

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Електротехнічний факультет
Кафедра електроприводу та автоматизації промислових
установок

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

до курсу:

«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ СКЛАДНИХ
ЕЛЕКТРО МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ТА КОМПЛЕКСІВ»

Частина 4

«Аналіз і синтез систем автоматичного управління під впливом
статистичних випадкових факторів»

для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія»
всіх форм навчання

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ до курсу: «Основи наукових досліджень складних електромеханічних систем та комплексів». Частина 4 - «Аналіз і синтез систем автоматичного управління під впливом статистичних випадкових факторів», для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія» всіх форм навчання. Укл. В.В. Зіновкін, проф., д.т.н., Ю.О. Крисан, доцент, к.т.н. – Запоріжжя. НУ «ЗП», 2026. – 59с.

Укладачі: В.В. Зіновкін, проф., д.т.н.;
Ю.О. Крисан, доц., к.т.н.;

Рецензент: М.Л. Антонов, доц., к.т.н.;

Відповідний за
випуск: А.В. Пирожок, доц., к.т.н.

Затверджено на засіданні кафедри ЕПА
Протокол №5 від 04.02 2026 р.

Рекомендовано до видання НМК ЕТФ
Протокол № 7 від 19.02 2026 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Аналіз і синтез САУ при впливі статистичних випадкових факторів.....	5
1.1.Аналіз і синтез САУ під впливом сстатистичних випадкових факторів.....	5
1.2 Випадкові процеси та їх статистичні характеристики	7
1.3 Початкові та централізовані моменти випадкових процесів.....	11
1.4 Визначальні властивості математичного очікування, дисперсій і кореляційних.....	16
1.5 Статистичні характеристики випадкових процесі.....	23
1.6 Властивості стохастичних процесів.....	25
1.7 Стаціонарні випадкові процеси.....	31
1.8 Ергодичні випадкові процеси.....	35
1.9 Перетворення вхідного випадкового сигналу лінійною системою управління.....	42
1.10 Визначення реакції нестационарної системи на випадковий вхідний сигнал у часовому представленні.....	46
1.11 Визначення статистичних характеристик вихідного сигналу методом рівнянь моментів.....	49
1.12 Статистичні характеристики встановлених значень вихідного сигналу стаціонарної системи в частотному представленні.....	52
1.13 Методи розрахунку помилок лінійних САУ, зумовлених стаціонарними випадковими впливами.....	55
Перелік джерел посилання.....	59

ВСТУП

Дисципліна «Основи наукових досліджень складних електромеханічних систем та комплексів». Частина - «Аналіз і синтез систем автоматичного управління (САУ) під впливом статистичних випадкових факторів», для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія» всіх форм навчання призначена для більш змістовного оволодіння і засвоєння інженерних методів автоматичного управління складними електромеханічними системами. Вона є складовою підготовки магістрів денної та заочної форм навчання та сприяє виконанню самостійних та лабораторних робіт і дипломному проекту.

В конспекті лекцій розглянуто визначальні теоретичні основи побудови і роботи САУ при роботі електромеханічних об'єктів в складних умовах експлуатації та різних режимах навантаження. Приведено конкретні приклади побудови САУ відповідно до вирішення різних інженерних задач і вимог практики.

Наведенні методи та приклади можливо використовувати при інженерних розрахунках, науково-технічних дослідженнях та при виконанні практичних і самостійних робіт.

1 АНАЛІЗ І СИНТЕЗ САУ ПРИ ВПЛИВІ СТАТИСТИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ФАКТОРІВ

Задачі аналізу систем автоматичного управління полягають у визначенні динамічних і статичних параметрів по показниках стійкості, точності та швидкодії при різних впливах зовнішніх та внутрішніх факторів, що призводять до порушення оптимальних режимів навантаження технічного об'єкта [1].

Синтез дозволяє визначити оптимальний варіант структури САУ в поєднанні із мікропроцесорними і програмними засобами автоматизації та виконавчими і керуючими механізмами об'єкта [2].

1.1 Науково-технічні завдання САУ та їх вирішення

Похибка відтворення реальної лінійної системи, що піддається впливу задаючого сигналу $x(t)$ і перешкод $f(t)$, являє собою суму складових відповідно від задаючого впливу і від перешкод. При цьому мається на увазі адитивна перешкода, коли вхідний сигнал

$$n(t) = x(t) + f(t)$$

На практиці найчастіше випадкові збурення, що діють на систему, призводять до адитивної перешкоди.

Якщо,

$$n(t) = x(t) \times f(t),$$

то таку перешкоду називають мультиплікативною.

Якщо вплив, що задається, є регулярною функцією часу, то встановлене значення помилки є динамічною помилкою, методика розрахунку якої визначається виходячи з конкретизації завдання. Визначення складових помилок, зумовлених випадковими складовими задаючих впливів і перешкод, вимагає спеціальних методик. Якщо прикладені до системи впливи є випадковими, але стаціонарними функціями часу, має місце усталений (стаціонарний) у статистичному сенсі режим. При впливах типу нестаціонарних функцій часу режим буде нестабільним [3].

У даному розділі в основному розглядається усталений режим і наводяться деякі співвідношення для визначення статистичних характеристик сигналів при неусталеному (нестационарному) режимі.

Досить загальним статистичним критерієм якості САУ є функція втрат управління, або функція ризику, $r(Y_{\text{пр}}, Y)$, де $Y_{\text{пр}}$ і Y – відповідно задане і дійсне значення керованої величини.

Середні втрати

$$r(Y_{\text{пр}}, Y) = M[r(Y_{\text{пр}}, Y)].$$

Для оптимізації системи необхідна мінімізація середніх втрат, тобто виконання умов

$$M[r(Y_{\text{пр}}, Y)] = \min m \quad (1.1)$$

У разі, коли

$$r(Y_{\text{пр}}, Y) = (Y - Y_{\text{пр}})^2,$$

критерій (1.1) зводиться до критерію мінімуму середнього квадрата помилки (СКП):

$$M[(Y - Y_{\text{пр}})^2] = M[Z^2(t)] = \min.$$

Критерій мінімуму СКП дає задовільні результати при нормальному законі розподілу задаючого впливу і перешкод, широко поширеному при розрахунках.

Побудова САУ, що мають мінімум сумарної СКП від перешкод і задаючих впливів, означає в певній мірі оптимальне задоволення суперечливих вимог — зменшення дисперсії випадкових перешкод і підвищення точності відтворення задаючого впливу.

Завданням статистичного аналізу САУ є: а) оцінка величини СКП управління при заданих структурі, параметрах системи і відомих статистичних характеристиках задаючих впливів і перешкод; б) отримання аналітичних залежностей, що пов'язують СКП з основними параметрами САУ. Такі залежності дають необхідну інформацію про

те, як потрібно вибирати параметри системи, щоб забезпечити задані або мінімально можливі СКП управління [1].

Статистичний синтез має на меті побудову оптимальної, тобто «найкращої» в статистичному сенсі, САУ при дії на неї задаючого впливу і перешкод, що є випадковими функціями часу.

Розрізняють два види завдань синтезу:

1. Синтез САУ при заданій структурі, коли досягають оптимальності системи вибором її параметрів на підставі відомих статистичних характеристик задаючих і збурюючих впливів. У цьому випадку завдання зводиться до пошуку екстремуму функції однієї або декількох змінних, в результаті чого знаходяться такі значення параметрів, при яких обраний критерій якості системи, виражений через її параметри, має максимальне значення;

2. Синтез САУ при довільній структурі, коли за статистичними характеристиками задаючих і збурюючих впливів визначають структуру і параметри системи, що найкращим чином задовольняють поставленим вимогам до якості (в даному розгляді — до мінімуму СКП управління).

1.2 Випадкові процеси та їх статистичні характеристики

Випадковою величиною називають таку, яка в результаті досвіду може прийняти одне з безлічі можливих значень, причому заздалегідь невідомо, яке саме. Випадкову величину з імовірнісної точки зору повністю характеризують функція розподілу ймовірності та щільність ймовірності [4].

Функція розподілу придатна для характеристики як безперервних випадкових величин, так і дискретних величин, тобто таких, які можуть приймати тільки певні числові значення. Надалі будуть використовуватися в основному безперервні випадкові величини, які зручніше характеризувати щільністю ймовірності. Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту: $X, Y, Z, \dots$, а їх можливі значення (реалізації) — відповідно малими літерами: $x, y, z, \dots$ У деяких джерелах випадкові величини позначають малими літерами, а їх реалізації — тими ж літерами з індексом «Т» ($x_T, y_T, \dots$).

Функцією розподілу, або інтегральним законом розподілу, випадкової величини X називається ймовірність виконання нерівності $X < x$:

$$F(x) = P(X < x),$$

де x – не випадковий аргумент.

Властивості функції розподілу наступні:

- 1) $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$;
- 2) $F(-\infty) = 0$ та $F(+\infty) = 1$;
- 3) $(\alpha \leq x \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Щільність ймовірності, або диференціальним законом розподілу, безперервної випадкової величини називають похідну функції розподілу

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Щільність ймовірності $w(x)$ має наступні властивості:

- 1) $w(x) \geq 0$;
- 2) $\int_{\alpha}^{\beta} w(x)dx = P(\alpha \leq X \leq \beta)$;
- 3) $\int_{-\infty}^x w(x)dx = F(x)$;
- 4) $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$.

Системою випадкових величин називають розглянуті разом кілька цих величин.

Функцією розподілу системи двох випадкових величин X і Y називається ймовірність спільного виконання нерівностей

$$X < x; Y < y; F(x, y) = P(X < x; Y < y),$$

де x, y – змінні величини.

Функція розподілу $F(x, y)$ має наступні властивості:

- 1) $F(x_2, y_2) \geq F(x_1, y_1)$ при $x_2 > x_1; y_2 > y_1$;
- 2) $F(x, \infty) = P(X < x) = F_1(x)$;
- 3) $F(\infty, y) = P(Y < y) = F_2(y)$;
- 4) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

Функцією розподілу системи n випадкових величин називається ймовірність спільного виконання нерівностей

$$X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n:$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n).$$

Щільність ймовірності систем двох випадкових величин називається другою змішаною частковою похідною від функції розподілу:

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Властивості $w(x, y)$ наступні:

- 1) $w(x, y) \geq 0$;
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1$;
- 3) $\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y w(x, y) dx dy = F(x, y)$;
- 4) $\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = F_1(x)$ і $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y w(x, y) dx dy = F_2(y)$;
- 5) $w_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dy$ и $w_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx$.

