cdot 5,5 = 0.$$

$$115,4 - 176 + 33,6 + 15 + 12 - 14 - 15 - 25,8 - 47,3 + 27,5 -$$

$$-18,2 - 16,5 + 18 + 38 + 2 + 51,2 = 312,7 - 312,7 = 0.$$

Три тотожності означають, що розрахунки проведено вірно.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ**

1. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Частина 1. –Запоріжжя, 2007. – 140 с.
2. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І. Теоретична механіка. Ч. III. Додаткові матеріали до конспекту лекцій. – Запоріжжя, 2020. – 235 с.