

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з дисципліни
«Теоретичні основи електротехніки»
для студентів спеціальності 141
«Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка» денної та заочної форм навчання

Частина 2. Комп'ютерний клас:
«Дослідження трифазних кіл та перехідних процесів
в лінійних електричних колах»

2019

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисциплін «Теоретичні основи електротехніки» для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної та заочної форм навчання. Частина 2. Комп'ютерний клас: «Дослідження трифазних кіл та перехідних процесів в лінійних електричних колах». / Укл.: С.М. Тиховод, Г.М. Романіченко, О.Л. Пазюк – Запоріжжя: ЗНТУ, 2019. – 46 с.

Укладачі: С.М. Тиховод, доцент, д. техн. наук,
Г.М. Романіченко, ст. викладач,
О.Л. Пазюк, зав. лабораторією.

Рецензент: В.В. Козлов, доцент, канд. техн. наук.

Відповідальний
за випуск: С.М. Тиховод, доцент, д. техн. наук.

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри ТЗЕ
Протокол № 1
від 22 січня 2019 р.

Рекомендовано до видання НМК
Електротехнічного факультету
Протокол № 6
від 24.01.2019.

ЗМІСТ

Передмова	5
1 Лабораторна робота №5к Дослідження трифазного електричного кола при з'єднанні приймачів зіркою	6
1.1 Мета роботи	6
1.2 Загальні теоретичні відомості	6
1.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи	11
1.4 Контрольні запитання	12
1.5 Матеріали, інструмент, прилади, обладнання	12
1.6 Вказівки з техніки безпеки	12
1.7 Порядок проведення лабораторної роботи	13
1.8 Зміст звіту	14
2 Лабораторна робота №6к Дослідження трифазних електричних кіл за допомогою пакету <i>EWB</i>	15
2.1 Мета роботи	15
2.2 Загальні теоретичні відомості	15
2.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи	17
2.4 Контрольні запитання	17
2.5 Матеріали, інструмент, прилади, обладнання	18
2.6 Вказівки з техніки безпеки	18
2.7 Порядок проведення лабораторної роботи	18
2.8 Зміст звіту	21
3 Лабораторна робота №7к Дослідження перехідних процесів в електричних колах із двома накопичувачами енергії	22
3.1 Мета роботи	22
3.2 Загальні теоретичні відомості	22
3.2.1 Основні поняття	22
3.2.2 Розрахунок електричного кола до комутації	24
3.2.3 Порядок розрахунку кола після комутації	24
3.2.4 Приклад розрахунку перехідного процесу	25
3.2.5 Побудова графіка перехідної величини	30
3.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи	32
3.4 Контрольні запитання	32
3.5 Матеріали, інструмент, прилади, обладнання	32
3.6 Вказівки з техніки безпеки	33
3.7 Порядок проведення лабораторної роботи	33
3.8 Зміст звіту	33

4 Лабораторна робота №8к Дослідження перехідних процесів в електричних колах операторним методом	34
4.1 Мета роботи	34
4.2 Загальні теоретичні відомості	34
4.2.1 Порядок розрахунків операторним методом	34
4.2.2 Приклад розрахунку перехідного процесу операторним методом	35
4.2.3 Розрахунок схеми до комутації	35
4.2.4 Розрахунок схеми після комутації	35
4.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи	38
4.4 Контрольні запитання	38
4.5 Матеріали, інструмент, прилади, обладнання	38
4.6 Вказівки з техніки безпеки	38
4.7 Порядок проведення лабораторної роботи	38
4.8 Зміст звіту	38
5 Лабораторна робота №9к Дослідження перехідних процесів методом змінних стану	39
5.1 Мета роботи	39
5.2 Загальні теоретичні відомості	39
5.2.1 Основа чисельних методів	39
5.2.2 Розв'язання задачі Коші для <i>ЗДР</i> першого порядку	40
5.2.3 Метод Ейлера для розв'язання <i>ЗДР</i> першого порядку ...	41
5.2.4 Метод змінних стану	41
5.2.5 Порядок розрахунків методом змінних стану	43
5.2.6 Приклад розрахунку методом змінних стану	43
5.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи	46
5.4 Контрольні запитання	46
5.5 Матеріали, інструмент, прилади, обладнання	46
5.6 Вказівки з техніки безпеки	46
5.7 Порядок проведення лабораторної роботи	46
5.8 Зміст звіту	46
6 Рекомендована література	46

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки призначено для кращої підготовки студентів та раціонального використання часу, що відведено для виконання лабораторних робіт у комп'ютерному класі, поліпшенню впровадження комп'ютерів при виконанні й оформленні звітів за допомогою комп'ютерних пакетів *Mathcad* і *Electronics Workbench*.

Для виконання робіт необхідно мати деякі незначні навички роботи з системами *Mathcad* і *Electronics Workbench*, поступово ці навички будуть розширюватись, оскільки вказівки мають відповідні пояснення.

Методичні вказівки містять п'ять лабораторних робіт, короткі теоретичні поняття, перелік основних методів розрахунку, список рекомендованої літератури, а також завдання до лабораторних робіт і порядок їх виконання.

Кожна лабораторна робота передбачає:

- попереднє вивчення теоретичного матеріалу;
- проведення підготовчої роботи у вигляді зображеної робочої схеми і її вихідних даних, складеної системи рівнянь або алгоритму розв'язування схеми кола в загальному вигляді;
- проведення контролю підготовленості студента до її виконання;
- власне проведення роботи у комп'ютерному класі відповідно до завдання. Після проведення роботи оформлюється звіт у вигляді комп'ютерного файлу та його захист перед викладачем.

Вихідні дані до лабораторної роботи для кожного студента задає викладач, що проводить лабораторні роботи.

1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5к

Дослідження трифазного електричного кола при з'єднанні приймачів зіркою

1.1 Мета роботи

Навчитися аналізувати режими роботи трифазного електричного кола різними методами за допомогою прикладного комп'ютерного пакету "Mathcad".

1.2 Загальні теоретичні відомості

1.2.1 Основні поняття.

Сучасний стан електроенергетики є таким, що для виробництва, транспортування і споживання електричної енергії здійснюється майже повністю за допомогою трифазних енергетичних систем. Це пов'язано із порівняно найкращими для сьогодення техніко-економічними показниками їхньої роботи.

Трифазні джерела електричної енергії – це електричні машини із трьома генераторними обмотками, в яких наводиться *е.р.с.* однакової частоти і амплітуди, і ці *е.р.с.* мають фазний зсув поміж собою в 120° . Електричні кола із такими джерелами називають *трифазними*. Кожна окрема локальна частина ділянки *джерело-споживач* отримало назву «*фаза*». Наприклад, одна обмотка багатofазного джерела має назву «*фазна обмотка генератора*» або просто: «*фаза генератора*». Початок фазних обмоток генератора позначають *A*; *B*; *C*; а їхні кінцівки відповідно: *X*; *Y*; *Z*. Якщо ці кінцівки з'єднано в один вузол, тоді його позначають літерою *N* (нейтральний вузол).

