

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ
до контрольних робіт з вищої математики
(розділи: кратні інтеграли, елементи теорії поля,
теорія функції комплексної змінної, операційне
числення)
для студентів ФРЕТ та ФКНТ
заочної форми навчання**

2015

Методичні вказівки та розрахунково-графічні завдання до контрольних робіт з вищої математики (розділи: кратні інтеграли, елементи теорії поля, теорія функції комплексної змінної, операційне числення) для студентів ФРЕТ та ФКНТ заочної форми навчання./ Укл.: Т.І.Левицька, Г.А.Шишканова, І.А.Пожуєва. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2015. – 86 с.

Містить розрахунково-графічні завдання, теоретичні відомості та приклади виконання завдань з курсу “Вища математика” за темами: кратні інтеграли, елементи теорії поля, теорія функції комплексної змінної, операційне числення для студентів ФКНТ та ФРЕТ заочної форми навчання.

Укладачі: Т.І. Левицька, доцент, к.т.н.
Г.А. Шишканова, доцент, к.ф.-м.н.
І.С. Пожуєва, доцент, к.т.н.

Експерт: Кабак В.С., Касьян М.М.

Рецензент: Мастиновський Ю.В., доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Т.І. Левицька, доцент, к.т.н.

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
Протокол № 6 від 28.01.15

ЗМІСТ

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.....	4
1.1 Подвійний інтеграл.....	4
1.2 Криволінійний інтеграл.	8
1.3 Теорія поля.	11
2 ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.....	18
2.1 Комплексні числа та дії над ними.....	18
2.2 Основні елементарні функції комплексної змінної.....	23
2.3 Аналітичні функції.....	26
2.4 Інтегрування функції комплексної змінної.....	27
2.5 Інтегральна формула Коші.....	31
2.6 Ряди Тейлора та Лорана.....	33
2.7 Нулі аналітичної функції.....	40
2.8 Ізольовані особливі точки.....	41
2.9 Лишки.....	42
3 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ.....	45
3.1 Визначення перетворення Лапласа. Оригінал та зображення функції.....	45
3.2 Властивості перетворення Лапласа.....	47
3.3 Знаходження оригінала по зображенню.....	52
3.4 Розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами....	55
4 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ.....	57
4.1 Завдання 1.....	57
4.2 Завдання 2.....	61
4.3 Завдання 3.....	63
4.4 Завдання 4.....	64
4.5 Завдання 5.....	67
4.6 Завдання 6.....	68
4.7 Завдання 7.....	70
4.8 Завдання 8.....	71
4.9 Завдання 9.....	73
4.10 Завдання 10.....	73
4.11 Завдання 11.....	74
4.12 Завдання 12.....	75
4.13 Завдання 13.....	78
4.14 Завдання 14.....	81
Контрольні питання.....	83
Література.....	86

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

1.1 Подвійний інтеграл

Приклад 1.1

Змінити порядок інтегрування в інтегралі:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x; y) dy$$

Розв'язок:

. Область інтегрування D обмежена лініями $x = -1$; $x = 1$, $y = -\sqrt{1-x^2}$; $y = 1-x^2$

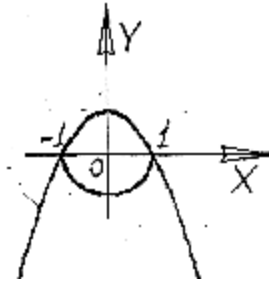


Рисунок 1.1

Змінимо порядок інтегрування, для чого задану область уявимо у вигляді двох областей: D_1 -обмежену зліва і справа вітками параболи $x = \pm\sqrt{1-y}$ ($0 \leq y \leq 1$), і D_2 обмежену дугами кола $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ ($-1 \leq y \leq 0$).

$$\text{Тоді } \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

Приклад 1.2

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x - 4y + 7 = 0$, $x - 4y + 14 = 0$, $2x - y = 0$, $x = 5$. Зобразити фігуру.

Розв'язок:

Зобразимо фігуру (рис. 1.2). Площа фігури: $S = \iint_D dx dy$. Область

інтегрування розіб'ємо на дві частини D_1 та D_2 . Площу шуканої фігури обчислимо, як суму площ цих областей:

$S = S_1 + S_2 = \iint_{D_1} dx dy + \iint_{D_2} dx dy$. Знайдемо кожен з цих інтегралів:

$$S_1 = \iint_{D_1} dx dy = \int_0^2 dx \int_{(x+7)/4}^{2x} dy = \int_0^2 \left(2x - \frac{x+7}{4} \right) dx = \frac{7}{4} \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \text{ (кв. одиниць).}$$

$$S_2 = \iint_{D_2} dx dy = \int_2^5 dx \int_{(x+7)/4}^{(x+14)/4} dy = \int_2^5 \left(\frac{x+14}{4} - \frac{x+7}{4} \right) dx = \frac{21}{4} \text{ (кв. одиниць).}$$

Тоді, площа даної фігури:

$$S = \frac{7}{8} + \frac{21}{4} = \frac{49}{8} = 6\frac{1}{8} \text{ (кв. одиниць).}$$

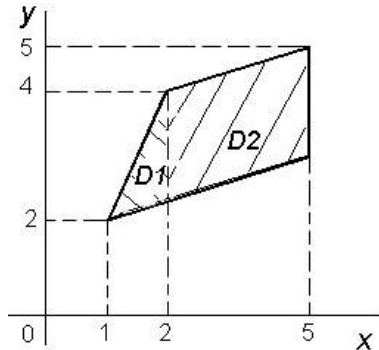


Рисунок 1.2

Приклад 1.3

Обчислити $\iint_D (x + 2y) dx dy$ $D: y = x^2; y = 4$

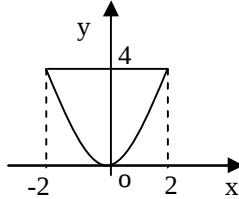


Рисунок 1.3

Розв'язок:

1-й спосіб.

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 (x + 2y) dy = \int_{-2}^2 (xy + y^2) \Big|_{x^2}^4 dx = \\ &= \int_{-2}^2 (4x + 16 - x^3 - x^4) dx = \left(2x^2 + 16x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{256}{5} \end{aligned}$$

2-й спосіб (зміна порядку інтегрування).

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x + 2y) dx = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{y}{2} + 2y\sqrt{y} - \frac{y}{2} + 2y\sqrt{y} \right) dy = 4 \int_0^4 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{8}{5} y^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 = \frac{256}{5} \end{aligned}$$

Приклад 1.4.

Обчислити

$$\iint_D \ln(4 + x^2 + y^2) dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 4; y = x; y = 0; (x \geq 0)$$

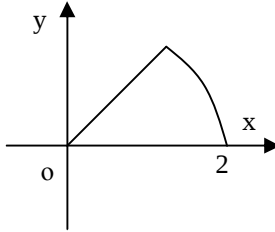


Рисунок 1.4

Розв'язок:

Обчислення подвійного інтеграла краще провести у полярній системі координат. Перехід від декартових до полярних координат здійснюється за формулами $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$. Рівняння кола

$x^2 + y^2 = 4$ у полярній системі координат буде мати вигляд $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4$ або $\rho = 2$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Тоді } \iint_D \ln(4 + x^2 + y^2) dx dy = \\
 & = \iint_D \ln(4 + \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho d\varphi d\rho = \\
 & = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 \ln(4 + \rho^2) \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 \ln(4 + \rho^2) d(4 + \rho^2) = \\
 & = \frac{\pi}{8} (4 + \rho^2)(\ln(4 + \rho^2) - 1) \Big|_0^2 = \pi(2 \ln 2 - \frac{1}{2}).
 \end{aligned}$$

Приклад 1.5.

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = a^2$
 $\frac{1}{4}x^2 + z^2 = a^2$

Розв'язок:

Розглянемо восьму частину заданого тіла:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

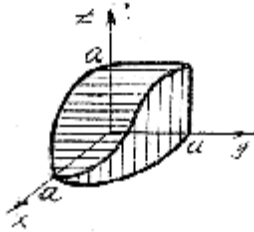


Рисунок 1.5

$$\frac{1}{8} V = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dx dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy =$$

$$\int_0^a (a^2 - x^2) dx = \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^3. \quad V = \frac{16}{3} a^3 \text{ (куб.од.)}$$

1.2 Криволінійний інтеграл

Приклад 1.6

Обчислити криволінійний інтеграл.

$$I = \int_{(A)}^{(B)} xy dx + (y - x) dy - \text{вздовж ліній } y = x^2 \text{ та } x = y^2 \text{ між}$$

точками A(0,0) та B(1,1)

Розв'язок:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)) dx$$

Нижня та верхня межа інтеграла подані початковою та кінцевою точками. У першому випадку за параметр беремо x . $dy = 2x dx$

$$I = \int_0^1 [x \cdot x^2 + (x^2 - x) \cdot 2x] dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x^2) dx = 3 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 - 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{12}$$

У другому випадку за параметр беремо y . Тоді $dx = 2y dy$

$$I = \int_0^1 [(y^2 * y)2y + (y - y^2)] dy = \int_0^1 (2y^4 + y - y^2) dy = 2 \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{17}{30}$$

Маємо різні результати, тому що інтегрування проводилося за різними кривими.

Приклад 1.7.

Обчислити $\int_l (7x - 2y) dl$ де l : відрізок прямої від точки $A(1,2)$ до точки $B(3,5)$.

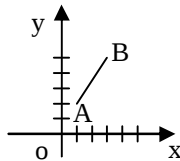


Рисунок 1.6

Розв'язок:

Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A};$$

$$\frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{x - 1}{3 - 1}. \quad \text{Звідкіля маємо } y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}; \quad y' = \frac{3}{2};$$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} dx = \frac{\sqrt{13}}{2} dx.$$

$$\int_l (7x - 2y) dl = \int_1^3 (7x - 3x - 1) \frac{\sqrt{13}}{2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2} \int_1^3 (4x-1)dx = \frac{\sqrt{13}}{2} (2x^2 - x) \Big|_1^3 = 7\sqrt{13}.$$

Приклад 1.8

Обчислити $\int_l (3x + 2y)dx + xydy$; $l: y = x^2 + 1$; від $x_1 = 0$ до $x_2 = -2$

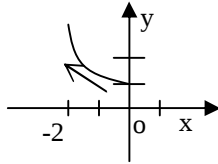


Рисунок 1.7

Розв'язок:

З рівняння лінії l знаходимо $dy = d(x^2 + 1) = 2x dx$.

Таким чином

$$\begin{aligned} \int_l (3x + 2y)dx + xydy &= \int_0^{-2} (3x + 2(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)2x)dx = \\ &= \int_0^{-2} (3x + 4x^2 + 2x^4 + 2)dx = \left(3\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + 2x \right) \Big|_0^{-2} = \\ &= 6 - \frac{32}{3} - \frac{64}{5} - 4 = -\frac{322}{15}. \end{aligned}$$

Приклад 1.9

Відновити функцію $u = u(x, y)$ по її повному диференціалу

$$du = (2xy^3 + 4)dx + (3x^2y^2 + 3)dy.$$

Розв'язок:

Перевіримо, що це повний диференціал. Для цього повинна

виконуватись умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, P та Q вирази при dx та dy в

диференціалі $du = Pdx + Qdy$.

Таким чином $P = 2xy^3 + 4$; $Q = 3x^2y^2 + 3$;

$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2$ тобто умова повного диференціала виконується.

Відновити функцію $u = u(x, y)$ можна за допомогою криволінійних інтегралів $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C$

або $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$, де x_0 та y_0 довільні,

але доцільно вибирати їх такими, щоб інтегрування спрощувалося. Для розглядуваного випадку зручно покласти $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 4dx + \int_0^y (3x^2y^2 + 3)dy + C = \\ &= 4x \Big|_0^x + (x^2y^3 + 3y) \Big|_0^y + C = 4x + x^2y^3 + 3y + C \end{aligned}$$

1.3 Теорія поля

Приклад 1.10

Знайти похідну функції $u(x, y, z) = \frac{\sqrt{x}}{z} - \frac{\sqrt{y}}{x} + 2xyz$ у напрямі вектора

$\overrightarrow{M_1M_2}$ в т. M_1 та $\overrightarrow{grad} u(M_1)$, якщо $M_1(1, 1, -1)$, $M_2(-2, -1, 1)$.

Розв'язок:

1. Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, -2, 2)$, його напрямні косинуси:

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{17}}, \cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{17}}, \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{17}}.$$

$$\frac{\nabla u(M_1)}{\|\nabla u(M_1)\|} = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{M_1}} \cos \alpha + \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{M_1}} \cos \beta + \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{M_1}} \cos \gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{x^2} + 2yz, \quad \frac{\nabla u}{\nabla x} \Big|_{M_1} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2x\sqrt{y}} + 2xz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\sqrt{x}}{z^2} + 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} = 1$$

$$\frac{\nabla u(M_1)}{\nabla M_1 M_2} = -\frac{3}{2} \frac{\bar{i}}{\bar{e}} - \frac{5}{\sqrt{17}} \frac{\bar{j}}{\bar{e}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{k}}{\bar{e}} - \frac{2}{\sqrt{17}} \frac{\bar{j}}{\bar{e}} + 1 \times \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{23}{2\sqrt{17}} = \frac{23\sqrt{17}}{34}$$

2. За означенням

$$\overrightarrow{grad} u(M_1) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_1} \bar{k}$$

$$\overrightarrow{grad} u(M_1) = -\frac{3}{2} \bar{i} - \frac{5}{2} \bar{j} + \bar{k}$$

Приклад 1.11

Для даного векторного поля

$$\bar{a} = (3xz + y^2)\bar{i} + (4yx + z)\bar{j} + (x^2y + 4z)\bar{k} \quad \text{знайти в точці}$$

$$M_0(2, -2, 1) \quad \text{div} \bar{a}, \text{rot} \bar{a}.$$

Розв'язок:

Вирази для $\text{rot} \bar{a}$ та $\text{div} \bar{a}$ мають такий вигляд

$$\text{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \bar{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\text{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{де} \quad P, Q, R - \text{складові вектора}$$

$$\bar{a} = P \bar{i} + Q \bar{j} + R \bar{k}, \quad \text{тобто} \quad P = 3xz + y^2, \quad Q = 4yx + z, \\ R = x^2y + 4z.$$

$$\text{Таким чином} \quad \text{rot} \bar{a} = \bar{i}(x^2 - 1) - \bar{j}(2xy - 3x) + \bar{k}(4y - 2y) = \\ = \bar{i}(x^2 - 1) + \bar{j}(3x - 2xy) + \bar{k}2y, \quad \text{rot} \bar{a}(M_0) = 3\bar{i} + 14\bar{j} - 4\bar{k},$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = 3z + 4x + 4, \quad \operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 3 + 8 + 4 = 15$$

Приклад 1.12

Обчислити течію векторного поля

$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною $x - 2y + 2z = 4$ та координатними площинами, двома способами: а) за означенням течії; б) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв'язок:

а) Обчислимо течію за допомогою поверхневого інтеграла

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^\circ dS, \quad \text{де } S - \text{зовнішня поверхня піраміди } ABCO.$$

Обчислимо течію через кожен грань піраміди:

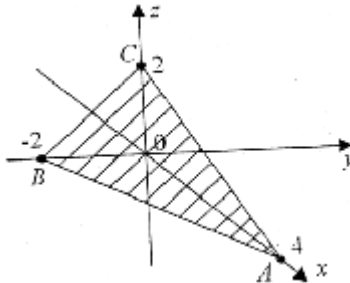


Рисунок 1.8

а) ΔAOC $y=0$, $\vec{n}^\circ = \vec{j}$, $dS = dx dz$.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= - \iint_{\Delta AOC} x dS = - \iint_{\Delta AOC} x dx dz = - \int_0^4 x dx \int_0^{2-\frac{x}{2}} dz = \\ &= - \int_0^4 x \left(2 - \frac{x}{2} \right) dx = - \left(x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^4 = - \frac{16}{3} \end{aligned}$$

б) ΔAOB $z=0$, $\vec{n}^\circ = -\vec{k}$, $dS = dx dy$. $\Pi_2 = \iint_{\Delta AOB} 0 \cdot dx dy = 0$

в) ΔBOC $x=0$, $\vec{n}^\circ = -\vec{i}$, $dS = dy dz$.

