

ПРО ПОБУДОВУ КРИВОЇ ЗНОСУ ДЛЯ МАШИН І УСТАТКУВАННЯ

Розглядається задача побудови статистичної кривої зносу машин і устаткування. Передбачається, що найбільш узагальнене зображення динаміки зносу дає логістична крива. Наводиться алгоритм відновлення неперервної функції, яка задана своїми наближеними значеннями у вузлах довільної фіксованої сітки і має в області визначення не більше однієї точки перегину. В якості відновлювальної приймається функція, побудована на основі методу квазірозв'язків. Наведені алгоритми відновлення є оптимальними за порядком точності на відповідних класах функцій.

Ключові слова: функція однієї змінної, відновлення, логістична крива, крива зносу, оптимальність за точністю.

Вступ

Останнім часом ведуться активні дослідження з розробки статистичних кривих зносу для машин і устаткування, які служать хорошим інформаційним засобом особливо в умовах масової оцінки.

Крива зносу показує динаміку коефіцієнта зносу в часі протягом терміну служби машини. У літературі з оцінки машин і устаткування давно вже робляться спроби знайти таку форму кривої, яка зможе адекватно відображати якусь узагальнену закономірність знецінення для всіх класів машин і обладнання [2, 3].

На думку багатьох авторів великими можливостями для моделювання процесу зношування машин і устаткування в широкому інтервалі їх життя має логістична крива. Практичним підтвердженням цього служать форми кривих вибуття для промислових об'єктів майна, отримані вченими-статистиками з Університету штату Айова в США [4]. Ними були проведені дослідження з побудови статистичних моделей і кривих залишкового ресурсу для об'єктів майна в промисловості. Завдання цих досліджень полягало в тому, щоб розробити практичні моделі для обґрунтованого розрахунку термінів служби машин і устаткування, відштовхуючись від даних статистики про поступове вибуття експлуатованих об'єктів при досягненні певного віку. Суть методу полягає в наступному. Виділимо досить представницьку групу машин одного класу, які почали експлуатуватися в один час і функціонують у приблизно однакових умовах. Далі аналізуємо багаторічні статистичні дані про те, скільки машин з цієї групи щороку стають непридатними і списуються. Підраховуємо відсоток машин, які закінчують своє життя в кожному році, від початкового числа машин у даній групі. За отриманими даними будують спочатку емпіричну ламану криву, а потім її апроксимують у вигляді згладженої кривої залишкового ресурсу.

З точки зору визначення динаміки зносу інтерес має інша крива – крива вибуття. Ця крива є дзеркальним відображенням кривої залишкового ресурсу і також представлена на рис. 1. Вона показує процес наростання з віком частки вибутих з експлуатації машин. Стосовно до однієї якої-небудь машини з даної групи крива вибуття набуває сенсу кривої зносу, що відображає якусь закономірну втрату її технічного ресурсу або ресурсу довговічності.

У літературі можна зустріти криві зносу для різних класів машин і устаткування, що описуються найчастіше степеневими або показниковими функціями. І хоча ці криві описані досить складними функціями, але за формою всі вони схожі на логістичну криву. Можна сказати, що найбільш узагальнене зображення динаміки зносу на широкому інтервалі життя об'єктів дає логістична крива [1].

Тому побудова за експериментальними даними оптимальних алгоритмів відновлення S-образних логістичних функцій є актуальною.

Таким чином, згладжена крива залишкового ресурсу показує зміну частки (відсотка) машин, що продовжують функціонувати зі зростанням їх хронологічного віку, в загальній кількості машин, які почали своє життя одночасно з цими машинами.

Авторами [4] були розроблені 18 типів згладжених кривих, що розрізняються кривизною, симетричних і асиметричних, здатних відобразити різноманітні ситуації зносу у різній техніці. І хоча ці криві описані досить складними функціями, але за формою все вони схожі на логістичну криву. Як приклад на рис. 1 наведена згладжена крива залишкового ресурсу, отримана авторами для газових відцентрових насосів.

