**ПРО ЧИСЛО БОНДІВ 3-РЕБЕРНО ЗВ'ЯЗНОГО ГРАФА**

Глухов О.Д., Репета В.К.
*Національний авіаційний університет*

**ON THE NUMBER OF BONDS OF A 3-EDGE CONNECTED GRAPH**

*Abstract*. In this article considers some estimates for the number of *k*-bonds of 3-connected graphs.

В даній статті розглядаються оцінки числа *k*-бондів 3-реберно зв'язного графа.

Нехай $G = G_n$ - 3-реберно зв'язний граф на $n$ вершинах з множиною вершин $G^0$ і множиною ребер $G_n^1$ , $|G^0| = n$ , $|G^1| = m$, в якому допускаються кратні ребра і петлі; для кожного ребра $u$ позначимо через $\partial u$ множину його кінців (одну або дві вершини).

Для будь-якої множини $A \subset G^0$ графа $G$ також позначимо:

$J(A,G) = \{u \in G^1 : \partial u = \{a,b\}, a \in A, b \notin A\}$.

Якщо при цьому породжені підграфи $G[A]$ і $G[G^0 \setminus A]$ зв'язні, то $J(A,G)$ - називається бондом ( мінімальним по включенню розрізом)

графа $G$ , а підграф $G[A]$ -називається торцевим підграфом цього графа [1].

Бонд $J(A,G)$ називається *k*-бондом, якщо $|J(A,G)|=k$ ; граф $G[A]$ тоді називається торцевим *k*-підграфом графа $G$ , а множина $A$ вершин графа $G$ відповідно називається *k* -торцевою підмножиною. Мінімальну по включенню *k* -торцеву підмножину назвем примітивною. Ребро $u$ назвемо сингулярним, якщо воно належить деякому примітивному *k*-бонду, але не належить жодному не примітивному бонду.

Зауважимо, що для числа $\sigma_k(G)$ *k*-бондів *k*-реберно зв'язного графа відомі наступні оцінки [2]:

$$\sigma_k(G)=O(n^2),\ k=2j\ ;$$
$$\sigma_k(G)=O(n),\ k=2j-1.$$

Наступні твердження стосуються 3-реберно зв'язних графів.

Лема 1. Якщо $A, B$ 3-торцеві підмножини множини вершин 3-реберно зв'язного графа $G$ і $|A|\le|B|\le n/2$, то $A\subseteq B$ або $A\cap B=\varnothing$.

Лема 2. Якщо $A$ примітивна 3-торцева підмножина множини вершин 3-реберно зв'язного графа $G$ і $|A|>1$, то $G^1[A]\neq\varnothing$ і $\forall u\in G^1[A]$ $G\setminus u$ - також 3-реберно зв'язний граф.

Позначимо через $G^*$ граф, який отриманий з даного графа $G$ заміною кожної пари ребер $u_1, u_2$, таких , що $\partial u_1=\{a,c\}, \partial u_2=\{c,b\}, \rho(c)=2, \rho(a)>2, \rho(b)>2$, на одне ребро $u$, $\partial u=\{a,b\}$ ( ланцюг довжини 2 з вершиною степеня 2 заміняється одним ребром).

Лема 3. Якщо $A$ примітивна 3-торцева підмножина множини вершин 3-реберно зв'язного графа $G$ і $|A|=1$. $u\in J(A,G)$ і $u$ сингулярне ребро, то граф $(G\setminus u)^*$ - також 3-реберно зв'язний.

За допомогою лем 1-3 можна довести наступне твердження.

**Теорема 1**. Якщо $G_n$ - 3-реберно зв'язний граф на n вершинах, $n \geq 3, k \geq 3$ то

$$\sigma_k(G_n) \leq 2^{k-2} \begin{pmatrix} n \\ k-2 \end{pmatrix}.$$

**Доведення.** Зауважимо спочатку, що достатньо розглянути тільки критичні 3-реберно зв'язні графи, тобто такі графи, у яких видалення будь-якого ребра призводить до зменшення реберної зв'язності. Згідно з лемою 3 в критичних графах існує таке ребро *u*, що граф $(G \setminus u)^*$ буде 3-реберно зв'язним. Звідки випливає нерівність:

$$\sigma_k(G) \leq 2\sigma_{k-1}((G \setminus u)^*) + \sigma_k(G_u),$$

де $G_u$ - граф, що отриманий з графа $G$ стягуванням ребра *u* .

Далі індукція завершує доведення теореми.

Зауважимо, що для планарних 3-зв'язних графів мають місце такі оцінки [3 , 4 ] :

**Теорема 2.** Якщо $G$ - планарний 3-зв'язний граф, то

$$\sigma_3(G) \leq 4n/3.$$

**Теорема 3.** Якщо $G$ - простий ( без петель і кратних ребер) планарний 3-зв'язний граф, то при $k \geq 4$ має місце наступна нерівність:

$$\sigma_k(G) \leq \frac{1}{2k}(2m)^{k/2} .$$

Отримані результати дозволяють висунути наступні припущення щодо оцінки числа $\sigma_k(G)$ *k*-бондів довільного *3*-реберно зв'язного графа.

**Припущення 1.** Існує таке $\alpha < 1$ і така стала С що $\sigma_k(G_n) = Cn^{\alpha k}$ .

**Припущення 2.** Існує таке така стала С що $\sigma_k(G_n) = Cn^{k/2}$.

**Література**

1. Татт У. Т. Теория графов. – М.: Мир, 1968. -484с.

2. Диниц Е.А., Карзанов А.В., Ломоносов М.В. О структуре системы минимальных реберных разрезов графа. –Исследования по дискретной оптимизации, Москва, Наука, 1976, с. 290-306.

3. Глухов О.Д. Про зв'язність планарних pr- графів пуассонівського типу// II Український математичний конгрес, 27-29 серпня 2009 р.: тези доп. – К., 2009. – режим доступу: http://www.imath. kiev.ua/~congress2009.

4. Глухов О.Д Про планарні квазівипадкові графи пуассонівського типу. Моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць ІПМЕ НАНУ, вип.57, Київ, 2010, с. 10-12.