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= - \iint_{\Delta BOC} z dz dy = - \int_0^2 z dz \int_{z-2}^0 dy = - \int_0^2 z(-z+2) dz = \\ &= - \left(-\frac{z^3}{3} + z^2 \right) \Big|_0^2 = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

г) ΔABC належить площині $x-2y+2z-4=0$, нормаль до цієї грані

$$\vec{n} = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}.$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy, \quad z = -\frac{1}{2}x + y + 2, \quad z_x' = -\frac{1}{2}, \quad z_y' = 1.$$

$$\text{Тоді } dS = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dx dy = \frac{3}{2} dx dy$$

$$\Pi_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \iint_{\Delta ABC} ((x+z) - 2(2y-x) + 2z) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (3x - 4y + 3z) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} \left(3x - 4y - \frac{3}{2}x + 3y + 6 \right) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \int_0^{2y+4} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \left(\frac{3}{4}x^2 + (6-y)x \right) \Big|_0^{2y+4} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (y^2 + 20y + 36) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} + 10y^2 + 36y \right) \Big|_{-2}^0 = \frac{52}{3}$$

Течія крізь повну поверхню піраміди:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3}$$

б) За формулою Остроградського-Гаусса:

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} dx dy dz = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2y-x)}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Інтеграл $\iiint_V dx dy dz$ дорівнює об'єму прямокутної піраміди АВСО,

$$\text{тому } \Pi = \iiint_V (1+2+1) dx dy dz = 4 \iiint_V dx dy dz = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{32}{3}$$

Приклад 1.13

Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\bar{a} = (2x+z)\bar{i} + (3x+2y)\bar{j} + (2z+3y)\bar{k}$$

по контуру трикутника, який утворюється внаслідок перетину площини $2x+y+2z=2$ з координатними площинами при додатньому напрямку обходу відносно нормального вектора $\bar{n} = (m, n, p)$ ($p > 0$) до площини. Обчислення зробити двома способами :

а) за означенням

б) за допомогою формули Стокса

Розв'язок:

а) За означенням циркуляції $C = \oint_l \bar{a} d\bar{r} = \oint_l P dx + Q dy + R dz$

Для заданого векторного поля

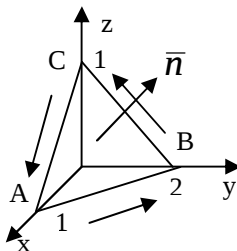


Рисунок 1.9

$$C = \oint_l (2x + z)dx + (3x + 2y)dy + (2z + 3y)dz$$

На відрізку AB : $z = 0$; $dz = 0$; $2x + y = 2$ або $y = -2x + 2$;
 $dy = -2dx$

$$\begin{aligned} C_1 &= \oint_{AB} (2x + z)dx + (3x + 2y)dy + (3y + 2z)dz = \\ &= \oint_{AB} 2xdx + (3x + 2y)dy = \int_1^0 (2x + (3x + 2(-2x + 2))) \cdot (-2)dx = \\ &= \int_1^0 (4x - 8)dx = (2x^2 - 8x) \Big|_1^0 = -2 + 8 = 6. \end{aligned}$$

На відрізку BC : $x = 0$, $dx = 0$, $y + 2z = 2$ або $y = 2 - 2z$,
 $dy = -2dz$.

$$\begin{aligned} C_2 &= \oint_{BC} (2x + z)dx + (3x + 2y)dy + (3y + 2z)dz = \\ &= \oint_{BC} 2ydy + (3y + 2z)dz = \int_0^1 (2(2 - 2z)(-2) + (2z + 3(2 - 2z)))dz = \\ &= \int_0^1 (4z - 2)dz = (2z^2 - 2z) \Big|_0^1 = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

На відрізку : CA $y = 0$, $dy = 0$, $2x + 2z = 2$ або $z = 1 - x$,
 $dz = -dx$.

$$\begin{aligned} C_3 &= \oint_{CA} (2x + z)dx + (3x + 2y)dy + (3y + 2z)dz = \\ &= \oint_{CA} (2x + z)dx + 2zdz = \int_0^1 ((2x + 1 - x) + 2(1 - x)(-1))dx = \\ &= \int_0^1 (3x - 1)dx = (3\frac{x^2}{2} - x) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином $C = C_1 + C_2 + C_3 = 6 + 0 + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$.

б) Обчислення циркуляції за допомогою формули Стокса.

$$C = \oint_l \vec{a} d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \iint_{D_{xy}} \frac{\text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy$$

де S - трикутник ABC , D_{xy} - проекція цього трикутника на координатну площину XOY , $\vec{n}_0$ - нормальний одиничний вектор до поверхні S , $\cos \gamma$ - це третя складова вектора $\vec{n}_0$,

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z & 3x+2y & 2z+3y \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|},$$

$\vec{n} = (\pm \phi'_x, \pm \phi'_y, \pm \phi'_z)$, $\phi(x, y, z) = 0$ - рівняння поверхні, знак(+) або (-) вибирається з умови. Для цього прикладу рівняння поверхні має вигляд $2x + y + 2z = 2$, тобто $\phi(x, y, z) = 2x + y + 2z - 2$.

Таким чином, враховуючи напрямленість нормального вектора маємо $\vec{n} = (2, 1, 2)$, $\vec{n}_0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$. Враховуючи попередню формулу обчислимо циркуляцію

$$C = \iint_{D_{xy}} \frac{3 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} dx dy = \frac{13}{2} S_{D_{xy}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$

2 ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

2.1 Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом z в алгебраїчній формі називається вираз $z=x+iy$, де x та y – дійсні, а i – уявна одиниця, $i^2 = -1$. $\bar{z} = x - iy$ – *спряжене комплексне число*.

$x = \operatorname{Re} z$ – **дійсна частина** комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ – його **уявна частина**.

Комплексне число $z=x+iy$ можна **зобразити** точкою площини xOy з координатами (x,y) , також числу z можна поставити у відповідність вектор $\vec{r}$, який має напрямок з початку координат O в точку z (рис. 2.1).

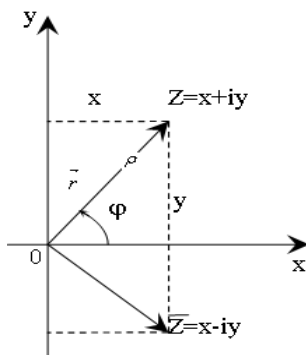


Рисунок 2.1

Довжина вектора $\vec{r}$ має назву **модуля** комплексного числа:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.1)$$

Кут j , утворений з віссю Ox має назву **аргумента** $j = \operatorname{Arg} z$, значення якого неоднозначне, всі його значення відрізняються на доданки, кратні $2p$.

Якщо $z=0$, то $\operatorname{Arg} z$ невизначено.

Головне значення аргумента позначається $\arg z$ і визначається однозначно $-p < \arg z \leq p$.

$$j = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2kp \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots) \quad (2.2)$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0 \\ p + \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y \geq 0 \\ -p + \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\arg z = \frac{p}{2}, \text{ якщо } x=0, y>0.$$

$$\arg z = -\frac{p}{2}, \text{ якщо } x=0, y<0.$$

З рисунку 2.1 видно, що $x = r \cos j$; $y = r \sin j$, тобто комплексне число можна записати у так званій **тригонометричній формі**:

$$z = x + iy = r(\cos j + i \sin j) \quad (2.4)$$

Показникова форма комплексного числа:

$$z = r e^{ij} \quad (2.5)$$

Дії над комплексними числами:

$$\text{Нехай } z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 \quad (2.6)$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (2.7)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \quad (2.8)$$

$$= r_1 r_2 (\cos(j_1 + j_2) + i \sin(j_1 + j_2)) = r_1 r_2 e^{i(j_1 + j_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(j_1 - j_2) + i \sin(j_1 - j_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(j_1 - j_2)} \quad (2.9)$$

Приклад 2.1

Визначити множину точок, які задовольняють наступним умовам: а)

$$1 \leq |z - 1 - i| \leq 3$$

$$\text{б) } -\frac{p}{4} < \arg(z - 1 - 2i) \leq \frac{p}{6}$$

Розв'язок:

а) З геометричної точки зору рівняння $|z - z_0| = r$ є рівнянням кола з центром в точці z_0 і радіусом r .

Шукана множина точок повинна одночасно задовольняти двом умовам:

1. $1 \leq |z - 1 - i|$ – зовнішність одиничного кола з центром в точці $1+i$.
2. $|z - 1 - i| \leq 3$ – внутрішність кола з радіусом 3 і центром в точці $1+i$.

Тому шукана множина – це кільце, що обмежено концентричними колами радіусів 1 та 3 з центром в точці $1+i$, включаючи самі кола (рис. 2.2).

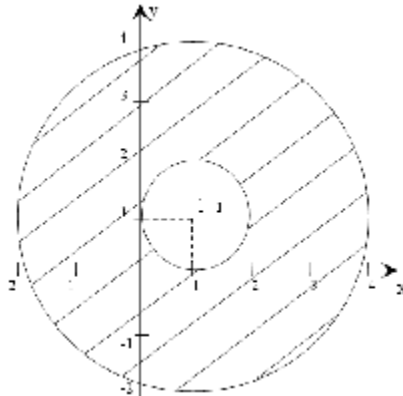


Рисунок 2.2

б) комплексне число $z - 1 - 2i = z - (1 + 2i)$ зображується вектором, початок якого є точка $1 + 2i$, а кінець – точка z .

Кут між цим вектором та віссю Ox $j = \arg(z - 1 - 2i)$ та він змінюється у межах від $-\frac{p}{4}$ до $\frac{p}{6}$.

Тобто шукана множина точок – це частина площини між променями, що виходять з точки $(1 + 2i)$, та які утворюють з віссю Ox кути $-\frac{p}{4}$ та

$\frac{p}{6}$, включаючи верхній промінь (рис. 2.3).

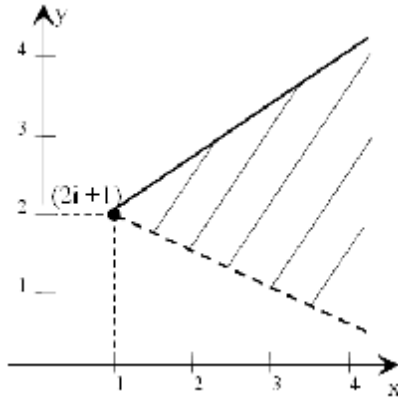


Рисунок 2.3

Приклад 2.2

Зобразити лінію, для якої $\operatorname{Re} z^2 = a^2$

Розв'язок

а) Знайдемо z^2 : $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, тоді $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$, тобто рівняння $\operatorname{Re} z^2 = a^2$ можна записати так:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Це, як відомо, рівнобічна гіпербола.

Для піднесення в степінь використовують **формулу Муавра**:

$$z^n = r^n (\cos nj + i \sin nj) \quad (2.10)$$

Приклад 2.3

Обчислити $(-\sqrt{3} - i)^5$

Розв'язок

а) Знайдемо тригонометричну форму числа $(-\sqrt{3} - i)$. Для цього знайдемо його модуль за формулою (2.1):

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

Та аргумент за формулою (2.2):

$$j = \arg z = -p + \operatorname{arctg} \frac{-1}{-\sqrt{3}} = -p + \frac{p}{6} = -\frac{5p}{6}$$

Тоді за формулою (2.4):

$$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{5p}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5p}{6}\right)\right)$$

Використовуючи формулу (2.10), одержуємо:

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3}-i)^5 &= 2^5 \left(\cos\left(-\frac{25p}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{25p}{6}\right) \right) = \\ &= 32 \left(\cos\left(-\frac{p}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{6}\right) \right) = 32 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 16\sqrt{3} - 16i \end{aligned}$$

Корені степеня n визначаються за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{j+2kp}{n} + i \sin \frac{j+2kp}{n} \right) \quad k=0,1,2,\dots,n-1 \quad (2.11)$$

Приклад 2.4

Знайти а) $\sqrt[3]{1+i}$; б) $\sqrt[3]{1}$

Розв'язок:

а) Для числа $1+i$

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad j = \arg z = \arctg \frac{1}{1} = \frac{p}{4}$$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4} \right)$$

Використовуючи формулу (2.11):

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} \left(\cos \frac{\frac{p}{4} + 2pk}{3} + i \sin \frac{\frac{p}{4} + 2pk}{3} \right) \quad k=0,1,2$$

ми одержимо три різних значення кореня:

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{p}{12} + i \sin \frac{p}{12} \right) \quad (k=0)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{9p}{12} + i \sin \frac{9p}{12} \right), \quad (k=1)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17p}{12} + i \sin \frac{17p}{12} \right), \quad (k=2)$$

б) для числа $z=1$: $r=1$; $j=0$, за формулою (2.11):

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2pk}{3} + i \sin \frac{2pk}{3}, \quad k=0,1,2$$

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad (k=0)$$

$$z_2 = \cos \frac{2p}{3} + i \sin \frac{2p}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad (k=1)$$

$$z_3 = \cos \frac{4p}{3} + i \sin \frac{4p}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad (k=2)$$

2.2 Основні елементарні функції комплексної змінної

Показникова функція e^z обчислюється за допомогою формули Ейлера:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ можна обчислити за формулами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Функції $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ визначаються рівностями

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Для тригонометричних функцій залишаються вірними всі формули тригонометрії.

Гіперболічні функції визначаються рівностями

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

Логарифмічна функція $\operatorname{Ln} z$, де $z \neq 0$, визначається як функція, обернена до показникової

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2kp), \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

Обернені тригонометричні функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ визначаються як функції, обернені відповідно до функцій $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$.

Наприклад, якщо $z = \sin w$, то w називається арксинусом числа z і позначається $w = \operatorname{Arcsin} z$.

Ці функції багатозначні і їх можна виразити через логарифмічну функцію

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}$$

Загальна степенева функція $w = z^a$, де $a = a + bi$ – будь-яке комплексне число, визначається рівністю

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$$

Якщо $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то маємо багатозначну функцію – **корінь**

степеня n з комплексного числа

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{n} (\ln|z| + i(\arg z + 2kp))} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2kp}{n}} = \\ &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2kp}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2kp}{n} \right), \quad k = 0, n-1 \end{aligned}$$

Загальна показникова функція $w = a^z$ ($a \neq 0$ – будь-яке комплексне число) визначається рівністю

$$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$$

Приклад 2.5

Обчислити а) $\operatorname{Ln} \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right)$
 б) $\operatorname{Arc} \cos 2i$

Розв'язок

а) За означенням

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2kp), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\left| \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1$$

$$\arg \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) = -p + \operatorname{arctg} \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = -p + \operatorname{arctg} 1 = -p + \frac{p}{4} = -\frac{3p}{4}$$

$$\operatorname{Ln} \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) = \ln 1 + i \left(-\frac{3p}{4} + 2kp \right) = \frac{pi}{4} (8k-3), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

б) $\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1})$

Тоді $\operatorname{Arc} \cos 2i = -i \operatorname{Ln} (2i + \sqrt{(2i)^2 - 1}) = -i \operatorname{Ln} (2i + \sqrt{-5})$

Тому що $\sqrt{-5} = \pm \sqrt{5}i$, отримаємо $\operatorname{Arc} \cos 2i = -i \operatorname{Ln} (2 \pm \sqrt{5})i$

$$|(2 + \sqrt{5})i| = 2 + \sqrt{5}, \quad |(2 - \sqrt{5})i| = \sqrt{5} - 2$$

$$\arg(2 + \sqrt{5})i = \frac{p}{2}, \quad \arg(2 - \sqrt{5})i = -\frac{p}{2}$$

$$\operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{5})i = \ln(\sqrt{5} \pm 2) + i \left(\pm \frac{p}{2} + 2kp \right) = \ln(\sqrt{5} \pm 2) + \frac{p}{2} i(4k \pm 1)$$

$$\operatorname{Arc} \cos 2i = -i \left(\ln(\sqrt{5} \pm 2) + \frac{p}{2} i(4k \pm 1) \right) = \frac{p}{2} (4k \pm 1) - i \ln(\sqrt{5} \pm 2),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2.3 Аналітичні функції

Похідною функції комплексної змінної $w = f(z)$ називається границя

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) \quad \text{при умові,}$$

що Δz прямує до 0 довільним чином.

Функція називається **диференційовною в точці z** , якщо існує похідна в цій точці. Якщо функція диференційовна як в самій точці z , так і в деякому її околі, то функція називається **аналітичною в точці z** .

Функція $f(z)$, що однозначна та диференційовна в кожній точці області D , називається **аналітичною в області D** .

Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була аналітичною в області D , необхідно і достатньо існування в цій області неперервних частинних похідних $u(x, y)$ і $v(x, y)$, що задовольняють **умовам Коші-Рімана**:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

$$\text{та при цьому } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Приклад 2.6

Знайти аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по відомій уявній частині $v(x, y) = 3x + 4yx$.

Розв'язок

Використаємо умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(3x + 4yx)}{\partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(3x + 4yx)}{\partial x} = -3 - 4y$$

Проінтегруємо перше з відношень по x .

$$u(x, y) = \int 4x dx + j(y) = 2x^2 + j(y)$$

Для знаходження функції $j(y)$ продиференціюємо отриману рівність по y і підставимо в другу умову Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = j'(y), \quad j'(y) = -3 - 4y$$

$$j(y) = \int (-3 - 4y) dy = -3y - 2y^2 + C, \quad \text{де } C - \text{const.}$$

Таким чином, дійсна частина невідомої функції $u(x, y) = 2x^2 - 3y - 2y^2 + C$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } f(z) = u + iv &= 2x^2 - 3y - 2y^2 + C + i(3x + 4yx) = \\ &= 3i(x + iy) + 2(x^2 - y^2 + 2ixy) + C = 3iz + 2z^2 + C \end{aligned}$$

2.4 Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай функція $f(z)$ визначена і неперервна в області D , а L – кусково-гладка замкнена або незамкнена крива, що належить області D .