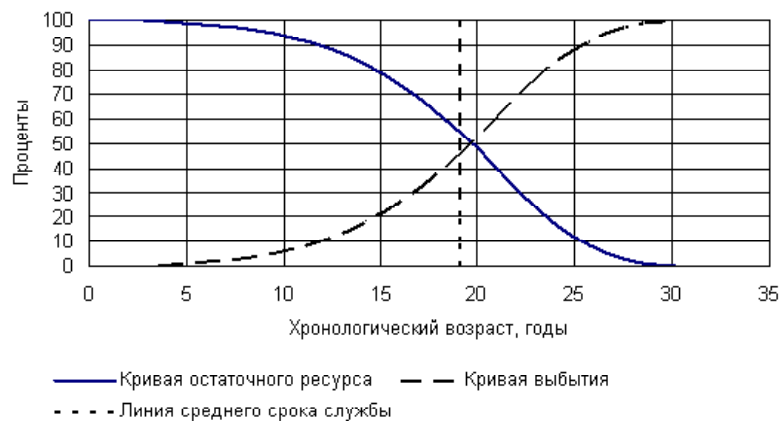


Рис. 1. Криві залишкового ресурсу і вибуття для газових відцентрових насосів [4]

Постановка задачі

Нехай функція $f(x)$, що належить деякому класу F визначених на $[a, b]$ функцій, задана своїми наближеними значеннями $f_j, j = \overline{1, N}$ у вузлах x_j довільної фіксованої сітки $\Delta: \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$. Потрібно відновити цю функцію. В якості відновлювальної приймається функція $S(x)$, яка належить класу F і задовольняє умові:

$$\delta(S) = \inf_{\varphi \in F} \delta(\varphi),$$

$$\delta(\varphi) = \max_{1 \leq i \leq N} |f_i - \varphi(x_i)|. \quad (1)$$

Нехай $F_{N,\varepsilon}$ – клас функцій $f(x) \in F$, що задовольняють умові $|f(x_i) - f_i| \leq \varepsilon, i = \overline{1, N}$. Оскільки функція $S(x)$, що є розв’язком задачі (1), належить класу $F_{N,\varepsilon}$, то за умови обмеженості цього класу, відновлення функцією $S(x)$ є оптимальним за порядком точності в класі $F_{N,\varepsilon}$ з константою порядку, що не перевищує двох.

В якості F розглянемо такі класи функцій:

- $V_i[a, b], i = 1, 2$ – клас неперервних функцій $f(x), x \in [a, b]$, мінімальне число інтервалів, опуклості яких на $[a, b]$ не перевищує i ;

- $W_i[a, b], i = 1, 2$ – клас неперервних функцій $f(x) \in V_i[a, b]$ і неубутних на $[a, b]$.

Відзначимо, що наявні експериментальні дані $f_j, j = \overline{1, N}$ о функції $f(x)$, як правило, не відповідають наявної апріорної інформації про геометричні властивості функції $f(x)$.

Матеріали і методи

Розглянемо задачу відновлення неперервних опуклих функцій: знайдемо функцію $S(x)$, яка задовольняє

умові (1) при $F \equiv V_1[a, b]$. Для визначеності будемо вважати, що функції класу $V_1[a, b]$ опуклі вниз. Розглянемо наступний покроковий

Алгоритм А.

Крок 1. Покласти $s = 1, k_0 = 1$.

Крок 2. Обчислити $\frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}} = \min_{k_{s-1} < i \leq k_s} \frac{f_i - f_{k_{s-1}}}{x_i - x_{k_{s-1}}}$ і

зафіксувати k_s .

Крок 3. Знайти $\delta_s = 1/2 \max_{k_{s-1} \leq i \leq k_s} (f_i - y_s(x_i))$, де

$$y_s(x) = f_{k_{s-1}} + \frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}}(x - x_{k_{s-1}}).$$

Крок 4. Перевірити: $k_s = N$? Якщо так, то перейти до кроку 6, якщо ні – до кроку 5.

Крок 5. Збільшити s на одиницю і перейти до кроку 2.

Крок 6. Знайти $\delta(s) = \max_{1 \leq i \leq s} \delta_i$.

Крок 7. Покласти $z_i(x) = y_i(x) + \delta_i, i = \overline{1, s}$.

Крок 8. Покласти $S(x) = \max_{1 \leq i \leq s} z_i(x), x \in [a, b]$ і закінчити обчислення.

Доведено, що алгоритм А дає розв’язок задачі (1) при $F \equiv V_1[a, b]$.

Розглянемо тепер задачу відновлення неперервних опуклих неспадних функцій, тобто задачу (1) при $F \equiv W_1[a, b]$. Розглянемо наступний покроковий

Алгоритм А₁.