Перша (або *основна*) фаза позначається літерою *A*. Друга фаза – фаза *B* – відстає в часі від фази *A* на кут 120° . Третя фаза – фаза *C* – відстає від фази *B* на 120° , або частіше кажуть, що фаза *C* випереджає фазу *A* на 120° . Отже, фазні *е.р.с.* джерела живлення в комплексній формі записують таким чином:

$$\begin{cases} \underline{E}_A = U_\phi \cdot e^{j0^\circ} = U_\phi ; \\ \underline{E}_B = U_\phi \cdot e^{-j120^\circ} = U_\phi \cdot (-0.5 - j \cdot 0.866) ; \\ \underline{E}_C = U_\phi \cdot e^{j120^\circ} = U_\phi \cdot (-0.5 + j \cdot 0.866) , \end{cases} \quad (1.1)$$

де: U_ϕ – модуль фазної напруги джерела *е.р.с.*;

$\underline{E}_A$; $\underline{E}_B$; $\underline{E}_C$ – комплексні *е.р.с.* відповідних фаз генератора.

На рисунку 1.1 подана схема трифазного кола, яке з'єднано «чотирьох провідною зіркою». Перші три проводи (**Aa**; **Bb**; **Cc**) називають *лінійними*, а четвертий (**nN**) – *нейтральним*. Відповідно, струми, що проходять по лініях (I_A ; I_B ; I_C) називають *лінійними струмами*, а струм в нейтральному проводі (I_N) – *струм в нейтралі*. На схемах напрям лінійних струмів: від генератора – до споживача. Струм в нейтралі навпаки: від споживача – до точки *N* генератора.

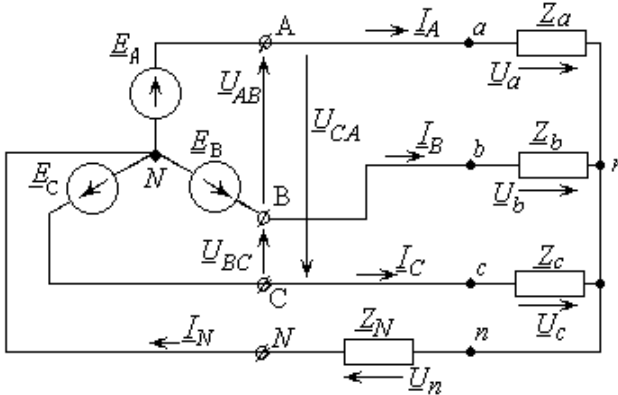


Рисунок 1.1 – Схема трифазного кола, з'єданого «чотирьох провідною зіркою»

Напругу між лінійними проводами називають *лінійною напругою* трифазної мережі. Їх позначають двома індексами. В комплексній формі запису:

$$\begin{cases} \underline{U}_{AB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B = U_\phi \cdot (e^{j0^\circ} - e^{-j120^\circ}) = U_\phi \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j30^\circ}; \\ \underline{U}_{BC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = U_\phi \cdot (e^{-j120^\circ} - e^{j120^\circ}) = U_\phi \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j90^\circ}; \\ \underline{U}_{CA} = \underline{E}_C - \underline{E}_A = U_\phi \cdot (e^{j120^\circ} - e^{j0^\circ}) = U_\phi \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j150^\circ}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Отже, лінійна напруга по модулю в $\sqrt{3}$ разів більша за фазну.

Комплексний опір споживачів позначають зазвичай: $\underline{Z}_a$; $\underline{Z}_b$; $\underline{Z}_c$.

Повний опір фази трифазного кола складається зі суми всіх опорів, які розташовані на всій ділянці генератор – лінія – споживач (наприклад, для першої фази: від вузла *N*, через т. *A* і до вузла *n*):

$$\begin{cases} \underline{Z}_A = \underline{Z}_{\Gamma A} + \underline{Z}_{\text{л} A} + \underline{Z}_a; \\ \underline{Z}_B = \underline{Z}_{\Gamma B} + \underline{Z}_{\text{л} B} + \underline{Z}_b; \\ \underline{Z}_C = \underline{Z}_{\Gamma C} + \underline{Z}_{\text{л} C} + \underline{Z}_c. \end{cases} \quad (1.3)$$

де: $\underline{Z}_r$ - комплексний опір відповідної фази трифазного генератора;
 $\underline{Z}_l$ - комплексний опір відповідної лінії трифазної мережі;
 $\underline{Z}_\phi$ - комплексний опір відповідної фази трифазного споживача.

Опір фаз генератора зазвичай є незначним у порівнянні із опорами і споживача і лінії. В такому випадку в розрахунках ним можна знехтувати. Іноді так можна зробити і з опором лінійних проводів, якщо їхній опір значно поступається опорі споживача.

Опір нейтрального проводу зазвичай чисто активний по своєму характеру, на відміну від всіх інших опорів в трифазній мережі. При несиметричних режимах роботи величина $\underline{Z}_N$ значним чином впливає на розподіл напруги і струмів кожної ділянки електричного кола.

Напруги кожної фази споживача ($\underline{U}_a$; $\underline{U}_b$; $\underline{U}_c$) позначено на Рис.1.1. Їхні величини залежать від умов задачі і знаходять їх під час розрахунку (за другим законом Кірхгофа, або за законом Ома).

1.2.2 Розрахунок трифазних кіл методом двох вузлів

Для розрахунку струмів і напруги в простих трифазних схемах зазвичай застосовують метод *двох вузлів* (частинний випадок методу вузлових потенціалів). Якщо задано схему з'єднання, величину напруги генератора та опір всіх ділянок наданого кола, тоді спочатку треба визначити так звану *напругу зміщення нейтралі*.

Напруга зміщення нейтралі – це різниця потенціалів між нейтральними вузлами споживача і генератора:

$$\underline{U}_N = \underline{\varphi}_n - \underline{\varphi}_N = \frac{\frac{E_A}{\underline{Z}_A} + \frac{E_B}{\underline{Z}_B} + \frac{E_C}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_N}} . \quad (1.4)$$

При симетричному навантаженні ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$), або якщо опір нейтрального проводу дорівнює нулеві ($\underline{Z}_N = 0$) напруга зміщення нейтралі відсутня, її не треба обчислювати ($\underline{U}_N = 0$).

В усіх інших випадках розрахунок по формулі (1.4) є обов'язковим.

Далі знаходимо струми в лініях за законом Ома:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_N}{\underline{Z}_A} ; \\ \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_N}{\underline{Z}_B} ; \\ \underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_N}{\underline{Z}_C} ; \end{array} \right. \quad (1.5)$$

і струм в нейтралі або за законом Ома

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_N}{\underline{Z}_N} , \quad (1.6)$$

або за першим законом Кірхгофа: $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$. (1.7)

Падіння напруги на фазах споживача знайдемо за законом Ома:

$$\underline{U}_a = \underline{Z}_a \cdot \underline{I}_A ; \quad \underline{U}_b = \underline{Z}_b \cdot \underline{I}_B ; \quad \underline{U}_c = \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_C . \quad (1.8)$$

1.2.3 Розрахунок трифазних кіл методом рівнянь Кірхгофа

Для розрахунку трифазних кіл можна застосовувати метод рівнянь Кірхгофа. Наприклад, для чотирьох провідної «зірки» треба скласти чотири рівняння: одне рівняння – за першим законом Кірхгофа і три – за другим законом Кірхгофа.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C - \underline{I}_N = 0 \\ \underline{Z}_A \cdot \underline{I}_A + \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N = \underline{E}_A \\ \underline{Z}_B \cdot \underline{I}_B + \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N = \underline{E}_B \\ \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_C + \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N = \underline{E}_C \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

Розв'язок такої системи можна провести за допомогою математичного пакету *Mathcad* в такій послідовності:

- спочатку введемо до робочого поля уявну одиницю $j := \sqrt{-1}$;
- нижню границю індексу задаємо зміною значення системної змінної з 0 на 1 (або ORIGIN:=1 , або через верхнє меню Math – Options...– Array Origin 1);
- далі вводимо вихідні параметри схеми (без одиниць виміру):
величина фазної *e.p.c.* $E_f := U_L / \sqrt{3}$;

- комплексна форма кожної *e.p.c.* трифазного джерела: $E_a := E_f \cdot \exp(0)$;
 $E_b := E_a \cdot \exp(-120 \cdot \text{deg})$; $E_c := E_a \cdot \exp(120 \cdot \text{deg})$;
- величини опорів кожної ділянки наданого кола;
- починаємо розрахунок зі знаходження повного навантаження на кожну фазу генератора за формулами (1.3) ;
- далі побудуємо у робочому полі пакета *Mathcad* матрицю коефіцієнтів (Δ) при невідомих струмах та вектор-стовпець відомих параметрів (D) (вектор впливу).