Щільністю ймовірності системи випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ називається змішана часткова похідна порядку n від функції розподілу $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Імовірнісний сенс щільності ймовірності полягає в тому, що

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = P(x_1 \leq X_1 < x_1 + dx_1; \\ x_2 \leq X_2 < x_2 + dx_2; \dots; x_n \leq X_n < x_n + dx_n).$$

Умовною функцією розподілу $F(x/y)$ випадкової величини X відносно Y називається умовна ймовірність події $X < x$ за умови, що Y прийняла певне значення y :

$$F(x/y) = P(X < x/Y = y).$$

Умовною щільністю ймовірності $w(x/y)$ випадкової величини X відносно Y називається співвідношення

$$w(x/y) = \frac{dF(x/y)}{dx}.$$

З теореми множення законів розподілу випливає, що

$$w(x/y) = \frac{w(x, y)}{w_2(y)}; \\ w(y/x) = \frac{w(x, y)}{w_1(x)}.$$

Умовною функцією розподілу $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n/y_1, y_2, \dots, y_m)$ системи $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ випадкових величин відносно величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ називають умовну ймовірність

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n/y_1, y_2, \dots, y_m) = P(X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; \\ X_n < x_n/Y_1 = y_1; Y_2 = y_2; \dots, Y_m = y_m).$$

Умовною щільністю ймовірності $w_1(x_1, x_2, \dots, x_n/y_1, y_2, \dots, y_m)$ системи $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ називають змішану похідну порядку n від умовної функції розподілу. Ця щільність ймовірності визначається через щільність ймовірності системи $(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ виразом

$$w_1(x_1, x_2, \dots, x_n/y_1, y_2, \dots, y_m) = \frac{w(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)}{w_2(y_1, y_2, \dots, y_m)}.$$

Числові характеристики випадкових величин є менш повними, ніж функція розподілу і щільність ймовірності, але визначаються вони простіше. До них відносяться моменти випадкових величин.

1.3 Початкові та централізовані моменти випадкових процесів

Розрізняють *початкові* та *центральні* моменти. Найпростішою числовою характеристикою з них є математичне очікування. *Математичне очікування випадкової величини* характеризує деяке середнє її значення з безлічі можливих значень. Це постійна, відносно якої розсіюються можливі значення випадкової величини [5].

Математичним очікуванням (або середнім значенням) *дискретної випадкової величини* X називають

Суму

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (1.2)$$

де $M[X], m_x$ – символи математичного очікування випадкової величини X ;

x_i, p_i – відповідно можливі значення випадкової величини X і ймовірності цих значень.

Математичним очікуванням (середнім значенням) *безперервної випадкової величини* X називають інтеграл

$$M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx.$$

Математичне очікування функції $\varphi(X)$ *дискретного і безперервного випадкового аргументу* відповідно мають вигляд:

$$M[\varphi(X_i)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i;$$

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) w(x) dx.$$

Початковим моментом порядку k випадкової величини X називають математичне очікування величини X^k :

$$\alpha_k = M[X^k].$$

Початкові моменти характеризують відхилення випадкової величини відносно обраного початку відліку.

Початковий момент порядку k дискретної випадкової величини визначається сумою

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w(x) dx.$$

Найбільшого поширення мають початкові моменти порядків першого (математичне очікування випадкової величини) і другого (середній квадрат випадкової величини):

$$\mu_k = M[(X - m_x)^k].$$

Центрованою випадковою величиною називають різницю

$$\dot{X} = X - m_x$$

Центральний момент для дискретних безперервних випадкових величин відповідно дорівнює:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p^i; \\ \mu_k &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k w(x) dx. \end{aligned}$$

Центральний момент другого порядку називають дисперсією випадкової величини X і позначають $D[X]$ або D_x . Дисперсія характеризує розкид значень випадкової величини навколо її

середнього значення. Дисперсії дискретної та неперервної випадкових величин визначаються відповідно виразами:

$$D_x = M[\dot{X}^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_i)^2 p_i; \quad (1.3)$$

$$D_x = M[\dot{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w(x) dx. \quad (1.4)$$

Розмірність дисперсії дорівнює розмірності квадрата випадкової величини.

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X дорівнює позитивному кореню квадратному з дисперсії:

$$\sigma_x = +\sqrt{D_x}. \quad (1.5)$$

Дисперсія через другий початковий момент і математичне очікування виражається формулою

$$\alpha_2 = D_x m_x^2.$$

Середній квадрат α_2 випадкової величини X оцінює одночасно середнє значення випадкової величини і ступінь розсіювання її відносно цього середнього значення і використовується як критерій оцінки точності систем управління[6].

Середнє квадратичне значення випадкової величини визначається арифметичним значенням квадратного кореня із середнього квадрата:

$$\kappa = \sqrt{\alpha_2}. \quad (1.6)$$

Приклад 1.1. Визначити m_x, D_x, σ_x і κ числа показань лічильника, на який через реле надходить один імпульс, якщо ймовірність безвідмовної роботи реле $p = 0,9$.

Рішення. Число показань лічильника X – випадкова величина. Вона має два можливих значення: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$. Імовірності цих значень відповідно дорівнюють p і $q = 1 - p$. За формулами (1.2), (1.3), (1.5) і (1.6) знаходимо:

$$m_x = \sum_{i=1}^2 x_i p_i = 1 \times p + 0 \times q = p = 0,9;$$

$$D_x = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = (1 - p)^2 p (0 - p)^2 q = pq = 0,09;$$

$$\kappa = +\sqrt{D_x + m_x} = \sqrt{pq + p^2} = \sqrt{p} = 0,95.$$

Числові величини системи випадкових величин — змішані моменти — встановлюють зв'язок величин між собою.

Змішаним початковим моментом порядку $k + s$ системи (X, Y) називають математичне очікування добутку $X^k Y^s$:

$$\alpha_{ks} = M[X^k Y^s]$$

Відповідно момент α_{ks} для дискретних і безперервних випадкових величин визначається формулами:

$$\alpha_{ks} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij};$$

$$\alpha_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s w(x, y) dx dy,$$

де

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j);$$

Очевидно, що $\alpha_{10} = m_x$; $\alpha_{01} = m_y$.

Змішаним центральним моментом порядку $k + s$ системи (X, Y) називають математичне очікування добутку $\dot{X}^k \dot{Y}^s$:

$$\mu_{ks} = M[\dot{X}^k \dot{Y}^s].$$

Відповідно для дискретних і безперервних випадкових величин

$$\mu_{ks} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij};$$

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s w(x, y) dx dy;$$

отже $\mu_{20} = D_x$; $\mu_{02} = D_y$.

Серед змішаних моментів важливе значення має центральний змішаний момент другого порядку μ_{11} , який називається *кореляційним моментом* або *моментом зв'язку випадкових величин X і Y*:

$$R_{xy} = \mu_{11} = M[\dot{X}\dot{Y}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Кореляційний момент, що характеризує взаємозв'язок між випадковими величинами, для дискретних і безперервних випадкових величин відповідно визначається виразами:

$$R_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}$$

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) w(x, y) dx dy.$$

Існує зв'язок

$$R_{xy} = \alpha_{11} - m_x m_y.$$

При незалежності випадкових величин X і Y

$$w(x, y) = w(x)w(y) \text{ и } R_{xy} = 0.$$

Для характеристики зв'язку між випадковими величинами з урахуванням можливих різних відхилень цих величин від своїх математичних очікувань вводиться безрозмірна величина – *коефіцієнт кореляції*

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Для корельованих випадкових величин $R_{xy} \neq 0$ і $r_{xy} \neq 0$, а для некорельованих $R_{xy} = 0$ і $r_{xy} = 0$.

Числовими характеристиками системи декількох випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ є математичні очікування цих величин $(m_{x1}, m_{x2}, \dots, m_{xn})$ і *кореляційна матриця*;

$$\left\| \begin{matrix} R_{x1x1} & R_{x1x2} & \dots & R_{x1xn} \\ R_{x2x1} & R_{x2x2} & \dots & R_{x2xn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{xnx1} & R_{xnx2} & \dots & R_{xnxn} \end{matrix} \right\| \quad (1.7)$$

Для системи дійсних випадкових величин кореляційна матриця (1.7) є симетричною відносно головної діагоналі, оскільки

$$R_{xixj} = R_{xjxi} \quad (j, i = 1, 2, \dots, n).$$

1.4 Визначальні властивості математичного очікування, дисперсій і кореляційних

З метою більш ретельного засвоєння теоретичних основ математичного тлумачення випадкових процесів та їх використання в системах автоматичного управління розглянемо властивості визначальних показників [1].

Властивості математичних сподівань, дисперсій і кореляційних моментів наступні:

1) Математичне очікування невинпадкової величини α дорівнює самій величині α :

$$M[\alpha] = \alpha;$$

2) Невинпадкоий множник можна виносити за знак математичного очікування:

$$M[\alpha X] = \alpha M[X];$$

3) Математичне очікування суми декількох випадкових величин дорівнює сумі математичних очікувань складових величин:

$$M\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n M[X_i];$$

4) Математичне очікування добутку двох випадкових величин X і $\bar{Y}$

$$M[X\bar{Y}] = M[X]M[\bar{Y}] + R_{xy},$$

де $\bar{Y}$ - комплексна сполучена величина.

Для двох некорельованих випадкових величин X і $\bar{Y}$ в останньому виразі $R_{xy} = 0$;

5) Математичне очікування добутку декількох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних очікувань:

$$M[X_1, X_2, \dots, X_n] = M[X_1]M[X_2] \dots M[X_n]. \quad (1.8)$$

Для некорельованих випадкових величин при $n > 2$ вираз (1.8) не має місця;

6) Дисперсія не випадкової величини α

$$D[\alpha] = 0;$$

7) Кореляційний момент двох не випадкових величин α_1 і α_2

$$R_{\alpha_1\alpha_2} = 0;$$

8) Невипадковий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його модуль до квадрата:

$$D[\alpha X] = |\alpha|^2 D[X];$$

9) Кореляційний момент величин

$$Z_1 = \alpha_1 X \text{ і } Z_2 = \alpha_2 Y$$

визначається формулою

$$R_{z_1 z_2} = \alpha_1 \overline{\alpha_2} R_{xy}$$

де α_1 і α_2 - не випадкові величини;

$\overline{\alpha_2}$ – величина, комплексно сполучена з величиною α_2 ;

10) Дисперсія суми декількох випадкових величин дорівнює сумі елементів кореляційної матриці:

$$D \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{x_i x_j}.$$

Для випадку двох величин X і Y

$$D[X + Y] = D_x + D_y + 2R_{xy}.$$

Для некорельованих випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ дисперсія суми цих величин дорівнює сумі дисперсій доданків:

$$D \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n D[X_i] = \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2;$$

11) Кореляційний момент випадкових величин

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n X_i \text{ и } Z_2 = \sum_{j=1}^n Y_j.$$

При відсутності кореляції

$$X_i \text{ і } Y_j \text{ (} i, j = 1, 2, \dots, n \text{)} R_{z_1 z_2} = 0.$$

Найбільш поширені закони розподілу наступні.

Закон рівномірної щільності ймовірності випадкової величини – це такий закон, для якого щільність ймовірності є постійною на деякому інтервалі (a, b) і дорівнює нулю поза цим інтервалом:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } a < x < b \\ 0, & \text{при } x < a \text{ и } x > b. \end{cases}$$

Функція розподілу для такого закону має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b; \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Графіки $w(x)$ і $F(x)$ представлені на рис. 1.1.

Математичне очікування і дисперсія випадкової величини для закону рівномірної щільності:

$$m_x = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2};$$

$$D_x = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Прикладами такого розподілу можуть бути: розподіл помилок зчитування в межах ціни поділки вимірювальної шкали та ін.