Крок 1. Знайти $f_n = \min_{1 \leq i \leq N} f_i$ і зафіксувати n .

Крок 2. Перевірити: $n = 1$? Якщо так, то перейти до кроку 3, якщо ні – до кроку 4.

Крок 3. Виконати кроки 1–8 алгоритму А і закінчити обчислення.

Крок 4. Знайти $\delta_1 = 1/2 \max_{1 \leq i \leq n} (f_i - f_n)$ і покласти $y_1(x) = f_n$.

Крок 5. Перевірити: $n = N$? Якщо так, то покласти $S(x) = y_1(x) + \delta_1$, $x \in [a, b]$ і закінчити обчислення.

Крок 6. Покласти $s = 2$, $k_1 = n$.

Крок 7. Виконати кроки 2–8 алгоритму A і закінчити обчислення.

Доведено, що алгоритм A_1 дає рішення задачі (1) при $F \equiv W_1 [a, b]$.

Розглянемо тепер задачу відновлення S -образних функцій. Будемо казати, що точка x^* є точкою перегину функції $f(x)$, якщо існує число $\delta > 0$ таке, що в усіх точках $x \in (x^* - \delta, x^*)$ функція $f(x)$ опукла вгору (вниз), а у всіх точках $x \in (x^*, x^* + \delta)$ функція $f(x)$ опукла вниз (вгору). Відповідно до цього визначення мінімальне число точок перегину функцій класу $V_2 [a, b]$ не перевищує одиниці.

Побудуємо розв'язок задачі (1) при $F \equiv V_2 [a, b]$. Для визначеності будемо вважати, що функції класу $V_2 [a, b]$ опуклі вниз на $[a, x^*]$ і опуклі вгору на $(x^*, b]$, де x^* – довільна точка $[a, b]$. Розглянемо наступний покроковий

Алгоритм В.

Крок 1. Покласти $s = 1$, $k_0 = 1$, $p = 1$, $n_0 = N$.

Крок 2. Обчислити $\frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}} = \min_{k_{s-1} < i \leq n_{p-1}} \frac{f_i - f_{k_{s-1}}}{x_i - x_{k_{s-1}}}$ і зафіксувати k_s .

Крок 3. Знайти $\delta_s^l = 1/2 \max_{k_{s-1} \leq i \leq k_s} (f_i - y_s^l(x_i))$, де

$$y_s^l(x) = f_{k_{s-1}} + \frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}}(x - x_{k_{s-1}}).$$

Крок 4. Обчислити

$$\frac{f_{n_p} - f_{n_{p-1}}}{x_{n_p} - x_{n_{p-1}}} = \min_{k_{s-1} < i \leq n_{p-1}} \frac{f_i - f_{n_{p-1}}}{x_i - x_{n_{p-1}}}$$
 і зафіксувати n_p .

Крок 5. Знайти $\delta_p^r = 1/2 \max_{n_p \leq i \leq n_{p-1}} (y_p^r(x_i) - f_i)$, де

$$y_p^r(x) = f_{n_{p-1}} + \frac{f_{n_p} - f_{n_{p-1}}}{x_{n_p} - x_{n_{p-1}}}(x - x_{n_{p-1}}).$$

Крок 6. Перевірити: $\delta_s^l < \delta_p^r$? Якщо так, то перейти до кроку 7, якщо ні – до кроку 9.

Крок 7. Обчислити $z_s^l(x) = y_s^l(x) + \delta_s^l$, $S_s^l(x) = \max_{1 \leq i \leq s} z_i^l(x)$.

Крок 8. Покласти $s = s + 1$, $j = 1$ і перейти до кроку 11.

Крок 9. Обчислити $z_p^r(x) = y_p^r(x) - \delta_p^r$, $S_p^r(x) = \min_{1 \leq i \leq p} z_i^r(x)$.

Крок 10. Покласти $p = p + 1$, $j = 0$.

Крок 11. Перейти до кроку 13, якщо $s = 1$ або $p = 1$.

Крок 12. Перевірити: $S_{s-1}^l(x_{k_{s-1}}) > S_{p-1}^r(x_{k_{s-1}})$ і $S_{s-1}^l(x_{n_{p-1}}) > S_{p-1}^r(x_{n_{p-1}})$? Якщо так, то перейти до кроку 15.