Для побудови матриць та векторів можна скористатись операцією *Matrix* пункт *Insert* основного меню, або натиснути на піктограму із зображенням шаблону матриць на математичній панелі (*Math Palette*), або комбінацією клавіш *Ctrl+M*. Це призведе до появи діалогового вікна, де треба вказати кількість строк (*Rows:=4*) та стовпців (*Columns:=4*) матриці (якщо обираємо *Columns:=1* – отримаємо вектор–стовпець).

$$\Delta := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ Z_A & 0 & 0 & Z_n \\ 0 & Z_B & 0 & Z_n \\ 0 & 0 & Z_C & Z_n \end{bmatrix} ; \quad D := \begin{bmatrix} 0 \\ E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} .$$

Розв'язок отримаємо за матричною формулою:

$$I := \Delta^{-1} \cdot D , \quad (1.10)$$

або застосуємо вбудовану функцію

$$I := \text{lsolve}(\Delta, D) . \quad (1.11)$$

Результат (струми в *Амперах*) отримаємо в вигляді вектор-стовпця [I]:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_N \end{bmatrix}$$

Тут результат I_1 відповідає струму першої фази I_A , I_2 – струму другої фази I_B , I_3 – струму третьої фази I_C , а остання строчка відповіді I_4 – струму нейтрального проводу I_N .

1.2.4 Баланс потужності в трифазному колі

Для перевірки вірності результатів розв'язку складають баланс потужності:

– потужність споживача є сумою потужності всіх опорів кола

$$S2 := Z_A(|I_1|)^2 + Z_B(|I_2|)^2 + Z_C(|I_3|)^2 + Z_n(|I_4|)^2 ; \quad (1.12)$$

– потужність джерела

$$S1 := Ea \cdot \bar{I}_1 + Eb \cdot \bar{I}_2 + Ec \cdot \bar{I}_3 , \quad (1.13)$$

де $\bar{I}_1$; $\bar{I}_2$; $\bar{I}_3$, – спряжені комплекси відповідних струмів.

В середовищі *Mathcad* їх набирають за допомогою клавіші .

Баланс активних та реактивних потужностей повинен виконуватись: $S1 \approx S2$. Похибка – не більше 1%.

1.2.5 Побудова векторної діаграми струмів і напруги

Ще одним засобом перевірки вірності результатів розв'язку є *векторна діаграма* струмів та напруги. Її будують на одній комплексній площині (осі: $+1$; $+j$) із обов'язковим дотриманням масштабів для струмів (m_i) і для напруги (m_u).

1.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи

1.3.1 Вивчити особливості роботи і методи розрахунку трифазних електричних кіл [1-3], конспектом лекцій та п. 1.2 наданих методичних вказівок.

1.3.2 Завчасно підготувати бланк лабораторної роботи, куди включити титульний лист, мету роботи, схему трифазного кола, параметри елементів (див. Додаток А).

1.3.3 Занотувати в комплексній формі фазні *e.p.c.* джерела живлення і опори ділянок схеми.

1.3.4 Записати алгоритм розрахунку трифазного електричного кола методом двох вузлів.

1.3.5 Скласти рівняння за законами Кірхгофа та записати матриці для обраної схеми кола.

1.3.6 Скласти баланс потужності для трифазного кола в загальному вигляді.

1.3.7 Побудувати за результатами розрахунків векторну діаграму струмів і напруги для трифазного кола.

1.4 Контрольні запитання

1.4.1 Назвіть схеми з'єднання споживачів в трифазних колах.

1.4.2 Як взаємно пов'язані фазні напруги із лінійними в трифазних джерелах *e.p.c.*?

1.4.3 Покажіть на схемі трифазного кола лінії, фази, нейтральний провід. В якому співвідношенні поміж собою знаходяться струми, що походять по цих проводах схеми при симетричному і при несиметричному навантаженні?

1.4.4 Поясніть, в якому випадку треба знаходити напругу зміщення нейтралі. Як виглядає формула для її знаходження?

1.4.5 Скласти рівняння за методом законів Кірхгофа для трифазного кола, якщо в схемі є два споживача енергії (один з них – зірка, другий – трикутник).

1.4.6 Як взаємно пов'язані фазні струми із струмами лінійними в трифазних колах, які з'єднано в «трикутник»?

1.4.7 Як змінюється потужність, що споживає симетричне навантаження, після переключення його з «зірки» на «трикутник»?

1.4.8 Які методи застосовують для розрахунку трифазних кіл? Які при цьому застосовують засоби перевірки вірності розв'язку задач?

1.5 Матеріали, інструмент, прилади, обладнання

Для виконання лабораторної роботи необхідно мати комп'ютер зі встановленим пакетом *Mathcad*.

1.6 Вказівки з техніки безпеки

Перед виконанням лабораторних робіт необхідно ознайомитись із правилами безпечної роботи у комп'ютерному класі та поставити свій підпис у спеціальному журналі.

Суворо дотримуватись Правил техніки безпеки. Не починати роботу на комп'ютері без дозволу викладача. Не відкривати «Папки» інших студентів, тим паче не видаляти їх.

Періодично (через 5-15 хвилин) зберігати результати роботи в свою «Папку», яка повинна знаходитись на «Робочому столі» ЕОМ. За п'ять хвилин до закінчення занять обов'язково зробити збереження своїх результатів в пам'ять ЕОМ. Результати розрахунків записати в бланк лабораторної роботи, закрити математичний пакет *Mathcad*.

1.7 Порядок проведення лабораторної роботи

1.7.1 Спочатку на “Робочому столі” комп’ютера необхідно створити свою “Папку”, яку назвати за прізвищем і номером групи.

1.7.2 Увійти в пакет *Mathcad* звичайним чином: “Пуск – Програми – Math Soft Apps – *Mathcad Professional*”.

1.7.3 Відкрити текстове поле (**Shift**+” , або через верхнє меню: **Вставка** – **Text Region**”), перейти на українську мову та зробити запис заголовка: Лабораторна робота №5к "Дослідження трифазного електричного кола при з’єднанні приймачів чотирьох провідною зіркою". Якщо шрифт, що встановлено, не має слов’янських літер, тоді треба такий підключити. Рекомендована послідовність така:

- маніпулятором ”миша” (або комбінацією клавіш **Sift** + **←**) виділити кілька символів *текстового поля*;
- увійти у верхнє меню **Формат** – **Стиль**. З’явиться додаткове вікно („**Стили текста**”);
- обрати опцію зміни стилю („**Изменить**”) – з’явиться нове додаткове вікно („**Определение стиля**”);
- натиснути правою кнопкою маніпулятора на клавішу вікна “Font” („Шрифт”) – з’явиться нове вікно („Формат текста”);
- обрати бажаний *однобайтовий* шрифт (наприклад MS Sans Serif або MS Serif), його стиль, розмір, ефекти;
- Підтвердити обрані зміни (ОК – ОК – „Закриць”). Вийти у робоче поле; перейти на англійську мову.

