

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та розрахунково-графічні завдання

для самостійної роботи

студентів усіх спеціальностей

та усіх форм навчання

з дисципліни

“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ”

2013

Методичні вказівки та розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання з дисципліни “Теорія ймовірностей” / Укл.: Д. І. Анпілогов, Ю. В. Мастиновський, Т. І. Левицька. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 62 с.

Укладачі: Д. І. Анпілогов, к.т.н.
Ю. В. Мастиновський, доцент, к.т.н.
Т. І. Левицька, доцент, к.т.н.

Експерт
спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: В. С. Левада, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: І. С. Пожуєва, доцент, к.т.н.

Затверджено радою ФРЕТ
факультету ЗНТУ
Протокол № 8 від 23.05.13

Затверджено на засіданні кафедри
прикладної математики ЗНТУ
Протокол № 8 від 15.05.13

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Теоретичні відомості з теорії ймовірностей	5
1.1 Випадкові події та їх імовірності	5
1.1.1 Події та їх імовірності	5
1.1.2 Додавання і множення ймовірностей	6
1.1.3 Формула повної ймовірності. Формула Байєса ..	7
1.1.4 Схема Бернуллі незалежних випробувань	8
1.1.5 Локальна та інтегральна теореми Лапласа	8
1.2 Випадкові величини та їх розподіли	10
1.2.1 Два види випадкових величин	10
1.2.2 Функція розподілу і її властивості	10
1.2.3 Математичне сподівання і дисперсія	12
1.2.4 Відомі закони розподілу	14
2 Індивідуальні завдання	23
3 Розв'язування задач типового варіанту	47
4 Література	62

Вступ

Методичні вказівки складені у відповідності до програми з курсу теорії ймовірностей багатоступеневої підготовки фахівців і призначені для студентів заочної форми навчання, що навчаються на факультетах радіоприладобудівному та інформатики і обчислювальної техніки.

У вказівках приведені основні теоретичні відомості, які необхідні для виконання завдань. Наведено приклади розв'язування задач.

Індивідуальні завдання містять 20 варіантів, по 12 задач в кожному згідно з таблицею:

Вар.	Номери задач											
1	1	21	41	61	81	101	121	141	161	181	201	221
2	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182	202	222
3	3	23	43	63	83	103	123	143	163	183	203	223
4	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184	204	224
5	5	25	45	65	85	105	125	145	165	185	205	225
6	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186	206	226
7	7	27	47	67	87	107	127	147	167	187	207	227
8	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188	208	228
9	9	29	49	69	89	109	129	149	169	189	209	229
10	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230
11	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191	211	231
12	12	32	52	72	92	112	132	152	172	192	212	232
13	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193	213	233
14	14	34	54	74	94	114	134	154	174	194	214	234
15	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195	215	235
16	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196	216	236
17	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197	217	237
18	18	38	58	78	98	118	138	158	178	198	218	238
19	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	219	239
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3 ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Випадкові події та їх імовірності

1.1.1. Події та їх імовірності

Явище, яке відбувається під час проведення випробування, називають *подією*. Події позначають великими буквами латинського алфавіту: $A, B, C \dots$.

Подію, яка відбувається при досліді неминуче, називають *достовірною*. Подію, яка напевне не може відбуватися при випробуванні, називають *неможливою*. Подію, яка може відбутися або не відбутися в результаті випробування, називають *випадковою*.

Дві події називають *несумісними*, якщо настання однієї з них виключає можливість настання другої при тому самому випробуванні.

Події називаються *єдино можливими*, якщо при випробуванні одна з них і тільки одна настане обов'язково. Такі події утворюють *повну групу подій*.

Дві несумісні і єдино можливі події називаються *протилежними*. Подію, протилежну події A , позначають через $\bar{A}$.

Ймовірністю події A в класичному сенсі називають відношення кількості m сприятливих для цієї події результатів випробування до кількості n всіх можливих результатів випробування:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Відповідно, ймовірність достовірної події дорівнює 1, ймовірність неможливої події дорівнює 0, ймовірність випадкової події задовольняє подвійну нерівність $0 < p < 1$.

Нехай здійсненню деякої події A сприяють m результатів при n випробуваннях. Тоді здійсненню події $\bar{A}$ сприяють решта $(n - m)$ результатів. Тоді $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

Нехай d – частина області D , і випробування полягає в киданні точки всередину області D навмання. Нехай випадкова подія A – потрапляння точки всередину d . Ймовірністю події A в *геометричному сенсі* називають відношення

$$p(A) = \frac{S_d}{S_D},$$

де S_d , S_D – міри областей d , D (довжини або площі для одновимірного та двовимірного випадків відповідно).

Нехай деякий дослід повторено n разів, і при цьому випадкова подія A відбулась m разів. Відносною частотою події A називають відношення $w(A) = \frac{m}{n}$. Ймовірністю події A в *статистичному сенсі* називають границю

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} w(A).$$

1.1.2. Додавання і множення ймовірностей

Сумою двох подій A і B називають подію C , яка полягає в тому, що з подій A і B відбувається принаймні хоча б одна. Використовують позначення $C = A + B$.

Теорема додавання. Ймовірність суми двох *несумісних* подій дорівнює сумі їх імовірностей: $p(A + B) = p(A) + p(B)$.

Добутком двох подій A і B називають подію C , яка полягає в тому, що одночасно відбувається і подія A , і подія B . Використовують позначення $C = A \cdot B$. Дві події називаються

незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від настання або ненастання другої.

Теорема множення. Ймовірність добутку двох *незалежних* подій дорівнює добутку їх імовірностей: $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$.

1.1.3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай події A передують одна з n несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють *повну групу* (тобто подія $D = \sum_{i=1}^n H_i$ є достовірною). Оскільки $A = AD = \sum_{i=1}^n AH_i$, то має місце **формула повної ймовірності**:

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(H_i) p_{H_i}(A),$$

де $p(A)$ – ймовірність події A ;

$p(H_i)$ – ймовірність події H_i ;

$p_{H_i}(A)$ – умовна ймовірність події A за умови, що подія H_i відбулась.

Має місце також **формула Байєса**:

$$p_A(H_k) = \frac{p(H_k) p_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^n p(H_i) p_{H_i}(A)},$$

де $p_A(H_k)$ – ймовірність здійснення гіпотези H_k за умови, що подія A відбулась.

Формулу Байєса називають також формулою переоцінки ймовірностей гіпотез.

1.1.4. Схема Бернуллі незалежних випробувань

Нехай деяка подія A при одноразовому випробуванні відбувається з імовірністю p (і не відбувається з імовірністю $q = 1 - p$ відповідно). Схема Бернуллі полягає в багаторазовому проведенні досліду при постійному значенні p . Формула Бернуллі відповідає на запитання: «Чому дорівнює ймовірність того, що при n дослідах подія A відбудеться k разів ($0 \leq k \leq n$)?». **Формула Бернуллі** має вигляд: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – кількість сполучень із n елементів по k (кількість способів обрати k елементів із тих n елементів, які є в наявності). Зазначимо, що $\sum_{k=0}^n P_n(k) = 1$.

Число k_0 , при якому ймовірність $P_n(k_0)$ досягає найбільшого значення, задовольняє нерівність

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Його називають найімовірнішим числом появ події A .

1.1.5. Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Формула Бернуллі надає точне значення ймовірності k появ події A при n випробуваннях. Але при великих значеннях n , k використання цієї формули утруднене. Тому користуються іншими формулами, які надають наближене значення цієї ймовірності. По перше, такою наближеною формулою є **локальна теорема Лапласа**: якщо ймовірності p , q не є близькими ні до нуля, ані до одиниці, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функція Гаусса;

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальна теорема Лапласа дає тим більш точний результат, чим більше значення n .

По друге, якщо число p є близьким до нуля (A – рідкісна подія), то користуються **формулою Пуассона**:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Узагальнення постановки питання в схемі Бернуллі звучить так: «Знайти ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться не менше k' разів і не більше k'' разів». Відповідь на це питання надається **інтегральною теоремою Лапласа**:

$$P_n(k', k'') \approx \int_{x'}^{x''} \varphi(x) dx = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

де $x' = \frac{k' - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k'' - np}{\sqrt{npq}}$ – межі інтегрування;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \text{ – функція Лапласа.}$$

При розрахунках доцільно використовувати парність функції $\varphi(x)$ і непарність функції $\Phi(x)$, а також табличні значення цих функцій.

1.2 Випадкові величини та їх розподіли

1.2.1. Два види випадкових величин

Випадковою називають величину X , яка в результаті досліду може набувати того або іншого значення x . За множиною значень розрізняють *дискретні* та *неперервні* випадкові величини.

Дискретну випадкову величину X характеризують *законом розподілу*, який кожному значенню x_i зіставляє ймовірність $p_i = P(X = x_i)$ його реалізації. Таблицю, яка містить два рядки (в першому – значення x_i в порядку зростання, в другому – відповідні значення p_i) називають *рядом розподілу* дискретної випадкової величини. Кусочно-лінійний графік, побудований за цією таблицею, називають *багатокутником розподілу*.

Аналогом до закону розподілу у випадку неперервної випадкової величини є *щільність ймовірності* $f(x)$, яка дорівнює ймовірності dw потрапляння значення x всередину інтервалу dx в розрахунку на одиницю довжини цього інтервалу: $f(x) = \frac{dw}{dx}$.

1.2.2. Функція розподілу і її властивості

Подія $(X < x)$ є випадковою і тому характеризується ймовірністю $P(X < x)$. Функцію $F(x) = P(X < x)$ називають *інтегральною функцією розподілу* випадкової величини. Для дискретного випадку маємо

$$F(x) = \sum_{(i)} p_i .$$

Тут сумування відбувається за тими номерами i , для яких $x_i < x$.
Для неперервного випадку маємо

$$F(x) = \int dw = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi.$$

Тут інтегрування відбувається при $\xi < x$.