Якщо $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то обчислення інтеграла зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів другого роду

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy$$

Звідки випливає, що взагалі інтеграл $\int_L f(z) dz$ залежить від лінії інтегрування L .

Приклад 2.7

Обчислити інтеграл $\int_L (2\bar{z} + \text{Im } z^2) dz$

а) по прямій $y=x$ від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$

б) по параболі $y = x^2$ від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

Розв'язок:

Знайдемо дійсну та уявну частини підінтегральної функції:

$$f(z) = 2\bar{z} + \text{Im } z^2 = 2(x - iy) + \text{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2x + 2xy - i \cdot 2y$$

$$u(x, y) = 2x(1 + y)$$

$$v(x, y) = -2y$$

$$\int_L f(z) dz = \int_L 2x(1 + y) dx + 2y dy + i \int_L -2y dx + 2x(1 + y) dy$$

а) L – пряма $y=x$, $dy=dx$, x змінюється від 0 до 1.

$$\int_L f(z) dz = \int_0^1 (2x(1+x) + 2x) dx + i \int_0^1 (-2x + 2x(1+x)) dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^2 + 4x) dx + i \int_0^1 2x^2 dx = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} i$$

б) L – парабола $y = x^2$, $dy=2x dx$, x змінюється від 0 до 1.

$$\int_L f(z) dz = \int_0^1 (2x(1+x^2) + 2x^2 \cdot 2x) dx + i \int_0^1 (-2x^2 + 2x(1+x^2)2x) dx =$$

$$= \int_0^1 (6x^3 + 2x) dx + i \int_0^1 (4x^4 + 2x^2) dx = \frac{5}{2} + \frac{22}{15} i$$

Якщо лінія L задана **параметрично** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \leq t \leq t_1$,

причому значення параметра $t=t_0$ і $t=t_1$ відповідають початковій та кінцевій точкам кривої L , то

$$\int_L f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \cdot z'(t) dt, \quad \text{де } z(t) = x(t) + i y(t)$$

Приклад 2.8

Обчислити $\int_L e^{\bar{z}} dz$, де L – відрізок прямої $y = -x$, який з'єднує точки

$$z_1 = 0 \text{ і } z_2 = p - ip.$$

Розв'язок:

Запишемо рівняння лінії L в параметричній формі

$$x = t, \quad y = -t$$

В комплексно-параметричній формі рівняння прямої буде мати вигляд $z = t - it$, де t змінюється від 0 до p .

$$\bar{z} = t + it, \quad dz = (1 - i)dt$$

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z} dz &= \int_0^p e^{t+it} (1-i) dt = (1-i) \int_0^p e^{(1+i)t} dt = \frac{1-i}{1+i} e^{(1+i)t} \Big|_0^p = \\ &= -i(e^{(1+i)p} - e^{(1+i)0}) = (e^p + 1)i \end{aligned}$$

Якщо L – **коло або частина кола** з центром в точці z_0 і радіусом R , то зручно використовувати рівняння виду

$$z = z_0 + Re^{it} \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

Приклад 2.9

Обчислити $\int_L (2iz + z\bar{z}) dz$, де L – дуга кола $|z|=2$, $0 \leq \arg z \leq p$.

Розв'язок:

Нехай $z = 2e^{it}$, $\bar{z} = 2e^{-it}$, $dz = z'(t)dt = 2ie^{it}dt$, $0 \leq t \leq p$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \int_L (2iz + z\bar{z}) dz &= \int_0^p (2i \cdot 2e^{it} + 2e^{it} \cdot 2e^{-it}) \cdot 2ie^{it} dt = \\ &= 8i \int_0^p (ie^{2it} + e^{it}) dt = (4ie^{2it} + 8e^{it}) \Big|_0^p = -16 \end{aligned}$$

Якщо $f(z)$ – **аналітична** функція в однозв'язній області D , то **інтеграл не залежить від лінії інтегрування** L .

В цьому випадку $\oint_L f(z) dz = 0$,

де L – будь-який замкнений кусково-гладкий контур в області D .

Також, якщо $f(z)$ – аналітична функція, то має місце формула Ньютона-Лейбниця:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0),$$

де $\Phi(z)$ – первісна до функції $f(z)$, тобто $\Phi'(z) = f(z)$ в області D , $z_0, z_1 \in D$.

Приклад 2.10

Обчислити інтеграл $\int_L \cos z dz$, де L – відрізок прямої, що з'єднує

точки $z_1 = \frac{p}{2}i$ і $z_2 = p + i$.

Розв'язок:

Підінтегральна функція $f(z) = \cos z$ аналітична всюди, тому застосовуємо формулу Ньютона-Лейбниця:

$$\int_{\frac{p}{2}}^{p+i} \cos z dz = \sin z \Big|_{\frac{p}{2}}^{p+i} = \sin(p+i) - \sin \frac{p}{2} = -\sin i - 1 = -(1 + i \operatorname{sh} 1)$$

Якщо $f(z)$ і $j(z)$ – аналітичні функції в однозв'язній області D , а z_0, z_1 – довільні точки цієї області, то має місце **формула інтегрування частинами**:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot j'(z) dz = \left(f(z) \cdot j(z) \right) \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} j(z) \cdot f'(z) dz$$

Приклад 2.11

Обчислити інтеграл $\int_0^i z \cos z dz$

Розв'язок:

Функції $f(z) = z$ і $j(z) = \cos z$ всюди аналітичні, тому можна проінтегрувати частинами:

$$\begin{aligned} \int_0^i z \cos z dz &= \int_0^i z (\sin z)' dz = (z \sin z) \Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = i \sin i + \cos z \Big|_0^i = \\ &= -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 = \frac{1-e}{e}. \end{aligned}$$

2.5 Інтегральна формула Коші

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій області D та l – границя D , тоді значення функції $f(z)$ в будь-якій точці z_0 області D можна обчислити за формулою Коші:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (2.12)$$

Де контур l проходиться таким чином, що область D залишається зліва.

Для похідної n -го порядку аналітичної функції:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (2.13)$$

Для використання інтегральної формули Коші може бути корисною наступна теорема.

Теорема. Якщо $f(z)$ – аналітична в багатозв'язній області D , обмеженій контуром C_0 і внутрішніми по відношенню до нього контурами $C_1, C_2, \dots, C_n$ (рис. 1.4), то

$$\int_{C_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz \quad (2.14)$$

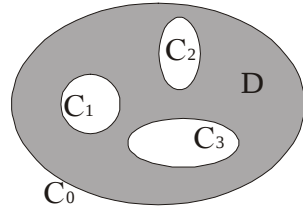


Рисунок 2.4

Приклад 2.12

Обчислити інтеграл $\int_l \frac{\sin z + 1}{z^2 - 4z} dz$, якщо l : а) $|z - 1| = 0,5$, б) $|z - 1| = 2$,

в) $|z - 1| = 4$.

Розв'язок:

а) В замкненій однозв'язній області $|z - 1| = 0,5$ підінтегральна

функція є аналітичною, тому $\int_{|z-1|=0,5} \frac{\sin z + 1}{z^2 - 4z} dz = 0$.

б) в колі $|z-1|=2$ є одна точка $z_0=0$, в якій знаменник обертається в нуль

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\sin z + 1}{z^2 - 4z} dz = \int_{|z-1|=2} \frac{\sin z + 1}{(z-0)(z-4)} dz$$

Так як $f(z) = \frac{\sin z + 1}{z-4}$ – аналітична в області, що обмежена колом $|z-1|=2$, можна використати формулу Коші (2.12):

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\sin z + 1}{(z-0)(z-4)} dz = 2\pi i \frac{\sin z + 1}{z-4} \Big|_{z=0} = -\frac{\pi i}{2}.$$

в) в області, обмеженій колом $|z-1|=4$ є дві точки $z=0$ та $z=4$, в яких знаменник обертається в нуль.

1 спосіб.

Розкладемо дріб $\frac{1}{z^2 - 4z}$ на прості: $\frac{1}{z^2 - 4z} = \frac{1}{4(z-4)} - \frac{1}{4z}$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \int_{|z-1|=4} \frac{\sin z + 1}{z^2 - 4z} dz &= \int_{|z-1|=4} \frac{\sin z + 1}{4(z-4)} dz - \int_{|z-1|=4} \frac{\sin z + 1}{4z} dz = \\ &= 2\pi i \frac{\sin 4 + 1}{4} - 2\pi i \frac{\sin 0 + 1}{4} = \pi i \frac{\sin 4}{2}. \end{aligned}$$

2 спосіб.

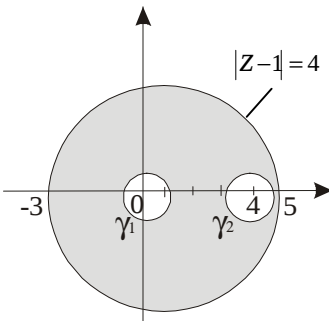


Рисунок 2.5

Застосуємо останню теорему. Для цього введемо в розгляд 2 контури: g_1 , який містить особливу точку $z=0$ та g_2 з особливою точкою $z=4$ всередині (рис. 2.5).

Функція $f(z) = \frac{\sin z + 1}{z^2 - 4z}$ аналітична в заштрихованій частині, тому

$$\int_{|z-1|=4} \frac{\sin z + 1}{z^2 - 4z} dz = \int_{g_1} \frac{\sin z + 1}{z(z-4)} dz + \int_{g_2} \frac{\sin z + 1}{z(z-4)} dz =$$

$$= 2\pi i \frac{\sin z + 1}{z-4} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{\sin z + 1}{z} \Big|_{z=4} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sin 4 + 1}{4} \right) = \pi i \frac{\sin 4}{2}.$$

Приклад 2.13

Обчислити інтеграл $\int_{|z+i|=3} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{(z + \pi i)^3} dz$

Розв'язок:

Підінтегральна функція є аналітичною в $|z + i| \leq 3$ крім точки $z_0 = -\pi i$.

А функція $f(z) = \operatorname{sh}^2 z$ всюди аналітична в цьому колі. Використовуючи формулу (2.13):

$$\int_{|z+i|=3} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{(z + \pi i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\operatorname{sh}^2 z)'' \Big|_{z=-\pi i} = \pi i \cdot 2(\operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z) \Big|_{z=-\pi i} = 2\pi i$$

2.6 Ряди Тейлора та Лорана

Функція $f(z)$, однозначна та аналітична в точці $z = z_0$, може бути розвинена в околі цієї точки в **ряд Тейлора**:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

коефіцієнти якого c_n обчислюються за формулами:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

де L – коло з центром в точці $z = z_0$, що цілком міститься в околі точки z_0 , в якому функція $f(z)$ аналітична.

Центр круга, в якому ряд Тейлора збігається, знаходиться в точці $z = z_0$.

Радіус збіжності ряду R дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої до неї особливої точки (тобто до точки, в якій функція не аналітична). Таким чином, область збіжності ряду: $|z - z_0| < R$.

Ряди Тейлора для елементарних функцій мають той самий вигляд, що і для функцій дійсного аргумента. Запишемо деякі з них та вкажемо область їх збіжності:

$$1) e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad |z| < \infty$$

$$2) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad |z| < \infty$$

$$3) \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty$$

$$4) (1+z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} z^3 + \dots \\ \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!} z^n + \dots \quad |z| < 1$$

$$5) \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad |z| < 1$$

$$6) \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

$$7) \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad |z| < 1$$

Останнє розвинення – це ряд Тейлора для головного значення логарифма. Для інших значень багатозначної функції $\text{Ln}(1+z)$ ряд Тейлора матиме вигляд:

$$\text{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + 2n\pi i, \quad \text{де } n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Приклад 2.14

Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(z) = \frac{1}{5z+1}$ по степенях $z+3$.

Розв'язок:

1 спосіб. Знайдемо значення функції та її похідних в точці $z = -3$:

$$f(z) = \frac{1}{5z+1}, \quad f(-3) = -\frac{1}{14}$$

$$f'(z) = -\frac{5}{(5z+1)^2}, \quad f'(-3) = -\frac{5}{14^2}$$

$$f''(z) = \frac{5^2 \cdot 2}{(5z+1)^3}, \quad f''(-3) = -\frac{5^2 \cdot 2}{14^3}$$

$$f'''(z) = -\frac{5^3 \cdot 3!}{(5z+1)^4}, \quad f'''(-3) = -\frac{5^3 \cdot 3!}{14^4}$$

.....
Отримаємо ряд:

$$\frac{1}{5z+1} = -\frac{1}{14} - \frac{5}{14^2}(z+3) - \frac{5^2}{14^3}(z+3)^2 - \frac{5^3}{14^4}(z+3)^3 - \dots - \frac{5^n}{14^{n+1}}(z+3)^n - \dots$$

Відстань між точкою $z_0 = -3$ та точкою, в якій функція не аналітична

$z_1 = -\frac{1}{5}$ дорівнює $R = |z_1 - z_0| = \left| 3 - \frac{1}{5} \right| = \frac{14}{5}$. Тому область збіжності ряду $|z+3| < \frac{14}{5}$.

2 спосіб. Застосуємо відоме розвинення

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

Для цього перетворимо функцію таким чином:

$$\frac{1}{5z+1} = \frac{1}{5(z+3-3)+1} = \frac{1}{5(z+3)-14} = \frac{1}{14 \left(1 - \frac{5(z+3)}{14} \right)}$$

В розвиненні $\frac{1}{1-z}$ необхідно замінити z на $\frac{5(z+3)}{14}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{5z+1} &= -\frac{1}{14} \cdot \left(1 + \frac{5(z+3)}{14} + \frac{5^2(z+3)^2}{14^2} + \dots + \frac{5^n(z+3)^n}{14^n} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{14} - \frac{5}{14^2}(z+3) - \frac{5^2}{14^3}(z+3)^2 - \dots - \frac{5^n}{14^{n+1}}(z+3)^n - \dots\end{aligned}$$

Ряд Тейлора для функції $\frac{1}{1-z}$ збіжний при $|z| < 1$, тому отриманий ряд буде збіжним при $\left| \frac{5(z+3)}{14} \right| < 1$, тобто при $|z+3| < \frac{14}{5}$.

Функція $f(z)$ аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R$ (не виключаючи випадки $r = 0$ та $R = \infty$) може бути в цьому кільці єдиним чином розвинена в **ряд Лорана**:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

При цьому ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ називається головною

частиною ряду Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ – правильною частиною.

Коефіцієнти c_n знаходяться за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

де L – довільне коло з центром в точці $z = z_0$, яке належить даному кільцю.

На практиці при знаходженні коефіцієнтів c_n намагаються уникати застосування останніх формул, тому що вони призводять до громіздких обчислень. Якщо це можливо, використовують відомі розвинення елементарних функцій.

Приклад 2.15

Знайти різні розвинення в ряд Лорана функції $f(z) = \frac{2z+2}{z^2+2z-3}$ по степенях z .

Розв'язок:

Функція $f(z)$ має дві особливі точки: $z_1 = -3$ та $z_2 = 1$. Звідки маємо 3 області з центром в точці $z_0 = 0$, в кожній з яких $f(z)$ аналітична:

- 1) круг $|z| < 1$
- 2) кільце $1 < |z| < 3$
- 3) $3 < |z| < \infty$ – зовнішність круга $|z| \leq 3$.

Знайдемо ряди Лорана для функції $f(z)$ в кожній з областей.

Представимо $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів:

$$f(z) = \frac{1}{z+3} + \frac{1}{z-1} \quad (2.15)$$

1) Розвинення в області $|z| < 1$

Застосуємо відоме розвинення

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{z-1} = -1 - z - z^2 - z^3 - \dots - z^n - \dots, \quad |z| < 1 \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3 \left(1 + \frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \dots\right) \dots, \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \quad |z| < 3 \quad (2.17)$$

Підставимо (2.16) та (2.17) в (2.15) та отримаємо ряд:

$$f(z) = \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \frac{z^3}{81} + \dots - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots = -\frac{2}{3} - \frac{10}{9}z - \frac{26}{27}z^2 - \frac{82}{81}z^3 - \dots$$

Область збіжності ряду $|z| < 1$, тобто це область, де одночасно збігаються обидва ряди (2.16) і (2.17). Це розвинення є рядом Тейлора функції $f(z)$.

2) Розвинення в кільці $1 < |z| < 3$

Ряд (2.17) в цьому кільці збігається, а ряд (2.16) – розбігається. Тому знайдемо інший розклад для функції $\frac{1}{z-1}$, який буде збіжним в даному кільці.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots, \quad (2.18)$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \quad |z| > 1$$

Підставимо (2.17) та (2.18) в (2.15) та отримаємо необхідний ряд

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \frac{z^3}{81} + \dots - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \\ &= \dots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \frac{z^3}{81} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n} \end{aligned}$$

Ряди (2.17) і (2.18) однозначно збігаються в області $1 < |z| < 3$. Це і є область збіжності отриманого ряду.

