МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Приклади розв’язання типових завдань розрахункових робіт з вищої математики. Розділи: «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли»

для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання

2026

Приклади розв’язання типових завдань розрахункових робіт з вищої математики. Розділи: «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / уклад. : Н. М. Антоненко, В. М. Онуфрієнко. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2026. 51 с.

Укладачі: Антоненко Н. М., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Онуфрієнко В. М., д-р фіз.-мат. наук, професор

Рецензент: Килимник І. М., канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск: Антоненко Н. М., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено на засіданні
кафедри математики
Протокол № 6 від 11.03.2026 р.

Рекомендовано до видання
НМК машинобудівного факультету
Протокол № 7 від 09.04.2026 р.

ЗМІСТ

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Розв'язування типового варіанта

Завдання 1.1 (до Завдання 1.3.1 [6]). Обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області D:

а) $\iint\limits_D \frac{3x^2}{1+y^2}dxdy$, де $D:\begin{cases}2\le x\le 3,\\ 0\le y\le 1;\end{cases}$

б) $\iint\limits_D (5x-3y)dxdy$, де $D:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le 2.\end{cases}$

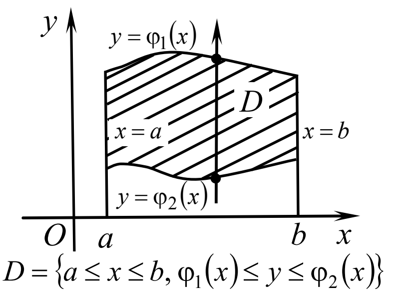
Розв'язання.

Обчислення подвійних інтегралів зводиться до обчислення повторних інтегралів:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \tag{1.1}$$

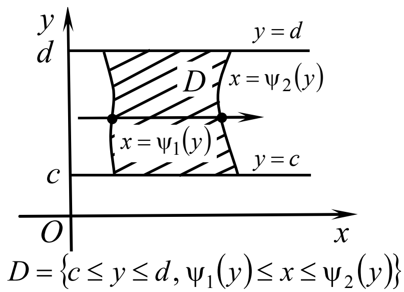
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx. \tag{1.2}$$

Формула (1.1) використовується для області правильної в напрямі осі Oy (рис. 1.1), а формула (1.2) – для області правильної в напрямі осі Ox (рис. 1.2).



$D=\{a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$

Рисунок 1.1



$D=\{c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$

Рисунок 1.2

У повторному інтегралі, що стоїть у правій частині формули (1.1), внутрішнє інтегрування виконується по змінній y, вважаючи x

сталою, а зовнішнє – по змінній x. У повторному інтегралі, що стоїть у правій частині формули (1.2), внутрішнє інтегрування виконується по змінній x, вважаючи y сталою, а зовнішнє – по змінній y.

а) $\iint\limits_D \frac{3x^2}{1+y^2}\,dxdy$, де $D:\begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

Подвійний інтеграл по прямокутній області зводиться до повторного по будь-якій із зазначених вище формул. Обчислимо заданий інтеграл, використовуючи формулу (1.1), враховуючи, що підінтегральна функція є добутком двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної, матимемо два інтеграли: по змінній x і по змінній y:

$$\iint\limits_D \frac{3x^2}{1+y^2}\,dxdy = \int_2^3 dx \int_0^1 \frac{3x^2}{1+y^2}\,dy = \int_2^3 3x^2 dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \left(3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 \cdot \left(\operatorname{arctg} y\right)\Big|_0^1 = \left(x^3\right)\Big|_2^3 \cdot \left(\operatorname{arctg} y\right)\Big|_0^1 = \left(3^3 - 2^3\right)\cdot\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0\right) =$$

$$= (27-8)\cdot\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 19\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\frac{19\pi}{4}$.

б) $\iint\limits_D (5x-3y)\,dxdy$, де $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2. \end{cases}$

Обчислимо заданий інтеграл, використовуючи формулу (1.2):

$$\iint\limits_D (5x-3y)\,dxdy = \int_0^2 dy \int_0^1 (5x-3y)\,dx =$$

(Тут внутрішнішній інтеграл обчислюється по змінній x, при цьому y вважається сталою)

$$= \int_0^2 dy \left(5\cdot\frac{x^2}{2} - 3yx\right)\Bigg|_0^1 = \int_0^2 \left(5\cdot\frac{1^2}{2} - 3y\cdot 1 - \left(5\cdot\frac{0^2}{2} - 3y\cdot 0\right)\right) dy =$$

$$=\int_0^2\left(\frac{5}{2}-3y\right)dy=\left(\frac{5}{2}\cdot y-3\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{5}{2}\cdot 2-3\cdot\frac{2^2}{2}-\left(\frac{5}{2}\cdot 0-3\cdot\frac{0^2}{2}\right)=-1.$$

Відповідь: -1.

Завдання 1.2 (до Завдання 1.3.2 [6]). Подати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла по області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) *D:* $\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2}, \\ y\ge x^2,\ x\ge 0; \end{cases}$

б) *D:* $\begin{cases} x=-\sqrt{9-y^2}, \\ 9-x=y^2. \end{cases}$

Розв'язання.

а) *D:* $\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2}, \\ y\ge x^2,\ x\ge 0. \end{cases}$

Рівняння $y=\sqrt{2-x^2}$ описує верхню половину кола з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{2}$. Нерівність $y\ge x^2$ описує точки, що лежать на параболі $y=x^2$ та вище неї. Нерівність $x\ge 0$ описує точки, що лежать на осі ординат і правіше неї. Знайдемо абсциси точок перетину кривих $y=\sqrt{2-x^2}$ та $y=x^2$:

$$\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2}, \\ y=x^2. \end{cases}\Rightarrow \sqrt{2-x^2}=x^2,\ x_{1,2}=\pm 1.$$

Область *D*, обмежена заданими лініями, заштрихована на рис. 1.3.

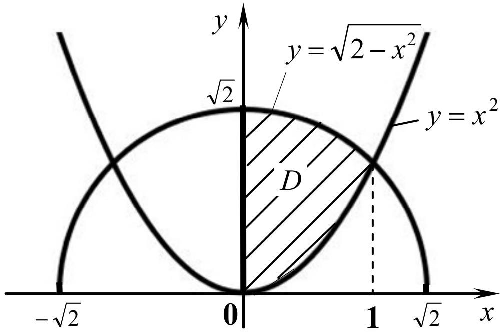


Рисунок 1.3

Область D є правильною в напрямі осі Oy. Із рис. 1.3 видно, що область інтегрування задається нерівностями $D:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ x^2\le y\le\sqrt{2-x^2}.\end{cases}$

За формулою (1.1) маємо:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy\,.$$

Відповідь: $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy\,.$

б) *D:* $\begin{cases}x=-\sqrt{9-y^2},\\ 9-x=y^2.\end{cases}$

Рівняння $x=-\sqrt{9-y^2}$ описує ліву половину кола з центром у початку координат і радіусом 3. Рівняння $9-x=y^2$ можна записати у вигляді $x=9-y^2$. Отримане рівняння є рівнянням параболи, вітки якої спрямовані вліво, а вершиною є точка $(9{,}0)$. Знайдемо ординати точок перетину кривих $x=-\sqrt{9-y^2}$ та $x=9-y^2$:

$$\begin{cases} x=-\sqrt{9-y^2}, \\ x=9-y^2. \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{9-y^2}=9-y^2,\ y_{1,2}=\pm 3\,.$$

Область D, обмежена заданими лініями, заштрихована на рис. 1.4.

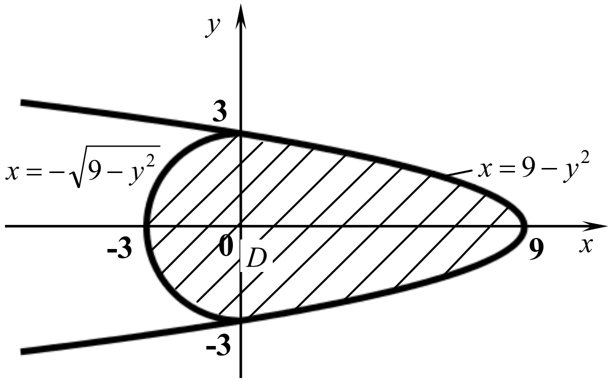


Рисунок 1.4

Область D є правильною в напрямі осі Ox. Із рис. 1.4 видно, що область інтегрування задається нерівностями
$$D:\begin{cases} -3\le y\le 3, \\ -\sqrt{9-y^2}\le x\le 9-y^2. \end{cases}$$
За формулою (1.2) маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-3}^{3}dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{9-y^2} f(x,y)dx\,.$$

Відповідь: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-3}^{3}dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{9-y^2} f(x,y)dx\,.$

Завдання 1.3 (до Завдання 1.3.3 [6]). Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

а) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1-y}^{3^y} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy$.

Розв'язання.

а) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1-y}^{3^y} f(x,y)dx$.

Область інтегрування D заданого повторного інтеграла розташована між прямими $y=0$ і $y=1$. Вона обмежена в напрямі осі Ox знизу графіком фукції $x=1-y$, а зверху – $x=3^y$. Розв'яжемо рівняння цих функцій відносно змінної y:

$$x=1-y \Leftrightarrow y=1-x, \qquad x=3^y \Leftrightarrow y=\log_3 x.$$

Знайдемо абсциси точок перетину кривих, які обмежують область інтегрування:

1) $\begin{cases} y=1-x \\ y=1, \end{cases} \Rightarrow 1-x=1, x=0$;

2) $\begin{cases} y=\log_3 x \\ y=1-x, \end{cases} \Rightarrow \log_3 x=1-x, x=1$;

3) $\begin{cases} y=\log_3 x \\ y=1, \end{cases} \Rightarrow \log_3 x=1, x=3$.