Властивості інтегральної функції розподілу:

- $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$;
- $F(x)$ є неспадною функцією;
- $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Властивості щільності ймовірності (її іноді називають *диференціальною функцією розподілу*):

- $f(x) \geq 0$;
- $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$;
- $f(x) = F'(x)$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Останню властивість називають *умовою нормування*. Зазвичай щільність імовірності задана кусочно. Тому при використанні цієї умови враховують аддитивність інтегралу Римана: інтервал $x \in (-\infty; +\infty)$ розбивають на окремі субінтервали, на яких щільність імовірності задана аналітично.

Дискретний аналог умови нормування $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ як імовірність достовірної події.

1.2.3. Математичне сподівання і дисперсія

Нехай X – дискретна випадкова величина, яка приймає значення x_i з імовірностями p_i відповідно. Математичним сподіванням цієї величини є постійне число

$$M(X) = \sum_{(i)} p_i x_i .$$

Властивості математичного сподівання:

- $M(C) = C$, де $C = \text{const}$;
- $M(CX) = CM(X)$, де $C = \text{const}$, X – випадкова величина;
- $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, де X, Y – випадкові величини;
- $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, де X, Y – незалежні випадкові величини.

Відхилення $(X - M(X))$ також є випадковою величиною, причому її математичне сподівання дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0 .$$

Тому мірою розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання вважають не відхилення, а дисперсію, яка за визначенням є

$$D = M(\{X - M(X)\}^2) .$$

Використовуючи властивості математичного сподівання, неважко отримати зручну формулу для обчислення дисперсії дискретної випадкової величини:

$$D(X) = M(X^2) - \{M(X)\}^2 ,$$

або в розширеному вигляді

$$D(X) = \sum_{(i)} p_i x_i^2 - \left(\sum_{(i)} p_i x_i \right)^2.$$

Властивості дисперсії:

- $D(C) = 0$, де $C = \text{const}$;
- $D(CX) = C^2 D(X)$, де $C = \text{const}$, X – випадкова величина;
- $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, де X , Y – незалежні випадкові величини.

Середнє квадратичне відхилення визначають як

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – незалежні випадкові величини, які мають однаковий закон розподілу і, відповідно, однакові математичне сподівання $a = M(X_i)$, дисперсію $D_0 = D(X_i)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma_0 = \sqrt{D_0}$. Нехай $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ – випадкова величина, яка є їх середнім арифметичним. Використовуючи властивості математичного сподівання і дисперсії, маємо:

$$\begin{aligned} M(Y) &= M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = \frac{1}{n} \cdot na = a, \end{aligned}$$

$$D(Y) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D_0 = \frac{1}{n^2} \cdot n D_0 = \frac{D_0}{n}.$$

Відповідно, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{D_0}{n}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

Нехай тепер X – неперервна випадкова величина, яка має щільність імовірності $f(x)$. Математичним сподіванням цієї величини є постійне число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Дисперсією неперервної випадкової величини за визначенням також є постійне число $D = M(\{X - M(X)\}^2)$. Зручна формула для обчислення дисперсії неперервної випадкової величини є такою ж: $D(X) = M(X^2) - \{M(X)\}^2$, або в розширеному вигляді:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2.$$

Середнє квадратичне відхилення знову визначають як

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

1.2.4. Відомі закони розподілу

Біноміальний розподіл є одним з розподілів **дискретної** випадкової величини та відповідає схемі незалежних випробувань Бернуллі. Дискретною випадковою величиною X є кількість k появ

деякої події A при n незалежних випробуваннях. Закон біноміального розподілу визначається формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Через $p \equiv P(A)$ позначена ймовірність появи події A при одноразовому випробуванні. Позначено також $q = 1 - p$. Математичне сподівання і дисперсія величини X дорівнюють

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Якщо в біноміальному розподілі кількість n виявляється дуже великою, а ймовірність p – дуже малою, то розрахунки за формулою Бернуллі ускладнюються. Тому користуються однією з асимптотик формули Бернуллі. Вважатимемо, що $n \rightarrow \infty$ і $p \rightarrow 0$, але в такий спосіб, що $\lambda \equiv np = \text{const}$. Маємо

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) \approx n^k,$$

бо цей добуток має k співмножників, які практично однакові (оскільки $p \ll 1$, то подія A є рідкісною, і тому $k \ll n$, отже $(n-1) \approx (n-2) \approx \dots \approx (n-(k-1)) \approx n$). Крім того,

$$q^{n-k} = e^{\ln q^{(n-k)}} = e^{(n-k)\ln q} \approx e^{n \ln(1-p)} \approx e^{-np}$$

(знову врахували, що $k \ll n$, тобто $n-k \approx n$, а також використали еквівалентність нескінченно малих $\ln(1+x) \sim x$, $x \rightarrow 0$, поклавши $x = -p$). Тоді

$$P_n(k) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{k!} \cdot n^k p^k e^{-np} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Цю асимптотику формули Бернуллі називають законом *розподілу Пуассона*, або ж законом *рідкісних подій*. Практично формулою Пуассона користуються, якщо величина $\lambda \equiv np = \text{const} < 10$. Випадковою величиною X знову є кількість k появ деякої події A при n незалежних випробуваннях. Математичне сподівання і дисперсія величини X дорівнюють

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Іще одним видом розподілу дискретної випадкової величини є *геометричний розподіл*. Він також виникає в умовах схеми незалежних випробувань, але випробування повторюються (можливо, нескінченну кількість разів) до першої появи події A . Випадковою величиною X є кількість m випробувань, які необхідно провести, щоб, нарешті, одержати появу події A . Нехай імовірність появи події A при одноразовому випробуванні дорівнює p , і $q = 1 - p$. Необхідно, щоб спочатку подія A не настала при $(m-1)$ випробуваннях поспіль, і щоб вона потім настала при m -му випробуванні. Отже,

$$p_m = pq^{m-1}.$$

Свою назву геометричний розподіл отримав за схожість з формулою m -го члену геометричної прогресії. Математичне сподівання і дисперсія величини X , розподіленої за геометричним законом, дорівнюють

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Наведемо тепер приклади законів розподілу **неперервних** випадкових величин. Неперервна випадкова величина X має *рівномірний розподіл* на відрізку $[a; b]$, якщо щільність імовірності

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Математичне сподівання і дисперсія неперервної величини X , рівномірно розподіленої на відрізку $[a; b]$, дорівнюють

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Неперервна випадкова величина X має *показниковий (експоненціальний) розподіл* з параметром λ , якщо щільність імовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання і дисперсія неперервної величини X , експоненціально розподіленої з параметром λ , дорівнюють

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Неперервна випадкова величина X має *нормальний розподіл* з параметрами a , σ , якщо щільність імовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математичне сподівання і дисперсія неперервної величини X , нормально розподіленої з параметрами a , σ , дорівнюють

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2.$$

Окремий частинний випадок виникає при $a = 0$, $\sigma = 1$. Одержуємо т.зв. *стандартний нормальний розподіл*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Цю функцію називають функцією Гаусса; її затабульовано.

Формула Бернуллі визначається двома незалежними параметрами n , p (і, звичайно, незалежним аргументом k). Вище було отримано закон Пуассона як одну з асимптотик формули Бернуллі в припущенні оберненої залежності між цими параметрами, $np = \lambda$. Покажемо, що нормальний розподіл є іншою асимптотикою формули Бернуллі (на випадок, коли $n \gg 1$, але ні p ані q не є близькими ні до нуля ані до одиниці). Застосовуючи відому асимптотичну формулу Стірлінга

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

маємо

$$\ln n! \sim \ln \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \right) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Оскільки $n \gg 1$, то збільшення n на одиницю є малим порівняно з n , тобто має сенс вести мову про похідну

$$\frac{d}{dn}(\ln n!) \sim \ln n + 1 - \frac{1}{2n} \approx \ln n.$$

Розглянемо розподіл $P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$. Нехай k_0 – точка максимуму функції $P(k)$. Очевидно, ця функція повільно змінюється в околі точки k_0 . Ще повільніше поводить себе функція

$$\ln P(k) = \ln n! - \ln k! - \ln(n-k)! + k \ln p + (n-k) \ln q.$$

Знайдемо точку максимуму k_0 з умови $\frac{d(\ln P)}{dk} = 0$. Вважаючи, що n, p, q є константами, отримуємо:

$$\frac{d(\ln P)}{dk} = -\ln k + \ln(n-k) + \ln p - \ln q = 0,$$

$$\ln \frac{p(n-k)}{kq} = 0,$$

$$k_0 = \frac{np}{p+q} = np.$$

Розвинення функції $\ln P(k)$ в ряд Тейлора в околі точки k_0 з утриманням малих аж до другого порядку включно має вигляд:

$$\begin{aligned} \ln P(k) = & \ln P(k) \Big|_{k=k_0} + \underbrace{\frac{d}{dk}(\ln P(k)) \Big|_{k=k_0}}_{=0} (k - k_0) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dk^2}(\ln P(k)) \Big|_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Враховано, що в точці максимуму перша похідна дорівнює нулю. Маємо

$$\frac{d^2(\ln P)}{dk^2} = \frac{d}{dk}(-\ln k + \ln(n-k)) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k},$$

$$\left. \frac{d^2 (\ln P)}{dk^2} \right|_{k=k_0} = -\frac{1}{k_0} - \frac{1}{n-k_0} = -\frac{1}{np} - \frac{1}{n-np} = -\frac{1}{np} - \frac{1}{n(1-p)} = -\left(\frac{1}{np} + \frac{1}{nq} \right) = -\frac{q+p}{npq} = -\frac{1}{npq}.$$

Тоді

$$\ln P(k) \approx \ln P(k_0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{npq} (k - k_0)^2.$$

Позначимо $npq = \sigma^2$. Тоді

$$P(k) = P(k_0) e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Константу $P(k_0)$ неважко отримати з застосуванням умови нормування щільності ймовірності. Достатньо використати відомий

інтеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Отже, нормальний розподіл є

асимптотикою формули Бернуллі при прямуванні кількості випробувань до нескінченності.