1.7.4 Присвоїти наданим параметрам електричного кола числові значення. Імена параметрів кола набираємо в *робочому полі Mathcad*, а їхні величини – через знак *присвоєння* (:=).

1.7.5 Порядковий номер елемента матриці називають *індексом*. Нижню границю індексу задаємо змінною системної змінної **ORIGIN:=1** (або через верхнє меню *Math* – *Options*– *Array Origin 1*).

1.7.6 Слід звернути увагу на можливі варіанти використання індексів, які пропонує до Ваших послуг пакет *Mathcad*.

По-перше, це – *цифровий індекс*, який можна присвоювати будь-якій змінній, натиснувши клавішу  , або після натискання на «Панелі інструментов» – «Математика», розділ (іконка) «Матрицы» – мнемонічного зображення X_n . Цей індекс вказує на *номер осередку пам’яті* ЕОМ, який зарезервовано за цією змінною.

По-друге, якщо є бажання застосувати букви в індексах, тоді Ви маєте дві можливості. Одна з них полягає в тому, щоб перейти до *цифрового індексу*, який будете зображувати у вигляді букв. Для цього спочатку буквам індексу треба присвоїти відповідну цифру (наприклад: $b:=2$; $c:=3$ і т.д.), а надалі цей цифровий індекс можна застосовувати чи то у вигляді букв, або у вигляді цифр.

А третя можливість полягає в тому, щоб *частку імені* змінної застосувати у вигляді індексу. Для цього треба після імені натиснути



клавішу після якої ввести бажане буквено-цифрове ім'я індексу.

Різниця між цими двома формами запису індексів принципова. Тому й на екрані ці індекси мають різні місця розташування.

1.7.7 Набрати матриці для Вашого трифазного кола Δ та D . Для побудови матриць та векторів можна скористуватись операцією **Matrix** пункт **Insert** основного меню, або натиснути комбінацію клавіш $Ctrl+M$. Це призведе до появи діалогового вікна, де треба вказати кількість строк та стовпців (наприклад $Columns:=4$) Вашої матриці (якщо обираємо $Columns:=1$ – отримаємо вектор-стовпець).

1.7.8 Набрати в робочому полі матричну формулу $I:=\Delta^{-1} \cdot D$.

1.7.9 Результат отримаємо у вигляді вектор-стовпця $I = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$.

1.7.10 Кожну розрахункову дію супроводжувати текстовими поясненнями. Записати результати розрахунків.

1.7.11 Зробити перевірку (за формулами 1.14 та 1.15) балансу потужності.

1.7.12 Зберегти результати розрахунків, показати викладачеві та закрити *Mathcad*. Завершити сеанс роботи на комп'ютері.

1.8 Зміст звіту

У підготовлений бланк лабораторної роботи записати результати розрахунків. Побудувати сумісні векторні діаграми струмів і напруги. По роботі зробити висновки.

2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6к

Дослідження трифазних електричних кіл за допомогою пакету *EWB*

2.1 Мета роботи

Навчитися аналізувати електричні кола за допомогою прикладної комп'ютерної системи моделювання та аналізу електронних схем *Electronics Workbench*.

2.2 Загальні теоретичні відомості

Комп'ютерна система моделювання та аналізу електронних та електричних схем *Electronics Workbench* (далі просто - пакет *EWB*) дозволяє моделювати аналогові, цифрові та цифро-аналогові електронні схеми, аналізувати їх роботу при зміні будь-яких параметрів. Пакет має простий та зручний інтерфейс, велику бібліотеку поширених відомих електронних компонентів та приладів, зручну та розгалужену довідкову систему.

Інтерфейс пакета *EWB* складається з таких частин:

- головне меню;
- панель інструментів;
- панель компонентів;
- поле компонентів;
- вмикач (**O/I**), який підключає у роботу складену схему (розташовано у правому верхньому куті панелі компонентів.);
- клавіша **F9** – на клавіатурі (пауза/ кінець паузи в роботі).

Бібліотеки елементів мають в своєму складі широкий вибір пасивних R, L, C – елементів, транзисторів, тригерів, джерел енергії, логічні, цифрові, гібридні елементи, спеціальні комбіновані схеми та інше.

Бібліотека індикаторів для вимірювань має у своєму складі амперметр, вольтметр, мультиметр, осцилограф, графічний плоттер, функціональний генератор слів, логічний аналізатор та логічний перетворювач.

Прилади для проведення вимірів розташовано в полі індикаторів (Indicators), яке відображене відповідним значком. В кожній схемі можна застосувати кілька приладів одночасно. Це дозволяє знаходити струми та напруги (потенціали) на всіх ділянках схеми. Сторона прямокутника амперметра або вольтметра, яку зображено **жирною**

лінією відповідає клемі "мінус" цього вимірювального приладу.

Вимірювальні прилади електромагнітної системи вказують на *діюче значення* струмів та напруги.

Осцилограф (Oscilloscope) призначено для досліджень *миттєвих значень* струму (напруги), форм кривих електричних величин. Осцилографом вимірюють також *максимальні значення* струмів та напруги, кути зсуву фаз між ними та ін.

Всі прилади в цій роботі треба перевести з режиму вимірювання **DC** (постійний струм) в режим **AC** (асинхронний або змінний).

Мультиметр – універсальний прилад для вимірювань струму, напруги, опору – розташовано на панелі **Instruments** першим зліва. На його застосування є деякі обмеження. В схемі можна використати *тільки один* мультиметр. До того ж один з вузлів схеми треба обов'язково підключити до "землі" (**Ground** із бібліотеки **Sources**).

Джерела енергії усіх видів розташовано у бібліотеці *джерел* (**Sources**), перші три з яких (**Ground, Battery, DC Current Source**) застосовують при аналізі кіл постійного струму. Для аналізу кіл змінного струму застосовують відповідні джерела (**AC Voltage Source; AC Current Source**). Всі джерела в пакеті **EWB** – це ідеальні джерела енергії.

Внутрішній опір ідеального джерела *е.р.с.* (**AC Voltage Source**) дорівнює нулеві, тому напруга на його виході не залежить від струму, що тече через нього. Короткою жирною рисою на *е.р.с.* позначається затискач, який має **від'ємний** потенціал відносно іншого затискача.

Ідеальне *джерело струму* (**AC Current Sources**) має нескінченно великий внутрішній опір. Стрілка вказує напрям протікання виробленого струму.

Споживачі електричної енергії розташовано на *панелі компонентів* (**Basic**). Для простих схем достатньо застосувати п'ять зі запропонованих компонентів (**Connector, Resistor, Potentiometer, Capacitor, Inductor**). Вузол (**Connector**) застосовують для з'єднання між проводами та створення контрольних точок, куди можна підключати вимірювальні прилади. До кожного вузла можна підключити не більше ніж 4 провідника.

Компонент заземлення (Ground) має нульовий потенціал і таким чином забезпечує вихідну точку для відліку потенціалів. Заземлення обов'язково (!) необхідно застосувати для моделювання схем із операційними підсилювачами, трансформаторами, мультиметром, керованими джерелами енергії, осцилографом.