Область D, обмежена заданими лініями, зображена на рис. 1.5. У напрямі осі Oy нижня межа області D складається з двох частин, які описуються різними функціями. Тому для зміни порядку інтегрування розіб'ємо область D прямою $x=1$ на дві області D_1 та D_2 (рис. 1.5).

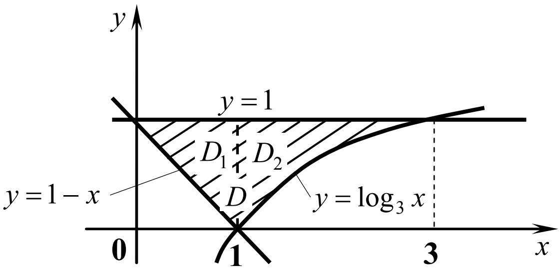


Рисунок 1.5

Із рис. 1.5 видно, що області D_1 та D_2 описуються такими нерівностями:

$$D_1:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 1-x\le y\le 1,\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}1\le x\le 3,\\ \log_3 x\le y\le 1.\end{cases}$$

$$\int_0^1 dy\int_{1-y}^{3^y} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_{\log_3 x}^{1} f(x,y)dy .$$

Відповідь: $\int_0^1 dy\int_{1-y}^{3^y} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_{\log_3 x}^{1} f(x,y)dy$.

б) $\int_{-2}^{1} dx\int_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy$.

Область інтегрування D заданого повторного інтеграла розташована між прямими $x=-2$ і $x=1$. Вона обмежена в напрямі осі Oy знизу графіком функції $y=x$, а зверху – $y=2-x^2$. Розв'яжемо рівняння цих функцій відносно змінної x:

$$y=x\Leftrightarrow x=y,\qquad y=2-x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2-y} .$$

Знайдемо ординати точок перетину кривих, які обмежують область інтегрування:

1) $\begin{cases}x=y,\\ x=\sqrt{2-y},\end{cases}\Rightarrow y=\sqrt{2-y},\ y=1$;

2) $\begin{cases} x = y, \\ x = -\sqrt{2-y}, \end{cases} \Rightarrow y = -\sqrt{2-y},\ y = -2\,.$

Область D, обмежена заданими лініями, зображена на рис. 1.6.

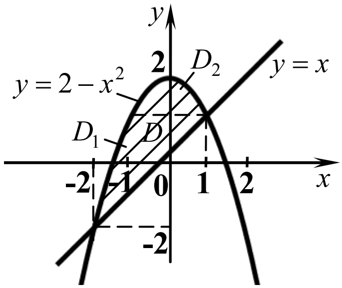


Рисунок 1.6

У напрямі осі Ox права межа області D складається з двох частин, які описуються різними функціями. Тому для зміни порядку інтегрування розіб'ємо область D прямою $y = 1$ на дві області D_1 та D_2 (рис. 1.6). Із рис. 1.6 видно, що області D_1 та D_2 описуються такими нерівностями: $D_1 : \begin{cases} -2 \le y \le 1, \\ -\sqrt{2-y} \le x \le y, \end{cases}$ $\quad D_2 : \begin{cases} 1 \le y \le 2, \\ -\sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{2-y}. \end{cases}$

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx\,.$$

Відповідь: $\int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx\,.$

Завдання 1.4 (до Завдання 1.3.4 [6]). Обчислити подвійний інтеграл по області D, обмеженої вказаними лініями:

а) $\iint\limits_D (x - 2y)\,dxdy\,,$ $\qquad D : \begin{cases} y = 3 - x, \\ y - x + 3 = 0, \\ x \ge 0; \end{cases}$

б) $\iint\limits_D \frac{x+1}{y^2}\,dxdy$, $\qquad D:\begin{cases} x = y^2 - 1, \\ x = 0. \end{cases}$

Розв'язання.

а) $\iint\limits_D (x-2y)\,dxdy$, $\qquad D:\begin{cases} y = 3 - x, \\ y - x + 3 = 0, \\ x \ge 0. \end{cases}$

Лінії $y = 3 - x$, $y - x + 3 = 0$ – прямі. Знайдемо абсцису точок перетину цих прямих:

$$\begin{cases} y = 3 - x, \\ y - x + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow x = 3 .$$

Нерівність $x \ge 0$ описує точки, що лежать на осі ординат і справа від неї.

Область D, обмежена заданими лініями, зображена на рис. 1.7.

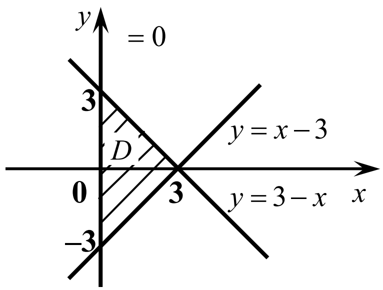


Рисунок 1.7

Виберемо напрям уздовж осі Oy. Область інтегрування описується нерівностями $D:\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ x - 3 \le y \le 3 - x. \end{cases}$ За формулою (1.1) отримуємо:

$$\iint\limits_D (x-2y)\,dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x-3}^{3-x} (x-2y)\,dy = \int\limits_0^3 dx \left(x\,y - y^2\right)\Big|_{x-3}^{3-x} =$$

$$=\int_0^3\Big(x(3-x)-(3-x)^2-\Big(x(x-3)-(x-3)^2\Big)\Big)dx=\int_0^3\left(6x-2x^2\right)dx=$$

$$=\left(3x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=3\cdot3^2-\frac{2\cdot3^3}{3}-\left(3\cdot0^2-\frac{2\cdot0^3}{3}\right)=9.$$

Відповідь: 9.

б) $\iint\limits_D \frac{x+1}{y^2}\,dxdy$, $\qquad D:\begin{cases}x=y^2-1,\\ x=0.\end{cases}$

Перша лінія – парабола, вітки якої напрявлені вправо. Друга – вісь Oy. Знайдемо ординати точок перетину ліній, що обмежують область інтегрування:

$$\begin{cases}x=y^2-1,\\ x=0.\end{cases}\Rightarrow y^2-1=0,\ y_{1,2}=\pm1.$$

Область D, обмежена заданими лініями, зображена на рис. 1.8.

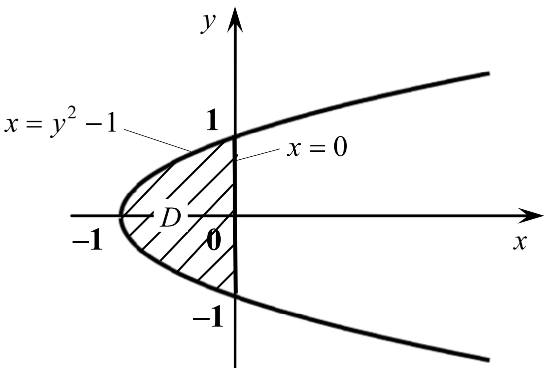


Рисунок 1.8

Виберемо напрям уздовж осі Ox. Область інтегрування описується нерівностями $D:\begin{cases}-1\le y\le1,\\ y^2-1\le x\le0.\end{cases}$ За формулою (1.2) отримуємо:

$$\iint\limits_D \frac{x+1}{y^2}\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{0} \frac{x+1}{y^2}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dy}{y^2} \int\limits_{y^2-1}^{0} (x+1)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{y^2-1}^{0} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{0^2}{2} + 0 - \frac{1}{2}(y^2-1)^2 - (y^2-1)\right)\cdot \frac{dy}{y^2} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{2}(y^4 - 2y^2 + 1) - y^2 + 1\right)\cdot \frac{dy}{y^2} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1-y^4}{2}\cdot\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} (y^{-2} - y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^{-1}}{-1} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1^3}{3} - \frac{1}{-1} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $-\dfrac{4}{3}$.

Завдання 1.5 (до Завдання 1.3.5 [6]). Обчислити подвійний інтеграл по області D, використовуючи полярні координати. Знайти площу області D.

а) $\iint\limits_D \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$, $\qquad D$: $\begin{cases} x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9, \\ y \le 0,\ y \ge \sqrt{3}\,x; \end{cases}$

б) $\iint\limits_D \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, $\qquad D$: $\begin{cases} x^2+y^2=2y, x^2+y^2=4y, \\ x \le 0. \end{cases}$

Розв'язання.

Якщо в якості області інтегрування виступає круг, кільце або їх частина, то при обчисленні подвійних інтегралів доцільно переходити до полярної системи координат. Формула переходу в подвійному інтегралі від декартових координат до полярних $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi, \qquad (1.3)$$

де D' – образ області D в полярній системі координат.

Для області D', що обмежена двома променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ та двома кривими $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi))$ (рис. 1.9), подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,. \qquad (1.4)$$

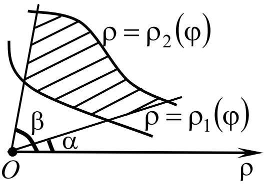


Рисунок 1.9

Площа області D в полярних координатах обчислюється за формулою:

$$S_D=\iint\limits_{D}dxdy=\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi\,. \qquad (1.5)$$

а) $\iint\limits_{D}\frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy\,,\qquad D\colon\begin{cases}x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\\ y\le 0,\ y\ge\sqrt{3}\,x.\end{cases}$

Рівняння $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$ описують кола з центрами в початку координат і радіусами 1 та 3 відповідно. Нерівність $y\le 0$ описує точки, що лежать на осі абсцис і нижче неї. Нерівність $y\ge\sqrt{3}\,x$ описує точки, що лежать на прямій $y=\sqrt{3}\,x$ та вище неї. Ці обмеження сумісно описують область *D*, що заштрихована на рис. 1.10.