Крок 13. Перевірити: $k_{s-1} + 1 < n_{p-1}$? Якщо так, то перейти до кроку 2.

Крок 14. Покласти

$$S(x) = \begin{cases} S_{s-1}^l(x), & \text{если } a \leq x \leq x_{k_{s-1}} \\ g(x), & \text{если } x_{k_{s-1}} \leq x \leq x_{n_{p-1}} \\ S_{p-1}^r(x), & \text{если } x_{n_{p-1}} \leq x \leq b \end{cases}, \text{ де}$$

$$g(x) = g(x, x_{k_{s-1}}, S_{s-1}^l(x_{k_{s-1}}), x_{n_{p-1}}, S_{p-1}^r(x_{n_{p-1}})),$$

якщо $s > 1$ і $p > 1$;

$$g(x) = g(x, x_1, f_1, x_{n_{p-1}}, S_{p-1}^r(x_{n_{p-1}})), \text{ якщо } s = 1;$$

$$g(x) = g(x, x_{k_{s-1}}, S_{s-1}^l(x_{k_{s-1}}), x_N, f_N), \text{ якщо } p = 1;$$

$$g(x) = g(x, u_1, v_1, u_2, v_2) = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}(x - u_1) + v_1 \text{ і закін-$$

чити обчислення.

Крок 15. Перевірити: $s = 2$ або $p = 2$? Якщо так, то покласти $w = x_1 \text{sign}(p - 2) + x_N \text{sign}(s - 2)$ і перейти до кроку 21.

Крок 16. Перевірити: $j = 1$? Якщо так, то перейти до кроку 18.

Крок 17. Визначити w таке, що $S_{p-2}^r(w) = z_{p-1}^r(w)$ і перейти до кроку 19.

Крок 18. Визначити w таке, що $S_{s-2}^l(w) = z_{s-1}^l(w)$.

Крок 19. Перевірити: $S_{s-1}^l(w) \leq S_{p-1}^r(w)$? Якщо так, то перейти до кроку 21.

Крок 20. Покласти $s = s - 1$, якщо $j = 1$ і $p = p - 1$, якщо $j = 0$.

Крок 21. Покласти $S(x) = \begin{cases} S'_{s-1}(x), \text{ якщо } x_1 \leq x \leq x^* \\ S''_{p-1}(x), \text{ якщо } x^* \leq x \leq x_N \end{cases}$,

де $x^* = \min \left\{ x \mid S'_{s-1}(x) = S''_{p-1}(x), \min(w, x_{k_{s-2}}) \leq x \leq x_{n_{p-1}} \right\}$,

якщо $j = 1$;

$x^* = \max \left\{ x \mid S'_{s-1}(x) = S''_{p-1}(x), x_{k_{s-1}} \leq x \leq \max(w, x_{n_{p-2}}) \right\}$,
якщо $j = 0$.

Доведено, що функція $S(x)$, побудована в результаті виконання алгоритму B , є розв'язком задачі (1) при $F \equiv V_2[a, b]$.

Побудуємо тепер розв'язок задачі (1) при $F \equiv W_2[a, b]$. Для визначеності будемо вважати, що функції класу $W_2[a, b]$ неспадні, опуклі вниз на $[a, x^*]$ і опуклі вгору на $[x^*, b]$, де x^* – довільна точка $[a, b]$. Розглянемо наступний покроковий

Алгоритм В₁

Крок 1. Покласти $s = 1, k_0 = 1, p = 1, n_0 = N$.

Крок 2. Перевірити: $s > 1$? Якщо так, то перейти до кроку 6.

Крок 3. Знайти $f_{k_s} = \min_{1 \leq i \leq n_{p-1}} f_i$ і зафіксувати k_s .

Крок 4. Перевірити: $k_s = 1$? Якщо так, то перейти до кроку 6.

Крок 5. Знайти $\delta_1^l = 1/2 \max_{1 \leq i \leq k_s} (f_i - f_{k_s})$, Покласти

$y_1^l(x) = f_{k_s}$ і перейти до кроку 8.

Крок 6. Обчислити $\frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}} = \min_{k_{s-1} < i \leq n_{p-1}} \frac{f_i - f_{k_{s-1}}}{x_i - x_{k_{s-1}}}$

і зафіксувати k_s .