Нехай X – неперервна випадкова величина з щільністю ймовірності $f(x)$. Нехай $y = \psi(x)$ – деяка неперервна і монотонно зростаюча функція, причому похідна $\psi'(x) \neq 0$ при будь-яких значеннях x з області визначення. Очевидно, величина Y , яка приймає значення $y = \psi(x)$, також є неперервною випадковою величиною. Знайдемо щільність ймовірності $g(y)$ величини Y . Розглянемо інтервал $[x_0; x_0 + dx]$. Нехай подія A полягає в тому, що величина X прийняла значення, яке потрапляє в цей інтервал: $x \in [x_0; x_0 + dx]$. Ймовірність події A згідно з визначенням

щільності ймовірності дорівнює $dw(A) = f(x_0)dx$. Інтервалу $[x_0; x_0 + dx]$ відповідає інтервал $[y_0; y_0 + dy]$, причому $y_0 = \psi(x_0)$, $dy = \psi'_x|_{x=x_0} \cdot dx$. Нехай подія B полягає в тому, що величина Y прийняла значення, яке потрапляє в цей інтервал: $y \in [y_0; y_0 + dy]$. Ймовірність події B згідно з визначенням щільності ймовірності дорівнює $dw(B) = g(y_0)dy$. Оскільки $\psi(x)$ є неперервною і монотонно зростаючою, то події A і B або одночасно відбуваються, або одночасно не відбуваються. Тому $dw(A) = dw(B)$,

$$f(x_0)dx = g(y_0)dy,$$

$$f(x_0)dx = g(y_0)\psi'_x|_{x=x_0} \cdot dx,$$

$$f(x_0) = g(y_0)\psi'_x|_{x=x_0}.$$

Оскільки ми не обмежені при виборі точки x_0 , то $g(y) = \frac{f(x)}{\psi'_x(x)}$.

Нарешті, оскільки $\psi(x)$ є неперервною і монотонно зростаючою, то існує і є однозначною функція $x = \varphi(y)$, обернена до функції $y = \psi(x)$, причому її похідна $\varphi'(y) = \frac{1}{\psi'_x(x)}$. Остаточнo маємо

$$g(y) = \varphi'(y) \cdot f(\varphi(y)).$$

Вираз $f(\varphi(y))$ треба розглядати як складену функцію незалежної змінної y .

Зокрема, нехай X є неперервною випадковою величиною з

щільністю ймовірності $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Очевидно, функція

$\psi(x) = \frac{x-a}{\sigma}$ є неперервною і монотонно зростаючою як лінійна, причому $\psi'(x) = \frac{1}{\sigma} \neq 0$ при будь-яких x . Тому можна утворити нову випадкову величину $Y = \frac{X-a}{\sigma}$, яка буде приймати значення $y = \frac{x-a}{\sigma}$. Обернена функція $x = \varphi(y) = \sigma y + a$, її похідна $\varphi'(y) = \sigma$. Тоді шукана щільність імовірності величини Y дорівнює

$$g(y) = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((\sigma y + a) - a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Таким чином, за допомогою заміни змінних $Y = \frac{X-a}{\sigma}$ нормально розподілену величину X з будь-якими параметрами розподілу a , σ можна звести до випадкової величини Y , яка має стандартний нормальний розподіл (з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$).

2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в непофарбованій частині кола? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

2. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій двічі? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

3. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій лише в синє? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

4. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій лише в червоне? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

5. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а

частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередини кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій лише один раз? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

6. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередини кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій хоча б один раз? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

7. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередини кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій не більше ніж один раз? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

8. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередини кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій не менше ніж один раз? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

9. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередини кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій тільки в червоне або не пофарбованій зовсім? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

10. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x\sqrt{3}$, $x + y = 0$. Частину при $y \geq x\sqrt{3}$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y \geq 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині кола, пофарбованій двічі або не пофарбованій зовсім? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

11. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в непофарбованій частині квадрата? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

12. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій двічі? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

13. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій лише в синє? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

14. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій лише в червоне? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

15. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій лише один раз? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

16. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій хоча б один раз? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

17. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій не більше ніж один раз? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

18. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій не менше ніж один раз? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

19. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій тільки в червоне або не пофарбованій зовсім? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

20. Квадрат $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + 2y = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + 2y \geq 0$ – в синє. Всередині квадрата навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в частині квадрата, пофарбованій двічі або не пофарбованій зовсім? Усі положення точки всередині квадрата рівноможливі.

21. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників двоє одержали золоту медаль?

22. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників двоє одержали срібну медаль?

23. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників двоє одержали медаль?

24. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників двоє не одержали ніякої медалі?

25. З 60 випускників школи 4 учня одержали золоту медаль, і 5 – срібну. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних випускників один одержав золоту медаль, і один – срібну?

26. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що в мішень влучить тільки один стрілець?

27. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що в мішень влучить хоча б один стрілець?

28. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7.

Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що в мішень не влучить жоден стрілець?

29. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що мішень буде ураженою не менше ніж два рази?

30. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що перший стрілець влучить, дорівнює 0,7. Для другого і третього стрільців ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Яка ймовірність того, що мішень буде ураженою рівно два рази?

31. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого гатунку, 750 – першого гатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 2 будуть вищого гатунку?

32. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого гатунку, 750 – першого гатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 7 будуть першого гатунку?

33. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого гатунку, 750 – першого гатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей не буде бракованих?

34. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого гатунку, 750 – першого гатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 2 будуть вищого гатунку і одна буде бракованою?

35. В партії з 1000 деталей 200 деталей вищого гатунку, 750 – першого гатунку і 50 бракованих деталей. Для контролю навмання відібрано 10 деталей. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 7 будуть першого гатунку і одна буде бракованою?

36. В урні 20 кульок, з них 8 – білі. Навмання витягли дві кульки. Найдіть ймовірність того, що вони обидві – білі.

37. В групі 30 студентів, з них 20 – юнаки. В деканат визвали двох студентів. Найдіть ймовірність того, що вони обидві – юнаки.

38. В кафе 12 видів десертів, з них 8 – з горіхами. Відвідувачі замовили три різних десерти. Найдіть ймовірність того, що всі десерти – з горіхами.

39. Серед 80 дерев 20 – дуби. Спиляли 2 дерева. Найдіть ймовірність того, що обидва спиляні дерева – дуби.

40. Серед 100 болтів 6 – нестандартні. Навмання обрали 3 болти. Найдіть ймовірність того, що всі обрані болти – нестандартні.

41. На складі зберігається 1000 деталей, з яких 600 виготовлено на першій фабриці, і 400 – на другій. Перша фабрика випускає 20% деталей вищого гатунку, а друга – 10%. Яка ймовірність того, що навмання обрана деталь – вищого гатунку?

42. В першій урні знаходяться 2 білих кульки і 3 чорних, а в другій – 2 білих кульки і 8 чорних. Навмання витягли одну кульку. Яка ймовірність того, що вона біла?

43. В таксопарку 30 автомобілів «Ланос» і 20 автомобілів «Славута». Ймовірність того, що «Ланос» спізниться до замовника, дорівнює 2%, а «Славута» – 5%. Яка ймовірність того, що викликаний автомобіль спізниться?

44. Бабуся, йдучи в гості до онуки, може купити улюблені цукерки в «Білочці» (куди заїде з імовірністю 40%) або в «Крем-Розеті» (куди заїде з імовірністю 60%). Улюблені цукерки є в продажу в «Білочці» з імовірністю 70%, а в «Крем-Розеті» – з імовірністю 80%. Яка ймовірність того, що бабуся натрапить на улюблені цукерки?

45. Автомагнітола «Pioneer» за рік експлуатації може вийти з ладу з імовірністю 0,05, а автомагнітола «Alpine» – з імовірністю 0,03. На автосервісі встановлюють «Pioneer» з імовірністю 60% чи «Alpine» з імовірністю 40%. Яка ймовірність того,

що магнітола, встановлена на цьому автосервісі, вийде з ладу за рік експлуатації?

46. Школу №1 відремонтують до початку нового року з імовірністю 85%, а школу №2 – з імовірністю 95%. Батьки оформлять першокласника до школи №1 з імовірністю 30%, а до школи №2 – з імовірністю 70%. Яка ймовірність того, що першокласник навчатиметься у відремонтованій школі?

47. У спекотні дні холодильник в кафе не встигає охолоджувати напої, тому «Фанта» може виявитись охолодженою з імовірністю 0,65, а «Спрайт» – з імовірністю 0,8. Клієнт обирає «Фанту» з імовірністю 30%, а «Спрайт» – з імовірністю 70%. Яка ймовірність того, що замовлений напій буде охолодженим?

48. Турист відправиться у подорож літаком з імовірністю 35% чи автобусом з імовірністю 65%. Рівень сервісу задовольняє туриста в авіакомпанії з імовірністю 90%, а в компанії автоперевізника – з імовірністю 75%. Яка ймовірність того, що турист буде задоволений рівнем сервісу?