Біноміальний закон розподілу характеризує розподіл дискретної випадкової величини, для якої ймовірності її можливих значень визначаються виразом

$$P_{mn} = P(X = m) = C_n^m p^m p^{n-m}$$

де $m = 0, 1, 2, \dots, n$;

C_n^m - кількість комбінацій з n елементів по m ;

p - параметр закону;

$$q = 1 - p.$$

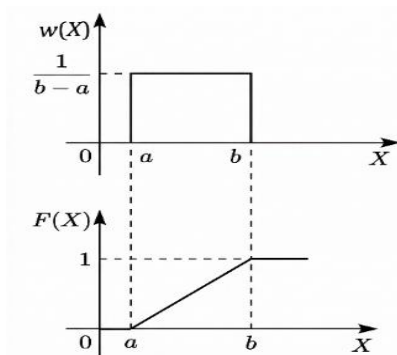


Рисунок 1.1 – Графік щільності ймовірності та функції розподілу закону рівномірної щільності

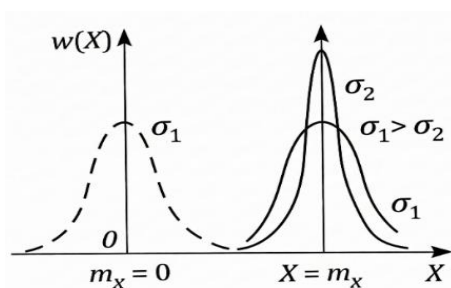


Рисунок 1.2 – Криві нормального розподілу

Математичне очікування і дисперсія сумарної випадкової величини X дорівнюють:

$$m_x = M \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] = \sum_{k=1}^n M[X_k] = np;$$

$$D_x = D \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] = \sum_{k=1}^n D[X_k] = npq.$$

Закон Пуассона характеризує розподіл дискретної випадкової величини, для якої ймовірності її можливих значень визначаються формулою:

$$P_m = P(X = m) = \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha},$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$; α – параметр розподілу.

За умови, що ймовірність появи події A в окремому досліді $p = \frac{a}{n}$, а кількість дослідів $n \rightarrow \infty$, закон Пуассона може бути отриманий з біноміального розподілу.

Математичне очікування та дисперсія:

$$m_x = np = n \frac{a}{n} = a;$$

$$D_x = npq = np(1 - p) = a \left(1 - \frac{a}{n}\right) = a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Розподіл Пуассона використовується при вирішенні таких завдань, як оцінка ймовірності функціональних відмов апаратури, оцінка ймовірності накриття цілі осколками бойової частини ракети при заданій величині промаху та ін.

Номінальний (або Гаусів) закон розподілу безперервної випадкової величини – це такий закон, для якого щільність ймовірності має вигляд

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Нормальний закон розподілу випадкової величини X залежить від двох параметрів: m_x і σ_x . Графіки нормального розподілу показані на рис. 1.2. Максимальна ордината кривої дорівнює $\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}$ і відповідає точці $x = m_x$. Центром симетрії є математичне очікування m_x . Чим більше σ_x , тим більш пологою крива і тим більше розсіювання відносно центру m_x . При зміні параметра m_x крива переміщується вздовж осі абсцис без зміни форми; при $x \rightarrow \pm\infty$ крива асимптотично

наближається до осі абсцис.

З імовірністю 0,997 відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її середнього значення не перевищує $3\sigma_x$. Це означає, що практично розсіювання нормально розподіленої випадкової величини X відносно центру m_x не виходить за межі $\pm 3\sigma_x$ («правило трьох сигм»).

Нормальний закон розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) характеризується щільністю ймовірності виду

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{1-r_{xy}^2} \left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{r_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \right\}.$$

У загальному випадку двовимірний нормальний закон має п'ять параметрів: $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$, де m_x, m_y - математичні очікування; σ_x, σ_y - середні квадратичні відхилення відповідно випадкових величин X і Y , а r_{xy} - коефіцієнт кореляції цих величин.

Для $r_{xy} = 0$ вираз для щільності ймовірності нормального закону розподілу некорельованих випадкових величин має вигляд

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]} = w_1(x)w_2(y), \quad (1.9)$$

$$w_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$

$$w_2 = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

З виразу (1.9) випливає, що нормально розподілені некорельовані випадкові величини є незалежними і що ці поняття в разі нормального розподілу є еквівалентними. Нормальний закон

розподілу має властивість стійкості: сума двох незалежних випадкових величин $Z = X + Y$, кожна з яких підпорядкована нормальному закону, підпорядковується також нормальному закону

$$m_z = m_x + m_y \text{ і } \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Нормальний закон є придільним, до нього наближаються інші закони розподілу. Сума досить великого числа незалежних випадкових величин, підпорядкованих будь-яким законам розподілу, за не дуже жорстких умов приблизно підпорядковується нормальному закону.

Зазначені властивості визначають широке використання нормального закону в теорії та практиці.

1.5 Статистичні характеристики випадкових процесів

Випадковою функцією називається функція, значення якої при кожному заданому значенні аргументу (або декількох аргументів) є випадковою величиною.

Функція, що отримується в результаті кожного окремого досвіду, не є випадковою, оскільки закон її відомий, і називається вона *реалізацією випадкової функції* (рис. 1.3).

Випадкові функції, для яких аргументом є час, називають *випадковими* або *стохастичними процесами*.

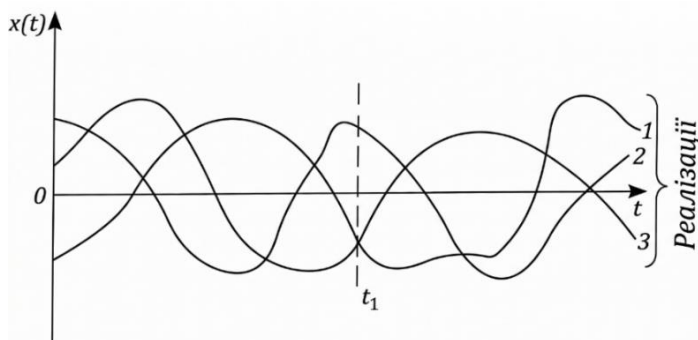


Рисунок 1.3 – Графіки реалізації випадкової функції часу

За типом законів розподілу координат випадкової функції розрізняють: нормальні (гаусові), пуассонські, рівномірної щільності та інші випадкові процеси.

За наявністю (відсутністю) залежності ймовірності розподілу координат випадкової функції від її передісторії розрізняють марковські та немарковські процеси. Якщо поведінка випадкового процесу в наступні моменти часу не залежить від його значень у попередні моменти часу, а визначається значенням у даний момент часу та умовною ймовірністю переходу до наступного моменту часу, то такий процес називається марковським.

За залежністю характеристик випадкових процесів від початку відліку часу розрізняють стаціонарні та нестаціонарні випадкові процеси.

За наявністю (відсутністю) зв'язку між середнім за аргументом і середнім за множиною розрізняють ергодичні та неергодичні випадкові процеси.

Випадковий процес може бути охарактеризований багатовимірною функцією розподілу ймовірності та багатовимірною щільністю ймовірності.

n – мірним законом розподілу випадкової функції $X(t)$ називається закон розподілу сукупності значень $X(t_1), \dots, X(t_n)$ випадкової функції $X(t)$ при n довільно взятих значеннях $t_1, \dots, t_n$ аргументу t . Для моменту часу t_1 випадковий процес за визначенням являє собою випадкову величину $X(t_1)$.

Зазвичай n -вимірний закон розподілу випадкової функції $X(t)$ характеризують її n -вимірною щільністю ймовірності $w_n = (x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$, яка в загальному випадку залежить від значень $t_1, \dots, t_n$ аргументу t як від параметра.

Аналогічно пара випадкових процесів $X(t)$ і $Y(x)$ може бути описана за допомогою n -мірної спільної щільності ймовірності $w_n = (x_1, \dots, x_n; y_{n+1}, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n)$.

Вичерпною характеристикою випадкової функції $X(t)$ з незалежними значеннями при будь-яких різних значеннях аргументу $t_1, \dots, t_n$ є її одновимірний закон розподілу. Це означає, що n -вимірна щільність ймовірності випадкової функції $X(t)$ виражається через її одновимірну щільність ймовірності формулою

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_1(x_1, t_1), \dots, w_1(x_n, t_n).$$

Закон розподілу $F_1(x, t)$ значення випадкової функції $X(t)$ при кожному заданому значенні t називається *одновимірним законом розподілу* випадкової функції $X(t)$. У загальному випадку він залежить від t як від параметра. Знання такого закону достатньо для вирішення задач, в яких значення випадкової функції при різних значеннях аргументу розглядаються ізольовано один від одного.

Двовимірним законом розподілу випадкової функції $X(t)$ називається спільний закон розподілу її значень $X(x_1)$, $X(t_2)$ при двох довільно взятих значеннях аргументу t . Вичерпною характеристикою для нормально розподілених випадкових функцій є двовимірний закон розподілу.

n -вимірний нормальний закон розподілу повністю визначається математичним очікуванням і кореляційними моментами випадкових величин. Математичні очікування випадкових величин $X(t_1), \dots, X(t_n)$ визначаються одновимірним законом розподілу випадкової величини $X(t)$, а їх кореляційні моменти — двовимірним законом розподілу випадкової функції $X(t)$. В результаті двовимірний закон розподілу нормально розподіленої випадкової функції цілком визначає її n -вимірний закон розподілу при будь-якому n і є її повною характеристикою. Двовимірний закон розподілу є вичерпною характеристикою і для випадкових марковських процесів.

Для оцінки точності лінійних систем при вирішенні багатьох прикладних задач достатньо знати перші два моменти процесу: математичне очікування і кореляційну функцію [7].

1.6 Властивості стохастичних процесів

Властивості стохастичних процесів, що визначаються двома першими моментами, вивчаються *кореляційною теорією*. Широко поширений тип нормальних (гаусівських) випадкових процесів повністю визначається кореляційною функцією. Крім *кореляційного аналізу*, заснованого на прямому розгляді випадкових сигналів у часі, використовується метод, заснований на розгляді частотних складових випадкових сигналів, — *спектральний аналіз*. Кореляційний і спектральний аналізи широко застосовуються в інженерній практиці.

Математичне очікування $M[X(t)]$ або середнє (за множиною) значення випадкового процесу $X(t)$, визначається аналогічно математичному очікуванню випадкової величини і виражається через одновимірну щільність ймовірності $w_1(x, t)$ за формулою

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w_1(x, t)dx.$$

Математичне очікування $m_x(t)$ являє собою детерміновану (невипадкову) функцію аргументу t . Практично математичне очікування може бути визначено за реалізацією. Для цього фіксується значення аргументу t .

При $t = t_1$ значення реалізацій $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)$ являє собою спостереження випадкової величини. Математичне очікування випадкової величини знаходиться як середнє арифметичне:

$$m_x(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N x_v(t_i),$$

де $i = 1, 2, \dots, n$; v – номер реалізації.

Статистичні характеристики, отримані як деякі функції експериментальних даних, називаються *оцінками істинних статистичних характеристик*. При малій кількості експериментів оцінки є випадковими величинами. Заміна шуканих статистичних характеристик їх оцінками дає випадкову помилку. При великій кількості дослідів середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини, згідно із законом великих чисел, наближається до її математичного очікування [8].

Випадкова функція, математичне очікування якої дорівнює нулю, називається *центрованою*. Отже, випадкову функцію можна представити як суму математичного очікування і центрованої випадкової функції, тобто

$$X(t) = m_x(t) + X(t),$$

де $X(t)$ - позначення центральної випадкової функції.

