

УДК 314.116

Пожуєва І.С.¹, Петрик А.В.²

¹ доц. НУ «Запорізька політехніка»

² студ. гр. КНТ-519 НУ «Запорізька політехніка»

ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЦЬ У ПРОГНОЗУВАННІ ВІКОВОГО СКЛАДУ НАСЕЛЕННЯ ВІДНОСНО ЧАСУ

Досліджуючи зміни чисельності вікових груп, можна робити прогнози і виробляти шляхи можливого впливу на змінення ситуації у майбутньому. Розглянемо використання матриць у прогнозуванні вікового складу населення.

Розділимо все населення на рік з номером t на $N+1$ вікову групу $S_i(t)$ (по одному році в кожній групі). Тут $S_0(t)$ – число народжених протягом року з номером t і тих, хто залишився в живих. Дослідним шляхом визначаються коефіцієнти P_i дожиття в кожній з виділених груп, тобто коефіцієнти пересування з вікової групи з віком i років у групу з віком $i+1$ років. Також визначаються коефіцієнти F_i ймовірності народжуваності всередині кожної групи певного віку.

З використанням введених коефіцієнтів легко вивести наступні рівності.

Група нульового віку $S_0(t+1)$ утворюється з числа дітей, які народилися в кожній віковій групі. Безумовно, коефіцієнти народжуваності F_i дорівнюють нулю для деякої кількості молодших і старших вікових груп

$$S_0(t+1) = F_0 * S_0(t) + F_1 * S_1(t) + \dots + F_N * S_N(t). \quad (1)$$

Всі проміжні вікові групи виходять з груп попереднього віку $S_{i-1}(t)$ множенням на коефіцієнт дожиття P_{i-1}

$$S_i(t+1) = P_{i-1} * S_{i-1}(t), \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (2)$$

Найстарша вікова група $S_N(t+1)$ складається з людей даної групи, що дожили до нового року, і людей, що перейшли з групи попереднього віку

$$S_N(t+1) = P_{N-1} * S_{N-1}(t) + P_N * S_N(t). \quad (3)$$

Для зручності введемо наступні об'єкти - вектор-рядок $\sigma(t)$ стану вікових груп в році t

$$\sigma(t) = [S_0(t), S_1(t), \dots, S_N(t)], \quad (4)$$

та матрицю коефіцієнтів переходу π

$$\pi = \begin{bmatrix} F_0 & P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ F_1 & 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 \\ F_2 & 0 & 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{N-1} \\ F_N & 0 & 0 & 0 & \dots & P_N \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Тоді вікову ситуацію через рік можна визначити рівністю

$$\sigma(t+1) = \sigma(t) * \pi. \quad (6)$$

А через k років –

$$\sigma(t+1) = \sigma(t) * \pi^k. \quad (7)$$

Якщо розділити населення на більш крупні групи, то прийдеться ввести ще коефіцієнт Q_i – кількість людей, що вижили в даній віковій групі протягом року; і матриця набуде вигляду

$$\pi = \begin{bmatrix} F_0 & P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F_1 & Q_1 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F_2 & 0 & Q_2 & P_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{N-2} & 0 \\ F_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{N-1} & P_{N-1} \\ F_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q_N \end{bmatrix} \quad (8)$$

Тепер кількість людей в певній віковій групі виходить як сума тих, хто перейшов з попередньої групи, і тих, хто вижив в даній групі, але не перейшли в наступну

$$S_i(t+1) = P_{i-1} * S_{i-1}(t) + Q_i * S_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9)$$

Розглянемо наступний приклад: нехай все населення розподілене на п'ять груп - до року, від року до 24, від 25 до 44, від 45 до 64 і старше 65 років. Візьмемо за основу статистичні данні на 1 січня 2015 року по Запорізькій області, тоді

$$\sigma(0) = [18586, 412131, 537932, 508332, 288146].$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ 0.025 & 0.95 & 0.055 & 0 & 0 \\ 0.013 & 0 & 0.95 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.47 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

А через рік (1 січня 2016 року) ми отримаємо наступну демографічну ситуацію

$$\sigma(1) = [18586, 412131, 537932, 508332, 288146] * \begin{bmatrix} 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ 0.025 & 0.95 & 0.055 & 0 & 0 \\ 0.013 & 0 & 0.95 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.47 \end{bmatrix} = [17296, 409181, 533703, 500533, 293011] \quad (11)$$

На 1 січня 2017 року: $\sigma(2) = [15632, 405153, 529523, 493176, 292880]$,
на 1 січня 2018 року: $\sigma(3) = [14155, 399746, 525330, 486220, 290538]$,
на 1 січня 2019 року: $\sigma(4) = [12708, 393206, 521050, 479624, 287281]$,
на 1 січня 2020 року: $\sigma(5) = [11543, 385618, 516624, 473346, 283706]$.

З приведеного прикладу видно, що при зменшенні кількості народжуваності йде поступове зниження кількості людей по вікових групам.

Так як коефіцієнти в матриці підібрані випадковим чином, так щоб загальна кількість людей в році збігалася зі статистичними даними за цей рік, то результати мають наближені значення. Тому даний приклад лише показує застосовність матриць при прогнозуванні зміни вікових груп населення. Якщо припустити, що чисельність населення буде змінюватися по розглянутій схемі, тоді з часом кількість молодих мешканців буде зменшуватися відносно більш дорослого населення, що говорить про старіння нації.

Цей метод дозволяє робити прогноз на найближчі роки і показує проблеми у майбутньому.