Аналіз роботи електронних схем в пакеті *EWB* складається із таких операцій:

- вибір елементів та приладів із відповідних бібліотек;
- переміщення маніпулятором "миша" обраних елементів або приладів у належне місце на робочому полі (вставка, видалення, поворот на кут 90° для зручного їх розташування);
- з'єднання всіх елементів у робочу схему;
- виділення контурів (або фаз) різними кольорами для кращого сприйняття схеми;
- зміна параметрів кожного елементу (приладу) у широкому діапазоні;
- отримання результатів аналізу та їх інтерпретація.

2.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи

2.3.1 Вивчити особливості роботи і методи розрахунку трифазних електричних кіл [1-3], конспектом лекцій та пунктами 1.2 і 2.2 наданих методичних вказівок.

2.3.2 Завчасно підготувати бланк для проведення лабораторної роботи, куди включити титульний лист, мету роботи, схему (Рис.2.1), параметри R , L та C - елементів схеми (із Табл. 2.1, або за вказівкою викладача, що проводить заняття), Таблицю 2.2.

2.3.3 Занотувати в комплексній формі фазні *e.p.c.* джерела живлення і опори ділянок схеми.

2.4 Контрольні запитання

2.4.1 Яке навантаження вважається симетричним, а яке несиметричним? Яке трифазне джерело називають симетричним?

2.4.2 Чому не можна робити дослідження короткого замикання фази при включеному нульовому проводі?

2.4.3 Чи можливо зміщення напруги нейтральної точки навантаження при включеному нульовому проводі, якщо його опір дорівнює нулю?

2.4.4 Що таке напруга зміщення нейтралі? Коли вона виникає?

2.5 Матеріали, інструмент, прилади, обладнання

Для виконання лабораторної роботи необхідно мати комп'ютер із встановленим пакетом “*Electronics Workbench*”.

2.6 Вказівки з техніки безпеки

Суворо виконувати правила техніки безпеки. Не починати роботу на комп'ютері без дозволу викладача. Не відкривати “Папки” інших студентів, не вносити до них змін, не видаляти їх.

Періодично через 10-15 хвилин зберігати результати роботи. За п'ять хвилин до закінчення занять обов'язково зробити збереження своїх результатів, результати записати в бланк лабораторної роботи та закрити пакет *EWB*.

2.7 Порядок проведення лабораторної роботи

2.7.1 Для роботи у середовищі *Electronics Workbench* запустимо його звичайним шляхом (Пуск – Программи - *Electronics Workbench*). На екрані монітора з'явиться оболонка інтерфейсу *EWB* – можна починати роботу.

Стрілкою маніпулятора ”миша” на панелі компонентів обираємо необхідне поле, натискаємо ліву кнопку – входимо у відповідне *поле компонентів*. Обираємо необхідний елемент (прилад), утримуючи *ліву кнопку* маніпулятора перемістимо цей елемент на робоче поле.

Правою кнопкою маніпулятора відкриємо додаткове вікно зі властивостями елементу (*Label, Value, Fault, Display, Analysis Setup*), які можна заповнити у разі потреби. Наприклад, для *приладів обов'язково* треба змінити компонент *DC* на *AC* у властивостях *Value*.

З'єднаємо всі елементи та прилади у робочу схему (Приклад схеми наведено на Рис. 2.1).

В роботі проводиться дослідження кола, схема якого показана на рисунку 2.1. Живлення кола здійснюється від трьох джерел синусоїдальної напруги частотою 50 Гц. Ці джерела мають однакову амплітуду, а їхні фази зрушені поміж собою на 120° так, що утворюють симетричну систему *прямої послідовності*. Значення *е.р.с.* і параметрів навантаження для кожного студента вказує викладач, який проводить заняття (або взяти з таблиці 2.1).

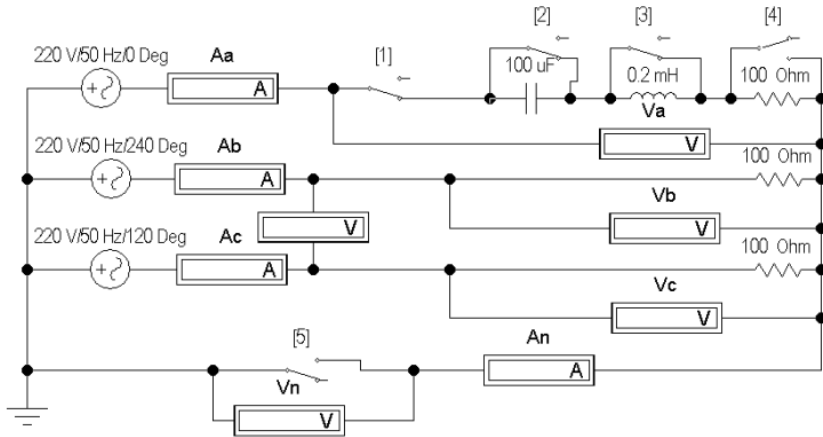


Рисунок 2.1 – Схема трифазного кола в середовищі EWB

Таблиця 2.1 – Вихідні дані для розрахунку трифазного кола

N ₂	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E (В)	380	220	127	380	220	660	1140	220	127	380
R (Ом)	200	150	100	250	200	50	300	250	200	150
L (Гн)	0,64	0,48	0,32	0,8	0,64	0,159	0,953	0,8	0,64	0,48
C (мкФ)	16	21,2	31,8	12,7	16	63,7	10,6	12,7	16	21,2

За допомогою ключів K_1 – K_4 , номери керуючих клавiш яких відповідають їх iндексам (на схемі вказані в квадратних дужках), можна змiнювати характер навантаження фази A . Ключ K_5 застосовують для того, щоб пiдключати або вiдключати нульовий провiд.

Для змiни величини активного опору фази A слiд пiсля подвійного клацання лiвою кнопкою мишi, коли курсор знаходиться на символі цього опору в схемі, удвічі зменшити або збільшити значення опору в порiвнянні з табличним.

Вольтметр V вимiрює *лiнійну* напругу, вольтметр V_N – напругу змiщення нейтралi. Решта вольтметрiв (V_a ; V_b ; V_c) вимiрюють фазні напруги на навантаженні.

Амперметр A_N – показує струм в нульовому провiдi, решта амперметрiв – лiнійні струми.

2.7.2 Зiбрати схему, показану на рис. 2.1, i встановити її параметри у вiдповiдностi зi своїм варіантом.

2.7.3 Для моделювання роботи електричного кола правою кнопкою "миша" натиснемо на вмикач (О/І), який підключає в роботу складену схему (його розташовано у правому верхньому куті панелі компонентів). На приладах побачимо діючі значення та одиниці вимірювання електричних величин. Після будь-яких змін у схемі показання приладів треба поновити, натиснувши на вмикач (О/І).

Встановити симетричний режим (замкнуті ключі K_1 - K_3 , розімкнуті K_4), пересвідчитись по показаннях приладів. Результати вимірювань занести у верхній рядок таблиці 2.2.

2.7.4 Дослідити роботу чотирьох провідної схеми (з нульовим проводом – K_5 замкнути) і трьох провідної схеми (без нульового проводу – K_5 розімкнути) в наступних режимах:

- а) зменшення активного навантаження в фазі, для чого опір у фазі A слід збільшити вдвічі порівняно з вихідними значенням;
- б) збільшення активного навантаження в фазі A , для чого опір слід зменшити вдвічі порівняно з його вихідними значенням;
- в) відключення навантаження (обрив фази) (розімкнути ключ K_1);
- г) включення індуктивності в фазу A (при замкнутих ключах K_1 , K_2 , K_4 , розімкнути ключ K_3);
- д) включення ємності в фазу A (при замкнутих ключах K_1 , K_3 , K_4 , розімкнути ключ K_2).