Для характеристики статистичного взаємозв'язку різних випадкових процесів, що діють на одну і ту ж систему, використовують поняття *взаємної кореляційної функції*. Взаємна кореляційна функція $R_{xy}(t_1, t_2)$ випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ визначається як математичне очікування добутку значень центрированих випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$, взятих у два моменти часу t_1 і t_2 тобто

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1)\dot{Y}(t_2)], \quad (1.10)$$

де

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= Y(t) - M[Y(t)]; \\ \dot{X}(t) &= X(t) - M[X(t)]. \end{aligned}$$

Відповідно до визначення математичного очікування взаємна кореляційна функція може бути записана також наступним чином:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)] [y - m_y(t)] w_2(x, y; t_1, t_2) dx dy,$$

де $w_2(x, y; t_1, t_2)$ – двовимірна спільна щільність ймовірності процесів $X(t)$ та $Y(t)$.

Випадкові функції називаються корельованими, якщо їх взаємна кореляційна функція не дорівнює нулю, і *некорельованими* при рівності її нулю.

Центральною або *незміщеною* кореляційною або автокореляційною функцією називається центральний момент другого порядку випадкових величин $X(t_1), X(t_2)$, тобто

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)] [y - m_y(t)] w_2(x, y; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \dots \end{aligned}$$

Кореляційна функція пов'язує між собою відхилення випадкової функції від її математичного очікування при двох

значеннях аргументів t_1 і t_2 . З формули (1.10) випливає, що

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1),$$

а кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів:

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1).$$

За умови, що $t_1 = t_2 = t$, тобто аргументи кореляційної функції рівні між собою

$$R_x(t, t) = M[\dot{X}^2(t)].$$

Це означає, що кореляційна функція для одного і того ж перетину дорівнює математичному очікуванню квадрата випадкової функції.

Для центрованої функції $\dot{X}(t)$ математичне очікування $M[\dot{X}^2(t)] = D_x(t)$, тобто кореляційна функція при $t_1 = t_2 = t$ дорівнює дисперсії випадкової функції:

$$D_x(t) = R_x(t, t) = M[\dot{X}^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 w_1(x, t) dx.$$

Якщо випадковий процес має вигляд

$$Y(t) = X(t) + g(t),$$

де $X(t)$ - випадковий процес з математичним очікуванням $m_x(t)$ і кореляційною функцією $R_x(t_1, t_2)$;

$g(t)$ - не випадкова функція часу, то

$$R_y(t_1, t_2) = M[\dot{Y}(t_1)\dot{Y}(t_2)] = M[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)] = R_x(t_1, t_2),$$

тобто кореляційна функція випадкового процесу не залежить від його адитивної не випадкової складової. Це впливає із співвідношення

$$\dot{Y}(t_1) = Y(t_1) - m_y(t_1) = X(t_1) + g(t_1) - m_x(t_1) - g(t_1) = \dot{X}(t_1).$$

Для випадкового процесу

$$Y(t) = X(t)g(t)$$

кореляційна функція

$$R_y(t_1, t_2) = g(t_1)g(t_2)R_x(t_1, t_2),$$

тобто при множенні випадкового процесу $X(t)$ на не випадкову функцію часу $g(t)$ його кореляційну функцію $R_x(t_1, t_2)$ множать на $g(t_1)g(t_2)$.

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція аргументу t , що представляє середнє значення квадрата різниці між випадковою функцією та її середнім значенням. Дисперсія дорівнює квадрату середньоквадратичного відхилення:

$$D_x(t) = \sigma_x^2(t).$$

У загальному випадку середньоквадратичне відхилення змінюється з плином часу.

Дисперсія випадкової функції розраховується за реалізаціями за допомогою формули

$$D_x(t_i) = \sigma_x^2(t_i) = \frac{\sum_{v=1}^n [x_v(t_i) - m_x(t_i)]^2}{N - 1}.$$

Взаємні кореляційні та кореляційні функції залежать як від ступеня взаємопов'язаності зіставляваних значень випадкових процесів, так і від дисперсії цих процесів.

Для отримання чистої міри взаємозв'язку проводять нормування кореляційних функцій. *Нормованою взаємною кореляційною функцією процесів $X(t)$ і $Y(t)$ називається співвідношення*

$$r_x(t) = \frac{R_y(t_1, t_2)}{\sqrt{R_x(t_1, t_2)R_y(t_1, t_2)}} \quad (1.11)$$

При $Y = X$ співвідношення (1.11) представляє вираз для нормованої кореляційної функції $r_x(t_1, t_2)$ процесу $X(t)$. Нормовані кореляційні функції часто називають коефіцієнтами кореляції. Вони можуть приймати значення тільки в межах

$$-1 \leq r_{xy}(t_1, t_2) \leq 1.$$

Зв'язок між математичними очікуваннями, кореляційними функціями та початковими моментами другого порядку випадкових функцій встановлюється наступними співвідношеннями.

Початковим моментом другого порядку $[a_2(t_1, t_2)]$ випадкової функції $X(t)$ називають початковий момент другого порядку її значень при довільних значеннях моменту.

$$\begin{aligned} F_x(t_1, t_2) &= M[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \\ &= R_x(t_1, t_2) + m_x(t_1)m_x(t_2). \end{aligned}$$

Вочевидь, що

$$R_x(t_1, t_2) = F_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2).$$

Аналогічно початковий момент другого порядку $F_x(t_1, t_2)$ випадкових функцій $X(t_1)$ і $Y(t_2)$ пов'язаний з математичними очікуваннями цих функцій і їх взаємною кореляційною функцією формулою

$$\begin{aligned} F_x(t_1, t_2) &= M[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= R_{xy}(t_1, t_2) + m_x(t_1)m_y(t_2) \dots \end{aligned}$$

При дослідженні випадкових функцій іноді виявляється доцільним використання канонічних розкладів випадкових функцій, метод побудови яких розроблений В. С. Пугачовим. На основі цього методу ним створена загальна теорія випадкових функцій із застосуванням до задач управління.

Канонічним розкладом випадкової функції $X(t)$ називають представлення цієї функції у вигляді суми її математичного очікування $m_x(t)$ і взаємно некорельованих елементарних випадкових функцій $V_v x_v(t)$:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_v V_v x_v(t),$$

де $x_v(t)$ - не випадкові функції;

V_v - взаємно некорельовані випадкові величини з рівними нулю математичними очікуваннями.

Кореляційна функція $R_x(t_1, t_2)$ в цьому випадку може бути визначена виразом

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)] = M\left[\sum_v V_v x_v(t_1) \sum_v V_v x_v(t_2)\right] \\ &= \sum_v D_v x_v(t_1) x_v(t_2), \end{aligned}$$

де $D_v = M[x_v^2]$ - дисперсія випадкової величини V_v .

1.7 Стаціонарні випадкові процеси

Найпростіше здійснюється аналіз випадкових процесів, статистичні характеристики яких не залежать від поточного часу. Такі процеси називаються *стаціонарними*. Розрізняють стаціонарність у вузькому сенсі та стаціонарність у широкому сенсі.

Стаціонарним у вузькому сенсі називається процес $X(t)$, якщо його n -вимірна щільність ймовірності $w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ при будь-

якому n залежить тільки від величини інтервалів $t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1$ і не залежить від положення цих інтервалів в області зміни аргументу t .

Стаціонарним у широкому сенсі називається процес $X(t)$, математичне очікування якого є постійним, а кореляційна функція $R_x(t_1, t_2)$ залежить тільки від різниці $\tau = t_2, \dots, t_1$; при цьому кореляційну функцію позначаю $R_x(\tau)$.

Реальні фізичні процеси більшою чи меншою мірою наближаються до стаціонарних. Багато з них, наприклад теплові шуми, можна з великою точністю вважати стаціонарними. До стаціонарних відносять також такі процеси, як коливання літака щодо встановленого стану горизонтального польоту, шуми в радіоелектронній апаратурі, процес качки корабля та ін.

Прикладами нестаціонарного випадкового процесу є перехідні процеси будь-якої системи управління при будь-якому випадковому вхідному сигналі, що представляє собою стаціонарний або нестаціонарний випадковий процес. Можливість застосування до багатьох нестаціонарних процесів результатів, отриманих при дослідженні стаціонарних процесів, пояснюється тим, що практично аналізу піддаються тільки відрізки реалізацій досліджуваних процесів, що мають кінцеву тривалість. Якщо на цих відрізках часу досліджувані процеси мало відрізняються від стаціонарних, то до них може бути застосована теорія стаціонарних процесів.

Надалі під стаціонарним випадковим процесом будемо розуміти стаціонарний у широкому сенсі процес, при якому:

$$M[X(t)] = m_x(t) = m_x = \text{const};$$

$$D_x(t) = D_x = \sigma_x^2 = \text{const};$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau).$$

Приблизні графіки стаціонарного та нестаціонарного процесів представлені на рис. 1.4.

Вираз для кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу має вигляд

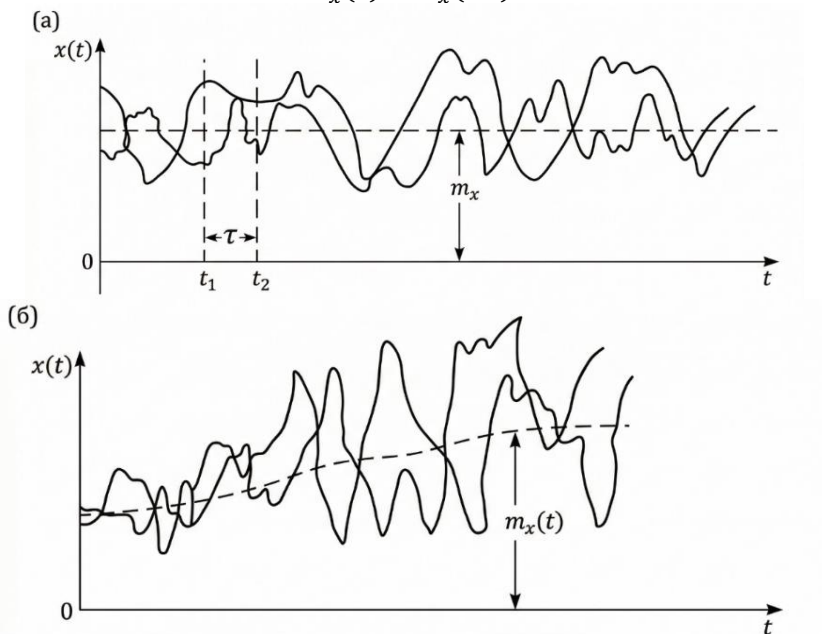
$$R_x(\tau) = M[\dot{X}(t)\dot{X}(t - \tau)] = M[X(t)X(t - \tau)] - m_x^2$$

або

$$R_x(\tau) = M[\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)] = M[X(t)X(t+\tau)] - m_x^2,$$

оскільки

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau).$$



a – стаціонарного; $б$ – нестаціонарного.

Рисунок 1.4 – Графіки випадкового процесу

При $\tau = 0$ кореляційна функція має максимальне значення, що представляє собою дисперсію $D_x(t)$ процесу $X(t)$:

$$R_x(0) = M\{[X(t)]^2\} = D_x = \sigma_x^2.$$

У теорії стрільби, в вимірювальній техніці, при дослідженні САУ часто доводиться стикатися з випадковими процесами, що характеризуються нормальним, або Гаусовим, законом розподілу.