У полярних координатах ρ і φ область *D* обмежена колами, рівняння яких мають вигляд $\rho=1$ та $\rho=3$, і променями $\varphi=\pi$ та $\varphi=\frac{4\pi}{3}$.

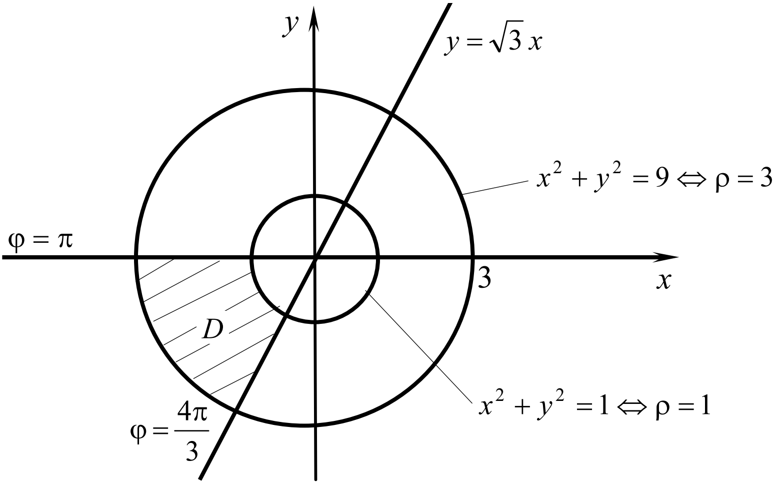


Рисунок 1.10

За формулами (1.3) та (1.4) отримуємо:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D'} \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = \iint_{D'} \cos\varphi d\rho d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} d\varphi \int_1^3 \cos\varphi d\rho =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \cos\varphi d\varphi \int_1^3 d\rho = \left(\sin\varphi\right)\Big|_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \cdot (\rho)\Big|_1^3 = \left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\pi\right)\cdot(3-1) =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)\cdot 2 = -\sqrt{3}\,.$$

Використовуючи формулу (1.5), обчислимо площу області D:

$$S_D = \iint_{D'} \rho d\rho d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} d\varphi \int_1^3 \rho d\rho = (\varphi)\Big|_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right)\cdot\frac{1}{2}\left(3^2 - 1^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(9-1\right) = \frac{4\pi}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy = -\sqrt{3}$; $S_D = \frac{4\pi}{3}$ кв. од.

б) $\iint\limits_D \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, $\quad D$: $\begin{cases} x^2+y^2=2y, x^2+y^2=4y, \\ x \le 0. \end{cases}$

Рівняння $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ можна записати у вигляді $x^2+(y-1)^2=1$, $x^2+(y-2)^2=4$. $x^2+(y-1)^2=1$ – коло з центром у точці $(0;1)$ та радіусом 1, $x^2+(y-2)^2=4$ – коло з центром у точці $(0;2)$ та радіусом 2. Нерівність $x \le 0$ описує точки, що лежать на осі ординат і зліва від неї. Ці обмеження сумісно описують область *D*, що заштрихована на рис. 1.11.

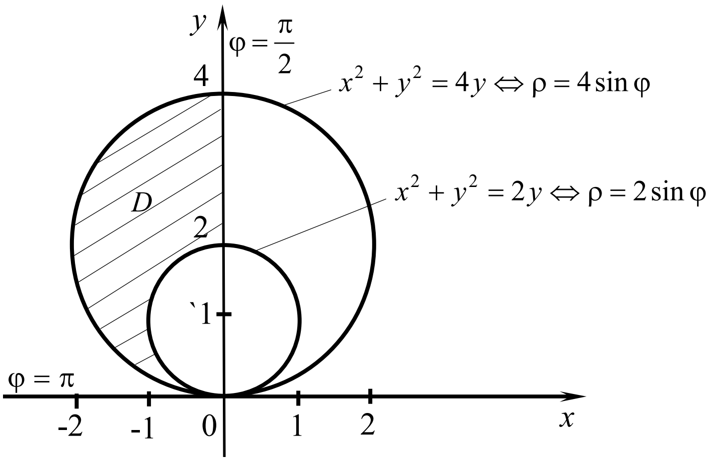


Рисунок 1.11

У полярних координатах ρ і φ область *D* обмежена колами, рівняння яких мають вигляд $\rho=2\sin\varphi$ та $\rho=4\sin\varphi$, і променями $\varphi=\frac{\pi}{2}$ та $\varphi=\pi$. За формулами (1.3) та (1.4) отримуємо:

$$\iint\limits_D \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{3\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2}}\,\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D'} 3\rho^2\cos\varphi\sin\varphi d\rho d\varphi =$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}3\rho^2 d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\rho^3\Big|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}56\sin^4\varphi\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}56\sin^4\varphi\,d\sin\varphi=56\frac{\sin^5\varphi}{5}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{56}{5}\left(\sin^5\pi-\sin^5\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{56}{5}.$$

Використовуючи формулу (1.5), обчислимо площу області D:

$$S_D=\iint\limits_{D'}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}6\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}3\left(1-\cos2\varphi\right)d\varphi=3\cdot\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=3\cdot\left(\pi-\frac{1}{2}\sin2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)\right)=$$

$$=\frac{3\pi}{2}\ \text{(кв. од.)}$$

Відповідь: $\iint\limits_{D}\frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\frac{56}{5}$; $S_D=\frac{3\pi}{2}$ кв. од.

Завдання 1.6 (до Завдання 1.3.6 [6]). Обчислити площу плоскої пластини D, обмеженої лініями $xy=5,\ \ x+y=6$.

Розв'язання.

Площа області D в декартових координатах обчислюється за формулою:

$$S_D=\iint\limits_{D}dxdy. \qquad (1.6)$$

Рівняння заданих ліній можна розв'язати відносно змінної y:

$$y=\frac{5}{x},\quad y=6-x.$$

Графіком першого рівняння є гіпербола, вітки якої розташовані в першій і третій чвертях. Графіком другого рівняння є пряма, що відтинає на осях координат по 6 одиниць. Знайдемо абсциси точок перетину графіків заданих функцій:

$$\begin{cases} xy = 5, \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(6-x) = 5, \\ y = 6 - x, \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0, \; x_1 = 1, \; x_2 = 5.$$

Область *D*, обмежена заданими лініями, зображена на рис. 1.12.

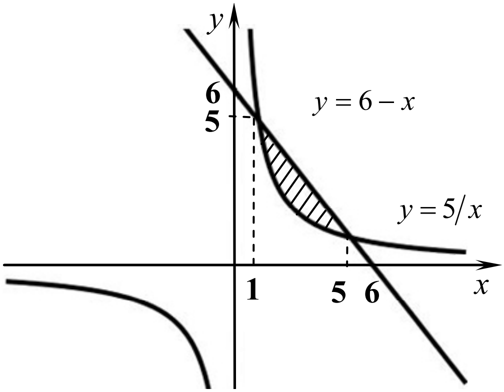


Рисунок 1.12

Область інтегрування *D* є правильною і в напрямі осі *Ox*, і в напрямі осі *Oy*. Виберемо напрям уздовж осі *Oy*. За формулою (1.6) отримуємо:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^5 dx \int\limits_{5/x}^{6-x} dy = \int\limits_1^5 dx \left(y\right)\Big|_{5/x}^{6-x} = \int\limits_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x}\right) dx =$$

$$= \left(6x - \frac{x^2}{2} - 5\ln|x|\right)\Bigg|_1^5 = 6 \cdot 5 - \frac{5^2}{2} - 5\ln|5| - 6 \cdot 1 + \frac{1^2}{2} + 5\ln|1| =$$

$$= 30 - 12{,}5 - 5\ln 5 - 6 + 0{,}5 + 0 = 12 - 5\ln 5 \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $12 - 5\ln 5$ кв. од.

Завдання 1.7 (до Завдання 1.3.7 [6]). Обчислити площу в полярній системі координат плоскої пластини *D*, яка обмежена кривою $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2 y^4$.

Розв'язання.

Перейдемо в рівнянні кривої, яка обмежує пластину *D*, від декартових координат до полярних:

$$\left(\rho^2\right)^3 = a^2(\rho\sin\varphi)^4;\ \rho^6 = a^2\rho^4\sin^4\varphi;\ \rho^2 = a^2\sin^4\varphi;$$
$$\rho = \sqrt{a^2\sin^4\varphi};\ \rho = |a|\sin^2\varphi.$$

Область, обмежена заданою кривою, зображена на рис. 1.13.