2.7.5 Зняти показання приладів в режимі короткого замикання фази A при розімкнутому нульовому проводі, для чого необхідно замкнути ключі K_1 – K_4 і розімкнути ключ K_5 .

Результати всіх вимірювань (пп. 2.7.3... 2.7.5) занести в табл. 2.2

2.7.6 Побудувати топографічні діаграми напруги, суміщені з векторними діаграмами струмів **для кожного режиму** із обов'язковим дотримуванням масштабів.

Вказівка. Побудова кожної діаграми слід починати з незмінного для всіх діаграм рівностороннього трикутника лінійної напруги. Положення нейтральної точки навантаження на діаграмах визначається за допомогою методу зарубок циркулем та лінійкою.

2.7.7 Визначити струм в нейтральному проводі I_N з векторних діаграм для чотирьох провідного кола і напругу зміщення нейтралі U_N з діаграм для трьох провідного кола. Результати занести в табл. 2.2

2.7.8 Проаналізувати діаграми і зробити висновки по роботі.

2.8 Зміст звіту

У підготовлений бланк лабораторної роботи записати результати вимірів в пакеті *EWB* до таблиці 2.2. Побудувати сумісні векторні діаграми струмів і напруги для кожного режиму роботи.

Побудувати графіки зміни діючих значень U_a та U_N в залежності від діючих значень струму фази A (I_A) при зміні її активного навантаження від холостого ходу до короткого замикання.

По роботі зробити висновки.

Таблиця 2.2 – Результати електронного моделювання роботи трифазного кола, з'єднаного зіркою

Показання приладів								Із діаграми		Характер наванта- ження фази	Примітка
U_a	U_b	U_c	I_A	I_B	I_C	I_N	U_N	I_N	U_N		
В	В	В	А	А	А	А	В	А	В		
						0	0				Симетричний режим
							0			а)	Схема з нульовим проводом
							0			б)	
							0			в)	
							0			г)	
							0			д)	
						0				а)	Схема без нульового проводу
						0				б)	
						0				в)	
						0				г)	
						0				д)	
						0				к.з.	

3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7к

Дослідження перехідних процесів в електричних колах із двома накопичувачами енергії

3.1 Мета роботи

Набуття навичок у застосуванні пакету *Mathcad* при розрахунках перехідних процесів в лінійних електричних колах класичним методом.

3.2 Загальні теоретичні відомості

3.2.1 Основні поняття

Перехідним процесом називають процес переходу електричного кола від одного енергетичного стану до іншого при стрибкоподібних змінах (при *комутації*) будь-яких параметрів кола. Перехідні процеси виникають в колах із накопичувачами електричної енергії (L ; C) при наявності комутації.

Вивчення таких процесів дуже важливо, оскільки воно надає можливість з'ясувати протікання реальних фізичних процесів в електричних колах при будь-якій зміні його параметрів, виявити ступінь перевищення напруги та струмів на окремих ділянках кола, що можуть бути небезпечними для роботи електричного обладнання.

Задача аналізу перехідних процесів у загальному випадку полягає в знаходженні значень струмів і напруги в усіх (або в деяких) частинах електричних кола *в будь-який довільний момент часу після комутації*. Отже, результатом розв'язку буде аналітична залежність електричної величини від часу:

$$i = f(t) ; \quad u = f(t) .$$

Фактично – це задача про розв'язок інтегрально-диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа, які складено для схеми, що виникла після комутації. Рівняння будуть інтегрально-диференціальними, оскільки напруга на індуктивності – похідна:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} , \quad (3.1)$$

а напруга на ємності змінюється в часі за інтегральним законом:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C \cdot dt . \quad (3.2)$$

Розв'язок таких рівнянь проводять різними методами, серед яких найбільш поширеними є:

- класичний;
- операторний;
- інтеграл Дюамеля; чисельні методи; частотний і т. далі.

Результат отримаємо у вигляді суми примушеної і вільної складових:

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{в}}(t) ; \quad u(t) = u_{\text{пр}}(t) + u_{\text{в}}(t) , \quad (3.3)$$

де: $i(t)$; $u(t)$ – перехідні (повні) струм, напруга;

$i_{\text{пр}}(t)$; $u_{\text{пр}}(t)$ – примушені складові струму і напруги;

$i_{\text{в}}(t)$; $u_{\text{в}}(t)$ – вільні складові струму і напруги.

Примушена складова — це *частинний* розв'язок *неоднорідного* диференційного рівняння. Примушена складова — це процес в усталеному режимі, який буде після закінчення перехідного процесу.

Вільна складова — це *загальний* розв'язок *однорідного* диференційного рівняння, який має вигляд:

$$i_{\text{в}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} ; \quad u_{\text{в}} = \sum_{k=1}^n B_k e^{p_k t} , \quad (3.4)$$

де: A , B — сталі інтегрування, які розраховують, використовуючи початкові умови;

p_k — корені характеристичного рівняння k -го порядку.

Якщо в схемі один накопичувач енергії (або ємність C , або індуктивність L), тоді це кола першого порядку. Якщо схема має два накопичувачі (L ; C) — тоді це кола другого порядку і так далі.

Вважаємо, що комутація відбувається миттєво і без втрат енергії. Початок перехідного процесу поєднують із моментом комутації і позначають як $t = 0$.

Після комутації коло миттєво стає геть іншим, оскільки зміна його параметрів пройшла стрибкоподібно. Але енергетичні процеси в ньому проходять *плавно*: від попереднього режиму до наступного примушеного (сталого) режиму роботи проходить деякий час.

В момент часу *безпосередньо після* комутації (позначають $t = 0_+$) струм (напругу) та їхні похідні записують у наступному вигляді:

$$i_R(0_+) ; i_C(0_+) ; u_R(0_+) ; u_L(0_+) ; \frac{di}{dt}(0_+) ; \frac{du}{dt}(0_+) .$$

Ці величини отримали назву: *залежні початкові умови*, оскільки вони можуть змінитися в момент комутації стрибкоподібно.

Незалежні початкові умови не можуть змінитися стрибкоподібно. Ця їхня властивість занотована в двох **законах комутації**.

Перший закон комутації:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) . \quad (3.5)$$

Другий закон комутації:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) . \quad (3.6)$$

3.2.2 Розрахунок кола до комутації

В схемі, яка існувала *до моменту* комутації ($t = 0_-$) вирази для струму крізь котушку $i_L(0_-)$ і напруги на ємності $u_C(0_-)$ можна знайти наприклад, із системи рівнянь, сформованої за законами Кірхгофа для такої схеми, або за законом Ома.

Величини $i_L(0_-)$ та $u_C(0_-)$ отримали назву: *незалежні початкові умови*. Вони є «відправною точкою» до визначення параметрів подальшого перехідного процесу.

3.2.3 Порядок розрахунку кола після комутації.