3) Розвинення для $|z| > 3$

Ряд (2.18) збіжний в цій області, а ряд (2.17) – розбіжний. Тому знайдемо ряд для функції $\frac{1}{z+3}$, який буде збіжним в області $|z| > 3$.

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} - \frac{27}{z^3} + \dots\right) \quad \left|\frac{3}{z}\right| < 1, \quad |z| > 3 \quad (2.19)$$

Підставимо (2.18) і (2.19) в (2.15):

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} - \frac{27}{z^4} + \dots\right) = \frac{2}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{10}{z^3} - \frac{26}{z^4} + \dots$$

Цей ряд збіжний для $|z| > 3$.

Приклад 2.16

Розкласти в ряд Лорана в кільці $0 < |z+1| < 3$ функцію

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-2)}$$

Розв'язок:

1 спосіб

Функція $f(z)$ є аналітичною в кільці $0 < |z+1| < 3$. Коефіцієнти знайдемо за формулами:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z+1)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dz}{(z+1)^{n+3}(z-2)},$$

де L – будь-яке коло з центром в точці $z_0 = -1$, яке лежить в кільці $0 < |z+1| < 3$.

Якщо $n+3 \leq 0$, то підінтегральна функція

$$\frac{1}{(z+1)^{n+3}(z-2)} = \frac{(z+1)^{|n+3|}}{z-2}$$

є аналітичною всередині кола L , не

виключаючи точки $z_0 = -1$. Тому за теоремою Коші

$$\int_L \frac{dz}{(z+1)^{n+3}(z-2)} = 0. \text{ Звідки маємо } C_n = 0 \text{ для } n = -3, -4, -5, \dots$$

Якщо $n+3 > 0$, то за формулою для похідної будь-якого порядку від аналітичної функції отримаємо:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(z+1)^{n+3}} \frac{dz}{(z-2)} = \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} \left(\frac{1}{z-2} \right) \Bigg|_{z=-1} = \\ &= \frac{1}{(n+2)!} \frac{(-1)^{n+2}(n+2)!}{(z-2)^{n+3}} \Bigg|_{z=-1} = - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+3} = - \frac{1}{3^{n+3}} \end{aligned}$$

Таким чином, для $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ $C_n = -\frac{1}{3^{n+3}}$

Ряд Лорана даної функції в кільці $0 < |z+1| < 3$ має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)^2(z-2)} &= \sum_{n=-2}^{\infty} C_n (z+1)^n = \sum_{n=-2}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+3}} (z+1)^n = \\ &= -\frac{1}{3(z+1)^2} - \frac{1}{3^2(z+1)} - \frac{1}{3^3} - \frac{z+1}{3^4} - \frac{(z+1)^2}{3^5} - \dots\end{aligned}$$

2 способ

Функцію $f(z)$ розкладемо у суму елементарних дробів:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{(z+1)^2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(z+1)} + \frac{\frac{1}{9}}{(z-2)}$$

Далі необхідно останній дріб надати у вигляді суми степенів $(z+1)$.

$$\frac{\frac{1}{9}}{(z-2)} = \frac{\frac{1}{9}}{(z+1)-3} = -\frac{\frac{1}{9}}{3\left(1-\frac{z+1}{3}\right)} = -\frac{1}{27} \left(1 + \left(\frac{z+1}{3}\right)^1 + \left(\frac{z+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{3}\right)^3 + \dots\right)$$

Ряд збіжний при $\left|\frac{z+1}{3}\right| < 1$, $|z+1| < 3$. Підставивши отриманий ряд

в розклад функції $f(z)$, отримаємо ряд Лорана в кільці $0 < |z+1| < 3$:

$$\frac{1}{(z+1)^2(z-2)} = -\frac{1}{3(z+1)^2} - \frac{1}{3^2(z+1)} - \frac{1}{3^3} - \frac{z+1}{3^4} - \frac{(z+1)^2}{3^5} - \dots$$

2.7 Нулі аналітичної функції

Будь-яка точка a , для якої $f(a) = 0$, називається **нулем функції** $f(z)$.

Інакше кажучи, нулі функції $f(z)$ – це корені рівняння $f(z) = 0$.

Нехай $f(z) \neq 0$ аналітична в точці $a \neq \infty$.

Точка a має назву **нуль порядку (або кратності) k** функції $f(z)$, якщо її степеневий ряд за степенями $(z-a)$ має вигляд:

$$f(z) = c_k (z-a)^k + c_{k+1} (z-a)^{k+1} + \dots \quad c_k \neq 0 \quad (2.20)$$

Якщо $k=1$, то точка a називається простим нулем.

Із формули $c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$ ($m=0,1,2,\dots; f^{(0)}=f; 0!=1$) випливає:

якщо a є нулем порядку k функції $f(z)$, то

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0; \quad f^{(k)}(a) \neq 0 \quad (2.21)$$

Тобто **порядок нуля є порядок найменшої похідної, відмінної від нуля.**

Для того, щоб точка a була нулем порядку k аналітичної функції, необхідно і достатньо, щоб цю функцію можна було в деякому околі цієї точки подати у вигляді:

$$f(z) = (z-a)^k j(z) \quad (2.22)$$

де $j(z)$ – аналітична в точці a і $j(a) \neq 0$.

Якщо точка a є нулем порядку k функції $f(z)$, то для функції $g(z) = (f(z))^p$ ($p \geq 1$) ця точка є нулем порядку pk .

2.8 Ізольовані особливі точки

Точка z_0 називається **ізольованою особливою точкою** функції $f(z)$, якщо існує такий окіл цієї точки $|z - z_0| < R$, в якому $f(z)$ аналітична всюди, крім точки $z = z_0$.

Функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана в області $0 < |z - z_0| < R$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (2.23)$$

Ізольовану особливу точку однозначної аналітичної функції $f(z)$ будемо називати:

1) усувною, якщо в розкладі (2.23) $c_k = 0$ для $k = -1; -2; -3; \dots$, тобто відсутні від'ємні степені $(z - z_0)$.

Функція має скінчену границю в усувній точці: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$

2) полюсом порядку (або кратності) $m \geq 1$, якщо в розкладі (2.23) $c_{-m} \neq 0$, $c_k = 0$ для $k = -(m+1); -(m+2); -(m+3); \dots$, при цьому

поліос називається **простим**, якщо $m=1$, і кратним при $m>1$. В цьому випадку: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

Якщо $z = z_0$ поліос m -го порядку функції $f(z)$, то в деякому околі цієї точки має місце $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z)$, де $g(z)$ аналітична в точці $z = z_0$ та $g(z_0) \neq 0$. Для того, щоб $z = z_0$ була нулем m -го порядку аналітичної функції $F(z)$, необхідно і достатньо, щоб для функції $f(z) = \frac{1}{F(z)}$ точка $z = z_0$ була поліосом m -го порядку.

3) істотно особливою точкою, якщо в розкладі (2.23) нескінченна кількість коефіцієнтів $c_k \neq 0$ ($k = -1; -2; -3; \dots$), членів з від'ємними степенями $(z - z_0)$. В як завгодно малому околі істотно особливої точки функція $f(z)$ приймає значення, близькі до довільного числа (скінченного чи нескінченного). Границя функція $f(z)$ в істотно особливій точці не існує.

2.9 Лишки

Лишком функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці $z = z_0$ називається коефіцієнт c_{-1} ряду Лорана (1.23), тобто

$$\text{Res } f(z_0) = c_{-1} \quad (2.24)$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_g f(z) dz, \quad (2.25)$$

де g – коло з центром в точці z_0 достатньо малого радіуса (воно не повинно виходити за межі області аналітичності і не містить всередині інших особливих точок).

Якщо z_0 – **усувна особлива точка**, то $\text{Res } f(z_0) = 0$

Якщо z_0 – **поліос m -го порядку**

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right) \quad (2.26)$$

Якщо z_0 – **простий поліос**:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0) f(z)) \quad (2.27)$$

Якщо функція $f(z) = \frac{j(z)}{g(z)}$, $j(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, тобто $z = z_0$

– простий полюс для $f(z)$, тоді

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{j(z_0)}{g'(z_0)} \quad (2.28)$$

При застосуванні лишків до обчислення інтегралів, використовують основну теорему про лишки:

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною на межі Γ області G і в самій області G , крім скінченного числа ізольованих точок $z_1, z_2, \dots, z_n$, тоді:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) \quad (2.29)$$

Приклад 2.17

Обчислити інтеграл $\int_{|z|=2} \frac{1-e^z}{z^2-z} dz$

Розв'язок. Функція $f(z)$ в колі $|z| \leq 2$ має ізольовані особливі точки $z=0$ та $z=1$. Точка $z=0$ є усунюю особливою точкою $f(z)$, тому що:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-e^z}{z^2-z} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1-e^z)'}{(z^2-z)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-e^z}{2z-1} = 1$$

$$\operatorname{Res} f(0) = 0$$

Точка $z=1$ – простий полюс, за формулою (2.27):

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-e^z)(z-1)}{z(z-1)} = 1-e.$$

За формулою (2.29):

$$\int_{|z|=2} \frac{1-e^z}{z^2-z} dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1)) = 2\pi i (1-e)$$

Приклад 2.18

Обчислити інтеграл $\int_{|z|=3} \frac{z+i}{(z+1)^2(z-i)} dz$

Розв'язок.

$z = i$ – простий полюс; за формулою (2.27):

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z+i)(z-i)}{(z+1)^2(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z+i)}{(z+1)^2} = 1$$

$z = -1$ – полюс другого порядку, за формулою (2.26):

$$\operatorname{Res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z+i)(z+1)^2}{(z+1)^2(z-i)} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{z+i}{z-i} \right)' = - \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2i}{(z-i)^2} = -1$$

За формулою (2.29):

$$\int_{|z|=3} \frac{z+i}{(z+1)^2(z-i)} dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(-1)) = 2\pi i (1 + (-1)) = 0$$

Приклад 2.19

Обчислити інтеграл $\int_{|z-2|=1} (1+z+z^2) e^{\frac{1}{z-2}} dz$

Розв'язок.

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Лорана за степенями $(z-2)$

$$\begin{aligned} (1+z+z^2) e^{\frac{1}{z-2}} &= (7+5(z-2)+(z-2)^2) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^k k!} = \\ &= (z-2)^2 + 6(z-2) + \frac{25}{2} + \frac{29}{3} \frac{1}{z-2} + \dots \end{aligned}$$

За формулою (2.24)

$$\operatorname{Res} f(2) = \frac{29}{3}$$

$$\int_{|z-2|=1} (1+z+z^2) e^{\frac{1}{z-2}} dz = 2\pi i \cdot \frac{29}{3}$$

Приклад 2.20

Обчислити інтеграл $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{4z-p} dz$

Розв'язок.

Знаменник функції $\frac{\operatorname{ctg} z}{4z-p} = \frac{\cos z}{(4z-p) \sin z}$ дорівнює нулеві в точках

$z = \frac{p}{4}, z = kp, k = 0, \pm 1; \pm 2; \dots$. Всі ці точки прості полюси

$\left(\sin kp = 0, (\sin z)' \Big|_{z=kp} = \cos kp \neq 0 \right)$. Всередину кола $|z|=1$

попадають тільки полюси $z = \frac{p}{4}$ та $z = 0$. За формулою (2.28):

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg} z}{(4z-p)'} \Big|_{z=\frac{p}{4}} = \frac{1}{4} \quad \operatorname{Res} f(0) = \frac{\frac{\cos z}{4z-p}}{(\sin z)'} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{p}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{4z-p} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p} \right).$$

3 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

3.1 Визначення перетворення Лапласа. Оригінал та зображення функції

Перетворенням Лапласа функції $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної p , яка задається рівністю

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (3.1)$$

Інтеграл Лапласа — невласний інтеграл, що залежить від комплексного параметра p .

Оригіналом називається функція $f(t)$, яка задовольняє таким умовам:

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$ $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$
- 2) існують сталі $S > 0$ і $M > 0$ такі, що $|f(t)| \leq M e^{St}$, $\forall t > 0$, при цьому число S називається показником росту функції $f(t)$;
- 3) на будь-якому скінченному інтервалі $[a, b]$ функція $f(t)$ може мати скінчену кількість точок розриву першого роду.

Найпростішою функцією-оригіналом є одинична *функція Хевісайда* (рис. 3.1):

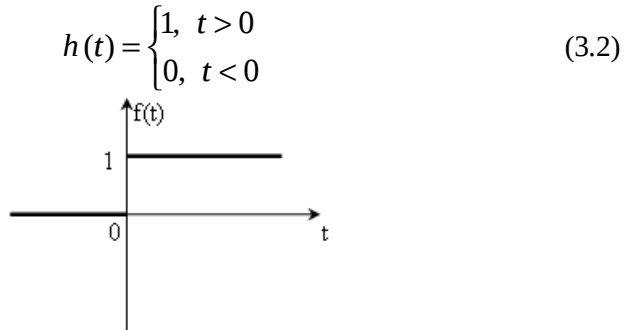


Рисунок 3.1

Вочевидь, якщо довільну функцію $j(t)$ помножити на одиничну, то отримаємо наступне:

$$j(t) \cdot h(t) = \begin{cases} j(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Якщо $f(t)$ – оригінал, то інтеграл Лапласа $F(p)$ збігається абсолютно і рівномірно на півплощині $\text{Re } p > S$.

Функція $F(p)$ – аналітична на цій півплощині та називається *зображенням функції $f(t)$* .

Співвідношення між оригіналом $f(t)$ та зображенням $F(p)$

символічно записується у вигляді $f(t) \overset{\cdot}{\leftarrow} F(p)$, або $f(t) \overset{\cdot}{=} F(p)$.

Надалі позначатимемо: $f(t)$ – оригінал, $F(p)$ – відповідне зображення.

3.2 Властивості перетворення Лапласа

Лінійність

$\sum_{k=1}^n c_k \dot{f}_k(t) \dot{=} \sum_{k=1}^n c_k \dot{F}_k(p)$, де $\operatorname{Re}(p) > \max(S_1, S_2, \dots, S_n)$ для будь-яких сталих c_k , для $k = 1, 2, \dots, n$.

Теорема подібності

Для довільної сталої $a > 0$: $\dot{f(at)} \dot{=} \frac{1}{a} \dot{F}\left(\frac{p}{a}\right)$, де $\operatorname{Re} p > aS$.

Теорема зміщення

$$\dot{e^{at} f(t)} \dot{=} \dot{F}(p-a), \text{ де } \operatorname{Re}(p-a) > S \quad (3.3)$$

Теорема запізнення

$$\dot{f(t-t)h(t-t)} \dot{=} \dot{e^{-pt} F(p)}, \text{ де } \operatorname{Re} p > S, t > 0 \quad (3.4)$$

Розглянемо функцію $g(t) = \begin{cases} f(t-t), & t \geq t \\ 0, & t < t \end{cases}$, де $t > 0$

Графік $g(t)$ одержується з графіка $f(t)$ зсувом останнього на значення t вздовж вісі t (рис. 3.2 та рис. 3.3).

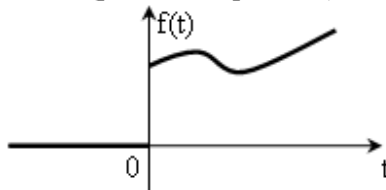


Рисунок 3.2

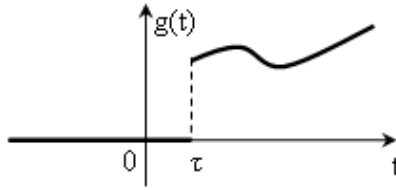


Рисунок 3.3

Таким чином, якщо функція $f(t)$ визначає стан деякого процесу в часі, то функція $g(t)$ описує той самий процес, який почався з запізненням t .

Функція Хевісайда із запізненням:

$$h(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases} \quad (3.5)$$

Теорема диференціювання оригіналу

$$\dot{f}^{(k)}(t) \doteq p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} \dot{f}'(0) - \dots - \dot{f}^{(k-1)}(0) \quad (3.6)$$

$$\text{Зокрема } \dot{f}'(t) \doteq pF(p) - f(0) \quad (3.7)$$

Теорема диференціювання зображення

$$(-t)^n \dot{f}(t) \doteq \frac{d^n F}{dp^n} \quad (3.8)$$

Теорема інтегрування оригіналу

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{1}{p} F(p) \quad (3.9)$$

Теорема інтегрування зображення

$$\frac{1}{t} \dot{f}(t) \doteq \int_p^\infty F(p) dp \quad (3.10)$$

Теорема про згортку (теорема множення або теорема Бореля)

Добуток двох зображень також є зображенням

$$F(p)\Phi(p) \doteq \int_0^t f(t)j(t-t)dt, \quad (3.11)$$

Інтеграл в правій частині називається *згорткою* функцій $f(t)$ і $j(t)$. Позначають її $f(t) * j(t)$.