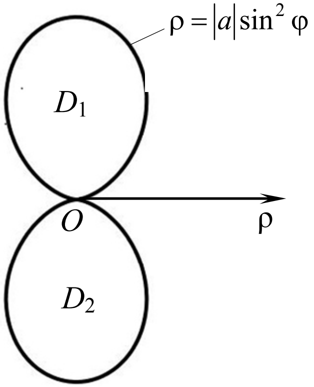


Рисунок 1.13

З рисунку видно, що область D складається з двох рівних за площею частин D_1 та D_2. Отже,

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = 2\iint\limits_{D_1} dxdy = 2\iint\limits_{D_1'} \rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^{|a|\sin^2\varphi} \rho d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^\pi d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{|a|\sin^2\varphi} = 2\int\limits_0^\pi \frac{\left(|a|\sin^2\varphi\right)^2}{2}d\varphi = a^2\int\limits_0^\pi \left(\sin^2\varphi\right)^2 d\varphi.$$

Для обчислення інтеграла виконаємо перетворення підінтегральної функції:

$$\left(\sin^2\varphi\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi.$$

$$S_D = a^2\int\limits_0^\pi \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi\right)d\varphi = a^2\left(\frac{3}{8}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{32}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi + \frac{1}{32}\sin 4\pi - \frac{3}{8}\cdot 0 + \frac{1}{4}\sin 0 - \frac{1}{32}\sin 0\right) = \frac{3}{8}\pi a^2 \text{ (кв. од.)}$$

Зауваження. Область D можна було розбити на чотири рівні за площею частини.

Відповідь: $3\pi a^2/8$ кв. од.

Завдання 1.8 (до Завдання 1.3.8 [6]). Обчислити об'єм тіла V, обмеженого заданими поверхнями: $\begin{cases} z = 1 - y^2,\ z = 0, \\ y = x^2. \end{cases}$

Розв'язання.

Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz та яке обмежене знизу областю D площини Oxy, а зверху поверхнею $z = f(x, y)$ (рис. 1.14), де функція $f(x, y)$ неперервна та невід'ємна в області D, обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy\,. \qquad (1.7)$$

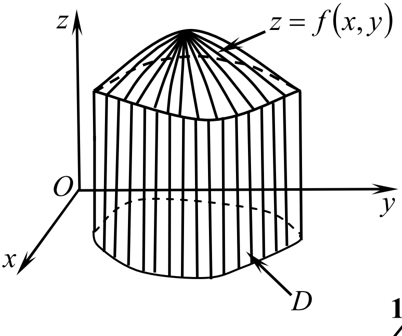


Рисунок 1.14

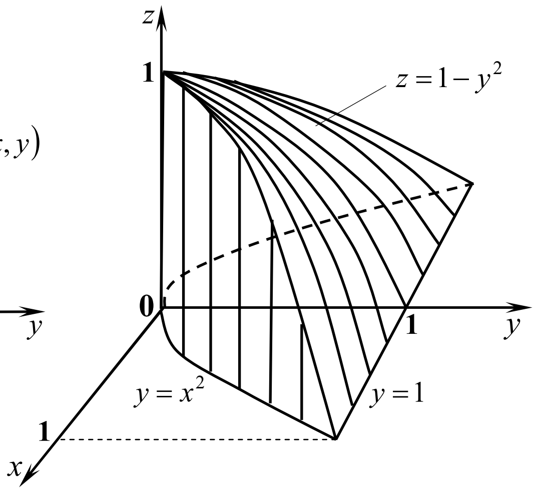


Рисунок 1.15

Задане тіло (рис. 1.15) можна розглядати як циліндричне, що має бічну поверхню з твірною, паралельною осі Oz, обмежене знизу площиною $z=0$, а зверху поверхнею $z=1-y^2$. Область D описується нерівностями: $-1\le x\le 1$, $x^2\le y\le 1$.

Використовуючи формулу (1.7), обчислимо об'єм заданого тіла:

$$V=\iint\limits_D\left(1-y^2\right)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\left(1-y^2\right)dy=\int\limits_{-1}^{1}dx\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\frac{1^3}{3}-x^2+\frac{\left(x^2\right)^3}{3}\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}-x^2+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{2}{3}x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{1^3}{3}+\frac{1^7}{21}-\left(\frac{2}{3}\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^7}{21}\right)=\frac{16}{21}\ \text{(куб. од.)}$$

Відповідь: $16/21$ куб. од.

Завдання 1.9 (до Завдання 1.3.9 [6]). Обчислити площу поверхні I: $2x+3y+3z-12=0$, відсіченою поверхнею II: $x^2+y^2=2x$.

Розв'язання.

Якщо поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$ і однозначно проєктується на площину *Oxy* в область *D*, а функції $f(x,y)$, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ неперервні в цій області, то *площу* S цієї поверхні знаходять за формулою

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy. \qquad (1.8)$$

Поверхня I є площиною, рівняння якої у «відрізках» має вигляд

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1.$$

Поверхня II є циліндричною з твірною, паралельною осі *Oz*. Її рівняння можна представити у вигляді

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Це означає, що напрямна лінія циліндричної поверхні на площині *Oxy* – коло радіуса 1 з центром у точці $(1;0)$. Задані поверхні побудовано на рис. 1.16.

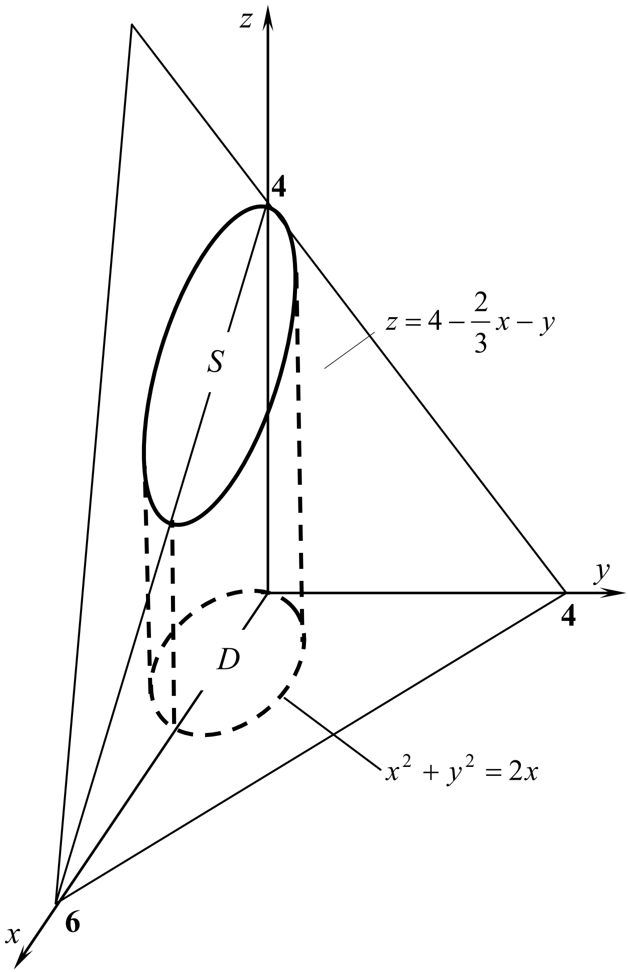


Рисунок 1.16

Використовуючи формулу (1.8), обчислимо площу заданої поверхні:

$z = 4 - \frac{2}{3}x - y$; $z'_x = -\frac{2}{3}$; $z'_y = -1$;

$$\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{1+\frac{4}{9}+1}=\frac{\sqrt{22}}{3};$$

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{22}}{3}\iint\limits_D dxdy=\frac{\sqrt{22}}{3}\cdot S_D=$$

$$=\frac{\sqrt{22}}{3}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\sqrt{22}\pi}{3}\ \text{(кв. од.)}$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{22}\pi}{3}$ кв. од.

Завдання 1.10 (до Завдання 1.3.10 [6]). Обчислити масу неоднорідної пластини D, обмеженої лініями $x=y^2+2$, $x+y=4$, якщо поверхнева густина у кожній її точці $\gamma=2-4y$.

Розв'язання.

Якщо $\gamma=\gamma(x,y)$ – поверхнева густина плоскої неоднорідної пластини, що має форму замкненої обмеженої області D, то її маса обчислюється за формулою

$$m=\iint\limits_D\gamma(x,y)dxdy. \tag{1.9}$$

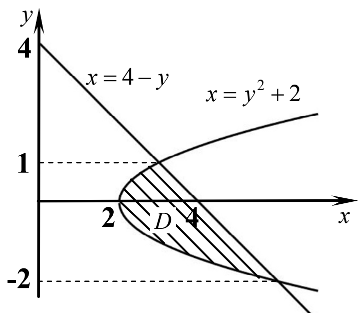


Рисунок 1.17

Знайдемо ординати точок перетину графіків функцій, що обмежують пластину:

$$\begin{cases} x = y^2 + 2, \\ x + y = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 + 2, \\ x = 4 - y, \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y^2 + 2 = 4 - y, \\ y^2 + y - 2 = 0, \end{matrix} \quad y_1 = -2\,,\ y_2 = 1\,.$$

На рис. 1.17 зображено область D, обмежену заданими кривими. Область D є правильною в напрямі осі Ox та визначається нерівностями: $-2 \le y \le 1$, $y^2 + 2 \le x \le 4 - y$. За формулою (1.9) отримуємо:

$$m = \iint\limits_D (2 - 4y)\,dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{y^2+2}^{4-y} (2 - 4y)\,dx = \int\limits_{-2}^{1} (2 - 4y)\,x\Big|_{y^2+2}^{4-y} dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} (2 - 4y)\left(2 - y - y^2\right) dy = \int\limits_{-2}^{1} \left(4y^3 + 2y^2 - 10y + 4\right) dy =$$

$$= \left(y^4 + \frac{2y^3}{3} - 5y^2 + 4y \right)\Bigg|_{-2}^{1} = 1^4 + \frac{2\cdot 1^3}{3} - 5\cdot 1^2 + 4\cdot 1 - (-2)^4 - \frac{2\cdot(-2)^3}{3} +$$

$$+ 5\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) = 18 \text{ (од. маси).}$$

Відповідь: 18 од. маси.