49. При користуванні пакетом «Щасливий дзвінок» плата за послуги мобільного зв'язку не перевищує три гривні на день з імовірністю 0,45, а при користуванні пакетом «Зателефонуйте мені» – з імовірністю 0,99. Абонент обирає пакет «Щасливий дзвінок» з імовірністю 0,7, або пакет «Зателефонуйте мені» – з імовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що витрати цього абонента не перевищують три гривні на день?

50. В спеціалізованому книжковому магазині є: 1000 книжок з історії, з них 200 – у твердій обкладинці; 500 книжок з філософії, з них 100 – у твердій обкладинці; 2000 книжок з психології, з них 1500 – у твердій обкладинці. Читач купує одну книгу. Ця книга – з історії з імовірністю 40%, з філософії з імовірністю 10% чи з психології з імовірністю 50%. Яка ймовірність того, що куплена книга – у твердій обкладинці?

51. На день народження батьки можуть подарувати дитині м'яку іграшку з імовірністю 35% чи конструктор з імовірністю 65%. М'яка іграшка може виявитись для дитини бажаною з імовірністю

30%, а конструктор – з імовірністю 60%. З якою імовірністю подарунок виявиться бажаним?

52. В новому районі 75% будинків – каркасно-монолітні, а 25% – з цегли. Каркасно-монолітний будинок має підземну парковку у 95% випадків, а будинок із цегли – у 40% випадків. Родина новоселів обирає будинок. Яка ймовірність того, що буде обраний будинок з підземною парковкою?

53. В першому фотоательє роблять 70% глянцевиx світлин і 30% матових, а в другому – 60% і 40% відповідно. Клієнт звертається до першого фотоательє з імовірністю 80%, чи до другого – з імовірністю 20%. Яка ймовірність того, що клієнт отримає глянцеvu світлину?

54. В групі 20 студентів, з яких 4 відмінники. Ймовірність розв'язати задачу для відмінника становить 0,9, а для решти студентів – 0,6. Яка ймовірність того, що випадково обраний студент розв'яже задачу?

55. Виробник отримує комплектуючі від двох постачальників, частки яких 40% та 60%. Дефектними є 2% деталей першого постачальника і 3% другого. Яка ймовірність того, що навмання обрана деталь є дефектною?

56. Є дві партії деталей з 10 і 12 штук, причому в кожній партії одна деталь є бракованою. З першої партії навмання обрали одну деталь і переклали в другу партію. Після цього з другої партії навмання витягли одну деталь. Яка ймовірність того, що деталь, витягнута з другої партії, є бракованою?

57. Ввечері по першому каналу транслюватимуть художній фільм-переможець конкурсу з імовірністю 60%, а по другому – з імовірністю 80%. Глядач увімкне перший канал у двох випадках із десяти, а другий – у восьми випадках із десяти. Яка ймовірність того, що глядач побачить фільм-переможець конкурсу?

58. Якщо остання задача тесту – з геометрії, то учень розв'яже її з імовірністю 0,7, а якщо з алгебри – то з імовірністю 0,8. Остання задача може виявитись задачею з геометрії з імовірністю 0,35. Яка ймовірність того, що учень розв'яже останню задачу?

59. Механічний годинник іде з придатною точністю з імовірністю 0,7, а електронний – з імовірністю 0,999. З партії 160 годинників, з яких 40 механічних, навання обрали один. Яка ймовірність того, що обраний годинник йтиме з придатною точністю?

60. Потужна лампа розжарювання може згоріти протягом року з імовірністю 6%, а малопотужна – з імовірністю 2%. В коробці було 24 лампи, в тому числі 16 – потужні. З них навання обрали одну. Яка ймовірність того, що вона згорить протягом року?

61. В першій урні знаходились 2 білих кульки і 3 чорних, а в другій – 2 білих кульки і 8 чорних. Навмання витягли одну кульку. Яка ймовірність того, що її витягли з першої урни, якщо вона виявилась білою?

62. В таксопарку 30 автомобілів «Ланос» і 20 автомобілів «Славута». Ймовірність того, що «Ланос» спізниться до замовника, дорівнює 2%, а «Славута» – 5%. Яка ймовірність того, що викликаний автомобіль є «Ланосом», якщо виявилось, що він спізнився?

63. Бабуся, йдучи в гості до онуки, може купити цукерки в «Білочці» (куди могла б зайти з імовірністю 40%) або в «Крем-Розеті» (куди могла б зайти з імовірністю 60%). Улюблені цукерки є в продажу в «Білочці» з імовірністю 70%, а в «Крем-Розеті» – з імовірністю 80%. Яка ймовірність того, що бабуся обрала «Білочку», якщо стало відомо, що вона натрапила на улюблені цукерки?

64. Автомагнітола «Pioneer» за рік експлуатації може вийти з ладу з імовірністю 0,05, а автомагнітола «Alpine» – з імовірністю 0,03. На автосервісі встановлюють «Pioneer» з імовірністю 60% чи «Alpine» з імовірністю 40%. Магнітола, встановлена на цьому автосервісі, вийшла з ладу за рік експлуатації. Яка ймовірність того, що це був «Pioneer»?

65. Школу №1 відремонтують до початку нового року з імовірністю 85%, а школу №2 – з імовірністю 95%. Батьки могли б оформити першокласника до школи №1 з імовірністю 30%, а до школи №2 – з імовірністю 70%. Яка ймовірність того, що першокласника оформили до школи №2, якщо виявилось, що вона відремонтована?

66. У спекотні дні холодильник в кафе не встигає охолоджувати напої, тому «Фанта» може виявитись охолодженою з імовірністю 0,65, а «Спрайт» – з імовірністю 0,8. Клієнт міг би обрати «Фанту» з імовірністю 30%, а «Спрайт» – з імовірністю 70%. Яка ймовірність того, що він обрав «Спрайт», якщо замовлений напій виявився охолодженим?

67. Турист міг би відправитись у подорож літаком з імовірністю 35% чи автобусом з імовірністю 65%. Рівень сервісу задовольняє туриста в авіакомпанії з імовірністю 90%, а в компанії автоперевізника – з імовірністю 75%. Яка ймовірність того, що турист відправився у подорож літаком, якщо відомо, що рівень сервісу його задовольнив?

68. При користуванні пакетом «Щасливий дзвінок» плата за послуги мобільного зв'язку не перевищує три гривні на день з імовірністю 0,45, а при користуванні пакетом «Зателефонуйте мені» – з імовірністю 0,99. Абонент міг би обрати пакет «Щасливий дзвінок» з імовірністю 0,7, або пакет «Зателефонуйте мені» – з імовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що він обрав пакет «Щасливий дзвінок», якщо відомо, що його витрати не перевищують три гривні на день?

69. В спеціалізованому книжковому магазині є: 1000 книжок з історії, з них 200 – у твердій обкладинці; 500 книжок з філософії, з них 100 – у твердій обкладинці; 2000 книжок з психології, з них 1500 – у твердій обкладинці. Читач купує одну книгу. Ця книга могла б бути з історії з імовірністю 40%, з філософії з імовірністю 10% чи з психології з імовірністю 50%. Яка ймовірність того, що куплена книга – з філософії, якщо відомо, що вона виявилась у твердій обкладинці?

70. На день народження батьки могли б подарувати дитині м'яку іграшку з імовірністю 35% чи конструктор з імовірністю 65%. М'яка іграшка може виявитись для дитини бажаною з імовірністю 30%, а конструктор – з імовірністю 60%. Яка ймовірність того, що дитині подарували конструктор, якщо відомо, що подарунок виявився бажаним?

71. В новому районі 75% будинків – каркасно-монолітні, а 25% – з цегли. Каркасно-монолітний будинок має підземну парковку у

95% випадків, а будинок із цегли – у 40% випадків. Родина новоселів обирає будинок. Яка ймовірність того, що обраний будинок є каркасно-монолітним, якщо стало відомо, що в ньому є підземна парковка?

72. В першому фотоательє роблять 70% глянцевиx світлин і 30% матових, а в другому – 60% і 40% відповідно. Клієнт міг би звернутися до першого фотоательє з ймовірністю 80%, чи до другого – з ймовірністю 20%. Яка ймовірність того, що він звернувся до першого фотоательє, якщо відомо, що отримана світлина є глянцевою?

73. В групі 20 студентів, з яких 4 відмінники. Ймовірність розв'язати задачу для відмінника становить 0,9, а для решти студентів – 0,6. Яка ймовірність того, що випадково обраний студент є відмінником, якщо стало відомо, що він розв'язав задачу?

74. Виробник отримує комплектуючі від двох постачальників, частки яких 40% та 60%. Дефектними є 2% деталей першого постачальника і 3% другого. Яка ймовірність того, що навання обрана деталь – від першого постачальника, якщо вона виявилась дефектною?

75. Є дві партії деталей з 10 і 12 штук, причому в кожній партії одна деталь є бракованою. З першої партії навання обрали одну деталь і переклали в другу партію. Після цього з другої партії навання витягли одну деталь. Яка ймовірність того, що деталь, перекладена з першої партії – не бракована, якщо деталь, витягнута з другої партії, виявилась бракованою?

76. Ввечері по першому каналу транслюватимуть художній фільм-переможець конкурсу з ймовірністю 60%, а по другому – з ймовірністю 80%. Глядач міг би увімкнути перший канал у двох випадках із десяти, а другий – у восьми випадках із десяти. Яка ймовірність того, що глядач увімкнув перший канал, якщо відомо, що він дивиться фільм-переможець конкурсу?