Оскільки математичне очікування і кореляційна функція нормального випадкового процесу повністю визначають його n -вимірну щільність ймовірності, то всі нормальні випадкові процеси, стаціонарні в широкому сенсі, будуть стаціонарними і в вузькому сенсі. При проходженні нормальних випадкових процесів через динамічну систему з постійними параметрами змінюються m_x, D_x та інші характеристики, але закон розподілу, як і раніше, залишається нормальним.

Для двох випадкових процесів вводиться поняття стаціонарної зв'язаності. Стаціонарно зв'язаними у вузькому сенсі називаються випадкові процеси $X(t)$ і $Y(t)$, якщо їх спільна n -вимірна щільність ймовірності $w_n(x_1, \dots, x_m; y_{m+1}, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n)$ при будь-яких n і m залежить тільки від величини інтервалів $t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1$ і не залежить від положення цих інтервалів в області зміни аргументу t .

Стаціонарно пов'язаними в широкому сенсі є випадкові процеси $X(t)$ і $Y(t)$, якщо їх взаємна кореляційна функція $R_{xy}(t_1, t_2)$ залежить від різниці таргументів t_1 і t_2 .

Взаємна кореляційна функція стаціонарних і стаціонарно пов'язаних випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ визначається виразом

$$R_{xy}(\tau) = M[\dot{X}(t)\dot{Y}(t - \tau)] = M[X(t)Y(t - \tau)] - m_x m_y$$

або

$$R_{xy}(\tau) = M[\dot{X}(t + \tau)\dot{Y}(t)] = M[X(t + \tau)Y(t)] - m_x m_y.$$

Для стаціонарно пов'язаних процесів

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

Взаємна кореляційна функція виражається через двовимірну щільність ймовірності стаціонарно пов'язаних у вузькому сенсі процесів:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)] [y - m_y(t)] w_2(x, y; \tau) dx dy,$$

де $w_2(x, y; \tau)$ – двовимірна щільність ймовірності, що залежить від параметра τ .

Нормовані кореляційні функції стаціонарних і стаціонарно пов'язаних випадкових процесів знаходяться у відповідності з виразом (1.11) за формулами:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)R_y(0)}} = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y};$$

$$r_{xx}(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}.$$

Поряд зі стаціонарними вводяться поняття квазістаціонарних (майже стаціонарних) випадкових процесів. *Квазістаціонарними* або *майже стаціонарними* називають випадкові функції, для яких справедливі співвідношення:

$$M[X(t)] = \begin{cases} m_x, & \text{при } t_0 - \frac{T}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{T}{2}; \\ 0, & \text{при інших } t \end{cases}$$

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} R_x(t_2 - t_1) & \text{при } t_0 - \frac{T}{2} \leq (t_1, t_2) \leq t_0 + \frac{T}{2}; \\ 0 & \text{при інших } (t_1, t_2). \end{cases}$$

де T – інтервал фактичного існування випадкової функції $X(t)$;
 t_0 - деякий довільний момент часу.

1.8 Ергодичні випадкові процеси

Ергодичними називають такі стаціонарні процеси, для яких статистичні характеристики, отримані усередненням за часом однієї реалізації (на досить великому інтервалі спостереження), приблизно збігаються з характеристиками, отриманими усередненням за множиною реалізацій (при фіксованому часі). Для ергодичних випадкових процесів справедливі такі співвідношення:

– математичне очікування або середнє значення

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(x, t)dx = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_\tau(t)dt,$$

де $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(x, t)dx$ – усереднення за множиною реалізацій;

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_\tau(t)dt$ – усереднення за часом однієї реалізації при достатньо великому T ;

$x_\tau(t)$ – реалізація стаціонарного випадкового процесу, взятого на інтервалі $-T \leq t \leq T$, а поза цим інтервалом дорівнює 0;

– дисперсія

$$\begin{aligned} D_x(t) &= M[\{X(t) - m_x(t)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \{x(t) - m_x(t)\}^2 w(x, t)dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [X_T(t) - m_x]^2 dt \dots \end{aligned}$$

Кореляційна функція, що характеризує зв'язок між значеннями випадкової функції в моменти t і $t + \tau$, для стаціонарного ергодичного процесу визначається як середнє за часом від добутку випадкових функцій $X(t)$ і $X(t + \tau)$, зсунутих одна відносно одної на певний проміжок часу:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \dot{X}(t)\dot{X}(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x)w_2(x_1, t, x_2, t + \\ &+ \tau)dx_1dx_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x_T(t) - m_x] dt \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

При $\tau = 0$ $R_x(0) = \sigma_x^2 = D_x$, тобто при $\tau = 0$ кореляційна функція дорівнює дисперсії випадкового процесу.

Мірою протяжності зв'язку між двома перерізами процесу $X(t)$ і $X(t + \tau)$, що називається кореляційною, виступає час кореляції $\tau_{\text{кор}}$, тобто та відстань між цими двома перерізами, починаючи з якої можна практично вважати некорельованими випадкові величини $X(t)$ і $X(t + \tau)$, $\tau \geq \tau_{\text{кор}}$.

Визначення кореляційної функції з експериментальних даних проводиться за формулою

$$R(i\Delta) = \frac{1}{N+1} \sum_{v=0}^N x(v\Delta)x(v\Delta + i\Delta),$$

де N - кількість проміжків тривалістю Δ , на які ділиться відрізок $T = N\Delta$; $t = v\Delta$ і $\tau = i\Delta$ - дискретні значення, кратні Δ ; $v = 0, 1, 2, \dots, N$; $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ергодичність є характерною властивістю більшості стаціонарних випадкових процесів, що зустрічаються на практиці. Водночас відомі й неергодичні стаціонарні процеси. Достатньою умовою ергодичності вважається співвідношення

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0, \quad (1.13)$$

тобто процес є ергодичним, якщо його кореляційна функція необмежено спадає за модулем при $|\tau| \rightarrow \infty$.

При нормальному випадковому процесі умова (1.13) є достатньою як щодо математичного очікування, так і щодо кореляційної функції.

Приклад 1.2. Визначити кореляційну функцію $R(\tau)$ для регулярної функції $x(t) = A \sin(\beta t + \psi)$.

Розв'язання: Відповідно до формули (1.12)

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x_T(t)x_T(t+\tau)] dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \sin(\beta t + \psi) \sin(\beta t + \beta\tau + \psi) dt = \frac{A^2}{2} \cos\beta\tau; \end{aligned}$$

$$\text{де } T_0 = \frac{2\pi}{\beta}$$

Підстановка $\tau = 0$ в $R(\tau)$ дає $R(0) = \frac{A^2}{2} = \overline{x^2}$. У даному випадку середній квадрат дорівнює дисперсії $\overline{x^2} = D$.

Спектральна щільність $S_x(w)$ стаціонарного ергодичного випадкового процесу

$X(t)$ – це функція, що характеризує спектральний (частотний) склад процесу.

Спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ називається величина

$$S_x(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(jw)|^2}{2T},$$

де $X_T(jw)$ – частотний спектр реалізації $x_t(t)$ функції $X(t)$.

Оскільки $|X_T(jw)|^2$ являє собою енергію, зосереджену на частоті w , то величина $S_x(w)$ – енергетичний частотний спектр функції $X(t)$.

Величина $S_x(w)$ характеризує усереднене значення енергії процесу $X(t)$ за частотами елементарних гармонічних складових. Вона є парною невід'ємною дійсною функцією. Розмірність спектральної щільності $[X^2 \times c]$, де $[X]$ – розмірність процесу

Спектральна щільність є зображенням Фур'є кореляційної функції

$$S_x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \quad (1.14)$$

або

$$S_x(w) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos w\tau d\tau \quad (1.15)$$

Відповідно кореляційна функція є оберненим перетворенням Фур'є від спектральної щільності:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w) e^{jw\tau} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(w) \cos w\tau dw \quad (1.16)$$

Співвідношення (1.14) і (1.16), які називаються *теоремою Вінера-Хінчина*, є основними формулами спектральної теорії стаціонарних випадкових процесів. При $\tau = 0$.

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w) dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(w) dw = \overline{x^2(t)}, \quad (1.17)$$

тобто в цьому випадку середнє значення квадрата випадкової функції пропорційне площі, обмеженій кривою спектральної щільності $S_x(w)$ і віссю абсцис.

У випадку центрованої випадкової функції з формули (1.17) випливає вираз для дисперсії:

$$D_x = [\dot{X}(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w) dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(w) dw. \quad (1.18)$$

Взаємною спектральною щільністю двох стаціонарних і стаціонарно пов'язаних процесів $X(t)$ і $Y(t)$ називається величина

$$S_{xy}(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(-jw) Y_T(jw),$$

де $X_T(-jw)$ - функція, комплексно сполучена з функцією $X_T(jw)$.

У загальному випадку взаємна спектральна щільність $S_{xy}(w)$ є комплексною величиною.

Взаємна спектральна щільність процесів $X(t)$ і $Y(t)$ є перетворенням Фур'є взаємної кореляційної функції цих процесів, тобто

$$S_{xy}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-jw\tau} d\tau. \quad (1.19)$$

Зворотнє перетворення має вигляд

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(w) e^{jw\tau} dw. \quad (1.20)$$

У окремому випадку, коли $Y = X$, $S_{xy}(w)$ переходить в $S_x(w)$, а $R_{xy}(\tau)$ - в $R_x(\tau)$ і співвідношення (1.19) і (1.20) виражають узагальнену теорему Вінера-Хінчина.

Непрямий метод визначення спектральної щільності полягає в тому, що спочатку визначають кореляційну функцію, а потім за допомогою перетворення Фур'є (1.15) або (1.14) знаходять функцію спектральної щільності. Останнє можна зробити, або апроксимуючи отриману криву $R(\tau)$ деякою відомою функцією, або обчисливши інтеграл (1.15) чисельно або графічно.

З урахуванням чисельних значень

$$S_x(w) = \frac{40}{1 + 0,04w^2}.$$

Прямий метод визначення спектральної щільності полягає в тому, що випадкова функція у вигляді осцилограми за деякий проміжок часу T розглядається як деяка періодична функція з періодом T . Здійснюючи гармонійний аналіз такої періодичної функції, визначають коефіцієнти a_k і b_k гармонійної складової цієї функції при частоті w_k . Спектральна щільність досліджуваної випадкової функції на частоті w_k

$$S(w_k) = \frac{1}{T} (a_k^2 + b_k^2).$$

Для отримання аналітичного виразу $S(w)$ обробляють осцилограму випадкової функції, отримують графік кореляційної функції, який апроксимують функціями виду $e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta_k \tau$.

У табл. 1.1 наведено формули і графіки деяких кореляційних функцій та відповідні їм формули і графіки спектральних щільностей.

Властивості стаціонарних спектральних щільностей такі.

1. Якщо $R(\tau)$ – монотонна спадна функція від τ , то $S(w)$ – теж монотонна спадна функція.

2. Чим ширший графік кореляційної функції $R(\tau)$, тим вужчий графік спектральної щільності $S(w)$. Це відповідає фізичній сутності процесу: чим повільніший процес, тим менше значення в процесі мають високі частоти.