Завдання 1.11 (до Завдання 1.3.11 [6]). Обчислити потрійний інтеграл по області V:

а) $\iiint\limits_V \left(y^2 + 2xz\right) dxdydz$, $\quad V: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ -1 \le y \le 3, \\ 1 \le z \le 4. \end{cases}$

б) $\iiint\limits_V x^2\, y\, z^3 dxdydz$, $\quad V: \begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 4, \\ -2 \le z \le 3. \end{cases}$

Розв'язання.

Якщо область інтегрування V – прямокутний паралелепіпед, що задається нерівностями $V = \{a \le x \le b,\, c \le y \le d,\, p \le z \le q\}$, тоді потрійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x, y, z)\,dz\,. \tag{1.10}$$

а) $\iiint\limits_V \left(y^2 + 2xz\right)dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ -1 \le y \le 3, \\ 1 \le z \le 4. \end{cases}$

Область інтегрування – прямокутний паралелепіпед, зображений на рис. 1.18.

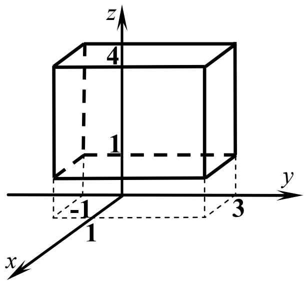


Рисунок 1.18

Використовуючи формулу (1.10), отримуємо:

$$\iiint\limits_V \left(y^2 + 2xz\right)dxdydz = \int_0^1 dx\int_{-1}^3 dy\int_1^4 \left(y^2 + 2xz\right)dz = \int_0^1 dx\int_{-1}^3 \left(y^2 z + 2x\cdot\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 dy =$$

$$= \int_0^1 dx\int_{-1}^3 \left(y^2 z + x\,z^2\right)\Big|_1^4 dy = \int_0^1 dx\int_{-1}^3 \left(y^2\cdot 4 + x\cdot 16 - \left(y^2\cdot 1 + x\cdot 1^2\right)\right)dy =$$

$$= \int_0^1 dx\int_{-1}^3 \left(3y^2 + 15x\right)dy = \int_0^1 \left(3\cdot\frac{y^3}{3} + 15xy\right)\Bigg|_{-1}^3 dx = \int_0^1 \left(y^3 + 15xy\right)\Big|_{-1}^3 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3^3 + 15x\cdot 3 - (-1)^3 - 15x\cdot(-1)\right)dx = \int_0^1 \left(28 + 60x\right)dx = = \left(28x + 60\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 28\cdot 1 + 60\cdot\frac{1^2}{2} - 28\cdot 0 - 60\cdot\frac{0^2}{2} = 58\,.$$

Відповідь: 58.

б) $\iiint\limits_V x^2\, y\, z^3 dxdydz$, $\quad V: \begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 4, \\ -2 \le z \le 3. \end{cases}$

Область інтегрування – прямокутний паралелепіпед, зображений на рис. 1.19.

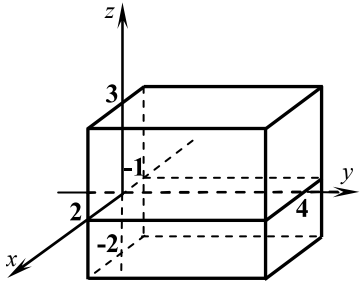


Рисунок 1.19

Використовуючи формулу (1.10), отримуємо:

$$\iiint\limits_V x^2\, y\, z^3\, dxdydz = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-2}^{3} x^2\, y\, z^3\, dz = \int\limits_{-1}^{2} x^2\, dx \int\limits_{0}^{4} y\, dy \int\limits_{-2}^{3} z^3\, dz =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_{0}^{4} \cdot \left.\frac{z^4}{4}\right|_{-2}^{3} = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) \cdot \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{3^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right) = 390 .$$

Відповідь: 390.

Завдання 1.12 (до Завдання 1.3.12 [6]). Обчислити об’єм тіла V , обмеженого заданими поверхнями, за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи циліндричні координати:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12y, \\ z = 0,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$ $\qquad$ **б)** $\begin{cases} z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, \\ 2z = x^2 + y^2. \end{cases}$

Розв’язання.

Об’єм просторової області G в циліндричних координатах обчислюється за формулою:

$$V = \iiint\limits_G \rho d\rho\, d\varphi\, dz . \tag{1.11}$$

а) $\begin{cases} x^2+y^2=12y, \\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

Тіло обмежене заданими поверхнями та його проєкція на площину Oxy зображені на рис. 1.20 та рис. 1.21 відповідно.

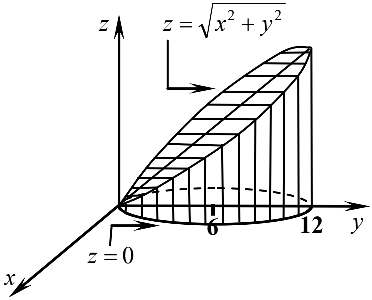


Рисунок 1.20

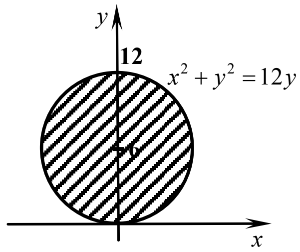


Рисунок 1.21

Перейдемо до циліндричних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Рівняння циліндра $x^2+y^2=12y \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=12\rho\sin\varphi$, тобто $\rho=12\sin\varphi$. Рівняння конуса $z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z=\rho$. Область інтегрування задається нерівностями: $0\le\rho\le12\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$, $0\le z\le\rho$. За формулою (1.11) отримуємо:

$$V=\iiint\limits_G \rho d\varphi d\rho dz=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{12\sin\varphi}\rho\, d\rho\int_0^{\rho}dz=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{12\sin\varphi}\rho\cdot z\Big|_0^{\rho}d\rho=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{12\sin\varphi}\rho^2 d\rho=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{12\sin\varphi}d\varphi=\int_0^{\pi}\frac{12^3\cdot\sin^3\varphi}{3}d\varphi=-576\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi=$$

$$=-576\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-576\left(\cos\pi-\frac{\cos^3\pi}{3}-\left(\cos0-\frac{\cos^3 0}{3}\right)\right)=$$

$=768$ (куб. од.)

Відповідь: 768 куб. од.

б) $\begin{cases} z=\sqrt{8-x^2-y^2}, \\ 2z=x^2+y^2. \end{cases}$

Тіло, обмежене заданими поверхнями, та його проєкція на площину Oxy зображені на рис. 1.22.

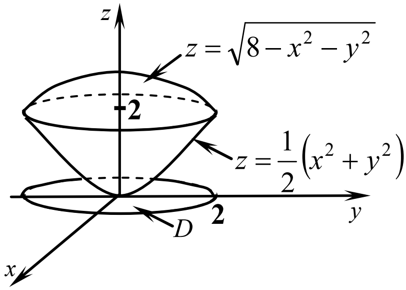


Рисунок 1.22

Перейдемо до циліндричних координат. Рівняння $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ (верхня частина сфери з центром у точці $O(0{,}0{,}0)$ та радіусом $2\sqrt{2}$) у циліндричній системі координат має вигляд $z=\sqrt{8-\rho^2}$. Рівняння параболоїда $2z=x^2+y^2$ – $z=\frac{\rho^2}{2}$. Область інтегрування задається нерівностями: $0\le\rho\le 2$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $\frac{\rho^2}{2}\le z\le\sqrt{8-\rho^2}$. За формулою (1.11) отримуємо:

$$V=\iiint\limits_G \rho d\varphi d\rho dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\, d\rho\int_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\; z\Big|_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}}=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(\rho\sqrt{8-\rho^2}-\frac{\rho^3}{2}\right)d\rho=\frac{16\sqrt{2}-14}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{16\sqrt{2}-14}{3}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{\left(8\sqrt{2}-7\right)}{3}\cdot 2\pi=\frac{4\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)}{3}\ \text{(куб. од.)}$$

Для обчислення інтеграла $\int_0^2 \rho\sqrt{8-\rho^2}\,d\rho$ було використано метод підведення під знак диференціала:

$$\int_0^2 \rho\sqrt{8-\rho^2}\,d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{8-\rho^2}\,d\left(8-\rho^2\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(8-\rho^2\right)^3}\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{\left(8-2^2\right)^3} - \sqrt{\left(8-0^2\right)^3}\right) = \frac{16\sqrt{2}-8}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{4\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)}{3}$ куб. од.

Завдання 1.13 (до Завдання 1.3.13 [6]). Обчислити об'єм V тіла, обмеженого заданими поверхнями, за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи сферичні координати, якщо

$$G:\begin{cases} 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, \\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}, \\ x \le y \le \sqrt{3}x. \end{cases}$$

Розв'язання.