Інтеграл Дюамеля

Якщо $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$ і $f(t)$ та $g(t)$ неперервно диференційовані по t на інтервалі $(0, \infty)$, то

$$pF(p)G(p) \doteq \frac{d}{dt} \int_0^t f(t)g(t-t)dt = f(t)g(0) + \int_0^t f(t)g'(t-t)dt \quad (3.12)$$

Диференціювання та інтегрування за параметром

Якщо $f(t,a) \doteq F(p,a)$ і функції $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)da$ є оригіналами по змінній t , то

$$\frac{\partial f(t,a)}{\partial a} \doteq \frac{\partial F(p,a)}{\partial a} \text{ та } \int_{a_1}^{a_2} f(t,a)da \doteq \int_{a_1}^{a_2} F(p,a)da \quad (3.13)$$

Теорема обертання

Якщо $f(t)$ – оригінал, а $F(p)$ – його зображення, то у будь-якій точці неперервності функції $f(t)$ є справедливою формула обернення Мелліна

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S-iw}^{S+iw} F(p)e^{pt}dp, \quad (3.14)$$

де інтегрування виконується по будь-якій прямій $\operatorname{Re} p > S$.

Ця теорема вирішує задачу знаходження оригіналу за даним зображенням.

Приклад 3.1

Знайти зображення кусково-неперервної функції, заданої графічно на рис. 3.4.

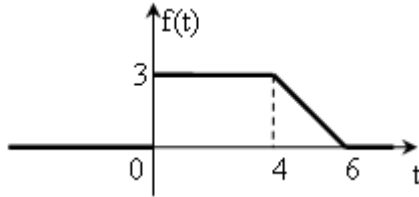


Рисунок 3.4

Розв'язок:

Запишемо задану функцію в аналітичному вигляді:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3, & 0 \leq t < 4 \\ 9 - \frac{3}{2}t, & 4 \leq t < 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

Застосовуючи функцію Хевісайда (3.2) та її запізнення (3.5) поступово запишемо $f(t)$.

Спочатку запишемо функцію $f_1(t)$, зображену на рис. 3.5

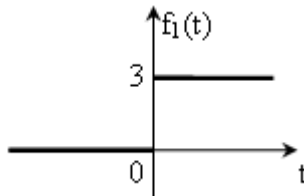


Рисунок 3.5

$$f_1(t) = 3h(t).$$

Далі розглянемо функцію $f_2(t)$, яка при $t < 4$ співпадає з $f_1(t)$, а при $t > 4$ обертається у нуль (рис. 3.6). $f_2(t) = 3h(t) - 3h(t - 4)$

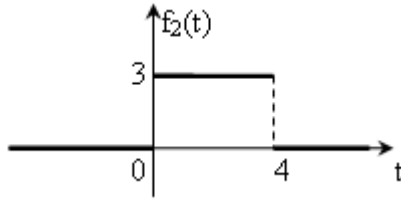


Рисунок 3.6

Але при $t > 4$ з'являється залежність $f(t) = 9 - \frac{3}{2}t$ (рис. 3.7).

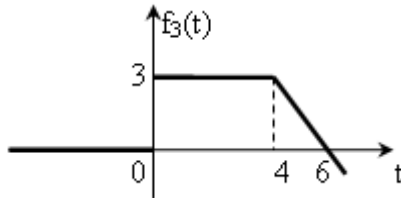


Рисунок 3.7

Тому $f_3(t) = 3h(t) - 3h(t-4) + \left(9 - \frac{3}{2}t\right)h(t-4)$.

Для $t > 6$ ця залежність зникає, тобто наша шукана функція набуває вигляду, що наведений на рис. 3.4.

Таким чином

$$f(t) = 3h(t) - 3h(t-4) + \left(9 - \frac{3}{2}t\right)h(t-4) - \left(9 - \frac{3}{2}t\right)h(t-6).$$

Щоб знайти зображення цієї функції, використовуючи теорему запізнення (3.4), представимо її у вигляді:

$$f(t) = 3h(t) + j_1(t-4)h(t-4) + j_2(t-6)h(t-6)$$

Тобто

$$\begin{aligned} f(t) &= 3h(t) + \left(6 - \frac{3}{2}(t-4) - 6\right)h(t-4) - \left(9 - \frac{3}{2}(t-6) - 9\right)h(t-6) = \\ &= 3h(t) - \frac{3}{2}(t-4)h(t-4) + \frac{3}{2}(t-6)h(t-6) \end{aligned}$$

Використовуючи таблицю зображень-оригіналів:

$$\frac{3}{2}t \stackrel{\bullet}{=} \frac{3}{2p^2}$$

За теоремою запізнення (3.4)

$$f(t) = \frac{3}{p} - \frac{3}{2p^2} e^{-4p} + \frac{3}{2p^2} e^{-6p}$$

3.3 Знаходження оригінала по зображенню

Для знаходження оригінала $f(t)$ по відомому зображенню $F(p)$ застосовують наступні прийоми:

1. Якщо $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то його розкладають на суму простих дробів і для кожного з них знаходять оригінали.

Приклад 3.2

Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{1}{p(p-2)(p^2+1)}$

Розв'язок:

Розкладемо $F(p)$ на суму простих дробів:

$$F(p) = \frac{1}{p(p-2)(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$$

Далі знаходимо коефіцієнти A, B, C, D і отримаємо розклад

$$F(p) = -\frac{1}{2} \frac{1}{p} + \frac{1}{10} \frac{1}{p-2} + \frac{2}{5} \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+1}$$

Використовуючи властивість лінійності і таблицю зображень для елементарних функцій, що наведена в додатку А, маємо оригінал:

$$f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10} e^{2t} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t$$

2. Застосування теореми про згортку

Приклад 3.3

Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$

Розв'язок:

$$\frac{1}{(p^2+1)} \stackrel{\bullet}{=} \sin t$$

За формулою (3.11)

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{(p^2+1)} = \frac{1}{(p^2+1)} \cdot \frac{1}{(p^2+1)} \stackrel{\bullet}{=} \int_0^t \sin(t-t) \sin t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos t - \cos(2t-t)) dt = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{4} \sin(2t-t) \Big|_{t=0}^{t=t} = \\ &= \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t \end{aligned}$$

3. Застосування теореми про запізнення

Приклад 3.4

Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$

Розв'язок:

За теоремою про запізнення (3.4), якщо $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то

$f(t-t) \stackrel{\bullet}{=} e^{-pt} F(p)$ при $t > 0$. В даному прикладі $t = 2$,

$$F(p) = \frac{1}{p-1} \stackrel{\bullet}{=} e^t h(t). \text{ Тому } \frac{e^{-2p}}{p-1} \stackrel{\bullet}{=} e^{t-2} h(t-2).$$

4. З теореми обертання випливає формула

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \text{Res}(F(p)e^{pt}, p_k), \quad (3.15)$$

де p_k – особливі точки функції $F(p)$.

Зокрема, якщо $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, а всі

полюси p_k функції $F(p)$ прості, то остання формула матиме вигляд

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.16)$$

Приклад 3.5

Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$

Розв'язок:

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+3)}$$

Функція $F(p)$ має прості полюси $p_1 = -1$, $p_2 = -3$.

Якщо $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$, то $Q(p) = 1$, $R(p) = p^2 + 4p + 3$

$$R'(p) = 2p + 4$$

$$R'(-1) = 2, \quad R'(-3) = -2.$$

Тоді за формулою (3.16):

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$$

Приклад 3.6

Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}$

Розв'язок:

Функція $F(p)$ має єдину особливу точку $p = -1$. Це полюс другого порядку. Знайдемо лишок функції $F(p)e^{pt}$ в цій точці

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=-1} \left(\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2} \right) &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left(\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2} \cdot (p+1)^2 \right) = \lim_{p \rightarrow -1} (pe^{pt})'_p = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} (e^{pt} + pte^{pt}) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t} \end{aligned}$$

За формулою (3.15) $f(t) = (1-t)e^{-t}$.

3.4 Розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

Нехай маємо диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t) \quad (3.17)$$

де $a_0, a_1, a_2 - \text{const}$, $a_0 \neq 0$, $f(t)$ – функція-оригінал, $x = x(t)$ – невідома функція-оригінал.

Будемо шукати розв'язок рівняння (3.17), який задовольняє початковим умовам:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0 \quad (3.18)$$

Нехай $\dot{x(t)} = X(p)$, $\dot{f(t)} = F(p)$.

Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин рівняння (3.17), враховуючи теорему про диференціювання оригінала (3.6) і властивість лінійності перетворення Лапласа.

$$\dot{x''(t)} = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - px_0 - x'_0$$

$$\dot{x'(t)} = pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0$$

$$a_0(p^2 X(p) - px_0 - x'_0) + a_1(pX(p) - x_0) + a_2 X(p) = F(p)$$

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)X(p) = F(p) + a_0 px_0 + a_0 x'_0 + a_1 x_0$$

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 px_0 + a_0 x'_0 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} \quad (3.19)$$

Отримали операторний розв'язок рівняння. Далі по зображенню $X(p)$ знаходять оригінал $x(t)$, який є розв'язком задачі Коші (3.17)–(3.18).

Аналогічно розв'язують лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку.

Приклад 3.7

Розв'язати задачу Коші $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$

Розв'язок:

$$\dot{x}(t) = X(p).$$

$$\ddot{x''}(t) = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + p - 1$$

$$\dot{\cos t} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

Операторне рівняння має вигляд

$$p^2 X(p) + p - 1 + X(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$X(p)(p^2 + 1) = \frac{p}{p^2 + 1} - p + 1$$

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{p - 1}{p^2 + 1}$$

Знайдемо оригінал для $X(p)$.

$$\sin wt = \frac{w}{p^2 + w^2}, \quad \sin t = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$t \sin wt = \frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}, \quad t \sin t = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$$

Тому $\dot{X}(p) = \frac{1}{2} t \sin t - \cos t + \sin t$. Це і є розв'язок задачі Коші, тобто

$$x(t) = \frac{1}{2} t \sin t - \cos t + \sin t$$

4. РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

4.1 Завдання 1

Обчислити подвійні інтеграли.

$$1a) \iint_D (x + 2y) dx dy \quad D: x = 1; x = 2; y = x; y = \frac{1}{2}x.$$

$$2a) \iint_D (5 - 2y) dx dy \quad D: y = x^2; y = 4; x = 0.$$

$$3a) \iint_D e^{x+y} dx dy \quad D: y = x; x = 0; y = 1.$$

$$4a) \iint_D (x - 4y) dx dy \quad D: y = 2 - x^2; y = x^2.$$

$$5a) \iint_D \cos(x + y) dx dy \quad D: y = x; y = 0; x = \frac{\pi}{2}.$$

$$6a) \iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy \quad D: y = x; y = 2x; x = 1.$$

$$7a) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad D: y = x; x + y = 2; y = 0.$$

$$8a) \iint_D \sqrt{xy} dx dy \quad D: x = 0; y = 0; x + y = 1.$$

$$9a) \iint_D (x + y) dx dy \quad D: y = x^2; y = \sqrt{x}.$$

$$10a) \iint_D (3 - y) dx dy \quad D: x^2 = 2y; y = 2.$$

$$11a) \iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy \quad D: y = x^2; y = 0; x = 1.$$

$$12a) \iint_D (\sqrt{x} - y) dx dy \quad D: y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4.$$

- 13a) $\iint_D (x - 6y) dx dy$ $D : y = x^2; y = x.$
- 14a) $\iint_D (x^2 + 3y^2) dx dy$ $D : y = x; x + y = 2; x = 0.$
- 15a) $\iint_D (x + 2) dx dy$ $D : y = \ln x; y = 0; x = e.$
- 16a) $\iint_D (2y - 4y) dx dy$ $D : x = 3y; x = 1; x = 2.$
- 17a) $\iint_D (x + \sqrt[3]{y}) dx dy$ $D : x = 0; y = x; y = 1.$
- 18a) $\iint_D (x + y + 1) dx dy$ $D : y = x; y = 2x; y = 2.$
- 19a) $\iint_D \cos(x + 2y) dx dy$ $D : y = x; y = \frac{\pi}{2}; x = 0.$
- 20a) $\iint_D x^2 y dx dy$ $D : y = x^2; y = \sqrt{x}.$
- 21a) $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ $D : y = x; y = \frac{1}{2}x; x = 2.$
- 22a) $\iint_D e^y dx dy$ $D : x + y = 2; y = x; x = 0.$
- 23a) $\iint_D (x^2 + 3y^2) dx dy$ $D : y = x; y = x^2.$
- 24a) $\iint_D (2y + 1) dx dy$ $D : y = x; y = -x; x = 1.$
- 25a) $\iint_D \frac{x}{y^2} dx dy$ $D : x = 3; y = x; xy = 1.$
- 26a) $\iint_D \frac{y}{x^2} dx dy$ $D : x + y = 1; y = 0; x = 0.$

- 27a) $\iint_D \sin(x+y) dx dy$ $D: y=0; y=x; x=\pi.$
- 28a) $\iint_D (2x+3y) dx dy$ $D: x=1-y^2; x=0.$
- 29a) $\iint_D (\sqrt[3]{y} + \sqrt{x}) dx dy$ $D: y=x; y=\frac{1}{3}x; x=1.$
- 30a) $\iint_D x dx dy$ $D: y=e^x; y=e; x=0.$
- 16) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2+R^2} dx dy$ $D: x^2+y^2=R^2; x^2+y^2=3R^2.$
- 26) $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy$ $D: x^2+y^2=R^2; (x \geq 0; y \geq 0).$
- 36) $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$ $D: x^2+y^2=2x.$
- 46) $\iint_D e^{1+x^2+y^2} dx dy$ $D: y=\sqrt{1-x^2}; y=0.$
- 56) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ $D: x^2+y^2=R^2; (x \geq 0; y \geq 0).$
- 66) $\iint_D \frac{dx dy}{x^2+y^2+R^2}$ $D: y=\sqrt{1-x^2}; y=0.$
- 76) $\iint_D \sqrt{1+2x^2+2y^2} dx dy$ $D: x^2+y^2=4.$
- 86) $\iint_D (1+\frac{y^2}{x^2}) dx dy$ $D: x^2+y^2=1; y=x; y=0; (y \geq 0).$
- 96) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ $D: x^2+y^2=4; x^2+y^2=2x.$
- 106) $\iint_D \ln(x^2+y^2) dx dy$ $D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=e^2$

$$116) \iint_D \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad D: x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}; \quad x^2 + y^2 = \pi^2.$$

$$126) \iint_D (2 + x^2 + y^2) dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 4x.$$

$$136) \iint_D (3x + 2y) dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; x = 0; (y \geq 0).$$

$$146) \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$$

$$D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; y = x; y = \frac{1}{\sqrt{3}}x; (y \geq 0).$$

$$156) \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9; y = -x; (x \geq 0).$$

$$166) \iint_D x dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 2y.$$

$$176) \iint_D y dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 2x.$$

$$186) \iint_D (x + y) dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 6x; x^2 + y^2 = 2x.$$

$$196) \iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 4; y = 0; (y \geq 0).$$

$$206) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 2} dx dy$$

$$D: x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 9; y = x; y = -x; (x \geq 0).$$

$$216) \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 2x.$$

$$226) \iint_D (3x - 2y) dx dy \quad D: x^2 + y^2 = x.$$

$$236) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{3 + x^2 + y^2}} \quad D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4.$$

$$246) \iint_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2} \quad D: x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 2y.$$

$$256) \iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D: x^2 + y^2 = 4x.$$

$$266) \iint_D (2x + 5y) dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 6x.$$

$$276) \iint_D y dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4.$$

$$286) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}} \quad D: x^2 + y^2 = 6y.$$

$$296) \iint_D (2 + x^2 + y^2) dx dy \quad D: x^2 + y^2 = 4x; x^2 + y^2 = 2x.$$

$$306) \iint_D (3 + x + y) dx dy$$

$$D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; y = x; y = \sqrt{3}x; (y \geq 0).$$

4.2 Завдання 2

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями, зробити рисунок

1. $z^2 = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 2x$; $z = 0$

2. $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$; $z = 1$; $x > 0$; $y > 0$

3. $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$, $y = 2x$, $y = 4x$, $x = 3$ ($z > 0$)

4. $x^2 + y^2 = 9$; $z = x$; $z = 0$; $z > 0$

5. $z = x^2 + y^2$; $z = x^2 + 2y^2$; $y = x$; $x = 1$

6. $x^2 + y^2 = 2z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; $z > 0$
7. $z = 5y$; $x^2 + y^2 = 16$; $z = 0$;
8. $2x = y^2 + z^2$; $x = 0$; $y = 2$; $z = 3$; $y = 0$; $z = 0$
9. $y = x$; $y = 0$; $x = 1$; $z = x^2 + 5y^2$; $z = 0$
10. $y = x$; $y = 0$; $x = 1$; $z = \sqrt{xy}$; $z = 0$
11. $y = 2x$; $y = 0$; $x = 2$; $z = xy$; $z = 0$
12. $z = x^2 + 3y^2$; $z = 0$; $y = x$, $y = 0$, $x = 1$
13. $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 2 - x^2 - y^2$
14. $z = 10(x^2 + y^2) + 1$; $z = 1 - 20y$
15. $2z = x^2 + y^2$; $z = 0$; $x = 2$; $y = 3$; $x = 0$; $y = 0$
16. $x^2 + y^2 = 4z^2$; $z = 0$; $y = x$; $y = 8x$; $x = 2$; $z > 0$
17. $x^2 = y^2 + z^2$; $y^2 + z^2 = 2y$; $x = 0$
18. $y^2 + z^2 = 1$; $x = 0$; $x = 1$; $y > 0$; $z > 0$
19. $y^2 + z^2 = x^2$, $x = 0$, $z = 2y$, $z = 4y$, $y = 3$ ($x > 0$);
20. $y^2 + z^2 = 9$; $x = y$; $x = 0$; $x > 0$
21. $x = y^2 + z^2$; $x = y^2 + 2z^2$; $z = y$; $y = 1$
22. $y^2 + z^2 = 2x$; $y^2 + z^2 + x^2 = 3$; $x > 0$
23. $x = 5z$; $y^2 + z^2 = 16$; $x = 0$
24. $y^2 + z^2 = 4y$; $x = 0$; $x = y$
25. $z = y$; $z = 0$; $y = 1$; $x = y^2 + 5z^2$; $x = 0$
26. $z = y$; $z = 0$; $y = 1$; $x = \sqrt{yz}$; $x = 0$
27. $z = 2y$; $z = 0$; $y = 2$; $x = yz$; $x = 0$
28. $x = y^2 + 3z^2$; $x = 0$; $z = y$, $z = 0$, $y = 1$

$$29. \quad x=3\sqrt{z^2+y^2} \quad y^2+z^2; \quad x=2-y^2-z^2$$

$$30. \text{ a) } x=10(y^2+z^2)+1; \quad x=1-20z$$

4.3 Завдання 3

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_l f(x, y) dl$ де l -

відрізок прямої від точки $A(x_1, y_1)$ до точки $B(x_2, y_2)$.