3. Якщо $R(\tau)$ наближається до нуля протягом дуже короткого проміжку часу Δ , то $S(w)$ зберігає приблизно постійне значення. Такий спектр називають білим, а сигнал – білим шумом (див. табл. 1.1, другу графу).

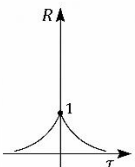
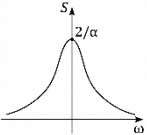
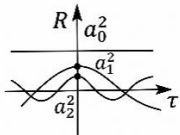
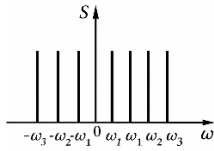
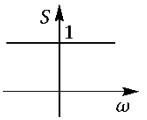
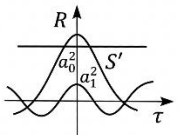
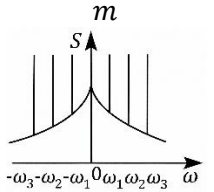
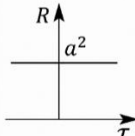
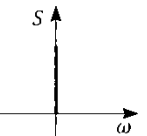
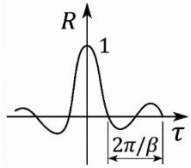
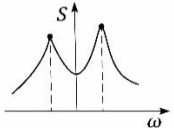
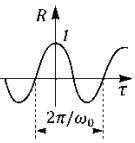
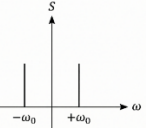
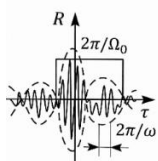
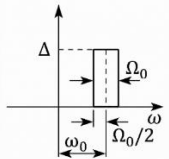
З огляду на те, що $S(w) = S_0 = \text{const}$, кореляційна функція білого шуму відповідно до формули (1.16) дорівнює

$$R_\tau = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jw\tau} dw.$$

Ввівши вираз для δ -функції

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jw\tau} dw,$$

Таблиця 1.1 – Спектри сигналів

№ з-р	$R(\tau)$	$\delta(\omega)$	$R(\tau)$	$\delta(\omega)$
1	$e^{-\alpha(\tau)}$ 	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ 	$\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \cos \omega_k \tau$ 	e 
2	$\delta(\tau)$ 	1 	$\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \cos \omega_k \tau + R'(\tau)$ 	m 
3	α^2 	$2\pi\alpha^2\delta(\omega)$ 	$e^{-\alpha(\tau)} \cos \beta \tau$ 	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2}$ 
4	$\cos \omega_0 \tau$ 	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ 	$\frac{A}{\pi\tau} \cos \omega_0 \tau \sin \frac{\Omega_0}{2} \tau$ 	

отримаємо вираз для кореляційної функції білого шуму:

$$R(\tau) = S_0 \delta(\tau).$$

На підставі властивостей δ -функції

$$R(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau \neq 0; \\ \infty, & \text{при } \tau = 0. \end{cases}$$

Це означає, що перерізи випадкового процесу типу білого шуму є некорельованими випадковими величинами з нескінченними дисперсіями.

$$R(0) = D = \infty.$$

Такий процес є математичною абстракцією, оскільки його потужність повинна бути нескінченно великою.

Для спрощення досліджень іноді процес на вході системи в практичному діапазоні частот розглядають як білий шум.

4. Для постійної складової $x = a$ кореляційна функція $R(\tau) = a^2$, а графік $S(w)$ являє собою дельта-функцію (див. табл. 1.1, графу третю).

5. При $\tau = 0$ і центрованої випадковій функції

$$D_x(0) = \overline{x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(w) dw = D_x.$$

1.9 Перетворення вхідного випадкового сигналу лінійною системою управління

Визначення статистичних характеристик вихідного сигналу системи в усталеному режимі в часовому представленні.

Зв'язок між характеристиками випадкових процесів і $X(t)$ та $Y(t)$ на вході та виході лінійної системи може бути розглянутий у часовому та частотному представленні. Співвідношення в часовому представленні дозволяють знаходити статистичні характеристики на виході системи як в усталеному, так і в перехідному режимах,

частотне представлення в усталеному режимі дає простіші формули зв'язку виходу і входу системи. Розглянемо послідовно ці співвідношення.

Якщо на вході лінійного чотириполюсника (фільтра) з передавальною функцією $K_{yx}(p)$ діє стаціонарний випадковий сигнал $X(t)$, що характеризується математичним очікуванням m_x , кореляційною функцією $R_x(\tau)$ і спектральною щільністю $S_x(w)$, то сигнал на виході чотириполюсника $Y(t)$ в усталеному режимі визначається за допомогою інтегрального виразу

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) k_{yx}(t - \tau) d\tau, \quad (1.21)$$

де $k_{yx}(t)$ – імпульсна перехідна функція чотириполюсника, або

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau) k_{yx}(\tau) d\tau. \quad (1.22)$$

Зазвичай нижня межа інтегрування у формулах (1.21) і (1.22) дорівнює нулю, а не $-\infty$, оскільки для всіх фізичних реальних систем

$$k_{yx}(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (1.23)$$

тобто реакція системи на δ -функцію, що діє в момент $t = 0$, дорівнює нулю в час, що передедує цьому моменту.

Математичні очікування для стаціонарного випадкового процесу $m_x(t)$ і відповідно $m_y(t)$ на виході чотириполюсника є постійними величинами і визначаються за рівнянням статистики

$$m_y = M[Y(t)] = m_x \int_{-\infty}^{\infty} k_{yx}(t) dt = K_{yx}(0) m_x, \quad (1.24)$$

де $k_{yx}(0)$ - передавальна функція чотириполюсника на нульовій частоті.

Кореляційна функція вихідної величини пов'язана з кореляційною функцією вхідної величини інтегральним виразом

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{yx}(\tau_1) k_{yx}(\tau_2) R_x(\tau_1 - \tau_2 + \tau) d\tau_1 d\tau_2. \quad (1.25)$$

Для обчислення $R_y(\tau)$ при відомій $R_x(\tau)$ необхідно:

1) знайти імпульсну перехідну функцію системи $k_{yx}(t)$ і, прийнявши $t = \tau_1$ та $t = \tau_2$, отримати $k_{yx}(\tau_1)$ та $k_{yx}(\tau_2)$;

2) у виразі кореляційної функції $R_x(\tau)$ вхідного сигналу провести заміну незалежної змінної τ на $\tau_1 - \tau_2 + \tau$;

3) підставити отримані функції у вираз (1.25) і обчислити подвійний інтеграл.

При $\tau = 0$ вираз (1.25) для центрованого процесу дає її дисперсію:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{yx}(\tau_1) k_{yx}(\tau_2) R_x(\tau_1 - \tau_2 + \tau) d\tau_1 d\tau_2. \quad (1.26)$$

Ця формула показує, що для обчислення дисперсії вихідної величини системи необхідно знати кореляційну функцію вхідного випадкового впливу. Знання дисперсії вхідного сигналу недостатньо для визначення дисперсії вихідної величини.

При впливі на вхід чотириполюсника випадкового процесу типу білого шуму, кореляційна функція якого

$$R_x(\tau) = a^2 \delta(\tau),$$

де $a^2 = \text{const}$,
отримаємо

$$D_y = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_{yx}^2(\tau_1) d\tau_1$$

або

$$D_y = a^2 \int_0^{\infty} k_{yx}^2(t) dt.$$

Формули (1.24) і (1.25) показують, що стаціонарний випадковий процес, який проходить через лінійну систему з постійними параметрами, залишається стаціонарним. Нормальний процес на вході системи залишається нормальним на виході лінійної системи.

Якщо на систему діють n вхідних випадкових сигналів $X_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, що мають математичні очікування $m_k^x(t)$ і

кореляційні функції $R_{kh}^x, k, h = 1, \dots, n$, то математичне очікування і кореляційна функція вихідного сигналу визначаються формулами:

$$m_y(t) = \sum_{k=1}^n m_k^x(t);$$

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n R_{kh}^x(t_1, t_2).$$

Для некорельованих випадкових процесів

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n R_k^x(t_1, t_2).$$

Отже, математичне очікування вихідного сигналу системи *при* дії на її вході *p* випадкових сигналів дорівнює сумі математичних очікувань вхідних сигналів, а кореляційна функція вихідного сигналу дорівнює сумі всіх кореляційних і взаємних кореляційних функцій вхідних сигналів.

Математичне очікування і кореляційна функція вихідного сигналу диференціюючої ланки визначаються відповідно співвідношеннями:

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt};$$

$$R_y(t_1, t_2) = \frac{d^2 R_x(t_1, t_2)}{dt_1 dt_2},$$

тобто математичне очікування вихідного сигналу дорівнює похідній від математичного очікування вхідного сигналу, а кореляційна функція вихідного сигналу дорівнює другій змішаній похідній від кореляційної функції вхідного сигналу, взятій за першим і другим аргументами.

Для інтегруючої ланки:

$$m_y(t) = \int_{t_0}^t m_x(\tau) d\tau;$$

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} R_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1, d\tau_2.$$

Для підсилювальної ланки:

$$m_y = k(t)m_x(t);$$

$$R_y(t_1, t_2) = k(t_1)k(t_2)R_x(t_1, t_2),$$

де $k(t)$ - коефіцієнт підсилення ланки - не випадкова функція.

1.10 Визначення реакції нестационарної системи на випадковий вхідний сигнал у часовому представленні

Нестационарною або системою зі змінними параметрами називають таку систему, параметри якої змінюються в часі за детермінованим або випадковим законом (тут розглядаються системи з детермінованими параметрами). Характеристики нестационарних систем залежать від часу. Так, імпульсна перехідна функція нестационарної системи $k_{yx}(t, \tau)$ представляє реакцію на виході системи в момент t при впливі на її вхіді в момент τ імпульсу у вигляді δ -функції $[\delta(t - \tau)]$ при нульових початкових умовах (а не $k_{yx}(t)$ або $k_{yx}(t - \tau)$, як для стаціонарної системи). Для нестационарної системи її реакція залежить не тільки від форми вхідного сигналу, але і від моменту початку його дії. Зв'язок вихідного і вхідного сигналів нестационарної системи визначається інтегральним виразом

$$Y(t) = \int_{t_0}^t k_{yx}(t, \tau) X(\tau) d\tau,$$

де t_0 - початок дії вхідного сигналу $X(t)$, тобто

$$X(t) = 0 \text{ при } t < t_0.$$

Для реальної системи імпульсна перехідна функція повинна задовольняти умові

$$k_{yx}(t, \tau) = 0 \text{ при } \tau > t.$$

Це означає, що реакція системи не може виникнути раніше моменту прикладання вхідного сигналу. Математичне очікування і кореляційна функція вихідного сигналу нестационарної системи визначаються виразами:

$$m_y(t) = \int_{t_0}^t k_{yx}(t, \tau) m_x(\tau) d\tau; \quad (1.27)$$

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} k_{yx}(t_1, \tau_1) k_{yx}(t_2, \tau_2) R_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1, d\tau_2, \quad (1.28)$$

тобто математичне очікування вихідного сигналу визначають як результат інтегрального перетворення математичного очікування вхідного сигналу, а кореляційну функцію вихідного сигналу знаходять як результат подвійного інтегрального перетворення кореляційної функції вхідного сигналу.