У сферичній системі координат $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$ об'єм V області G обчислюється за формулою

$$V = \iiint_G \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (1.12)$$

Використовуючи формули $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$, $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, які отримані з формул переходу від декартових до сферичних координат, знайдемо як змінюються координати ρ, φ, θ в заданій області. Із нерівності $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ маємо $1 \le \rho \le 2$. Із нерівності $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ отримуємо $0 \le \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \le 1$, $0 \le \operatorname{tg}\theta \le 1$, тобто $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Із нерівності $x \le y \le \sqrt{3}x$ маємо $1 \le \frac{y}{x} \le \sqrt{3}$, $1 \le \operatorname{tg}\varphi \le \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Отже, область інтегрування у сферичній системі координат задається нерівностями: $\begin{cases} 1 \le \rho \le 2, \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}. \end{cases}$ За формулою (1.12) отримуємо:

$$V = \iiint\limits_G \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int\limits_1^2 \rho^2 d\rho = \varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0\right) \cdot \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{7\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)}{72} \text{ (куб. од.)}$$

Відповідь: $\frac{7\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{72}$ куб. од.

2 КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Розв'язування типового варіанта

Завдання 2.1 (до завдання 2.3.1 [6]). Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x-2y)dl$.

а) L − відрізок прямої від точки $A_1(0,0)$ до точки $A_2(4,3)$;

б) L − відрізок прямої від точки $A_1(1,-1)$ до точки $A_2(-2,4)$.

Розв'язання.

Заданий інтеграл − криволінійний інтеграл I-го роду. Якщо крива L задана у вигляді $y=\varphi(x)$, $a \le x \le b$, де $\varphi(x)$ – неперервна диференційовна функція, то криволінійний інтеграл I-го роду обчислюється за формулою:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx\,. \qquad (2.1)$$

При обчисленні криволінійних інтегралів першого роду, треба враховувати, що межі інтегрування у визначеному інтегралі, що стоїть у правій частині (2.1), завжди «беруть» від «меншої» до «більшої», незалежно від заданого напряму інтегрування.

а) $\int\limits_L (x-2y)dl$, де L − відрізок прямої від точки $A_1(0,0)$ до точки $A_2(4,3)$.

Рівняння прямої A_1A_2 знайдемо, використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Маємо $\dfrac{x-0}{4-0}=\dfrac{y-0}{3-0}$. Після перетворень отримаємо рівняння прямої A_1A_2: $y=\dfrac{3}{4}x$. Отже, $y'=\dfrac{3}{4}$. Заданий криволінійний інтеграл зведемо до визначеного інтеграла, використовуючи формулу (2.1):

$$\int\limits_L (x-2y)dl = \int\limits_0^4 \left(x - \frac{3}{2}x\right)\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\, dx = -\frac{5}{8}\int\limits_0^4 xdx = -\frac{5}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = -5 .$$

Відповідь: -5 .

б) $\int\limits_L (x-2y)dl$, де L − відрізок прямої від точки $A_1(1,-1)$ до точки $A_2(-2,4)$.

Знайдемо рівняння прямої A_1A_2 : $\dfrac{x-1}{-2-1} = \dfrac{y-(-1)}{4-(-1)}$, $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y+1}{5}$,

$5(x-1) = -3(y+1)$, , $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{2}{3}$. Заданий криволінійний інтеграл зведемо до визначеного інтеграла, використовуючи формулу (2.1):

$$\int\limits_L (x-2y)dl = \int\limits_{-2}^1 \left(x - 2\left(-\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)\right)\sqrt{1+\left(-\frac{5}{3}\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{34}}{3}\int\limits_{-2}^1 \left(\frac{13x}{3} - \frac{4}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{34}}{3}\left(\frac{13x^2}{6} - \frac{4}{3}x\right)\Bigg|_{-2}^1 = \frac{\sqrt{34}}{3}\left(\frac{13\cdot 1^2}{6} - \frac{4}{3}\cdot 1 - \left(\frac{13\cdot(-2)^2}{6} - \frac{4}{3}\cdot(-2)\right)\right) = -\frac{7\sqrt{34}}{2}$$

Відповідь: $-\dfrac{7\sqrt{34}}{2}$.

Завдання 2.2 (до завдання 2.3.2 [6]). Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydl$, де L − крива задана параметрично $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$, $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Розв'язання.

Заданий інтеграл − криволінійний інтеграл I-го роду. Якщо крива L задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то криволінійний інтеграл I-го роду обчислюється за формулою:

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \qquad (2.2)$$

Знайдемо похідні від $x(t)$ та $y(t)$ по параметру t: $x'(t) = 2(\sin t)' = 2\cos t$, $y'(t) = 3(\cos t)' = -3\sin t$. Заданий криволінійний інтеграл зведемо до визначеного інтеграла, використовуючи формулу (2.2):

$$\int\limits_{L} xydl = \int\limits_{0}^{\pi/2} 6\sin t \cdot \cos t\sqrt{4\cos^2 t + 9\sin^2 t}\, dt =$$

$$= 3\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{4 - 4\sin^2 t + 9\sin^2 t}\, dt = 3\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{4 + 5\sin^2 t}\, dt =$$

$$= 3\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{4 + \frac{5}{2}(1 - \cos 2t)}\, dt = \frac{3}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{13 - 5\cos 2t}\, dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = 13 - 5\cos 2t \\ du = 10\sin 2tdt \\ t = 0;\ u = 8 \\ t = \dfrac{\pi}{2};\ u = 18 \end{array} \right| = \frac{3}{10\sqrt{2}}\int\limits_{8}^{18} u^{1/2} du = \frac{1}{5\sqrt{2}} u^{3/2}\Big|_{8}^{18} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(18\sqrt{18} - 8\sqrt{8}) =$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}(54\sqrt{2} - 16\sqrt{2}) = \frac{38}{5} = 7{,}6.$$

Відповідь: $7{,}6$.

Завдання 2.3 (до Завдання 2.3.3 [6]). Обчислити інтеграл $\int\limits_{L} y^2 dx + 2xydy$ по лінії L: $y = x^2$ від точки $A\ (0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Розв'язання.

Заданий інтеграл − криволінійний інтеграл II-го роду. Якщо крива L задана у вигляді $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$, то криволінійний інтеграл II-го роду обчислюється за формулою:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\right]dx\,. \qquad (2.3)$$

Оскільки $y = x^2$, то $y' = 2x$. Використовуючи формулу (2.3), отримаємо:

$$\int_L y^2dx + 2xydy = \int_0^1 (x^4 + 2x\cdot x^2\cdot 2x)dx = 5\int_0^1 x^4dx = x^5\Big|_0^1 = 1\,.$$

Відповідь: 1.

Завдання 2.4 (до Завдання 2.3.4 [6]). Обчислити інтеграл $\int_L x^2ydy - xy^2dx$ по лінії L: $\begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Розв'язання.

Заданий інтеграл − криволінійний інтеграл ІІ-го роду. Якщо крива L задана параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_1, t_2]$, то криволінійний інтеграл ІІ-го роду обчислюється за формулою:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q((x(t), y(t))y'(t)\right]dx\,. \quad (2.4)$$

Знайдемо похідні від $x(t)$ та $y(t)$ по параметру t: $x'(t) = -\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}$, $y'(t) = \dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}$. Заданий криволінійний інтеграл зведемо до визначеного інтеграла, використовуючи формулу (2.4):

$$\int_L x^2ydy - xy^2dx = \int_0^{\pi/2} \left(\cos t\cdot\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} + \sin t\cdot\sqrt{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4}$.

Завдання 2.5 (до Завдання 2.3.5 [6]). Застосувавши формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл по замкненому контуру L (обхід контуру здійснити в додатному напрямі):

а) $\oint\limits_L \left(-x^2y\right)dx + xy^2dy$, $L:\ x^2+y^2=1$;

б) $\oint\limits_L y^2dx + \left(x^2-5y\right)dy$, L: трикутник з вершинами в точках $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C(0;2)$.

Розв'язання.

Якщо L − замкнений контур, який обмежує область D і функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними 1-го порядку $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій області D, включаючи межу L, то для обчислення криволінійного інтеграла II-го роду можна застосувати формулу Гріна:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial x \partial y\,. \qquad (2.5)$$

а) $\oint\limits_L \left(-x^2y\right)dx + xy^2dy$, $L:\ x^2+y^2=1$.

Контур L − коло з центром в точці $O(0,0)$ та радіусом $R=1$ (рис. 2.1).

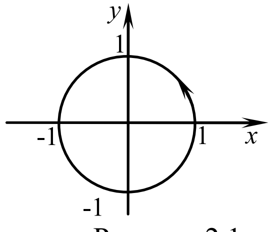


Рисунок 2.1

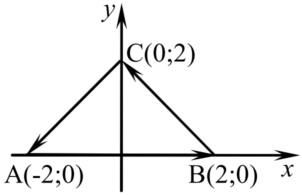


Рисунок 2.2

За умовою $P=-x^2y$, $Q=xy^2$. Знайдемо $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial P}{\partial y}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}=y^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(-x^2y)}{\partial y}=-x^2.$$

Використовуючи формулу Гріна (2.5), заданий інтеграл можна записати у такому вигляді:

$$\oint_L\left(-x^2y\right)dx+xy^2dy=\iint_D\left(y^2+x^2\right)dxdy.$$

Перейдемо до полярних координат:

$$\iint_D\left(y^2+x^2\right)dxdy=\left|\begin{array}{l|l} x=\rho\cos\varphi, & 0\le\rho\le 1,\\ y=\rho\sin\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi\\ dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi, & \\ x^2+y^2=\rho^2 & \end{array}\right|=\iint_D\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3d\rho=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1=\left(2\pi-0\right)\cdot\frac{1}{4}\left(1^4-0^4\right)=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

б) $\oint_L y^2dx+\left(x^2-5y\right)dy$, L: трикутник з вершинами в точках $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C(0;2)$.