77. Якщо остання задача тесту – з геометрії, то учень розв'яже її з ймовірністю 0,7, а якщо з алгебри – то з ймовірністю 0,8. Остання задача могла б виявитись задачею з геометрії з ймовірністю 0,35. Яка ймовірність того, що остання задача насправді була задачею з геометрії, якщо відомо, що учень її розв'язав?

78. Механічний годинник іде з придатною точністю з імовірністю 0,7, а електронний – з імовірністю 0,999. З партії 160 годинників, з яких 40 механічних, навання обрали один. Яка ймовірність того, що обрали механічний годинник, якщо відомо, що він іде з придатною точністю?

79. Потужна лампа розжарювання може згоріти протягом року з імовірністю 6%, а малопотужна – з імовірністю 2%. В коробці було 24 лампи, в тому числі 16 – потужні. З них навання обрали одну, яка згоріла протягом року. Яка ймовірність того, що було обрано потужну лампу?

80. На складі зберігається 1000 деталей, з яких 600 виготовлено на першій фабриці, і 400 – на другій. Перша фабрика випускає 20% деталей вищого гатунку, а друга – 10%. Яка ймовірність того, що навання обрану деталь виготовлено на першій фабриці, якщо вона виявилась вищого гатунку?

81. У родині четверо дітей. Яка ймовірність того, що два з них – хлопчики? Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515.

82. Дівчинка добирає букет з п'яти білих та червоних троянд. Чергова квітка – біла з імовірністю 0,2. Яка ймовірність того, що в букеті буде одна біла троянда?

83. Стрілець стріляє в мішень 4 рази. Ймовірність влучити при кожному пострілі дорівнює 0,2. Що більш імовірно – влучити один раз чи не влучити жодного разу?

84. Що більш імовірно – виграти в шахи у рівноправного суперника три партії з чотирьох чи п'ять партій з восьми?

85. Юннат посадив 10 зерняток. Кожне зернятко може прорости з імовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що в досліді юнната проросте 4 зернятка?

86. Юннат посадив 10 зерняток. Кожне зернятко може прорости з імовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що в досліді юнната проросте 5 зерняток?

87. Протягом першого тижня літа в певній місцевості кожний день може виявитись похмурим з імовірністю 0,3. Яка

ймовірність того, що на першому тижні літа три дні будуть похмурими?

88. Монету підкидали 8 разів. Яка ймовірність того, що вона 5 разів упаде цифрою догори?

89. Гральну кістку підкидали 5 разів. Яка ймовірність того, у двох випадках з п'яти випадає по одному очку?

90. 3 колоди (32 карти) витягають карту і повертають її назад в колоду. Дослід повторюють чотири рази. Яка ймовірність того, що в двох випадках з чотирьох було витягнуто туза?

91. У 8 випадках із 10 порушення правил дорожнього руху на трасі полягає в порушенні швидкісного режиму. Яка ймовірність того, що з 8 порушників 6 порушили саме швидкісний режим?

92. У веселці 7 кольорів. Кожна з 5 дівчат обирає собі один колір. Яка ймовірність того, що дві дівчинки обрали собі зелений колір?

93. Серед сучасних мобільних телефонів 45% мають сенсорний екран. Яка ймовірність того, що серед 9 навмання обраних мобільних телефонів 4 мають сенсорний екран?

94. Всередині кола з центром в початку декартової системи координат навмання розташували 9 точок. Яка ймовірність того, що 2 з них знаходяться в першому квадранті?

95. Для роботи GPS-навігатор, який може вимірювати висоту без барометричного сенсора, має прийняти сигнали не менше ніж чотирьох супутників. В даній місцевості транслюють свої сигнали 14 супутників. Прийом сигналу від кожного з них відбувається з імовірністю 0,5. З якою ймовірністю навігатор буде працювати?

96. Історики музики розповідають, що недоброзичливці перед концертом підпиляли на скрипці Нікколо Паганіні три струни, але майстер зміг на четвертій струні відіграти весь концерт. Припустимо, ймовірність того, що струна обірветься, дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що обірвуться дві струни з чотирьох?

97. Кожен з шести учнів називає одну цифру, обрану ним навмання. Яка ймовірність того, що буде названо три непарні цифри?

98. Програма MiniTool Power Data Recovery може відновити файли на флеш-накопичувачі, навіть якщо його було відформатовано. За певних умов процес відновлення кожного файлу є успішним з імовірністю 0,8. На накопичувачі перед форматуванням було розміщено 14 файлів. Яка ймовірність того, що буде можливо відновити не менше 12 файлів?

99. Програма MiniTool Power Data Recovery може відновити файли на флеш-накопичувачі, навіть якщо його було відформатовано. За певних умов процес відновлення кожного файлу є успішним з імовірністю 0,8. На накопичувачі перед форматуванням було розміщено 12345 файлів. Яка найбільш імовірна кількість відновлених файлів?

100. При верстанні тринадцятої сторінки цих методичних вказівок виникла потреба 13 разів викликати редактор формул Microsoft Equation 3.0. Через потойбічні фактори збій в роботі цього редактору на день верстання (13 число) складав 0,13 при кожному виклику. Яка ймовірність того, що при верстанні цієї сторінки збій в роботі редактору мав місце два рази?

101-120. При одноразовому випробуванні деяка подія A може відбутися з імовірністю p . Проведено n випробувань. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться а) 2 рази; б) не більше ніж 2 рази. Скористайтесь такими даними:

101. $n = 2000, p = 0,00075.$

102. $n = 3000, p = 0,00067.$

103. $n = 1500, p = 0,00087.$

104. $n = 2500, p = 0,00060.$

105. $n = 1800, p = 0,00092.$

106. $n = 1300, p = 0,00153.$

107. $n = 2200, p = 0,00114.$

108. $n = 2600, p = 0,00108.$

109. $n = 3200, p = 0,00045.$

110. $n = 1400, p = 0,00143.$

111. $n = 1500, p = 0,00100.$

112. $n = 2250, p = 0,00088.$

113. $n = 1700, p = 0,00148.$

114. $n = 1850, p = 0,00125.$

115. $n = 1600, p = 0,00094.$

116. $n = 2100, p = 0,00095.$

117. $n = 2900, p = 0,00086.$

118. $n = 3300, p = 0,00074.$

119. $n = 2300, p = 0,00065.$

120. $n = 3100, p = 0,00058.$

121-140. При одноразовому випробуванні деяка подія A може відбутися з імовірністю p . Проведено n випробувань. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться k разів. Скористайтесь такими даними:

121. $n = 400, p = 0,3, k = 129.$

122. $n = 400, p = 0,3, k = 111.$

123. $n = 320, p = 0,35, k = 121.$

124. $n = 320, p = 0,35, k = 103.$

125. $n = 280, p = 0,45, k = 134.$

126. $n = 280, p = 0,45, k = 118.$

127. $n = 220, p = 0,6, k = 125.$

- 128. $n = 220, p = 0,6, k = 140.$
- 129. $n = 300, p = 0,5, k = 159.$
- 130. $n = 300, p = 0,5, k = 141.$
- 131. $n = 310, p = 0,36, k = 103.$
- 132. $n = 310, p = 0,36, k = 120.$
- 133. $n = 350, p = 0,75, k = 254.$
- 134. $n = 350, p = 0,75, k = 271.$
- 135. $n = 340, p = 0,65, k = 230.$
- 136. $n = 340, p = 0,65, k = 212.$
- 137. $n = 140, p = 0,4, k = 62.$
- 138. $n = 140, p = 0,4, k = 50.$
- 139. $n = 180, p = 0,7, k = 120.$
- 140. $n = 180, p = 0,7, k = 132.$

141-160. При одноразовому випробуванні деяка подія A може відбутися з імовірністю p . Проведено n випробувань. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться не менше ніж k' разів, але не більше ніж k'' разів. Скористайтесь такими даними:

- 141. $n = 500, p = 0,4, k' = 186, k'' = 220.$
- 142. $n = 500, p = 0,3, k' = 137, k'' = 168.$
- 143. $n = 400, p = 0,35, k' = 125, k'' = 161.$
- 144. $n = 400, p = 0,5, k' = 184, k'' = 222.$
- 145. $n = 450, p = 0,7, k' = 288, k'' = 319.$
- 146. $n = 450, p = 0,17, k' = 54, k'' = 80.$

- 147. $n = 350, p = 0,25, k' = 81, k'' = 108.$
- 148. $n = 350, p = 0,45, k' = 151, k'' = 181.$
- 149. $n = 420, p = 0,6, k' = 240, k'' = 273.$
- 150. $n = 420, p = 0,36, k' = 140, k'' = 172.$
- 151. $n = 220, p = 0,55, k' = 97, k'' = 127.$
- 152. $n = 220, p = 0,85, k' = 170, k'' = 191.$
- 153. $n = 280, p = 0,24, k' = 65, k'' = 72.$
- 154. $n = 280, p = 0,74, k' = 205, k'' = 212.$
- 155. $n = 340, p = 0,65, k' = 209, k'' = 222.$
- 156. $n = 340, p = 0,35, k' = 107, k'' = 120.$
- 157. $n = 510, p = 0,25, k' = 124, k'' = 135.$
- 158. $n = 510, p = 0,45, k' = 225, k'' = 238.$
- 159. $n = 440, p = 0,15, k' = 65, k'' = 69.$
- 160. $n = 440, p = 0,9, k' = 394, k'' = 398.$

161-180. Дискретна випадкова величина X може прийняти значення x_1 з імовірністю p_1 чи значення x_2 з імовірністю p_2 . Записати закон розподілу та знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X . Скористайтесь такими даними:

- 161. $x_1 = 5; p_1 = 0,1; x_2 = 45; p_2 = 0,9.$
- 162. $x_1 = 10; p_1 = 0,1; x_2 = 40; p_2 = 0,9.$
- 163. $x_1 = 15; p_1 = 0,1; x_2 = 35; p_2 = 0,9.$
- 164. $x_1 = 20; p_1 = 0,1; x_2 = 30; p_2 = 0,9.$

- 165. $x_1 = 22; p_1 = 0,1; x_2 = 28; p_2 = 0,9.$
- 166. $x_1 = 5; p_1 = 0,9; x_2 = 45; p_2 = 0,1.$
- 167. $x_1 = 10; p_1 = 0,9; x_2 = 40; p_2 = 0,1.$
- 168. $x_1 = 15; p_1 = 0,9; x_2 = 35; p_2 = 0,1.$
- 169. $x_1 = 20; p_1 = 0,9; x_2 = 30; p_2 = 0,1.$
- 170. $x_1 = 22; p_1 = 0,9; x_2 = 28; p_2 = 0,1.$
- 171. $x_1 = 45; p_1 = 0,02; x_2 = 55; p_2 = 0,98.$
- 172. $x_1 = 35; p_1 = 0,02; x_2 = 65; p_2 = 0,98.$
- 173. $x_1 = 30; p_1 = 0,02; x_2 = 70; p_2 = 0,98.$
- 174. $x_1 = 25; p_1 = 0,02; x_2 = 75; p_2 = 0,98.$
- 175. $x_1 = 20; p_1 = 0,02; x_2 = 80; p_2 = 0,98.$
- 176. $x_1 = 45; p_1 = 0,98; x_2 = 55; p_2 = 0,02.$
- 177. $x_1 = 35; p_1 = 0,98; x_2 = 65; p_2 = 0,02.$
- 178. $x_1 = 30; p_1 = 0,98; x_2 = 70; p_2 = 0,02.$
- 179. $x_1 = 25; p_1 = 0,98; x_2 = 75; p_2 = 0,02.$
- 180. $x_1 = 20; p_1 = 0,98; x_2 = 80; p_2 = 0,02.$

181-200. В умові нижче охарактеризовано ситуацію та названо дискретну випадкову величину. Розв'язавши відповідну задачу з теорії ймовірностей, для цієї величини записати закон розподілу та знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Скористайтесь такими описами:

181. Гральну кістку кидають два рази. Випадкова величина – сума очок, що випали.

182. Монету підкидають три рази. Випадкова величина – кількість підкидань, при яких випадає «цифра».

183. Таксі запізнюється на виклик з імовірністю 0,05. Здійснюють три виклики. Випадкова величина – кількість викликів, на які таксі запізнилось.

184. В урні 10 кульок, з яких три – білі. Дослід полягає в витяганні кульки і повертанні її назад в урну. Цей дослід повторюють тричі. Випадкова величина – кількість витягань білої кульки.

185. В урні 10 кульок, з яких три – білі. Дослід полягає в витяганні кульки без її повертання в урну. Цей дослід повторюють двічі. Випадкова величина – кількість витягань білої кульки.

186. Стрілець, маючи один патрон, стріляє у мішень. Якщо він не влучив, йому дають ще один патрон. Це відбувається до тих пір, поки він не влучить. Ймовірність попадання в мішень при кожному пострілі однакова і дорівнює 0,4. Випадкова величина – кількість зроблених пострілів.

187. У першій урні 6 білих кульок і 4 чорних, а у другій – 4 білих кульки і 6 чорних. Витягають дві кульки. Першу кульку витягають з першої урни. Якщо вона – біла, то другу кульку також витягають із першої урни, а якщо чорна – з другої. Випадкова величина – кількість білих кульок серед витягнутих.

188. Ймовірність того, що перший стрілець влучить у мішень, дорівнює 0,7, а другий – 0,8. Кожний стрілець робить по одному пострілу. Випадкова величина – кількість влучень у мішень.

189. Екзаменіційний білет містить два питання. Студент може відповісти на перше питання з імовірністю 0,8, а на друге – з імовірністю 0,9. Випадкова величина – кількість правильних відповідей.

190. Ймовірність того, що номер навання обраного абонета – контрактний, дорівнює 0,6. Навання обрали трьох абонентів. Випадкова величина – кількість контрактних номерів.

191. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5. В родині четверо дітей. Випадкова величина – кількість хлопчиків в родині.

192. Гральну кістку підкидають 3 рази. Випадкова величина – кількість підкидань, при яких випадає шість очок.

193. Кожен з чотирьох учнів називає одну цифру, обрану ним навмання. Випадкова величина – кількість названих парних цифр.

194. В урні – дуже велика кількість чорних і білих кульок в пропорції 2:3. Витягають 3 кульки. Випадкова величина – кількість чорних кульок серед витягнутих.

195. Ймовірність того, що у навмання обраного автомобіля двигун дизельний, дорівнює 0,45. Випадкова величина – кількість автомобілів с дизельними двигунами серед чотирьох навмання обраних автомобілів.

196. У кожній з двох коробок 8 шоколадних цукерок і 2 карамелі. Витягають по одній цукерці з кожної коробки. Випадкова величина – кількість шоколадних цукерок.

197. У 8 випадках із 10 порушення правил дорожнього руху на трасі полягає в порушенні швидкісного режиму. Випадкова величина – кількість порушників швидкісного режиму серед трьох порушників правил дорожнього руху.

198. Серед 10 квитків 2 – виграшні. Навмання обрано 3 квитка. Випадкова величина – кількість виграшних квитків серед обраних.

199. На момент перевірки кожен з трьох ліфтів деякого будинку з імовірністю 0,1 може виявитись таким, що вийшов із ладу. Випадкова величина – кількість ліфтів, які на момент перевірки вийшли з ладу.

200. На 15 картках написані числа 1, 2, ..., 15. Навмання витягають чотири картки. Випадкова величина – кількість карток, на яких число більше за 10, серед витягнутих карток.

201-220. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність імовірності $f(x)$. Побудувати графіки

функцій $F(x)$ і $f(x)$. Знайти ймовірність події $(X \in [a; b])$.
Скористайтесь такими даними:

$$201. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$202. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{1}{2}(x-1), & 1 \leq x < 3; \\ 1, & x \geq 3. \end{cases} \quad a = 1, b = 13.$$

$$203. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ \frac{1}{4}(x+2), & -2 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad a = -3, b = 1.$$

$$204. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ \frac{1}{3}(x-2), & 2 \leq x < 5; \\ 1, & x \geq 5. \end{cases} \quad a = 3, b = 4.$$

$$205. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi/2; \\ 1, & x \geq \pi/2. \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{3}.$$

$$206. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2; \\ \cos x, & -\pi/2 \leq x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad a = -\frac{\pi}{6}, b = 0.$$

$$207. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \sin 2x, & 0 \leq x < \pi/4; \\ 1, & x \geq \pi/4. \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{6}, b = 3.$$

$$208. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ e^x - 1, & 0 \leq x < \ln 2; \\ 1, & x \geq \ln 2. \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

$$209. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2x - x^2, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

$$210. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

$$211. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^3, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

$$212. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

$$213. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ (x-1)^2, & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad a = -3, b = \frac{3}{2}.$$

$$214. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}\sqrt{x}, & 0 \leq x < 4; \\ 1, & x \geq 4. \end{cases} \quad a = 1, b = 4.$$

$$215. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

$$216. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{8}x^3, & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = 1.$$

$$217. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \sin 4x, & 0 \leq x < \pi/8; \\ 1, & x \geq \pi/8. \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{16}, b = \frac{\pi}{12}.$$

$$218. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{10}(x^3 + x), & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$219. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}(x^3 + x), & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad a = 0, b = \frac{1}{2}.$$

$$220. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x - \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad a = 0, b = \frac{1}{2}.$$

221-240. Використовуючи отриману в попередній задачі щільність імовірності $f(x)$, обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X .

3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

1. Коло $x^2 + y^2 \leq 4$ розрізали на частини прямими $y = x$, $x + y\sqrt{3} = 0$. Частину при $y \geq x$ пофарбували в червоне, а частину при $x + y\sqrt{3} \geq 0$ – в синє. Всередині кола навмання обрали точку. Яка ймовірність того, що обрана точка знаходиться в непофарбованій частині кола? Усі положення точки всередині кола рівноможливі.

Розв'язання.

Очевидно, задані прямі утворюють кути $\frac{\pi}{4}$ і $-\frac{\pi}{6}$ з додатним напрямком осі Ox . Тому непофарбована частина є сектором з центральним кутом $\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{12}$ (рис. 1).

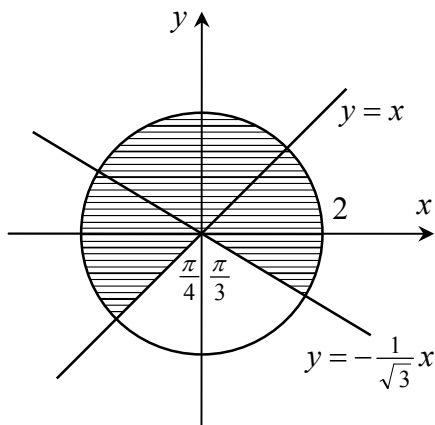


Рисунок 3.1 - Пояснення до задачі 1

Оскільки площа сектору пропорціональна до його центрального кута, то по геометричному підходу до визначення ймовірності маємо:

$$p = \frac{\frac{7\pi}{12}}{2\pi} = \frac{7}{24}.$$

Відповідь: $\frac{7}{24}$.

2. Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень кожний. Ймовірність того, що влучить перший стрілець, дорівнює 0,4, а другий – 0,45. Яка ймовірність того, що в мішень влучить хоча б один стрілець?