Дисперсія вихідного сигналу визначається зі співвідношення (1.28) при $t_1 = t_2 = t$:

$$D_y(t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} k_{yx}(t, \tau_1) k_{yx}(t, \tau_2) R_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1, d\tau_2. \quad (1.29)$$

З формул (1.27), (1.28), (1.29) випливає, що вихідний сигнал нестационарної системи є нестационарним випадковим сигналом $Y(t)$.

При стаціонарному випадковому вхідному процесі $X(t)$ і розгляді стаціонарного режиму, тобто коли $t_0 = -\infty$, вихідний сигнал нестационарної системи також буде нестационарним (при цьому у формулах (1.27), (1.28), (1.29) t_0 замінюється на $-\infty$).

Для стаціонарної системи $k_{yx}(t, \tau) = k_{yx}(t - \tau)$, тобто імпульсна перехідна функція є функцією тільки одного аргументу – різниці між моментом спостереження реакції системи t і моментом прикладання одиничного імпульсу τ . У цьому випадку

$$m_y(t) = \int_{t_0}^t k_{yx}(t - \tau) m_x(\tau) d\tau; \quad (1.30)$$

$$R_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1 - t_0} \int_0^{t_2 - t_0} k_{yx}(\tau_1) k_{yx}(\tau_2) R_x(t_1 - \tau_1; t_2 - \tau_2) d\tau_1, d\tau_2; \quad (1.31)$$

$$D_y(t) = \int_0^{t_1 - t_0} \int_0^{t_2 - t_0} k_{yx}(\tau_1) k_{yx}(\tau_2) R_x(t - \tau_1; t - \tau_2) d\tau_1, d\tau_2. \quad (1.32)$$

Якщо прикласти на вхід стаціонарної системи стаціонарний випадковий сигнал, вихідний випадковий процес до настання усталеного режиму буде нестаціонарним (математичне очікування і дисперсія його змінюються в часі). Реакцію системи на випадковий вхідний сигнал з урахуванням нестаціонарності вихідного випадкового процесу можна проводити за формулами (1.30), (1.31), (1.32). У випадку білого шуму дисперсія вихідного сигналу

$$D_y(t) = S_x \int_0^t k_{yx}^2(\tau) d\tau,$$

де $S_x = S = a^2$ - спектральна щільність білого шуму.

Для стаціонарної системи і стаціонарного випадкового сигналу на її вході в усталеному режимі $t_0 = -\infty$ характеристики вихідного сигналу мають вигляд

$$\begin{aligned} m_y &= m_x \int_0^\infty k_{yx}(\tau_1) d\tau_1; \\ R_y(\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty k_{yx}(\tau_1) k_{yx}(\tau_2) R_x(\tau + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2; \\ D_y &= \int_0^\infty \int_0^\infty k_{yx}(\tau_1) k_{yx}(\tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

де $\tau = t_1 - t_2$.

Математичне очікування і дисперсія вихідного сигналу за зазначених умов є постійними величинами, а кореляційна функція вихідного сигналу залежить тільки від різниці аргументів τ . Це означає, що вихідний сигнал у цьому випадку є стаціонарним випадковим процесом.

Нестаціонарність процесу управління визначається або нестаціонарністю вхідного сигналу, або нестаціонарністю системи, або нестаціонарністю режиму роботи системи.

Для визначення характеристик вихідного сигналу у наведених вище формулах передбачалися відомими імпульсні перехідні функції. Якщо ці функції невідомі, але задані рівняння, що описують поведінку системи, то можна за цими рівняннями попередньо визначити імпульсні перехідні функції. Способи визначення імпульсних перехідних функцій детально викладені в роботі. Можливе визначення статистичних характеристик вихідного сигналу безпосередньо за рівняннями, що описують поведінку досліджуваної системи, або за допомогою методу рівнянь моментів. Сутність цього методу полягає в заміні диференціальних рівнянь, що перетворюють випадкові вхідні сигнали, на інші диференціальні рівняння, що пов'язують кореляційні моменти вихідних змінних зі статистичними характеристиками вхідних сигналів.

1.11 Визначення статистичних характеристик вихідного сигналу методом рівнянь моментів

Метод застосовується при статистичному аналізі нестаціонарних і стаціонарних лінійних систем. При цьому передбачається, що система описується сукупністю рівнянь першого порядку з адитивними білими шумами в правій частині:

$$y_{k'} = \sum_{i=1}^n a_{ki}(t)y_i + V_k(t) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1.33)$$

де $a_{ki}(t)$ - змінні коефіцієнти; $V_k(t)$ - випадкові білі шуми.

На підставі виразу (1.33) система рівнянь для математичних сподівань і центрованих складових вихідних сигналів має вигляд:

$$m_{y'k} = \sum_{i=1}^n a_{ki}(t)m_{yi} + m_{vk} \quad (k = 1, \dots, n); \quad (1.34)$$

$$\dot{y}'_{k'} = \sum_{i=1}^n a_{ki}(t) \dot{y}_i + \dot{V}_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.35)$$

Інтегрування системи (1.34) нескладне. Розгляду підлягають рівняння (1.35), для чого за їх допомогою знаходять рівняння для кореляційних моментів вихідних сигналів:

$$\theta_{ij}(t) = M[\dot{y}_i(t) \dot{y}_j(t)] \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Похідні від $\theta_{ij}(t)$ за часом

$$\theta'_{ij}(t) = M[\dot{y}_i' \dot{y}_j] + M[\dot{y}_i \dot{y}_j'] \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Використовуючи рівняння (1.35), отримаємо

$$\theta'_{ij} = \sum_{r=1}^n [a_{ir} \theta_{rj} + a_{rj} \theta_{ri}] + M[\dot{y}_j(t) \dot{V}_i(t)] + M[\dot{y}_i(t) \dot{V}_j(t)] \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (1.36)$$

Для обчислення кореляційних моментів, що входять до рівняння (1.36), виразимо змінні $\dot{y}_i(t)$ через входні функції $\dot{y}_l(t)$ у вигляді наступного виразу:

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{l=1}^n \int_0^t k_{yxil}(t, \tau) V_l(\tau) d\tau \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.37)$$

де $k_{yxil}(t, \tau)$ — імпульсні перехідні функції лінійної системи (1.35).

Помноживши праву і ліву частини рівності (1.37) на $\dot{V}_j(t)$ і здійснивши операцію математичного очікування, знаходимо

$$M[\dot{y}_i(t) \dot{V}_j(t)] = \sum_{l=1}^n \int_0^t k_{yxil}(t, \tau) M[\dot{V}_j(\tau) \dot{V}_l(\tau)] d\tau \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (1.38)$$

Випадкові функції $\dot{V}_j(t)$ є білим шумом, і для них справедливим є вираз для моментів

$$M[\dot{y}_i(t)\dot{y}_j(t)] = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n k_{yxil}(t, t) G_{jl}. \quad (1.39)$$

Множник $1/2$ з'являється внаслідок того, що $k_{ykil}(t, \tau)$ в точці $t = \tau$ змінюється стрибком від 0 до деякого значення $k_{yx}(t, t)$ а - функція в точці $t = \tau$ розташовується однією половиною над ділянкою, де $k_{yx}(t, t) = 0$, а іншою половиною над ділянкою, де $k_{yx}(t, t)$ має дане значення. Тому при обчисленні інтеграла (1.38) враховується тільки половина площі δ -функції.

Імпульсні перехідні функції системи (1.35) мають властивість

$$k_{yxil}(t, t) = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases} \quad (1.40)$$

Рівняння (1.36) з урахуванням виразів (1.39) і (1.40) та рівності

$$G_{jl}(t) = G_{ij}(t) \quad (1.41)$$

набувають остаточного вигляду

$$\theta'_{ij} = \sum_{r=1}^n [a_{ir}\theta_{rj} + a_{jr}\theta_{ri}] + G_{ij}(t), \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (1.42)$$

Інтегруючи отриману сукупність звичайних лінійних диференціальних рівнянь (1.41) і (1.34), визначаємо математичні очікування, дисперсії та кореляційні моменти відразу всіх вихідних сигналів системи як функції часу. Рівняння слід інтегрувати за заданих початкових умов: $t = 0, \theta_{ij}(t) = 0, i, j = 1, \dots, n$. Ця задача може вирішуватися або аналітично, або за допомогою обчислювальних машин.

При зазначеному методі порядок системи диференціальних рівнянь вищий, ніж порядок вихідної системи рівнянь. До системи рівнянь (1.41) входять n рівнянь для дисперсій і $n(n-1)/2$ рівнянь для кореляційних моментів вихідних сигналів $\theta_{ij} = \theta_{ji}$. В результаті порядок системи рівнянь (1.41) дорівнюватиме $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. При стаціонарності системи і білих шумах на її входах визначення усталених значень дисперсій і кореляційних

моментів вихідних сигналів проводять, поклавши $\theta_{ij} = 0$ в системі диференціальних рівнянь (1.41). Тоді шукані характеристики знаходять рішенням системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^n (a_{ir}\theta_{rj} + a_{jr}\theta_{ri}) = G_{ir} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (1.43)$$

Метод придатний для випадків, коли вхідні сигнали не є білими шумами, при цьому вхідні сигнали представляються у вигляді перетворення білих шумів формуючими фільтрами, що описуються системою звичайних рівнянь кінцевого порядку.

1.12 Статистичні характеристики встановлених значень вихідного сигналу стаціонарної системи в частотному представленні

Спектральна щільність вихідного сигналу системи в усталеному режимі при відомому стаціонарному випадковому процесі $X(t)$ на вході системи і відомій його спектральній щільності $S_x(w)$ знаходиться за допомогою спектрального рівняння зв'язку. Враховуючи, що для вихідного стаціонарного випадкового сигналу

$$S_y(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \quad (1.44)$$

та

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_{yx}(\tau_1) k_{yx}(\tau_2) R_x(\tau + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2, \quad (1.45)$$

вираз для спектральної щільності вихідного сигналу матиме вигляд

$$S_y(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_{yx}(\tau_1) k_{yx}(\tau_2) R_x(\tau + \tau_2 - \tau_1) e^{-jw\tau} d\tau d\tau_1 d\tau_2 \quad (1.46)$$

або

$$S_y(w) = \int_0^{\infty} k_{yx}(\tau_1) e^{-jw\tau_1} d\tau_1 \int_0^{\infty} k_{yx}(\tau_2) e^{jw\tau_2} d\tau_2 \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \tau_2 - \tau_1) e^{-jw\tau + \tau_2 - \tau_1} d\tau. \quad (1.47)$$

оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \tau_2 - \tau_1) e^{-jw\tau + \tau_2 - \tau_1} d\tau = S_x(w),$$

а частотна характеристика системи представляє перетворення Фур'є імпульсної перехідної функції, спектральне рівняння зв'язку прийме вигляд

$$S_y(w) = K_{yx}^2(w) S_x(w) = K_{yx}(jw) K_{yx}(-jw) S_x(w), \quad (1.48)$$

де

$$K_{yx}(-jw) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_{yx}(\tau) e^{jw\tau} d\tau.$$

Спектральна щільність вихідного сигналу стаціонарної лінійної системи в усталеному режимі при стаціонарному випадковому вхідному сигналі дорівнює добутку квадрата модуля частотної характеристики даної системи на спектральну щільність вхідного сигналу.