Контур інтегрування – замкнена ламана $ABCA$, що обмежує трикутник ABC (рис. 2.2). За умовою $P=y^2$, $Q=x^2-5y$. Знайдемо $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2y.$$

Використовуючи формулу Гріна (2.5), заданий інтеграл можна записати у такому вигляді:

$$\oint_L y^2dx+\left(x^2-5y\right)dy=\iint_D(2x-2y)dxdy.$$

Знайдемо рівняння прямих AB та BC:

$AC:\ \dfrac{x+2}{0+2}=\dfrac{y-0}{2-0},\ x=y-2;$

$BC:\ \dfrac{x-2}{0-2}=\dfrac{y-0}{2-0},\ x=2-y.$

$$\iint\limits_D (2x-2y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{y-2}^{2-y}(2x-2y)dx=\int_0^2 dy\left(x^2-2y\,x\right)\Big|_{y-2}^{2-y}=$$

$$=\int_0^2\left(\left((2-y)^2-2y(2-y)-\left((y-2)^2-2y(y-2)\right)\right)\right)dy=\int_0^2\left(4y^2-8y\right)dy=$$

$$=\frac{4y^3}{3}-4y^2\Big|_0^2=-\frac{16}{3}$$

Відповідь: $-\dfrac{16}{3}$.

Завдання 2.6 (до Завдання 2.3.6 [6]). Обчислити інтеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)}\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy+y^2\right)dy$, перевіривши незалежність від шляху інтегрування.

Розв'язання.

Перевіримо незалежність від шляху інтегрування. Для цього необхідно виконання умови: $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. У заданому інтегралі $P(x,y)=x^2+2xy-y^2$, $Q(x,y)=x^2-2xy+y^2$, тоді $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2x-2y$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x-2y$, тобто $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ на всій площині Oxy. Отже, значення заданого інтеграла не залежить від шляху інтегрування. Виконаємо інтегрування по ламаній OAB (рис. 2.3).

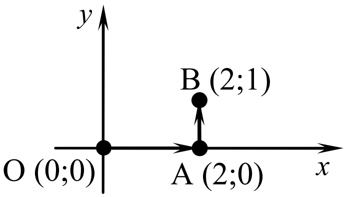


Рисунок 2.3

На відрізку OA: $y = 0, dy = 0, 0 \le x \le 2$. На відрізку AB: $x = 2, dx = 0, 0 \le y \le 1$. Отже,

$$\int_{(0;0)}^{(2;1)} \left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy + y^2\right)dy = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 \left(4 - 4y + y^2\right)dy =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \left(4y - 2y^2 + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = 5 .$$

Відповідь: 5 .

Завдання 2.7 (до Завдання 2.3.7 [6]). Знайти функцію $u(x, y)$ за її повним диференціалом:

а) $du = (y + \ln(x+1))dx + \left(x + 1 - e^y\right)dy$;

б) $du = \left(\frac{5}{x} + \frac{2x}{y^2}\right)dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{2x^2}{y^3}\right)dy$.

Розв’язання.

Якщо вираз $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$ (виконується умова $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$), то її можна відновити, використовуючи одну з формул:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dx + C , \qquad (2.6)$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dx + C , \qquad (2.7)$$

де (x_0, y_0) довільна фіксована точка, в якій визначені функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$.

а) $du = (y + \ln(x+1))dx + (x + 1 - e^y)dy$.

У заданому повному диференціалі $P(x, y) = y + \ln(x+1)$, $Q(x, y) = x + 1 - e^y$ ($\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$=1). В якості точки (x_0, y_0) візьмемо точку $(0,0)$, тобто $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Знайдемо $u(x, y)$ за формулою (2.6):

$$u(x, y) = \int_0^x (0 + \ln(x+1))dx + \int_0^y (x + 1 - e^y)dy = (x\ln(x+1) - x + \ln(x+1))\Big|_0^x +$$

$$+ (xy + y - e^y)\Big|_0^y = (x+1)\ln(x+1) - x + xy + y - e^y + 1 + C .$$

Відповідь: $u(x, y) = (x+1)\ln(x+1) - x + xy + y - e^y + 1 + C$.

б) $du = \left(\dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{y^2}\right)dx + \left(\dfrac{3}{y} - \dfrac{2x^2}{y^3}\right)dy$.

У заданому повному диференціалі $P(x, y) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{y^2}$, $Q(x, y) = \dfrac{3}{y} - \dfrac{2x^2}{y^3}$ ($\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\dfrac{4x}{y^3}$). В якості точки (x_0, y_0) не можна брати точку $(0,0)$, як у завданні а), бо в цій точці невизначені функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$. В якості точки (x_0, y_0) візьмемо точку $(1,1)$, тобто $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Знайдемо $u(x, y)$ за формулою (2.7):

$$u(x, y) = \int_1^x \left(\frac{5}{x} + \frac{2x}{y^2}\right)dx + \int_1^y \left(\frac{3}{y} - \frac{2 \cdot 1^2}{y^3}\right)dy = \left(5\ln|x| + \frac{x^2}{y^2}\right)\Bigg|_1^x +$$

$$+ \left(3\ln|y| + \frac{1}{y^2}\right)\Bigg|_1^y + C_1 = 5\ln x + \frac{x^2}{y^2} - \left(5\ln|1| + \frac{1^2}{y^2}\right) + 3\ln|y| + \frac{1}{y^2} -$$

$$-\left(3\ln|1|+\frac{1}{1^2}\right)+C_1=5\ln|x|+\frac{x^2}{y^2}+3\ln|y|-1+C_1=$$

$$=5\ln|x|+\frac{x^2}{y^2}+3\ln|y|+C,\ C=C_1-1.$$

Відповідь: $u(x,y)=5\ln|x|+\dfrac{x^2}{y^2}+3\ln|y|+C$.

Завдання 2.8 (до Завдання 2.3.8 [6]) Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (2x-y+4z)dS$, де S – частина площини $P:\ 3x+y+2z=6$, що знаходиться в першому октанті.

Розв'язання.

Якщо гладка поверхня S задана рівнянням $z=f(x,y)$ і однозначно проєктується на площину Oxy в область D_{xy}, то поверхневій інтеграл I-го роду зводиться до подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy. \quad (2.8)$$

Зобразимо частину площини $P:\ 3x+y+2z=6$, що лежить у першому октанті (рис. 2.4).

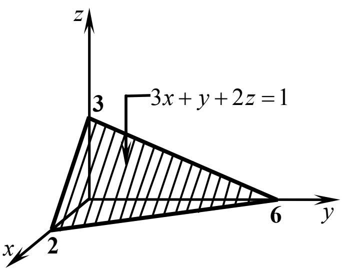


Рисунок 2.4

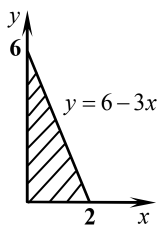


Рисунок 2.5

Як видно з рис. 2.4, поверхня S однозначно проєктується на площину Oxy. Проєкцію зображено на рис. 2.5. Із рівняння площини

P отримуємо: $z = 3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y$, $z'_x = -\frac{3}{2}$, $z'_y = -\frac{1}{2}$,

$$dS = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\, dxdy = \frac{\sqrt{14}}{2}\, dxdy\,.$$

Обчислимо заданий інтеграл, використовуючи формулу (2.8):

$$\iint\limits_S (2x - y + 4z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} \left(2x - y + 4\cdot\frac{1}{2}(6 - 3x - y)\right)\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}\, dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{2}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{6-3x}(12 - 4x - 3y)dy = \frac{\sqrt{14}}{2}\int\limits_0^2 \left(12y - 4xy - 3\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{6-3x} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{2}\int\limits_0^2 \left(12(6 - 3x) - 4x(6 - 3x) - 3\cdot\frac{(6 - 3x)^2}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{2}\int\limits_0^2 \left(-\frac{3x^2}{2} - 6x + 18\right)dx = \frac{\sqrt{14}}{2}\left(-\frac{x^3}{2} - 3x^2 + 18x\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{2}\left(-\frac{2^3}{2} - 3\cdot 2^2 + 18\cdot 2 + \frac{0^3}{2} + 3\cdot 0^2 - 18\cdot 0\right) = 10\sqrt{14}\,.$$

Відповідь: $10\sqrt{14}$.

Завдання 2.9 (до Завдання 2.3.9 [6]). Обчислити поверхневий інтеграл другого роду через нижню сторону поверхні σ, яка обмежена координатними площинами:

а) $\iint\limits_\sigma (x - 2y + 2zx)dxdz$, $\sigma:\ x - y + 2z = 1$;

б) $\iint\limits_\sigma \left(6x - y^2\right)dydz$, $\sigma:\ -3x - y + z = 1$;

в) $\iint\limits_\sigma (y + xz)dx\,dy$, $\sigma:\ 2x + y - z = 1$.

Розв’язання.

а) $\iint\limits_\sigma (x - 2y + 2zx)dxdz$, $\sigma:\ x - y + 2z = 1$.

На рис. 2.6 зображено частину поверхні σ: $x - y + 2z = 1$, обмежену координатними площинами.