Розв'язання.

Нехай подія A полягає в тому, що перший стрілець влучив у мішень. За умовою $P(A) = p_1 = 0,4$. Нехай подія B полягає в тому, що другий стрілець влучив у мішень. За умовою $P(B) = p_2 = 0,45$. Промах першого стрільця (подія $\overline{A}$) відбувається з ймовірністю

$$q_1 = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p_1,$$

а другого (подія $\overline{B}$) – з ймовірністю

$$q_2 = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - p_2.$$

Оскільки події $\overline{A}$, $\overline{B}$ незалежні, то за теоремою про ймовірність добутку подій ймовірність двох одночасних промахів (подія $\overline{A} \cdot \overline{B}$) дорівнює

$$q = P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = q_1 q_2 = (1 - p_1)(1 - p_2).$$

Очевидно, ураження мішені хоча б одним стрільцем є подією, протилежною до події $\overline{A} \cdot \overline{B}$. Тоді шукана ймовірність

$$p = 1 - q = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - 0,6 \cdot 0,55 = 0,67.$$

Відповідь: 0,67.

3. Водій може заїхати на заправку АЗС-1 з імовірністю 40% або на заправку АЗС-2 з імовірністю 60%. Якщо він заправить автомобіль на АЗС-1, то буде задоволений якістю пального з імовірністю 30%, а якщо на АЗС-2 – то з імовірністю 95%. Яка ймовірність того, що водій буде задоволений якістю пального?

Розв’язання.

Умова задачі відповідає ситуації, коли застосовують формулу повної ймовірності.

Нехай H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що водій заправив автомобіль на АЗС-1, а H_2 – на АЗС-2. За умовою

$$p(H_1) = 0,4, \quad p(H_2) = 0,6.$$

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що водій задоволений якістю пального. Величина $p_{H_1}(A)$ є умовною ймовірністю того, що водій задоволений якістю пального за умови, що він заправляв автомобіль на АЗС-1, а $p_{H_2}(A)$ – на АЗС-2. За умовою

$$p_{H_1}(A) = 0,3, \quad p_{H_2}(A) = 0,95.$$

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} p(A) &= p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) = \\ &= 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,95 = 0,69. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,69.

4. Водій міг би заїхати на заправку АЗС-1 з імовірністю 40% або на заправку АЗС-2 з імовірністю 60%. Якщо він заправить автомобіль на АЗС-1, то буде задоволений якістю пального з імовірністю 30%, а якщо на АЗС-2 – то з імовірністю 95%. Яка ймовірність того, що водій заїхав на заправку АЗС-1, якщо відомо, що він залишився задоволеним якістю пального?

Розв’язання.

Умова задачі відповідає ситуації, коли застосовують формулу Байєса (формулу переоцінки ймовірностей гіпотез).

Нехай H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що водій заправив автомобіль на АЗС-1, а H_2 – на АЗС-2. За умовою

$$p(H_1) = 0,4, \quad p(H_2) = 0,6.$$

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що водій задоволений якістю пального. Величина $p_{H_1}(A)$ є умовною ймовірністю того, що водій задоволений якістю пального за умови, що він заправляв автомобіль на АЗС-1, а $p_{H_2}(A)$ – на АЗС-2. За умовою

$$p_{H_1}(A) = 0,3, \quad p_{H_2}(A) = 0,95.$$

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} p(A) &= p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) = \\ &= 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,95 = 0,69. \end{aligned}$$

Умовна ймовірність $p_A(H_1)$ гіпотези H_1 за умови, що подія A вже відбулась, за формулою Байєса дорівнює

$$p_A(H_1) = \frac{p(H_1) p_{H_1}(A)}{p(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,69} \approx 0,17.$$

Зауважимо, виявилось, що $p_A(H_1) \approx 0,17 \ll p(H_1) = 0,4$. Ми переоцінили ймовірність гіпотези H_1 у бік її зменшення. Справді, вже *після того*, як стало відомо, що водій задоволений якістю пального, ймовірність заїзду до АЗС-1 треба зменшити, бо на цій АЗС шанси залишитись вдоволеним значно нижчі.

Відповідь: $\approx 0,17$.

5. Ймовірність того що студент складе іспит з першого разу, дорівнює 0,75. Яка ймовірність того, що в групі з 8 студентів 7

студентів складуть іспит з першого разу? Чому дорівнює найімовірніше число студентів, які складуть іспит з першого разу?

Розв'язання.

Умова задачі відповідає схемі Бернуллі (схемі незалежних випробувань). Маємо: $n = 8$, $k = 7$, $p = 0,75$, $q = 1 - p = 0,25$. Тоді за формулою Бернуллі:

$$P_8(7) = \frac{8!}{7! \cdot 1!} \cdot 0,75^7 \cdot 0,25^1 = 2 \cdot 0,75^7 \approx 0,267.$$

Найбільш імовірна кількість k_0 успіхів при випробуваннях:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

$$8 \cdot 0,75 - 0,25 \leq k_0 \leq 8 \cdot 0,75 + 0,75,$$

$$5,75 \leq k_0 \leq 6,75,$$

$$k_0 = 6.$$

Відповідь: $\approx 0,267$; 6.

6. При транспортуванні ламка деталь може розбитися з імовірністю $p = 0,001$. Перевезено $n = 3000$ деталей. Знайти ймовірність того, що розбилося а) 6 деталей; б) не більше ніж 6 деталей; в) більше ніж 6 деталей.

Розв'язання.

Умова задачі відповідає схемі Бернуллі (схемі незалежних випробувань). Маємо: $n = 3000$, $p = 0,001$. Але використання формули Бернуллі утруднене через те, що число n є дуже великим. Проте, добуток $\lambda = np = 3000 \cdot 0,001 = 3 < 10$. Тому можна застосувати формулу Пуассона (формулу ймовірності рідкісних подій): $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Ймовірність того, що жодна деталь не розіб'ється ($k = 0$ – кількість тих, що розбилися):

$$P_n(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \frac{1}{e^3} = \frac{1}{e^3} \approx 0,04979.$$

Ймовірність того, що одна деталь розіб'ється ($k = 1$):

$$P_n(1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{e^3} = \frac{3}{e^3} \approx 0,14936.$$

Ймовірність того, що дві деталі розіб'ються ($k = 2$):

$$P_n(2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2e^3} = \frac{9}{2e^3} \approx 0,22404.$$

Ймовірність того, що три деталі розіб'ються ($k = 3$):

$$P_n(3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^3}{6e^3} = \frac{27}{6e^3} \approx 0,22404.$$

Ймовірність того, що чотири деталі розіб'ються ($k = 4$):

$$P_n(4) = \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^4}{24e^3} = \frac{81}{24e^3} \approx 0,16803.$$

Ймовірність того, що п'ять деталей розіб'ються ($k = 5$):

$$P_n(5) = \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^5}{120e^3} = \frac{243}{120e^3} \approx 0,10082.$$

Ймовірність того, що шість деталей розіб'ються ($k = 6$):

$$P_n(6) = \frac{\lambda^6}{6!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^6}{720e^3} = \frac{729}{720e^3} \approx 0,05041.$$

Події «розбилося нуль деталей», «розбилась одна деталь» і т.д. є несумісними. Тому за теоремою про ймовірність суми несумісних подій ймовірність того, що розбилося не більше ніж 6 деталей, дорівнює:

$$\begin{aligned} p &= P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(6) = \\ &= 0,04979 + 0,14936 + 0,22404 + 0,22404 + \\ &\quad + 0,16803 + 0,10082 + 0,05041 = 0,96649. \end{aligned}$$

Відповідно, ймовірність протилежної події (розбилося більше ніж 6 деталей)

$$q = 1 - p = 1 - 0,96649 = 0,03351.$$

Відповідь: а) $\approx 0,05041$; б) $\approx 0,96649$; в) $\approx 0,03351$.

7. При транспортуванні ламка деталей може розбитися з ймовірністю $p = 0,4$. Перевезено $n = 3750$ деталей. Знайти а) найбільш ймовірну кількість розбитих деталей; б) ймовірність того, що кількість розбитих деталей буде на три одиниці меншою за найбільш ймовірну кількість розбитих деталей.

Розв'язання.

Умова задачі відповідає схемі Бернуллі з параметрами: $n = 3750$, $p = 0,4$, $q = 1 - p = 0,6$. Для найбільш ймовірної кількості k_0 маємо:

$$\begin{aligned} np - q &\leq k_0 \leq np + p, \\ 3750 \cdot 0,4 - 0,6 &\leq k_0 \leq 3750 \cdot 0,4 + 0,4, \\ 1499,4 &\leq k_0 \leq 1500,4, \\ k_0 &= 1500. \end{aligned}$$

Використання формули Бернуллі утруднене через те, що n є дуже великим числом. В той же час, добуток

$$\lambda = np = 3750 \cdot 0,4 = 1500 \gg 10.$$

Отже, застосовувати асимптотику Пуассона не можна (подія не є рідкісною). Тому застосуємо локальну теорему Лапласа. Враховуючи, що за умовою $k = k_0 - 3$, маємо:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{3750 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 30,$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{(1500 - 3) - 3750 \cdot 0,4}{30} = -0,1.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$, враховуючи її парність, маємо

$$\varphi(x) = \varphi(-0,1) = \varphi(0,1) = 0,3970.$$

Тоді за локальною теоремою Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{0,3970}{30} \approx 0,0132.$$

Відповідь: а) 1500 ; б) $\approx 0,0132$.

8. При транспортуванні ламка деталей може розбитися з імовірністю $p = 0,5$. Перевезено $n = 400$ деталей. Знайти ймовірність того, що кількість розбитих деталей буде а) не меншою за $k' = 195$, але не більшою за $k'' = 210$; б) не меншою за $k' = 195$, але не більшою за $k'' = 390$.