Кореляційна функція вихідного сигналу з урахуванням виразу (1.48) має вигляд

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{yx}^2(w) S_x(w) e^{jw\tau} dw \quad (1.49)$$

При $\tau = 0$ отримуємо вираз для *дисперсії*:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} K_{yx}^2(w) S_x(w) dw.$$

Кореляційна функція і дисперсія вихідного сигналу лінійної стаціонарної системи в усталеному режимі при стаціонарному випадковому вхідному сигналі визначаються як результат інтегрального перетворення спектральної щільності вхідного сигналу.

Математичне очікування вихідного сигналу

$$m_y(t) = \int_0^\infty k_{yx}(\tau) m_x(t - \tau) d\tau. \quad (1.50)$$

Розклавши реакцію $m_x(t - \tau)$ в ряд Тейлора

$$m_x(t - \tau) = \sum_{r=0}^\infty (-1)^r \frac{m_x^{(r)}(t)}{r!} \tau^r \quad (1.51)$$

і підставивши значення m_x у формулу (1.50), отримаємо

$$m_y(t) = \sum_{r=0}^\infty (-1)^r \frac{m_x^{(r)}(t)}{r!} \tau^r \int_0^\infty k_{yx}(\tau) \tau^r d\tau. \quad (1.52)$$

Диференціюючи вираз для передавальної функції

$$K_{yx}(p) = \int_0^\infty k_{yx}(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (1.53)$$

знайдемо для похідної порядку r

$$K_{yx}^{(r)}(p) = (-1)^r \int_0^\infty k_{yx}(\tau) \tau^r e^{-p\tau} d\tau. \quad (1.54)$$

Враховуючи, що при $p = 0$ вираз прийме вигляд

$$K_{yx}^{(r)}(0) = (-1)^r \int_0^\infty k_{yx}(\tau) \tau^r d\tau, \quad (1.55)$$

напишемо для математичного очікування вихідного сигналу формулу

$$m_y(t) = \sum_{r=0}^\infty \frac{m_x^{(r)}(t)}{r!} K_{yx}^{(r)}(0), \quad (1.56)$$

де

$$K_{yx}^{(r)}(0) = \left[\frac{d^r K_{yx}(p)}{dp^r} \right]_{p=0}. \quad (1.57)$$

Для випадку $m_x = \text{const}$ формула (1.56) матиме вигляд

$$m_y = m_x K_{yx}(0). \quad (1.58)$$

Відповідно до виразу (1.51) математичне очікування вихідного сигналу в усталеному режимі визначається підсумовуванням добутків відповідних похідних математичного очікування вхідного сигналу і передавальної функції системи.

Приклад 1.3. Визначити усталене значення вихідної величини аперіодичної ланки, якщо на вході діє постійний сигнал $m_x = \text{const}$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі відповідно до формули (1.56) визначимо похідні вхідного сигналу та передавальної функції:

$$m_x(t) = m_x; \quad m'_x(t) = 0; \quad K(p) = \frac{K}{1+pT}; \quad K(0) = K. \quad (1.59)$$

Усталене значення вихідної величини

$$m_y(t) = Km_x. \quad (1.60)$$

1.13 Методи розрахунку помилок лінійних САУ, зумовлених стаціонарними випадковими впливами

Загальні відомості про методи розрахунку та критерії якості

Залежно від характеру дій головного механізму та перешкод при розрахунку помилок САУ, можливі два основні підходи. Перший базується на припущенні, що майстер-дія $x(t)$ є детермінованою функцією часу, а інтерференція $f(t)$ – стаціонарною випадковою часовою функцією з відомими статистичними характеристиками. Статистичні методи. Загалом, визначальний ефект і інтерференція, а отже і похибка $Z(t)$, є випадковими функціями часу, і для їх визначення необхідно використовувати статистичні методи.

Визначальний ефект і перешкоди, що діють на САУ, а також помилку відтворення системи, можна представити так:

$$X(t) = m_x(t) + \dot{X}(t); \quad (1.61)$$

$$f(t) = m_f(t) + \dot{f}(t); \quad (1.62)$$

$$Z(t) = m_z(t) + \dot{f}(t). \quad (1.63)$$

Оскільки система є лінійною, помилка відтворення складається зі суми компонентів помилок від головного впливу та інтерференції.

Математичні очікування впливу майстра та інтерференції можна розглядати як регулярні функції часу. Отже, зображення математичного очікування повної похибки

$$m_z(p) = K_{zx}(p)m_x(p) + K_{zf}(p)m_f(p), \quad (1.64)$$

де $K_{zx}(p)$ і $K_{zf}(p)$ - передавальні функції помилки по задаючим $X(t)$ і збурюючим $f(t)$ впливами.

Ці впливи можна застосовувати до однакових і різних елементів системи, наприклад, $X(t)$ — до вхідних даних, а $f(t)$ — до об'єкта керування.

Математичне очікування помилки $m_z(t)$ називається *систематичною похибкою*. Центрована компонента помилки $\dot{Z}(t)$ називається *випадковою похибкою*. Стаціонарне значення помилки $m_z(t)$ при повільно змінній дії зазвичай визначається за допомогою серії помилок. Компоненти помилок, спричинені випадковими компонентами ефектів і інтерференції, оцінюються за допомогою середніх значень, дисперсій, кореневих середніх квадратів тощо.

Для оцінки якості САУ на основі мінімального критерію RMS (середньоквадратичне значення) визначається математичне очікування квадрата похибки, або середнього квадрата системної помилки:

$$M[Z^2(t)] = \overline{Z^2(t)} = m_z^2(t) + D_z(t).$$

Середньоквадратичною похибкою є вираз

$$Z_{ck}(t) = \sqrt{\overline{Z^2}}.$$

Коли система зазнає впливу центрованих випадкових сигналів, $m_z(t) = 0$ дисперсію помилки можна вважати критерієм якості системи

$$D_z(t) = M[Z^2(t)].$$

Середньоквадратичне (або стандартне) відхилення

$$\sigma_z(t) = \sqrt{D_z(t)}.$$

Очевидно, $Z_{\text{ck}}(t)$ і $\sigma_z(t)$ в загальному випадку не є одним і тим же. Дисперсія помилки системи є найпростішим критерієм. Коли помилка системи підпорядкована нормальному закону, випадок мінімуму дисперсії помилки відповідає максимуму ймовірності того, що помилка системи є малою. Однак, якщо $m_z(t)$ відмінне від нуля, то дисперсія помилки не може бути прийнятним критерієм. У цьому випадку доцільним є критерій мінімуму RMS системи.

Критерій мінімуму RMS набув поширення при вирішенні багатьох практичних завдань. Однак у ряді випадків цей критерій не відповідає фізичним умовам завдань і виявляється недостатньо ефективним. Він надає великим і малоймовірним помилкам більшу вагу, ніж малим помилкам, тобто великі помилки є більш небажаними, ніж малі. У деяких же задачах однаково небажані всі значення помилок, що перевищують певну межу. У тих випадках, коли необхідно утримувати помилку системи в заданих допусках, прийнятним критерієм є ймовірність P того, що помилка системи знаходиться в певних межах. Якщо помилка підпорядкована нормальному закону, то ця ймовірність

$$P = P(C_1 \leq Z \leq C_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_z}} \int_{C_1}^{C_2} \exp \left[-\frac{(m_z - Z)^2}{2D_z} \right] dZ, \quad (1.65)$$

де $m_z(t_1), D_z(t_1)$ - математичне очікування та дисперсія помилки системи в певний момент часу t_1 ; C_1, C_2 - визначені допуски помилок (типovими є $C_1 < 0; C_2 > 0$)

Критерій ймовірності того, що помилка системи не виходить за межі заданих допусків, можна використати для оцінки точності системи керування копіювальної машини, яка виготовляє деталі відповідно до заданого класу точності тощо.

Нижче розглядаються критерії мінімальної RMS та дисперсії помилок для оцінки точності систем.

У статистичному аналізі точності системи математичні очікування кожного компонента похибки визначаються окремо та алгебраїчно підсумовуються, а геометрично (під квадратним коренем) підсумовуються стандартні помилки, якщо вони незалежні.

Дисперсії помилок, спричинені стаціонарними випадковими ефектами, можна визначити за допомогою як кореляційних функцій (1.26), так і спектральних щільностей (1.18) відповідних ефектів. У першому випадку помилка, наприклад від впливу $f(t)$, визначається інтегруванням виразу

$$R_{zf}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{zf}(\tau_1) k_{zf}(\tau_2) R_f(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = D_{zf}; \quad (1.65)$$

У другому випадку помилку з тієї ж дії визначають, інтегруючи помилки на всіх частотах спектральної щільності:

$$D_{zf} = R_{zf}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{zf}(w) dw; \quad (1.67)$$

останнє визначається на основі відомої спектральної щільності випадкової дії вхідної та характеристик системи. Зазвичай знайти помилки у стаціонарному стані за допомогою спектральних щільностей легше.

Аналіз у часовій області є складнішим, але також рекомендується для моментів часу, близьких до моменту застосування удару. Спектральні щільності вхідних ефектів можна встановлювати аналітично або у вигляді графів. У цьому контексті існують методи — *аналітичні та графоаналітичні*.

Окрім методів розрахунку, існує *метод заснований на використанні електронних моделей*. Цей метод дозволяє легко провести низку досліджень із численними змінами характеристик вхідних сигналів і параметрів системи.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Леонт'єв П.В. та ін. Теорія автоматичного керування: навч. посіб. Суми: Сумський державний університет, 2024. 296 с. URL: <https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/97189>
2. Гуров А.П., Ольшевський С.І., Черно О.О., Бугрім Л. І. Теорія автоматичного керування: навч. посіб. Миколаїв: Національний університет кораблебудування, 2018. URL: <https://eir.nuos.edu.ua/items/c6d19b91-5ad4-4563-a13d-5b3960e55d85>
3. Марченко А.А., Гулий В.С. Теорія автоматичного керування. Комп'ютерний практикум: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/40b17431-d0a6-42bf-9387-eb408c1bfbf3>
4. Толочко О.І. Теорія автоматичного керування. Математичні методи та програмування в MATLAB для теорії керування : навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/2cb5a885-eec3-4b52-bf9d-bb218ce48929>
5. Гайденко Ю.А. Теорія автоматичного керування. Комп'ютерний практикум: навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/edac02be-d940-4fd4-a566-7c8b782b89a2>
6. Іносов С.В., Соболевська Т. Г. Теорія автоматичного керування: метод. вказівки до лабор. і практ. робіт. Київ : КНУБА, 2024. URL: <https://repository.knuba.edu.ua/items/82da287f-a9d2-43e9-8f9a-1e8d7f7dc136>
7. Мірошник М.А., Лістровий С. В., Клименко Л. А. Теорія автоматичного керування, штучний інтелект і автоматизація процесу прийняття рішення: навч. посіб. Харків: УкрДУЗТ, 2019. URL: <https://dspace.onua.edu.ua/items/d64933de-004c-4977-a0bf-68c744eedebf>
8. Попович М.Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ: Либідь, 2007. 656 с. URL: <https://uareferats.com/index.php/book/details/336>