– Зображуємо схему, яка утворилася після *комутації* (якщо є потреба). Визначаємо кількість вузлів та кількість віток цієї схеми, проставляємо напрям перехідних струмів цієї схеми;

– складаємо для цієї схеми систему інтегрально-диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа. Далі розв'язуємо цю систему рівнянь шляхом їх безпосереднього інтегрування в такій послідовності:

– Примушені складові знаходимо або за законом Ома, або із системи рівнянь, сформованої для усталеного режиму за законами Кірхгофа для схеми, яка виникає після комутації;

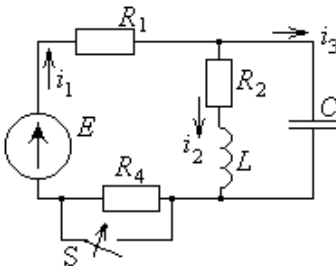
– Вільні складові знаходимо таким чином:

- а) знаходимо корені характеристичного рівняння;
- б) знаходимо залежні початкові умови (струми, напруги і їхні похідні в перший момент після комутації $t = 0_+$);
- в) знаходимо постійні інтегрування за допомогою залежних і незалежних початкових умов;
- г) записуємо повний вираз шуканих величин.

– Побудуємо графічні залежності шуканих величин.

3.2.4 Приклад розрахунку перехідного процесу

Надано схему електричного кола (рис.3.1) і його параметри:



$$E = 36 \text{ В};$$

$$R_1 = 25 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 15 \text{ Ом};$$

$$L = 40 \text{ мГн} = 0.04 \text{ Гн};$$

$$C = 10 \text{ мкФ} = 10^{-5} \text{ Ф}.$$

Визначити струм $i_1(t)$.

Рисунок 3.1 – Схема електричного кола

– Розрахунок схеми до комутації.

До комутації ключ був *розімкнений*. В схемі існує сталий режим роботи. Тому струми і напруги на всіх елементах будуть *постійними*, оскільки джерело живлення схеми – *постійна е.р.с.* Знаходимо *незалежні* початкові умови будь-яким методом, зважаючи на те, що:

а) напруга на індуктивності L до комутації буде відсутня,

$$u_L(0_-) = L \frac{di_2}{dt}(0_-) = 0 ;$$

б) струм через ємність до комутації дорівнює нулеві

$$i_C(0_-) = C \frac{du_C}{dt}(0_-) = i_3(0_-) = 0 ,$$

оскільки похідні від постійних величин дорівнюють нулеві.

Отже, струм через індуктивність до комутації за законом Ома:

$$i_2(0_-) := \frac{E}{R_1 + R_2 + R_4} = 0.6 \text{ (А)} .$$

$$i_1(0_-) := i_2(0_-) ; \quad i_L(0_-) := i_2(0_-) .$$

Напруга на ємності до комутації (за другим законом Кірхгофа):

$$U_C(0_-) := E - (R_1 + R_4) \cdot i_1(0_-) = 12 \text{ (В)} .$$

Таким чином, знайдено *незалежні* початкові умови.

– Розрахунок схеми після комутації.

Після комутації ключ *замикається*. В схемі виникає перехідний процес. Система рівнянь, що описують цей перехідний процес:

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 + L \frac{di_2}{dt} &= E \\ R_1 \cdot i_1 + \frac{1}{C} \cdot \int i_3 \cdot dt &= E \end{aligned} \right\} . \quad (3.7)$$

Розв'язання такої системи – це безпосереднє її інтегрування з врахуванням початкових умов. Зробимо це в такій послідовності:

– розрахунок *залежних початкових умов* після комутації ($t=0_+$).

Система вихідних рівнянь (3.7) та для їхніх похідних в першу мить після комутації ($t=0_+$) набуває вигляду (3.8):

$$\left. \begin{aligned} i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) &= 0 \\ R_1 i_1(0_+) + R_2 i_2(0_+) + L \frac{di_2}{dt}(0_+) &= E(0_+) \\ R_1 \cdot i_1(0_+) + U_C(0_+) &= E(0_+) \\ \text{Перші похідні двох рівнянь:} \\ i'_1(0_+) - i'_2(0_+) - i'_3(0_+) &= 0 \\ R_1 \frac{di_1}{dt}(0_+) = \frac{dE}{dt}(0_+) - \frac{dU_C}{dt}(0_+) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Підставляємо в систему (3.8) закони комутації (3.5) і (3.6):

$$\begin{aligned} i_{2(0)} &:= i_{2(0-)} = 0.6 \text{ A.} \\ U_{C(0)} &:= U_{C(0-)} = 12 \text{ B.} \end{aligned}$$

Із третього рівняння цієї системи отримаємо:

$$i_{1(0)} := \frac{E - U_{C(0)}}{R_1} = 0.96 \text{ A.}$$

Із першого рівняння цієї системи отримаємо:

$$i_{3(0)} := i_{1(0)} - i_{2(0)} = 0.36 \text{ A.}$$

Перша похідна струму другої вітки в момент після комутації:

$$i'_{2(0)} := \frac{E - R_1 \cdot i_{1(0)} - R_2 \cdot i_{2(0)}}{L} = 0 .$$

Перша похідна струму першої вітки в момент комутації:

$$i'_{1(0)} := \frac{1}{R_1} \cdot \left[\frac{dE}{dt}(0) - \frac{dU_C}{dt}(0) \right] = \frac{1}{25} \cdot \left[\frac{-i_{3(0)}}{C} \right] = -1440 \text{ (A/c)}.$$

Перша похідна струму третьої вітки в першу мить після комутації із першого закону Кірхгофа для перших похідних:

$$i'_{3(0)} := i'_{1(0)} - i'_{2(0)} = -1440 \text{ (A/c)}.$$

Таким чином знайдено *залежні початкові умови* для цього кола.

Інша можливість для їхнього знаходження – це застосування матричних обчислень системи (3.8) засобами *Mathcad*.

– розрахунок **сталого** (примушеного) режиму;

Примушені складові перехідного процесу – це струми і напруги, що існують в колі *після закінчення* перехідного процесу. Особливості такого режиму роботи в схемах із джерелом постійної *е.р.с.* будуть:

– напруга на індуктивності L буде відсутня, оскільки

$$u_{L \text{ пр}}(t) = L \frac{di_{2 \text{ пр}}}{dt} = 0 \quad ;$$

– струм через ємність дорівнює нулеві

$$i_{C \text{ пр}}(t) = C \frac{du_{C \text{ пр}}}{dt} = i_{3 \text{ пр}}(t) = 0 \quad ,$$

оскільки похідні від постійних величин дорівнюють нулеві.

Система рівнянь для *примушеного* режиму в цій схемі:

$$\left. \begin{aligned} i_{1 \text{ пр}} - i_{2 \text{ пр}} &= i_{3 \text{ пр}} = 0 \\ R_1 \cdot i_{1 \text{ пр}} + R_2 \cdot i_{2 \text{ пр}} &= E - L \frac{di_{2 \text{ пр}}}{dt} = E \\ R_1 \cdot i_{1 \text{ пр}} + U_{C \text{ пр}} &= E \end{aligned} \right\} . \quad (3.9)$$

З першого рівняння стає очевидним, що: $i_{1 \text{ пр}} = i_{2 \text{ пр}} \quad .$

Таким чином, примушений струм через індуктивність:

$$i_{2 \text{ пр}} := \frac{E}{R_1 + R_2} = 0.8 \text{ (A)} \quad ; \quad i_{1 \text{ пр}} := i_{2 \text{ пр}} = 0.8 \text{ (A)} \quad .$$

Примушений струм першої вітки: $i_{1 \text{ пр}} := i_{2 \text{ пр}} = 0.8 \text{ (A)} \quad .$

Примушена напруга на ємності: $U_{C \text{ пр}} = E - R_1 i_{1 \text{ пр}} = 16 \text{ (B)}.$

– розрахунок **вільного** режиму:

а) система рівнянь, що описують вільний режим цього кола:

$$\left. \begin{aligned} i_{1B} - i_{2B} - i_{3B} &= 0 \\ R_1 \cdot i_{1B} + R_2 \cdot i_{2B} + L \frac{di_{2B}}{dt} &= 0 \\ R_1 \cdot i_{1B} + \frac{1}{C} \cdot \int i_{3B} \cdot dt &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (3.10)$$

б) характеристичне рівняння та знаходження його коренів.