- 1) $f(x, y) = 2x + 3y$; $A(1, -1); B(2, 0)$.
- 2) $f(x, y) = 3x - 2y$; $A(2, 1); B(2, -1)$.
- 3) $f(x, y) = 4x + 3y$; $A(-1, 0); B(2, 1)$.
- 4) $f(x, y) = -4x + 2y$; $A(-3, 1); B(2, 2)$.
- 5) $f(x, y) = x + 2y$; $A(-5, 0); B(2, 1)$.
- 6) $f(x, y) = -x + 3y$; $A(-4, 1); B(2, -1)$.
- 7) $f(x, y) = 2x - y$; $A(-3, 2); B(-1, 1)$.
- 8) $f(x, y) = 3x - 5y$; $A(-2, 2); B(1, 1)$.
- 9) $f(x, y) = 3x + 5y$; $A(0, 2); B(5, 3)$.
- 10) $f(x, y) = -4x + 3y$; $A(-3, 1); B(4, 2)$.
- 11) $f(x, y) = 5x + 2y$; $A(-2, 3); B(3, 2)$.
- 12) $f(x, y) = -5x + 2y$; $A(2, -3); B(3, -2)$.
- 13) $f(x, y) = 4x - 5y$; $A(-4, 2); B(2, 1)$.
- 14) $f(x, y) = -4x + 5y$; $A(1, 2); B(3, 4)$.
- 15) $f(x, y) = 6x - 2y$; $A(-1, 3); B(3, 3)$.
- 16) $f(x, y) = -6x + 2y$; $A(1, 2); B(4, 3)$.
- 17) $f(x, y) = -5x + 6y$; $A(-3, 7); B(2, 3)$.
- 18) $f(x, y) = 5x - 6y$; $A(2, 5); B(3, 2)$.
- 19) $f(x, y) = 7x + 2y$; $A(1, 1); B(3, 2)$.

- 20) $f(x, y) = -7x + 3y$; $A(-1, 2) ; B(3, -2)$.
- 21) $f(x, y) = 6x + 2y$; $A(-1, 3) ; B(2, -3)$.
- 22) $f(x, y) = -x + 2y$; $A(0, -3) ; B(1, 2)$.
- 23) $f(x, y) = x - 2y$; $A(3, -2) ; B(2, 1)$.
- 24) $f(x, y) = -2x + 3y$; $A(4, 0) ; B(1, 3)$.
- 25) $f(x, y) = -3x - 2y$; $A(4, 1) ; B(2, -1)$.
- 26) $f(x, y) = 7x + 3y$; $A(-5, 3) ; B(3, 2)$.
- 27) $f(x, y) = -4x + 3y$; $A(-4, 1) ; B(-3, 2)$.
- 28) $f(x, y) = -3x + 5y$; $A(-3, 2) ; B(2, 3)$.
- 29) $f(x, y) = -7x + 2y$; $A(1, 3) ; B(4, 4)$.
- 30) $f(x, y) = 7x + 5y$; $A(-3, 2) ; B(-4, 2)$.

4.4 Завдання 4

Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

- 1) $P(x, y) = x + y$; $Q(x, y) = xy$;
 $l : y = x + 1$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=2$.
- 2) $P(x, y) = x + 2y$; $Q(x, y) = -x + y$;
 $l : y = 3x + 2$; від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=2$.
- 3) $P(x, y) = 2x - y$; $Q(x, y) = x + y$;
 $l : y = x + 2$; від точки з $x_1=2$ до точки з $x_2=3$.
- 4) $P(x, y) = 3x + y$; $Q(x, y) = 2x - y$;
 $l : y = x^2$; від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=1$.
- 5) $P(x, y) = 2x - y$; $Q(x, y) = x - y$;
 $l : y = \sqrt{x}$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=4$.
- 6) $P(x, y) = x + y$; $Q(x, y) = 2x + y$;

$l: x = 3 \cos t; y = \sin t$; від точки з $t_1=0$ до точки з $t_2=\frac{p}{2}$.

7) $P(x, y) = 2x + y; Q(x, y) = -2x + y$;

$l: x = 2 \cos t; y = 2 \sin t$; від точки з $t_1=0$ до точки з $t_2=p$.

8) $P(x, y) = 3x + 2y; Q(x, y) = x + 2y$;

$l: y = 3x + 1$; від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=2$.

9) $P(x, y) = 3x - 2y; Q(x, y) = 5x + 1$;

$l: y = -x + 1$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=3$.

10) $P(x, y) = xy; Q(x, y) = 2x - y$;

$l: y = -2x + 3$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=2$.

11) $P(x, y) = x^2 + y; Q(x, y) = 3x - 2y$;

$l: y = -x + 3$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=3$.

12) $P(x, y) = x + y^2; Q(x, y) = x + 2$;

$l: y = 1 - x^2$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=1$.

13) $P(x, y) = x - 2y; Q(x, y) = xy$;

$l: y = \sqrt{x}$; від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=4$.

14) $P(x, y) = x + 3y; Q(x, y) = x^2 y$;

$l: y = x^2 + 1$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=3$.

15) $P(x, y) = 3xy; Q(x, y) = x + y$;

$l: x = 2 \cos t; y = 2 \sin t$; від точки з $t_1=0$ до точки з $t_2=\frac{p}{2}$.

16) $P(x, y) = 4x; Q(x, y) = -x + y$;

$l: y = 2x - 3$; від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=3$.

17) $P(x, y) = -2y; Q(x, y) = 2x + y$;

$l: y = -x + 2$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=4$.

$$18) P(x, y) = -x + 2y; Q(x, y) = xy;$$

$$l: x = 3 \cos t; y = 2 \sin t; \text{ від точки з } t_1=0 \text{ до точки з } t_2=\frac{\pi}{2}.$$

$$19) P(x, y) = -2x + y; Q(x, y) = x^2 y;$$

$$l: y = 3x - 2; \text{ від точки з } x_1=1 \text{ до точки з } x_2=3.$$

$$20) P(x, y) = -3x + 2y; Q(x, y) = x + 2y;$$

$$l: y = -2x + 3; \text{ від точки з } x_1=0 \text{ до точки з } x_2=2.$$

$$21) P(x, y) = -2y + 5; Q(x, y) = xy;$$

$$l: y = -x + 4; \text{ від точки з } x_1=0 \text{ до точки з } x_2=4.$$

$$22) P(x, y) = 2x - 3; Q(x, y) = x - y;$$

$$l: y = -2x + 1; \text{ від точки з } x_1=1 \text{ до точки з } x_2=2.$$

$$23) P(x, y) = -2x + y; Q(x, y) = x - 2y;$$

$$l: y = -3x + 2; \text{ від точки з } x_1=0 \text{ до точки з } x_2=3.$$

$$24) P(x, y) = -3x + 4y; Q(x, y) = xy^2;$$

$$l: y = -2x + 5; \text{ від точки з } x_1=0 \text{ до точки з } x_2=4.$$

$$25) P(x, y) = x + 4y; Q(x, y) = x;$$

$$l: x = 2 \cos t; y = \sin t; \text{ від точки з } t_1=0 \text{ до точки з } t_2=\frac{\pi}{2}.$$

$$26) P(x, y) = -x + 2y; Q(x, y) = xy^2;$$

$$l: y = x + 1; \text{ від точки з } x_1=1 \text{ до точки з } x_2=2.$$

$$27) P(x, y) = -5x + 2y; Q(x, y) = x^2 y;$$

$$l: y = -2x + 1; \text{ від точки з } x_1=2 \text{ до точки з } x_2=3.$$

$$28) P(x, y) = -3x + y; Q(x, y) = x - y;$$

$$l: y = -x + 4; \text{ від точки з } x_1=1 \text{ до точки з } x_2=4.$$

$$29) P(x, y) = xy^2; Q(x, y) = 2x + y;$$

$$l: y = x - 2; \text{ від точки з } x_1=0 \text{ до точки з } x_2=2.$$

$$30) P(x, y) = 5x - 7y; Q(x, y) = x^2 y;$$

$l: y = 2x - 1$; від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=3$.

4.5 Завдання 5

Відновити функцію $u = u(x, y)$ по її повному диференціалу

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$$1) P(x, y) = 2xy + e^y; \quad Q(x, y) = x^2 + xe^y.$$

$$2) P(x, y) = 3x^2 y + y^2 + \cos(x + y); \quad Q(x, y) = x^3 + 2xy + \cos(x + y).$$

$$3) P(x, y) = 2xe^y + \cos y + y; \quad Q(x, y) = x^2 e^y - x \sin y + x.$$

$$4) P(x, y) = 2x \sin y + y^3 + 2; \quad Q(x, y) = x^2 \cos y + 3xy^2.$$

$$5) P(x, y) = y^3 e^x + y^2 + 1; \quad Q(x, y) = 3y^2 e^x + 2xy + 2.$$

$$6) P(x, y) = 2x \cos^2 y + e^{xy} y; \quad Q(x, y) = -2x^2 \cos y \cdot \sin y + e^{xy} x + 3.$$

$$7) P(x, y) = \sin^2 y + 3e^{3x}; \quad Q(x, y) = \sin^2 y + 2(x + y) \cos y \cdot \sin y + 2.$$

$$8) P(x, y) = 6xy^2 + 2x; \quad Q(x, y) = 6x^2 y + 4y.$$

$$9) P(x, y) = 2x \cos 2y - 2y^2 \sin 2x; \quad Q(x, y) = -2x^2 \sin 2y + 2y \cos 2x.$$

$$10) P(x, y) = 2xe^{2y} + 2y^2 e^{2x} + 2; \quad Q(x, y) = 2x^2 e^{2y} + 2ye^{2x}.$$

$$11) P(x, y) = y^5 + 5x^4 y - 2; \quad Q(x, y) = 5xy^4 + x^5 + 3.$$

$$12) P(x, y) = 3x^2 y^3 + y^2 + 2xy; \quad Q(x, y) = 3x^3 y^2 + 2xy + x^2.$$

$$13) P(x, y) = y^2 + 4x^3 y + 7; \quad Q(x, y) = 2xy + x^4 - 2.$$

$$14) P(x, y) = 2xy^3 + 3x^2 y^2 + 7y; \quad Q(x, y) = 3x^2 y^2 + 2x^3 y + 7x.$$

$$15) P(x, y) = 3x^2 y^2 + y^3 + 2y; \quad Q(x, y) = 2x^3 y + 3xy^2 + 2x.$$

$$16) P(x, y) = 4x^3 y^2 + 2xy^4 + 3; \quad Q(x, y) = 2x^4 y + 4x^2 y^3 - 2.$$

$$17) P(x, y) = 3x^2 y^2 + 2xy - 7y; \quad Q(x, y) = 2x^3 y + x^2 - 7x.$$

$$18) P(x, y) = 6x^2 y + 6xy^2 - 1; \quad Q(x, y) = 2x^3 + 6x^2 y + 1.$$

$$19) P(x, y) = 14xy^3 - 5y; \quad Q(x, y) = 21x^2 y^2 - 5x + 2.$$

$$20) P(x, y) = 20x^3 y^2 - 3y + 1; \quad Q(x, y) = 10x^4 y - 3x - 2.$$

- 21) $P(x, y) = 9x^2y^4 - 5y^2$; $Q(x, y) = 12x^3y^3 - 10xy + 2$.
 22) $P(x, y) = 3y^5 + 20x^4y - 2$; $Q(x, y) = 15xy^4 + 4x^5$.
 23) $P(x, y) = 2xy^6 + 6x^5y^2 + 4x$; $Q(x, y) = 6x^2y^5 + 2x^6y - 2y$.
 24) $P(x, y) = 2xy^5 + 6xy^2$; $Q(x, y) = 5x^2y^4 + 6x^2y + 3$.
 25) $P(x, y) = 6x^2y^3 + y^4 + 3$; $Q(x, y) = 6x^3y^2 + 4xy^3$.
 26) $P(x, y) = e^{2y} + 3ye^{3x} - y$; $Q(x, y) = 2xe^{2y} + e^{3x} - x$.
 27) $P(x, y) = 7x^6y^2 + 2xy^3 - 1$; $Q(x, y) = 2x^7y + 3x^2y^2 + 2$.
 28) $P(x, y) = 6x^5y^5 + 6xy^3 + 3$; $Q(x, y) = 5x^6y^4 + 9x^2y^2$.
 29) $P(x, y) = 6xy^3 + 10y^2 + 1$; $Q(x, y) = 9x^2y^2 + 20xy$.
 30) $P(x, y) = 10xy^6 + 3y^3$; $Q(x, y) = 30x^2y^5 + 9xy^2 + 4$.

4.6 Завдання 6

Знайти похідну функції $U = U(x, y, z)$ у напрямі вектора $\overline{A_1A_2}$ в т.

A_1 та $\text{grad } U|_{A_1}$

- $U = \ln \frac{x}{e} + \frac{y}{2x} + x + \frac{1}{4} + 2z$, $A_1(1; 2; 3)$, $A_2(3; 4; 1)$.
- $U = 5(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}) + 2y + 3 - 4z$, $A_1(3; 4; 1)$, $A_2(3; 2; -1)$.
- $U = 5 \arctg(x - y)^7 + 2y + x + 2 \ln 2z$, $A_1(3; 4; 1)$, $A_2(2; -1; 1)$.
- $U = 2 \tg\left(\sqrt{x} - \frac{1}{y} + 2z\right) + y + 3z + 7$, $A_1(1; 1; 0)$, $A_2(3; 4; 1)$.
- $U = \sin(x^2 + y^5 - 2z) + 2y + 7z + 5$, $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(0; 0; 1)$.
- $U = xye^{pxy} + (1 - p)y + 2(1 - p) + zp$, $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(1; 0; 1)$.
- $U = \tg(x^2 + y^4 - 2z) + 2y + 6z + 4$, $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(0; 0; 0)$.
- $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x + y + z) + 5y + 9z + 10$, $A_1(2; 3; 6)$, $A_2(3; 4; 1)$.
- $U = x^2y + y^2z + z^2x$, $A_1(1; -1; 2)$, $A_2(3; 4; -1)$.
- $U = 5xy^3z^2$, $A_1(2; 1; -1)$, $A_2(4; -3; 0)$.

