СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

УДК 539.371

Анпілогов Д.І.
доц. НУ «Запорізька політехніка»

ПОСТУПАЛЬНА СКЛАДОВА РУХУ СТЕРЖНЯ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ УДАРІ

Розглядається крайова задача

$$\begin{cases} u'' = \frac{1}{c^2}\ddot{u} \\ u(x,0) = 0,\ \dot{u}(x,0) = 0,\ x \in [0, L] \\ u'(0,t) = -\frac{F_0}{ES} f(t),\ u'(L,t) = 0,\ t \in [0, +\infty) \end{cases}, \tag{1}$$

яка описує рух стержня при поздовжньому ударі силою $F(t) = F_0 f(t)$ з форм-фактором $f(t) = \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, $cT < L$. Аналіз розв'язку, отримуваного методом характеристик [1], виявляє наявність «накопичувального ефекту»: коливання u відбувається навколо положення рівноваги, яке за рахунок відсутності фактору стримування при $x = L$ в результаті силового впливу набуває поступального руху в напрямку осі Ox. Метою роботи є обчислення швидкості цього руху.

Заміною $u(x,t) = v(x,t) - \frac{(L-x)^2}{2L} \cdot \frac{F_0}{ES} f(t)$ граничні умови зводяться до однорідних:

$$\begin{cases} v'' = \frac{1}{c^2}\ddot{v} + \Phi(x,t) \\ v(x,0) = 0,\ \dot{v}(x,0) = b(x),\ x \in [0, L], \\ v'(0,t) = v'(L,t) = 0,\ t \in [0, +\infty) \end{cases} \tag{2}$$

$$\Phi(x,t) = \frac{F_0}{ESL} f(t) - \frac{(L-x)^2}{2L} \cdot \frac{F_0}{ESc^2} f''(t),\ b(x) = -\frac{(L-x)^2}{2L} \cdot \frac{F_0}{EST}. \tag{3}$$

Розв'язок, який задовольняє граничні умови, має вигляд

$$v(x,t) = A_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(t) \cos\frac{\pi n x}{L}. \tag{4}$$

Розкладаючи в ряд Фур'є за косинусами функцію $\Phi(x,t)$, отримуємо звичайні диференціальні рівняння для шуканих функцій $A_n(t)$, а функцію $b(x)$ – відповідні початкові умови задачі Коші. Зокрема, для нульової гармоніки маємо задачу Коші:

$$\begin{cases} A_0''(t) = -c^2\Phi(x,t) \\ A_0(0) = 0, \quad A_0'(0) = b_0 \end{cases} \tag{5}$$

де коефіцієнт Фур'є – $b_0 = \frac{1}{L}\int_0^L b(x)dx = -\frac{F_0 L}{6EST}$.

Одноразово інтегруючи, неважко отримати:

$$A_0'(t) = \frac{F_0}{ESL}\left(\frac{L^2}{6}\cdot\frac{t-T}{T^2} - c^2(t+T)\right)e^{-\frac{t}{T}} + \frac{F_0 c^2 T}{ESL}. \tag{6}$$

Очевидно, після закінчення перехідного процесу отримаємо:

$$\lim_{t\to+\infty} A_0'(t) = \frac{F_0 c^2 T}{ESL} = \frac{F_0 T}{\rho SL}, \tag{7}$$

де врахували відомий вираз $c^2 = \frac{E}{\rho}$ для швидкості поздовжніх хвиль.

Доведемо, що цей вираз збігається з виразом для швидкості V_C центру мас після завершення удару. Для цього достатньо записати закон збереження імпульсу в інтегральному (за часом) вигляді

$$\int_0^{+\infty} F(t)dt = mV_C, \tag{8}$$

де $m = \rho SL$ – маса стержня. Залишається обчислити цей інтеграл.

Ефекту «накопичення» переміщення u вдалось позбавитись, здійснюючи кінематичне перетворення Галілея і приймаючи швидкість V_C в якості переносної: $\tilde{u} = u - V_C t$.

Метод характеристик на кожному кроці дозволяє одночасно обчислювати як шукану функцію, так і її перші частинні похідні. Потрібно зауважити, що часова похідна підлягає перетворенню Галілея: $\dot{\tilde{u}} = \dot{u} - V_C$, в той час як просторова похідна залишається інваріантом: $\tilde{u}' = u'$. Ця остання, власне, і становить інтерес з точки зору аналізу напружено-деформованого стану.

Висновки. В роботі в одновимірній постановці сформульовано і розв'язано динамічну задачу про розповсюдження в стержні хвилі деформації при поздовжньому імпульсному впливі. Показано, що переміщення характеризуються «накопичувальним ефектом». Його можна позбавитись при переході до *ц*-системи відліку. Доведено, що переносна швидкість, отримувана при розв'язку крайової задачі методом Фур'є, узгоджується з законом збереження імпульсу в інтегральному (за часом) формулюванні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крылов, В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М. : Наука, 1977. – 400 с.