Розв'язання.

Умова задачі відповідає схемі Бернуллі з параметрами: $n = 400$, $p = 0,5$, $q = 0,5$. Використання формули Бернуллі утруднене через те, що n є дуже великим числом. Крім того, застосування локальної теореми Лапласа є доволі громіздким, оскільки при обчисленні ймовірності події «розбито від 195 до 210 деталей» необхідно додавати ймовірності великої кількості несумісних подій «розбито 195 деталей», «розбито 196 деталей» і т.д.:

$$P_{400}(195, 210) = P_{400}(195) + P_{400}(196) + \dots + P_{400}(210).$$

Тому застосуємо інтегральну теорему Лапласа. Маємо:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 10,$$

$$x' = \frac{k' - np}{\sqrt{npq}} = \frac{195 - 400 \cdot 0,5}{10} = -0,5,$$

$$x'' = \frac{k'' - np}{\sqrt{npq}} = \frac{210 - 400 \cdot 0,5}{10} = 1.$$

За таблицею значень функції $\Phi(x)$, враховуючи її непарність, знаходимо:

$$\Phi(x') = \Phi(-0,5) = -\Phi(0,5) = -0,1915,$$

$$\Phi(x'') = \Phi(1) = 0,3413.$$

Тоді за інтегральною теоремою Лапласа шукана ймовірність

$$\begin{aligned} P_n(k', k'') &= P_{400}(195, 210) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \\ &= 0,3413 - (-0,1915) = 0,5328. \end{aligned}$$

В пункті б) аналогічно маємо:

$$x' = -0,5,$$

$$x'' = \frac{390 - 400 \cdot 0,5}{10} = 19.$$

Для значення $x'' = 19$ значення $\Phi(x'')$ в таблиці є відсутнім: зазвичай такі таблиці складають для значень аргумента $0 \leq x \leq 5$. З одного боку, функція $\Phi(x)$ є монотонно зростаючою, а з іншого боку – вона обмежена зверху, оскільки площа під графіком $\varphi(x)$ є скінченною. Отже, існує границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}$. За таблицею

$\Phi(5) = 0,499997$. Тому при практичних обчисленнях, якщо $x > 5$, то приймають $\Phi(x) = \Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$. Тоді за інтегральною теоремою Лапласа шукана ймовірність

$$\begin{aligned} P_n(k', k'') &= P_{400}(195, 390) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \\ &= 0,5 - (-0,1915) = 0,6915. \end{aligned}$$

Відповідь: а) 0,5328; б) 0,6915.

9. Дискретна випадкова величина X може прийняти значення $x_1 = 15$ з імовірністю $p_1 = 0,98$ чи значення $x_2 = 85$ з імовірністю $p_2 = 0,02$. Записати закон розподілу та знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Розв'язання.

Закон розподілу дискретної випадкової величини є таблицею з двох рядків: в першому записано можливі значення величини, а в другому – ймовірності того, що величина прийме ці значення. В нашому випадку ця таблиця є скінченною і має вигляд:

x_i	15	85
p_i	0,02	0,98

Математичне сподівання

$$M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0,02 \cdot 15 + 0,98 \cdot 85 = 83,6.$$

Дисперсія

$$\begin{aligned} D(X) &= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 - (M(X))^2 = \\ &= 0,02 \cdot 15^2 + 0,98 \cdot 85^2 - 83,6^2 = 96,04. \end{aligned}$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{96,04} = 9,8.$$

Відповідь: закон розподілу – див. табл.; $M(X) = 83,6$; $D(X) = 96,04$; $\sigma(X) = 9,8$.

10. 3 колоди (32 карти) навмання витягнуто три карти. Випадкова величина – кількість витягнутих тузів. Розв'язавши відповідну задачу з теорії ймовірностей, для цієї величини записати закон розподілу.

Розв'язання.

Кількість способів обрати три карти з тих 32 карт, що є в наявності: $m = C_{32}^3$. Обчислимо ймовірність того, що серед трьох витягнутих карт – жодного туза. Оскільки в колоді всього 4 тузи, то карт – не тузів 28 штук. Щоб серед обраних карт не було тузів, треба їх обирати з 28 карт. Кількість способів зробити це дорівнює $n = C_{28}^3$. Шукана ймовірність

$$p_0 = \frac{n}{m} = \frac{28!}{3! \cdot 29!} \cdot \frac{26 \cdot 27 \cdot 28}{32!} = \frac{13 \cdot 9 \cdot 7}{10 \cdot 31 \cdot 4} = \frac{819}{1240}.$$

Обчислимо ймовірність того, що серед трьох витягнутих карт – один туз. Відповідно, дві карти – не тузи. Отже, треба обирати одну карту з 4 і незалежно від цього ще дві з 28. Шукана ймовірність

$$p_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_{28}^2}{C_{32}^3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{28!}{2! \cdot 26!} \cdot \frac{3! \cdot 29!}{32!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 28}{30 \cdot 31 \cdot 32} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 14}{10 \cdot 31 \cdot 4} = \frac{378}{1240}.$$

Обчислимо ймовірність того, що серед трьох витягнутих карт – два тузи. Відповідно, одна карта – не туз. Отже, треба обирати дві карти з 4 і незалежно від цього ще одну з 28. Шукана ймовірність

$$p_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_{28}^1}{C_{32}^3} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{28!}{1! \cdot 27!} \cdot \frac{3! \cdot 29!}{32!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 28 \cdot 2 \cdot 3}{30 \cdot 31 \cdot 32} = \frac{14 \cdot 3}{10 \cdot 31 \cdot 4} = \frac{42}{1240}.$$

Обчислимо ймовірність того, що серед трьох витягнутих карт – усі тузи. Отже, треба обирати три карти з 4. Шукана ймовірність

$$p_3 = \frac{C_4^3}{C_{32}^3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{3! \cdot 29!}{32!} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{30 \cdot 31 \cdot 32} = \frac{1}{10 \cdot 31 \cdot 4} = \frac{1}{1240}.$$

Отже, шуканий закон розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{819}{1240}$	$\frac{378}{1240}$	$\frac{42}{1240}$	$\frac{1}{1240}$

Зробимо перевірку: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \frac{819+378+42+1}{1240} = 1.$

Відповідь: закон розподілу – див. табл.

11. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{16}x^2, & 0 \leq x < 4; \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Знайти щільність імовірності $f(x)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$. Знайти ймовірність події $(X \in [a; b])$, де $a = \frac{1}{2}$, $b = 1.$

Розв'язання.

Щільність імовірності знайдемо, диференціюючи функцію $F(x)$ на кожній ділянці окремо:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Графіки цих функцій схематично зображено на рис. 2.

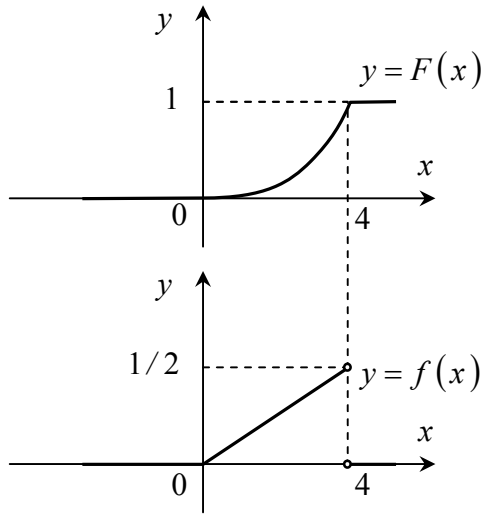


Рисунок 3.2 - Пояснення до задачі 11

Ймовірність події $(X \in [a; b])$ знайдемо як різницю:

$$P(X \in [a; b]) = F(b) - F(a) = \frac{1}{8} \cdot 1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Відповідь: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 4; \\ 0, & x > 4; \end{cases} \quad P(X \in [a; b]) = \frac{1}{16}; \quad \text{див.}$

графіки в тексті.

12. Неперервна випадкова величина X задана щільністю імовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Обчислити математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$ випадкової величини X .

Розв'язання.

Оскільки щільність імовірності задано кусково, використовуючи аддитивність інтегралу Рімана, маємо:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^4 x f(x) dx + \int_4^{+\infty} x f(x) dx = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx}_{=0} + \int_0^4 x f(x) dx + \underbrace{\int_4^{+\infty} x \cdot 0 dx}_{=0} = \\ &= \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8} x dx = \frac{x^3}{24} \Big|_0^4 = \frac{64}{24} - \frac{0}{24} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Зауважимо, отримане значення збігається з абсцисою центру мас трикутника на рис. 2 (складає дві третини довжини його горизонтального катету).

Аналогічно маємо

$$\begin{aligned}
 D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \{M(X)\}^2 = \\
 &= \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{8} x dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{x^4}{32} \Big|_0^4 - \frac{64}{9} = \\
 &= \frac{256}{32} - \frac{0}{32} - \frac{64}{9} = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $M(X) = \frac{8}{3}$, $D(X) = \frac{8}{9}$.

4 ЛІТЕРАТУРА

1 Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. Пособие для втузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2002.

2 Микулик Н.А., Рейзина Г.Н. Руководство к решению технических задач по теории вероятностей и математической статистике. Под ред. Е.И. Гурского. – Минск, “Вышэйш. школа”, 1977.

3 Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Минск, “Вышэйш. школа”, 1975.

4 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. – Изд. 7-е, стер. – М.: Высш. шк., 2001.

5 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 5-е, стер. – М.: Высш. шк., 2001.

6 Коноваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1973.