11. $U = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $A_1(-1;2;1)$, $A_2(3;1;-1)$.
12. $U = ze^{x^2+y^2+z^2}$, $A_1(2,1,-1)$, $A_2(3,-4,2)$.
13. $U = \ln(xy + yz + xz)$, $A_1(-2,3-1)$, $A_2(2,1,-3)$.
14. $U = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, $A_1(1,1,1)$, $A_2(3,2,1)$.
15. $U = x^2y + xz^2 - 2$, $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,-1,3)$.
16. $U = xe^y + ye^x - z^2$, $A_1(3,0,2)$, $A_2(4,1,3)$.
17. $U = 3xy^2 + z^2 - xyz$, $A_1(1,1,2)$, $A_2(3,-1,4)$.
18. $U = 5x^2yz - xy^2 + yz^2$, $A_1(1,1,1)$, $A_2(9,-3,9)$.
19. $U = (x^2 + y^2 + z^2)^3$, $A_1(1,2,-1)$, $A_2(0,-1,3)$.
20. $U = x^{yz}$, $A_1(3,1,4)$, $A_2(1,-1,-1)$.
21. $U = \ln_{\frac{e}{e}} x + \frac{y}{2x} \frac{\ddot{\theta}}{\theta} + x + \frac{1}{4} + 2z$, $A_1(1; 2; 3)$, $A_2(3; 4; 1)$.
22. $U = 5(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}) + 2y + 3 - 4z$, $A_1(3; 4; 1)$, $A_2(3; 2; -1)$.
23. $U = 5\arctg(x - y)^2 + 2y + x + 2\ln 2z$, $A_1(3; 4; 1)$, $A_2(2; -1; 1)$.
24. $U = 2tg(\sqrt{x} - 1/y + 2z) + y + 3z + 7$, $A_1(1; 1; 0)$, $A_2(3; 4; 1)$.
25. $U = \ln(1 + x^2 - y^2 + z^2)$, $A_1(1,1,1)$, $A_2(5,-4,8)$.
26. $U = \sin(x^2 + y^5 - 2z) + 2y + 7z + 5$, $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(0; 0; 1)$.
27. $U = xye^{pxy} + (1 - p)y + 2(1 - p) + zp$, $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(1; 0; 1)$.
28. $U = tg(x^2 + y^4 - 2z) + 2y + 6z + 4$, $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(0; 0; 0)$.
29. $U = x^2y + y^2z + z^2x$, $A_1(1;-1;2)$, $A_2(3;4;-1)$.
30. $U = x^2y + xz^2 - 2$, $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,-1,3)$.

4.7 Завдання 7

Обчислити течію векторного поля $\vec{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною (P) та координатними площинами двома способами:

1) за означенням ; 2) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

1. $\vec{a}=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$ (P): $x+3y+z=3$
2. $\vec{a}=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$ (P): $2x-y-2z=2$
3. $\vec{a}=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$ (P): $3x+3y+z=3$
4. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$ (P): $x+y+z=2$
5. $\vec{a}=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$ (P): $2x+y+2z=2$
6. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$ (P): $x+2y+z=2$
7. $\vec{a}=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$ (P): $2x-3y+z=6$
8. $\vec{a}=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$ (P): $x-y+z=2$
9. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$ (P): $2x-y-2z=-2$
10. $\vec{a}=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$ (P): $x+2y+z=2$
11. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$ (P): $2x+y+z=2$
12. $\vec{a}=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$ (P): $x+2y+2z=2$
13. $\vec{a}=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$ (P): $3x+2y+2z=6$
14. $\vec{a}=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$ (P): $2x+y+z=4$
15. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$ (P): $x+4y+2z=8$
16. $\vec{a}=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$ (P): $x-2y+2z=2$
17. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$ (P): $3x-2y+2z=6$
18. $\vec{a}=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$ (P): $2x+3y+z=6$
19. $\vec{a}=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$ (P): $x-y+z=2$
20. $\vec{a}=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$ (P): $x+2y+2z=4$
21. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$ (P): $x+y+2z=2$

22. $\vec{a} = (x + z) \vec{i} + (x + 3y) \vec{j} + y \vec{k}$	(P): $x + y + 2z = 2$
23. $\vec{a} = (x + z) \vec{i} + z \vec{j} + (2x - y) \vec{k}$	(P): $2x + 2y + z = 4$
24. $\vec{a} = (3x + y) \vec{i} + (x + z) \vec{j} + y \vec{k}$	(P): $x + 2y + z = 2$
25. $\vec{a} = (y + z) \vec{i} + (2x - z) \vec{j} + (y + 3z) \vec{k}$	(P): $2x + y + 3z = 6$
26. $\vec{a} = (y + z) \vec{i} + (x + 6y) \vec{j} + y \vec{k}$	(P): $x + 2y + 2z = 2$
27. $\vec{a} = (2y - z) \vec{i} + (x + 2y) \vec{j} + y \vec{k}$	(P): $x + 3y + 2z = 6$
28. $\vec{a} = (y + z) \vec{i} + x \vec{j} + (y - 2z) \vec{k}$	(P): $2x + 2y + z = 2$
29. $\vec{a} = (x + z) \vec{i} + z \vec{j} + (2x - y) \vec{k}$	(P): $3x + 2y + z = 6$
30. $\vec{a} = z \vec{i} + (x + y) \vec{j} + y \vec{k}$	(P): $2x + y + 2z = 2$

4.8 Завдання 8

Для даного векторного поля

$\vec{a} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ знайти $\operatorname{div} \vec{a}$, $\operatorname{rot} \vec{a}$ в точці M_0 .

- 1) $P = xy - z^2$; $Q = 2x - z$; $R = xyz$; $M_0(1, -1, 1)$.
- 2) $P = yz - xy$; $Q = 3y - z$; $R = x + z$; $M_0(-1, 2, 1)$.
- 3) $P = xy - 2z$; $Q = 2xy + xz$; $R = y - z$; $M_0(1, 2, 0)$.
- 4) $P = x^3 - z^3$; $Q = xy^2 + z$; $R = xz + y$; $M_0(-1, 3, 1)$.
- 5) $P = x^2y + 3z$; $Q = xz + 2z$; $R = yz + 2x$; $M_0(-2, 1, 1)$.
- 6) $P = 7x^2y^3$; $Q = xz^2 + y$; $R = 3x^2z + y$; $M_0(3, -1, 1)$.
- 7) $P = 3xz^3$; $Q = 2yz + x$; $R = 2x^2z + 3y$; $M_0(-2, 1, -1)$.
- 8) $P = 3xy^2 + z$; $Q = x - 3z$; $R = 3x^2z + 2y$; $M_0(1, 2, 0)$.
- 9) $P = 2x^4y + zx$; $Q = z + 2y$; $R = 4xz$; $M_0(1, -2, 1)$.
- 10) $P = xy - yz$; $Q = 3xz^2$; $R = x - 2z$; $M_0(1, -1, 3)$.

- 11) $P = x^2y + 4z$; $Q = 2x^2z$; $R = 2x + z$; $M_0(1, 1, 0)$.
- 12) $P = x^2z + 2y$; $Q = 3y^2z$; $R = 3y + z$; $M_0(1, -2, 1)$.
- 13) $P = y^2z + 3z$; $Q = 2xy^2$; $R = 2x + 3z$; $M_0(1, 3, -1)$.
- 14) $P = xz^2 + 2y$; $Q = 3x + z$; $R = yz^3$; $M_0(1, -2, 1)$.
- 15) $P = 3xz + 2y^2$; $Q = 7x + 2y$; $R = xz^2$; $M_0(1, 3, -2)$.
- 16) $P = 2xz^2 + 3y$; $Q = 3x + 2z$; $R = yz$; $M_0(1, -2, 0)$.
- 17) $P = 3yz + 2x$; $Q = 5y + xz$; $R = xyz$; $M_0(-1, 2, 2)$.
- 18) $P = 2yz + 5x$; $Q = xy + 3z$; $R = x - z$; $M_0(-1, 0, 2)$.
- 19) $P = xz^3 + y$; $Q = 2xy^3 + z$; $R = 2y + 3z$; $M_0(0, 1, 2)$.
- 20) $P = xz^2 + 3y$; $Q = 3xy + z$; $R = x + z$; $M_0(-1, 2, 0)$.
- 21) $P = xz + 4y$; $Q = xz + y^2$; $R = x^2 + yz$; $M_0(3, -1, 0)$.
- 22) $P = 2yz + 5x$; $Q = yz + x$; $R = y^2 + z^2$; $M_0(1, -1, 1)$.
- 23) $P = xz + 2y$; $Q = xz^2$; $R = y^3 + z$; $M_0(-1, 2, 0)$.
- 24) $P = xz + y$; $Q = 7y - z$; $R = y^2z + x$; $M_0(-3, 0, 1)$.
- 25) $P = y^2z^2$; $Q = 3x - yz$; $R = 5x^2z$; $M_0(-2, 0, -1)$.
- 26) $P = 3xz + 4y$; $Q = 3x + 2z$; $R = 5x^2y$; $M_0(-3, 1, 0)$.
- 27) $P = 4xy + 2z$; $Q = 3xz$; $R = x^2 + yz$; $M_0(-2, 1, 1)$.
- 28) $P = x^2y + 3z$; $Q = 4yz$; $R = x + 5z$; $M_0(-3, 2, 1)$.
- 29) $P = 5xy + 2z$; $Q = 5yz^2$; $R = y + 4z$; $M_0(0, 1, 2)$.
- 30) $P = 3xz + 2y$; $Q = 7y^2z$; $R = x - 4z$; $M_0(-1, 2, 1)$.

4.9 Завдання 9

Обчислити

1. $(-1+i\sqrt{3})^{12}$
2. $\sqrt[4]{4-i}$
3. $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-2}\right)^{18}$
4. $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}}$
5. $(i\sqrt{2}-\sqrt{2})^6$
6. $\sqrt[3]{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$
7. $\left(\frac{-i+1}{\sqrt{2}}\right)^{10}$
8. $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$
9. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^9$
10. $\sqrt[2]{\frac{1+2i\sqrt{5}}{2}}$
11. $(i\sqrt{3}+1)^{15}$
12. $\sqrt{\frac{1+i\sqrt{3}}{2i^8}}$
13. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)^{12}$
14. $\sqrt[4]{1-i\sqrt{3}}$
15. $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-2i}\right)^9$
16. $\sqrt[3]{\frac{-1-i}{i^3\sqrt{2}}}$
17. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{16}$
18. $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2i^2}}$
19. $(\sqrt{3}+3i)^{12}$
20. $\sqrt[7]{i}$
21. $\left(\frac{1+i}{-1+i}\right)^8$
22. $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$
23. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{i^2}\right)^{12}$
24. $\sqrt[6]{-1}$
25. $\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{i^5}\right)^6$
26. $\sqrt[4]{\frac{3+3i}{i\sqrt{2}}}$
27. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$
28. $\sqrt[4]{1-2i}$
29. $\left(\frac{-i-\sqrt{3}}{2i^6}\right)^9$
30. $\sqrt[3]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}}$

4.10 Завдання 10

Обчислити значення функції. Результати надати в алгебраїчній формі.

1. $\text{Ln}(1-i)$
2. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^i$
3. $i^{\frac{1}{i}}$
4. $\text{Ln}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$
5. $(1+i)^{i/2}$
6. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$
7. $\sin(1+i)$
8. 5^i
9. $\cos pi$
10. $\text{sh}(2-i)$
11. $(1+i)^i$
12. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$

13. $\text{Ln}(-1)$ 14. $\text{sh}(2 - pi)$ 15. $\sin\left(\frac{p}{3} + i\right)$ 16. $\cos(1 + i)$
 17. $\text{Ln}\left(-1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ 18. i^i 19. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^i$ 20. $(-1)^{\sqrt{2}}$
 21. $\sin(p - i \ln 2)$ 22. $\text{sh}\left(1 - \frac{p}{3}i\right)$ 23. i^{-i} 24. $\text{ch}(i \ln 3)$
 25. $\text{Ln}(5 - i)$ 26. $\cos(pi + \ln 2)$ 27. $(-\sqrt{3} - i)^{2i}$ 28. 1^i
 29. $\text{sh}(i \ln 3)$ 30. $(1 + i)^i$

4.11 Завдання 11

Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по відомій дійсній або уявній частинах.

1. $u(x, y) = x^2 - y^2 - xy$
2. $v(x, y) = x + y + 5 + x^2 - y^2$
3. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - y + 2$
4. $v(x, y) = e^x \sin y - x$
5. $u(x, y) = 4xy - e^x \cos y$
6. $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$
7. $u(x, y) = 2y + 3xy + 1$
8. $v(x, y) = e^x \cos y + 2xy$
9. $u(x, y) = y + 2xy$
10. $v(x, y) = e^y \sin x$
11. $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$
12. $v(x, y) = -2 \sin 2x \text{sh} 2y + y$
13. $u(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$
14. $v(x, y) = x^3 y - xy^3$
15. $u(x, y) = 2 \sin x \text{ch} y - x$
16. $v(x, y) = 3x^2 y - y^3$
17. $u(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2 y^2$
18. $v(x, y) = e^x \sin y + x^2 - y^2$
19. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$
20. $v(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y)$
21. $u(x, y) = 6xy + y - x^2 + y^2$
22. $v(x, y) = xy + x + y$
23. $u(x, y) = 5e^y \cos x$
24. $v(x, y) = e^x (\sin y + \cos y) - x + 2xy$
25. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - 3$
26. $v(x, y) = 3x^2 y + x^3 - y^3 - 3xy^2$
27. $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$
28. $v(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + 2xy$
29. $u(x, y) = 2xy - x + 7y$
30. $v(x, y) = 4x^3 y - 4xy^3 - 7y$

4.12 Завдання 12

Обчислити інтеграл

1. $\int_L (\operatorname{Im} z^2 - \operatorname{Re}^2 z) dz$, де L – дуга кривої $xy=1$ від точки $z_1 = 1+i$ до точки $z_2 = 3 + \frac{i}{3}$.
2. $\int_L (z-2)(\bar{z}-2) dz$, де L – частина кола $|z-2|=1$ ($0 \leq \arg z \leq p$).
Обхід L проти ходу годинникової стрілки.
3. $\int_L (3+i-\bar{z}) dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 2+2i$ до точки $z_2 = 0$.
4. $\int_L z \cdot \bar{z} dz$, де L – частина кола $|z|=3$ ($-\frac{p}{2} \leq \arg z \leq \frac{p}{2}$). Обхід L по ходу годинникової стрілки.
5. $\int_L (2i + 3\bar{z} - 12) dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 3$ до точки $z_2 = 8-5i$.
6. $\oint_L z \operatorname{Re} z dz$, де L – коло $|z|=1$. Обхід L проти ходу годинникової стрілки.
7. $\int_L (1-i-2\bar{z}) dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ до точки $z_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$.
8. $\int_L \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) dz$, де L – частина кола $|z|=1$ ($0 \leq \arg z \leq p$). Обхід L проти ходу годинникової стрілки.
9. $\int_L (|z|^2 + \operatorname{Re}(z^2) - 2(z-\bar{z})) dz$, де L – дуга параболи $y^2 = 2(x-1)$ від точки $z_1 = -2i$ до точки $z_2 = 2i$.

10. $\int_L z \sin z dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$.
11. $\int_L z \operatorname{Im} z dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2+2i$.
12. $\int_L (3z + \bar{z} + (\operatorname{Im} z)^2) dz$, де L – дуга параболи $y^2 = 10(x+1)$ від точки $z_1 = -10i$ до точки $z_2 = 10i$.
13. $\int_L (z-i)e^{-z} dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$.
14. $\int_L (8i-1+3\bar{z}) dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 3+2i$ до точки $z_2 = -1-i$.
15. $\int_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$.
16. $\int_L \sin z \cos z dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$.
17. $\int_L z \operatorname{Im}(z^2) dz$, де L – дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+2i$.
18. $\int_L (z-1) dz$, де L – дуга еліпса $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$, де t змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$.
19. $\int_L z e^{\bar{z}} dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$.
20. $\int_L (\bar{z} \cdot |z| - 2i) dz$, де L – частина кола $|z|=1$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$). Обхід L по ходу годинникової стрілки.
21. $\oint_L (i\bar{z} + z^2) dz$, де L – коло $|z|=1$. Обхід L проти ходу годинникової стрілки.

22. $\int_L 5z^{-2} dz$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2 + 4i$.
23. $\oint_L (\bar{z} - 3)(z + 7) dz$, де L – коло $|z - 1| = 2$. Обхід L проти ходу годинникової стрілки.
24. $\int_L \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) dz$, де L – частина кола $|z| = 4$ ($0 \leq \arg z \leq p$). Обхід L по ходу годинникової стрілки.
25. $\int_L (e^{iz} + 7i) dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = -\frac{p}{2} + i\frac{p}{2}$.
26. $\oint_L (|z| - 3z + \bar{z}) dz$, де L – коло $|z| = 2$. Обхід L по ходу годинникової стрілки.
27. $\int_L (z^2 + 3) dz$, де L – дуга еліпса $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$, де t змінюється від 0 до p .
28. $\int_L \bar{z} e^z dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = -1 - i$ до точки $z_2 = 1$.
29. $\oint_L \left(\frac{3}{2} (\operatorname{Im} z)^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(z^2) \right) dz$, де L – еліпс $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. Обхід L проти ходу годинникової стрілки.
30. $\oint_L \bar{z} \cdot z^2 dz$, де L – коло $|z| = 1$. Обхід L проти ходу годинникової стрілки.