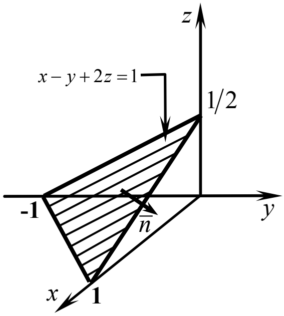


Рисунок 2.6

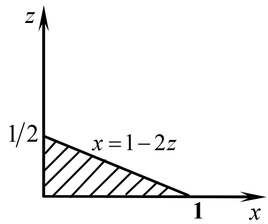


Рисунок 2.7

Заданий інтеграл є інтегралом виду $\iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz$. Відомо, якщо поверхня σ задана рівнянням $y = y(x, z)$, то інтеграл такого типу можна обчислити за формулою:

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz\,, \qquad (2.9)$$

де D_{xz} – проєкція поверхні σ на площину xOz, знак «+» беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oy, а «-» – коли кут тупий.

Запишемо рівняння поверхні σ у вигляді $y = x + 2z - 1$ та спроєктуємо її на площину xOz (рис. 2.5). Область $D_{xz}: \begin{cases} 0 \le z \le \frac{1}{2}, \\ 0 \le x \le 1 - 2z. \end{cases}$

Нормаль до поверхні σ, спрямована у напрямі нижньої сторони поверхні, утворює гострий кут з додатним напрямом осі Oy. За формулою (2.9) отримуємо:

$$\iint\limits_{\sigma}(x-2y+2zx)dxdz=\iint\limits_{D_{xz}}(x-2(x+2z-1)+2zx)dxdz=$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}}(2-x-4z+2zx)dxdz=\int\limits_{0}^{1/2}dz\int\limits_{0}^{1-2z}(2-x-4z+2zx)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1/2}\left(2x-\frac{x^2}{2}-4zx+zx^2\right)\Bigg|_{0}^{1-2z}dz=\int\limits_{0}^{1/2}\left(\frac{3}{2}-5z+2z^2+4z^3\right)dz=$$

$$=\left(\frac{3}{2}z-5\frac{z^2}{2}+2\frac{z^3}{3}+4\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1/2}=\frac{13}{48}.$$

Відповідь: $\frac{13}{48}$.

б) $\iint\limits_{\sigma}\left(6x-y^2\right)dydz$, $\qquad \sigma:\ -3x-y+z=1$.

На рис. 2.8 зображено частину поверхні $\sigma: -3x-y+z=1$, обмежену координатними площинами.

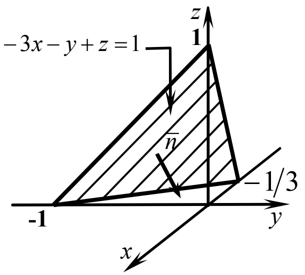


Рисунок 2.8

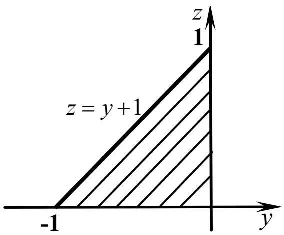


Рисунок 2.9

Заданий інтеграл є інтегралом виду $\iint\limits_{\sigma}P(x,y,z)dydz$. Відомо, що якщо поверхня σ задана рівнянням $x=x(y,z)$, то інтеграл такого типу можна обчислити за формулою:

$$\iint\limits_{\sigma}P(x,y,z)dydz=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz, \tag{2.10}$$

де D_{yz} – проєкція поверхні σ на площину yOz, знак «+» беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Ox, а «-» – коли кут тупий.

Запишемо рівняння поверхні σ у вигляді $x=\dfrac{z-y-1}{3}$ та спроєктуємо її на площину yOz (рис. 2.9). Область $D_{yz}:\begin{cases}-1\le y\le 0,\\ 0\le z\le y+1.\end{cases}$

Нормаль до поверхні σ, спрямована у напрямі нижньої сторони поверхні, утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ox. За формулою (2.10) отримуємо:

$$\iint_{\sigma}\left(6x-y^2\right)dydz=\iint_{D_{yz}}\left(6\cdot\frac{z-y-1}{3}-y^2\right)dydz=\iint_{D_{yz}}\left(2\cdot(z-y-1)-y^2\right)dydz=$$

$$=\iint_{D_{yz}}\left(2z-2y-y^2-2\right)dydz=\int_{-1}^{0}dy\int_{0}^{y+1}\left(2z-2y-y^2-2\right)dz=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(z^2-\left(2y+y^2+2\right)z\right)\Big|_0^{y+1}dy=\int_{-1}^{0}\left((y+1)^2-\left(2y+y^2+2\right)(y+1)\right)dy=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-2y^2-y^3-2y-1\right)dy=\left(-\frac{2y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-y^2-y\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{5}{12}$$

Відповідь: $-5/12$.

в) $\iint_{\sigma}(y+xz)dx\,dy$, $\qquad\sigma:\ 2x+y-z=1$.

На рис. 2.10 зображено частину поверхні $\sigma:\ 2x+y-z=1$, обмежену координатними площинами.

Заданий інтеграл є інтегралом виду $\iint_{\sigma}R(x,y,z)dx\,dy$. Відомо, що якщо поверхня σ задана рівнянням $z=z(x,y)$, то інтеграл такого типу можна обчислити за формулою:

$$\iint_{\sigma}R(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{xy}}P(x,y,z(x,y))dx\,dy, \qquad (2.11)$$

де D_{xy} – проєкція поверхні σ на площину xOy, знак «+» беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю z, а «-» – коли кут тупий.

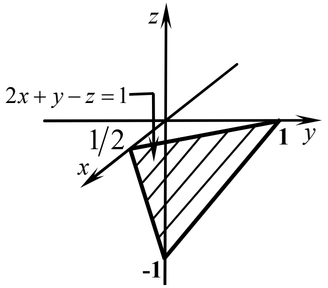


Рисунок 2.10

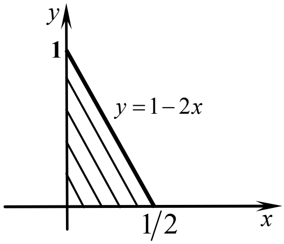


Рисунок 2.11

Запишемо рівняння поверхні σ у вигляді $z=2x+y-1$ та спроєктуємо її на площину xOy (рис. 2.11). Область $D_{xy}:\begin{cases} 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ 0\le y\le 1-2x. \end{cases}$ Нормаль до поверхні σ, спрямована у напрямі нижньої сторони поверхні, утворює гострий кут з додатним напрямом осі Oz. За формулою (2.11) отримуємо:

$$\iint_{\sigma}(y+xz)\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}}(y+x(2x+y-1))\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}}\left(y+2x^2+xy-x\right)dx\,dy=$$

$$=\int_0^{1/2}dx\int_0^{1-2x}\left(y+2x^2+xy-x\right)dy=\int_0^{1/2}\left(\frac{y^2}{2}+2x^2y+\frac{xy^2}{2}-xy\right)\Bigg|_0^{1-2x}dx=$$

$$=\int_0^{1/2}\left(\frac{(1-2x)^2}{2}+2x^2(1-2x)+\frac{x(1-2x)^2}{2}-x(1-2x)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(1-5x+8x^2-4x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}-x^4\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{96}$$

Відповідь: $7/96$.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика : підруч. : у 2 кн. / Г. Й. Призва та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ : Либідь, 2003. Кн. 1. 400 с.
2. Вища математика: збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.
3. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. Київ : Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
4. Килимник І. М., Полякова Т. Г. Практикум з інтегрування функції однієї змінної: навч. посіб. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. 306 с.
5. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. 2-ге вид. Київ : Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
6. Методичні вказівки до розрахункових робіт з вищої математики. Розділи: «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / уклад.: І. М. Килимник. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2025. 73 с.
7. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. П. Вища математика : підруч. : у 2 ч. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ : Техніка, 2003. Ч. 1. 600 с.
8. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посіб. Харків : УкрДУЗТ, 2023. Ч. 2. 251 с.

ДОДАТОК А
Таблиця похідних

Таблиця А.1 – Таблиця похідних

У таблиці $u = u(x)$ – дифенційовна функція

1. $(C)' = 0$, $C = const$;	11. $(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
2. $(x)' = 1$;	12. $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;	13. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
4. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;	14. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
5. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a - const$;	15. $(\mathrm{arctg}\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;	16. $(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
7. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;	17. $(\mathrm{sh}\,u)' = \mathrm{ch}\,u \cdot u'$;
8. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;	18. $(\mathrm{ch}\,u)' = \mathrm{sh}\,u \cdot u'$;
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;	19. $(\mathrm{th}\,u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$;
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;	20. $(\mathrm{cth}\,u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.

ДОДАТОК Б
Таблиця основних інтегралів

Таблиця Б.1 – Таблиця основних інтегралів

У таблиці $u = u(x)$ – дифенційовна функція

1. $\int du = u + C$;	12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$;	13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\| + C$;
3. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$;	14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$;
4. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$;	15. $\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$;
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;	16. $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$;
6. $\int e^u du = e^u + C$;	17. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$;
7. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$;	18. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$;
8. $\int \cos u\, du = \sin u + C$;	19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$;
9. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\|\cos u\| + C$;	20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$;
10. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln\|\sin u\| + C$;	21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$;
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;	22. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

Кінець таблиці Б.1

23. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} +$ $+ \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C$;	25. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left| f(x) \right| + C$;
24. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \frac{1}{2} a^2 \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$;	26. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$.

ДОДАТОК В
Деякі формули елементарної математики

Формули скороченого множення:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

4) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

5) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу:

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\quad$ $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\quad$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$; $\quad$ $\mathrm{ctg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$.

Формули подвійного аргументу:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Формули пониження степеня:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Формули добутку тригонометричних функцій:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right).$$