Крок 7. Знайти $\delta_s^l = 1/2 \max_{k_{s-1} \leq j \leq k_s} (f_j - y_1^l(x_j))$, де

$y_s^l(x) = f_{k_{s-1}} + \frac{f_{k_s} - f_{k_{s-1}}}{x_{k_s} - x_{k_{s-1}}} (x - x_{k_{s-1}})$.

Крок 8. Перевірити: $p > 1$? Якщо так, то перейти до кроку 12.

Крок 9. Знайти $f_{n_p} = \max_{k_{s-1} \leq i \leq N} f_i$ і зафіксувати n_p .

Крок 10. Перевірити: $n_p = N$? Якщо так, то перейти до кроку 12.

Крок 11. Знайти $\delta_1^r = 1/2 \max_{n_p \leq i \leq N_s} (f_{n_p} - f_i)$, Поклас-

ти $y_1^r(x) = f_{n_p}$ і перейти до кроку 14.

Крок 12. Обчислити

$\frac{f_{n_p} - f_{n_{p-1}}}{x_{n_p} - x_{n_{p-1}}} = \min_{k_{s-1} \leq i < n_{p-1}} \frac{f_i - f_{n_{p-1}}}{x_i - x_{n_{p-1}}}$ і зафіксувати n_p .

Крок 13. Знайти $\delta_p^r = 1/2 \max_{n_p \leq i \leq n_{p-1}} (y_p^r(x_i) - f_i)$, де

$y_p^r(x) = f_{n_{p-1}} + \frac{f_{n_p} - f_{n_{p-1}}}{x_{n_p} - x_{n_{p-1}}} (x - x_{n_{p-1}})$.

Крок 14. Виконати кроки 6–21 алгоритму B і закінчити обчислення.

Доведено, що функція $S(x)$, побудована в результаті виконання алгоритму B , є розв'язком задачі (1) при $F \equiv W_2[a, b]$.

Висновки

Наведені алгоритми дозволяють не тільки зберегти ізогеометричні властивості відновлюваної функції $f(x)$, але і, як показують результати численних експериментів, досягти досить високої точності відновлення. Тому ці алгоритми можуть бути використані для побудови статистичних кривих зносу.

Список літератури

1. Ковалев А. П. Определение износа при массовой оценке кузнечно-прессовых машин / А. П. Ковалев, О. В. Тевелева, О. К. Шинкевич // Кузнечно-штамповочное производство. 2007. – № 8. – С. 40–47.
2. Практика оценки стоимости машин и оборудования : Учеб. / А. П. Ковалев, А. А. Кушель, И. В. Королев, П. В. Фадеев ; под ред. М. А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2005. – 272 с.
3. Смоляк С. А. Проблемы и парадоксы оценки машин и оборудования. Сюита для оценщиков машин и оборудования / С. А. Смоляк. – М. : РИО МАОК, 2008. – 304 с.
4. Anson Marston. Engineering Valuation and Depreciation / Anson Marston, Robley Winfrey, Jean C. Hempstead. – Iowa State University Press, 1953. – 508 p.

Одержано 14.12.2016

Нечипоренко Н.А., Коротунова Е.В., Мастиновский Ю.В. О построении кривой износа для машин и оборудования

Рассматривается задача построения статистической кривой износа машин и оборудования. Предполагается, что наиболее обобщенное изображение динамики износа дает логистическая кривая. Приводится алгоритм восстановления непрерывной функции, заданной своими приближенными значениями в узлах произвольной фиксированной сетки и имеющей в области определения не более одной точки перегиба. В качестве восстанавливающей принимается функция, построенная на основе метода квазирешений. Приводимые алгоритмы восстановления являются оптимальными по порядку точности на соответствующих классах функций.

Ключевые слова: *функция одной переменной, восстановление, логистическая кривая, кривая износа, оптимальность по точности.*

Nechiporenko N., Korotunova O., Mastinovsky Yu. About the construction of the machinery and equipment deterioration curve

The problem of the depreciation of machinery and equipment statistical curve formation is considered. It is assumed that the logistic curve gives the most generalized depreciation dynamics character. An algorithm for restoring the continuous function given by its approximate values in the nodes of an arbitrary fixed grid and which has no more than one point of inflection in its definition area is provided. A function, built on the basis of quasi-solution method is taken as the recovery. Driven recovery algorithms are optimal by the order of accuracy in the respective classes of functions.

Key words: *function of one variable, restoration, logistic curve, the curve of wear, optimality on accuracy.*