4.13 Завдання 13

Обчислити інтеграли за допомогою лишків або за інтегральною формулою Коші.

$$1. \text{ a) } \oint_{|z|=0,3} \frac{e^z}{z^2} dz$$

$$\text{б) } \oint_{|z+1|=3} \frac{\cos 2z}{z^3 + 1} dz$$

$$\text{в) } \oint_{|z|=2} \frac{1 + \cos 2z}{(1 - \cos 2z)^2} dz$$

$$2. \text{ a) } \oint_{|z|=0,2} z^3 e^{\frac{4}{z^2}} dz$$

$$\text{б) } \oint_{|z-i|=2} \frac{\cos z}{z^3 + 4z} dz$$

$$\text{в) } \oint_{|z|=0,7} \frac{z}{1 - \cos^2 2z} dz$$

$$3. \text{ a) } \oint_{|z|=1} z^2 \sin \frac{3}{z} dz$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=4} \frac{(1 - \cos 2z)}{z^4 + 4z^2} dz$$

$$\text{в) } \oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1 - z}{\sin z - z} dz$$

$$4. \text{ a) } \oint_{|z+3i|=1} \sin \frac{1}{z+3i} dz$$

$$\text{б) } \oint_{|z-2|=2} \frac{\sin z}{z^4 + 8z} dz$$

$$\text{в) } \oint_{|z|=4} \frac{1 + \cos 2z}{z^4 + 4z^2} dz$$

$$5. \text{ a) } \oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1 - z}{\sin z - z} dz$$

$$\text{в) } \oint_{\left|z - \frac{p}{2}\right|=p} \frac{dz}{z^2(z-1)}$$

$$6. \text{ a) } \oint_{|z-1|=1} (z-1)^2 \sin \frac{p}{z-1} dz$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=3} \frac{4 \sin z}{z(z-2i)} dz$$

$$\text{в) } \oint_{|z|=0,1} \frac{(\cos z - 1)z^2}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}} dz$$

$$7. \text{ a) } \oint_{|z|=1} z^3 \cos \frac{4}{z^2} dz$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\operatorname{ch} 2z - 1 - \frac{1}{2}z^3} dz$$

$$\text{в) } \oint_{|z|=4} \frac{ze^z dz}{\sin z}$$

$$8. \text{ a) } \oint_{|z|=0,2} ze^{\frac{1}{z^2}} dz$$

$$\text{б) } \oint_{\left|z - \frac{1}{2}\right|=2} \frac{\sin 3z}{e^z - 1 - z} dz$$

$$\text{в) } \oint_{\left|z - \frac{3}{2}\right|=2} \frac{z(2 + \sin z) dz}{\sin z}$$

$$9. \text{ a) } \oint_{|z|=0,1} \frac{e^z - 1}{z} dz$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=2} \frac{\sin z - z}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\text{в) } \oint_{|z|=1,5} \frac{z(z+1) dz}{\sin^2 pz}$$

10. a) $\oint_{|z-i|=2} \sin \frac{1}{z-2i} dz$ б) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z - 1}{\operatorname{sh} 2z - 2z} dz$ B) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin 3z + 2}{(z-p)z^2} dz$
11. a) $\oint_{|z|=1} z^3 \cos \frac{4}{z} dz$ б) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z} - 1}{\cos z - 1} dz$ B) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin^2 z} dz$
12. a) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{1 - \cos z} dz$ б) $\oint_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{\ln zdz}{z^2 - 3iz - 2}$ B) $\oint_{|z|=3} \frac{1 + \cos 2z}{(1 - \cos 2z)^2} dz$
13. a) $\oint_{|z-2|=1} (1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-2}} dz$ б) $\oint_{|z+i|=6} \frac{\sin \frac{izp}{8}}{z^2 + 16} dz$ B) $\oint_{|z|=6} \frac{dz}{z^2(z-1)}$
14. a) $\oint_{|z|=2} e^{\frac{2}{z-i}} dz$ б) $\oint_{|z-3i|=\frac{5}{2}} \frac{\ln zdz}{(z-4i)(z-i)}$ B) $\oint_{|z|=1} \frac{5zdz}{1 - \cos^2 2z}$
15. a) $\oint_{|z-i|=2} (1-z^2) \sin \frac{1}{z} dz$ б) $\oint_{\left|z-\frac{p}{2}\right|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z} dz$ B) $\oint_{|z-3|=2} \frac{\operatorname{sh}^2(z-2)}{(z-2)^3} dz$
16. a) $\oint_{|z+1|=2} (z^3 + z^2)e^{\frac{1}{z}} dz$ б) $\oint_{|z-i|=2} \frac{z^2}{z - \sin z} dz$ B) $\oint_{|z-i|=3} \frac{1 + \operatorname{ch}(z+i)}{(z+i)^3} dz$
17. a) $\oint_{|z+i|=2} \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right) \cos \frac{1}{z} dz$ б) $\oint_{|z|=1} \frac{zdz}{e^{-z} - 1 + z}$ B) $\oint_{|z-p|=2} \frac{2 - 3e^{2iz}}{\left(z - \frac{p}{2} \right)^5} dz$
18. a) $\oint_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=1} (1+z+z^5)e^{-\frac{1}{z^2}} dz$ б) $\oint_{|z-1|=2} \frac{zdz}{1 - \cos z}$ B) $\oint_{|z+1|=3} \frac{1 - \sin \frac{zp}{2}}{(z-1)^3} dz$
19. a) $\oint_{|z-2i|=2} (z-i)^2 \sin \frac{1}{z-i} dz$ б) $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} \left(z - \frac{p}{2} \right)}{\left(z - \frac{p}{2} \right)^2} dz$

$$\text{B)} \oint_{|z-3i|=\frac{3}{2}} \frac{2+\ln(z-i)}{(z-2i)^4} dz$$

$$20. \text{ a)} \oint_{|z+2i|=2} (z+i)^3 e^{\frac{1}{z+i}} dz \quad \text{б)} \oint_{|z+i|=2} \frac{dz}{e^{-z}-1} \quad \text{B)} \oint_{|z-i|=2} \frac{7-\text{ch}z}{z^3} dz$$

$$21. \text{ a)} \oint_{|z-i|=3} \left(1+\frac{1}{z-1}\right) \cos \frac{1}{z-1} dz \quad \text{б)} \oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{e^z - \cos z}$$

$$\text{B)} \oint_{|z-2p|=5} \frac{4+e^{iz}}{(z-p)^5} dz$$

$$22. \text{ a)} \oint_{|z-i|=2} z \sin^2 \frac{1}{2z} dz \quad \text{б)} \oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos^2 z} \quad \text{B)} \oint_{|z+1|=4} \frac{3+\frac{16}{p^2} \sin \frac{zp}{4}}{(z-2)^3} dz$$

$$23. \text{ a)} \oint_{|z|=3} \frac{1}{z} \cos^2 \frac{1}{z} dz \quad \text{б)} \oint_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=1} z \text{ctg}^2 \frac{z}{2} dz \quad \text{B)} \oint_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{5-\frac{3}{2} \ln z}{(z-i)^4} dz$$

$$24. \text{ a)} \oint_{|z|=1} \left(z \sin \frac{1}{3} + e^{\frac{1}{z}} \right) dz \quad \text{б)} \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} z^3 \text{ctg}^4 \frac{z}{3} dz \quad \text{B)} \oint_{|z-1|=2} \frac{4+\cos z}{z^3} dz$$

$$25. \text{ a)} \oint_{|z-1|=2} \left(z^2 e^{\frac{1}{z}} + (z-1)^2 \sin \frac{1}{z-1} \right) dz \quad \text{б)} \oint_{|z-i|=3} \frac{2 \text{sh} \frac{zp}{2}}{z^2+1} dz$$

$$\text{B)} \oint_{|z-1|=3} \frac{1-2z+z^5}{(z-i)^3} dz$$

$$26. \text{ a)} \oint_{|z|=2} \left((z+i)^3 e^{\frac{1}{z+i}} + \frac{1}{z-1} \cos \frac{1}{z-1} \right) dz \quad \text{б)} \oint_{|z-2|=7} \frac{e^{\frac{izp}{2}} - 2}{(z^2+2z)p} dz$$

$$\begin{aligned}
& \text{B)} \oint_{|z-2|=2} \frac{2+z^2+z^6}{10(z-1)^4} dz \\
27. \text{ a)} \oint_{|z|=2} \left(2(z-i)^3 \cos \frac{1}{z-i} + (z+1)^3 e^{-\frac{1}{(z+1)^2}} \right) dz \\
& \text{б)} \oint_{|z|=5} \frac{\sin \frac{zp}{2} + 1}{2p(z^2-1)} dz \qquad \text{B)} \oint_{|z-1|=2} \frac{z^2 - \cos z}{\left(z - \frac{p}{4}\right)^4} dz \\
28. \text{ a)} \oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{z} \cos \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sin \frac{1}{z^2} \right) dz \qquad \text{б)} \oint_{|z-2|=1,7} \frac{e^{izp} + 3}{2z^2 - 6z + 4} dz \\
& \text{B)} \oint_{|z+1|=1} \frac{\sin 2z}{(z+1)^3} dz \\
29. \text{ a)} \oint_{|z|=0,2} z^3 \cos \frac{1}{z} dz \qquad \text{б)} \oint_{|z+i|=4} \frac{\operatorname{sh} \frac{zp}{4} - 1}{z^2 + 4} dz \qquad \text{B)} \oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz \\
30. \text{ a)} \oint_{|z|=2} (z-i)^2 \sin \frac{1}{z-i} dz \qquad \text{б)} \oint_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{\cos izp + 2}{z - 3iz - 2} dz \qquad \text{B)} \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}
\end{aligned}$$

4.14 Завдання 14

Розв'язати задачу Коші операційним методом

- $x''' + x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
- $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$
- $x'' + 2x' = t \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0$
- $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$
- $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = x''(0) = 0$
- $x^{IV} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$
- $x'' + x' + x = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0$

8. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
9. $x'' + x = t \cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 0$
10. $x''' + x' = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
11. $x'' + x = te^t + 4 \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$
12. $x'' + 2x' + x = 2 \cos^2 t$, $x(0) = x'(0) = 0$
13. $x''' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
14. $2x'' - x' = \sin 3t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$
15. $x'' + 4x = e^{2t} + 4t^2$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$
16. $x''' + 3x'' - 4x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$
17. $x'' - x' = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$
18. $x'' + 4x' + 4x = t^3 e^{2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$
19. $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$
20. $x''' - 2x'' + x' = 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$
21. $x'' + x = 2 \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$
22. $x''' + x = \frac{1}{2} t^2 e^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
23. $x^{IV} + x''' = e^t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$
24. $x'' + x' - 2x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$
25. $x''' + 2x'' - x' - 2x = 1$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 4$
26. $x'' + 2x' - 3x = e^{-3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$
27. $x^{IV} - 6x''' + 9x'' = 54t + 18$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = x'''(0) = 1$
28. $x'' - x = 3 \sin t + 4 \cos 2t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = -2$
29. $x'' + 4x' + 8x = 42e^{-2t} \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$
30. $x''' - 3x' + 2x = 8te^{-t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Означення подвійного інтеграла та його властивості.
2. Обчислення подвійних інтегралів в декартових координатах.
3. Геометричний зміст подвійного інтеграла.
4. Означення потрійного інтеграла та його властивості.
5. Обчислення потрійних інтегралів в декартових координатах.
6. Геометричний зміст потрійного інтеграла.
7. Заміна змінних в кратних інтегралах.
8. Обчислення кратних інтегралів у полярній, циліндричній та сферичній координатних системах.
9. Застосування кратних інтегралів для розв'язання прикладних задач механіки та фізики.
10. Означення криволінійного інтегралу першого роду. Його геометричний і фізичний зміст.
11. Означення криволінійного інтегралу другого роду. Його геометричний і фізичний зміст.
12. Обчислення криволінійного інтегралу першого роду.
13. Обчислення криволінійного інтегралу другого роду.
14. Властивості криволінійних інтегралів.
15. Формула Гріна. Умова незалежності криволінійних інтегралів від шляху інтегрування.
16. Застосування криволінійних інтегралів для розв'язання прикладних задач механіки та фізики.
17. Односторонні та двосторонні поверхні.
18. Поверхневі інтеграли I роду, їх обчислення.
19. Поверхневі інтеграли II роду, їх обчислення.
20. Теорема Остроградського-Гауса.
21. Формула Стокса.
22. Математичне означення поля. Скалярні та векторні поля. Вектор-функція.
23. Похідна за напрямком. Градієнт векторного поля, його властивості.
24. Потік векторного поля, його обчислення.
25. Застосування теореми Остроградського-Гауса до обчислення потоку векторного поля.
26. Дивергенція векторного поля і її обчислення.
27. Циркуляція і ротор векторного поля. Застосування теореми Стокса.
28. Приклади векторних полів.

- 29.Оператор Гамільтона. Оператор Лапласа.
- 30.Застосування теорії поля до розв'язання прикладних задач механіки та фізики.
- 31.Комплексні числа. Їх зображення на площині. Модуль та аргумент. Пара спряжених комплексних чисел. Умова рівності комплексних чисел.
- 32.Формула Ейлера. Алгебраїчна, тригонометрична та показникова форма запису комплексних чисел.
- 33.Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Дії над комплексними числами (+, -, *, /).
- 34.Комплексні числа. Обчислення степені, кореня.
- 35.Комплексні числа – добуток та обчислення степені (формула Муавра).
- 36.Функції комплексної змінної. Загальні означення. Степенева функція.
- 37.Елементарні функції комплексної змінної: показникова функція, логарифмічна функція, тригонометричні функції, обернено тригонометричні функції, гіперболічні функції, обернено гіперболічні функції, узагальнено-степенева функція.
- 38.Границя функції комплексного змінного. Властивості границь функцій комплексного змінного.
- 39.Неперервність функції комплексного змінного. Властивості неперервних функцій.
- 40.Диференціювання функції комплексної змінної. Поняття похідної, диференційованість функції в точці, в області. Умови Коші-Рімана.
- 41.Аналітичні функції. Аналітичність функції в точці, в області. Властивості аналітичних функцій. Правильні та особливі точки, навести приклади.
- 42.Диференціал функції комплексного змінного.
- 43.Поняття спряжених гармонічних функцій.
- 44.Геометричний зміст модуля похідної. Геометричний зміст аргументу похідної. Поняття конформного відображення.
- 45.Контурний інтеграл - означення.
- 46.Обчислення контурного інтегралу, якщо рівняння контуру інтегрування задано у комплексно-параметричній формі.
- 47.Контурний інтеграл і його властивості.
- 48.Теорема Коші для однозв'язної області.
- 49.Теорема Коші для багатозв'язної області.

50. Обчислення інтегралу $\oint_L \frac{1}{(z-a)^n} dz$.
51. Незалежність контурного інтегралу від шляху інтегрування. Поняття первісної.
52. Невизначений інтеграл функцій комплексного змінного. Формула Ньютона - Лейбниці – випадки її використання.
53. Інтегральна формула Коші. Формула Коші для похідних n -го порядку аналітичної функції.
54. Ряди у комплексній області. Поняття ряду, частної суми ряду, суми ряду, збіжного та розбіжного рядів.
55. Необхідна ознака збіжності рядів з комплексними членами. Абсолютно збіжні ряди та їх властивості.
56. Функціональні ряди. Збіжність. Сума ряду. Область збіжності.
57. Рівномірно збіжні ряди, їх властивості. Достатня ознака рівномірної збіжності.
58. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності.
59. Ряд Тейлора та ряд Лорана.
60. Нулі аналітичної функції.
61. Правильні та особливі точки. Ізольовані особливі точки та їх класифікація.
62. Усувні ізольовані особливі точки. Поведінка функції в околі таких точок.
63. Полюси. Поведінка функції в околі таких точок.
64. Істотно особливі точки. Поведінка функції в околі таких точок.
65. Поведінка функції в околі нескінченно віддаленої точки
66. Лишки. Обчислення лишок.
67. Обчислення лишку, якщо ізольована точка є полюсом порядку m .
68. Теореми про лишки. Лишки у нескінченно віддаленій точці.
69. Застосування лишків до обчислення інтегралів.
70. Застосування операційного числення для розв'язання деяких диференціальних та інтегральних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. – М.: 1970-1986.- т.1,2.
2. Буда́к Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М. Наука, 1967.
3. Г.І.Кулініч. Вища математика, книга 1,2. К.,1994.
4. Бугузов В.Ф., Крутицкая Н.И. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных: Учеб. Пособие для студентов вузов.-М.: Высш.шк., 1988.
5. Сборник задач по курсу Высшей математики/ под ред. Г.И.Кручковича. – М.:Высш. Шк., 1973
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш.Шк., 1980. – ч. 2.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. М.: Наука, 1989. – 464с.
8. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные разделы математического анализа./ Под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368с.
9. Чудесенко В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики (типовые расчёты). – М.: Высшая школа, 1983. – 112с.
10. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 303с.
11. Соколенко О.І. Вища математика:Підручник. – К.: Видавничий центр академія, 2002. – 432 с.
12. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. –Кн.. 1,2. К.:Либідь, 1994.
13. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика.- Київ, 1996.