Для цього можна застосувати дві можливості.

Перша з них полягає в складанні матриці коефіцієнтів (головний визначник) для цієї системи (3.10) *однорідних* рівнянь:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & L \cdot p \\ R_1 & 0 & \frac{1}{p \cdot C} \end{vmatrix} .$$

Для активізації матриці заходимо в матрицю *праворуч* (за допомогою клавіш пересування «← ↑ ↓ →» або «Пробел»).

Детермінант визначаємо за допомогою символічної математики. Для цього входимо в верхнє меню («Символіка» – клік – Матриці – Определитель – клік). Отримаємо загальний вираз детермінанту. Активізуємо його. Входимо в символічну палетку (Вид – Панели инструментов - Символьная), знаходимо дію *solve* та *float*, вводимо прийнятну кількість знаків (5 або 6), виходимо із розрахункового поля – отримаємо корені характеристичного рівняння. Для нашої задачі

$$\frac{R_1 + R_2 + L \cdot p + C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot p + C \cdot L \cdot R_1 \cdot p^2}{C \cdot p} \left| \begin{array}{l} \text{solve}, p \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1500.0 \\ -3000.0 \end{pmatrix}$$

отримали два дійсних від’ємних корені.

Зробимо присвоювання: $p_1 := -1500$; $p_2 := -3000$.

В подальшому будемо працювати із цими символами.

Для цієї задачі вільна складова перехідного струму має вигляд:

$$i_B(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} .$$

Якщо корені будуть комплексно-спряжені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_B$, тоді вільний процес буде коливальний і згасаючий:

$$i_B(t) = Ae^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_B t + \vartheta) .$$

Друга можливість полягає в застосуванні обчислювального блоку *Given – Find*.

Складаємо загальний вираз вхідного опору схеми

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + pL) \cdot \frac{1}{pC}}{(R_2 + pL) + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 LCR_1 + p(CR_1R_2 + L) + R_1 + R_2}{pC(R_2 + pL) + 1}.$$

Тепер треба цей вираз розташувати в межах блоку *Given – Find* та привіняти його «логічному нулю»:

Given

$$\frac{R_1 + R_2 + L \cdot p + C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot p + C \cdot L \cdot R_1 \cdot p^2}{C \cdot p \cdot (R_2 + L \cdot p) + 1} = 0$$

Find(p) float ,4 → (-1500.0 -3000.0)

Тільки слід пам'ятати, що в межах цього блоку застосовують тільки «жирний» знак рівності (Ctrl+= , або через Вид – Панели инструментов – Логическая – $\equiv$). Ніяких інших знаків в межах цього блоку застосовувати не можна.

Зробимо присвоєння: $p_1 := -1500$; $p_2 := -3000$.

в) загальна форма запису вільних складових у зручній формі;
Оскільки маємо два дійсних від'ємних кореня, тоді вільна складова буде мати вигляд суми двох згасаючих експонент:

$$i_{k \text{ в}}(t) = A_k \cdot e^{p_1 t} + B_k \cdot e^{p_2 t} ,$$

де k – номер струму;

A_k, B_k – постійні інтегрування.

г) загальна форма запису перехідних струмів;

$$i_k(t) = i_{k \text{ пр}}(t) + i_{k \text{ в}}(t) = i_{k \text{ пр}} + A_k \cdot e^{p_1 t} + B_k \cdot e^{p_2 t} .$$

Перші похідні таких струмів:

$$\frac{di_k}{dt} = \frac{di_{k \text{ пр}}}{dt} + \frac{di_{k \text{ в}}}{dt} = \frac{di_{k \text{ пр}}}{dt} + p_1 A_k \cdot e^{p_1 t} + p_2 B_k \cdot e^{p_2 t} .$$

д) знаходження постійних інтегрування;

Складемо систему рівнянь для струму i_1 та його похідної в моменту комутації ($t=0$):

$$\left. \begin{aligned} i_{1 \text{ пр}}(0) + A_1 + B_1 &= i_1(0) \\ \frac{di_{1 \text{ пр}}}{dt}(0) + p_1 A_1 + p_2 B_1 &= \frac{di_1}{dt}(0) \end{aligned} \right\} . \quad (3.11)$$

Підставляємо відомі величини, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} 0.8 + A_1 + B_1 &= 0.96 \\ 0 + (-1500) \cdot A_1 + (-3000) \cdot B_1 &= -1440 \end{aligned} \right\} .$$

Розв'язання цієї системи зробимо матричним способом. Складемо матрицю коефіцієнтів та вектор-стовпець відомих величин:

$$M := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} ; \quad F := \begin{vmatrix} i_{1(0)} - i_{1 \text{ пр}} \\ i'_{1(0)} - 0 \end{vmatrix} .$$

Застосуємо матричну формулу: $\begin{vmatrix} A_1 \\ B_1 \end{vmatrix} := M^{-1} \cdot F \rightarrow \begin{vmatrix} -0.64 \\ 0.8 \end{vmatrix} .$

Результатом розв'язку цієї системи є постійні інтегрування:

$$A_1 = -0.64 ; \quad B_1 = 0.8 .$$

Отже, повний (перехідний) струм першої вітки після комутації:

$$i_1(t) := 0.8 - 0.64 \cdot e^{-1500 \cdot t} + 0.8 \cdot e^{-3000 \cdot t} \quad A .$$

Струми і напругу на інших вітках знаходимо аналогічно.

Сталі часу перехідного процесу:

$$\tau_1 := \frac{1}{|p_1|} = 0.667 \text{ (мс)}; \quad \tau_2 := \frac{1}{|p_2|} = 0.333 \text{ (мс)}.$$

3.2.5 Побудова графіка перехідної величини.

Вважаємо, що перехідний процес буде завершено через час $4\tau_1$ після початку комутації. Тому графіки будуємо впродовж цього часу.

В робочому полі пакета *Mathcad* треба записати всі вихідні дані для побудови графіків. Задаємо час початку побудови графіка, крок побудови і кінцевий інтервал, на кому буде побудовано графік:

$$t := 0, \tau_1 / 100 .. 4 \cdot \tau_1 .$$

Відкриємо *графічне поле* шляхом натискання одночасно на клавіатурі **Shift+@** , або із меню Tool Bars відповідної іконки (Вид – Панель інструментов – Графическая). 

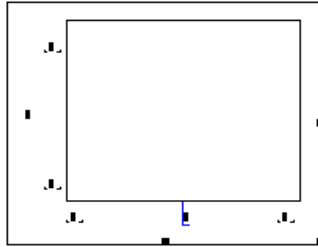


Рисунок 3.2 – Графічне поле пакета Mathcad

По осях координат у відведених для цього місцях вносимо:

- а) аргумент (t) та функцію ($i_1(t)$) – по центру відповідної осі;
- б) початок часу спостереження (зліва: 0) та кінець часу спостереження (справа: $4 \cdot \tau_1$) на осі часу;
- в) очікувані мінімальне та максимальне значення перехідної функції по осі струму (якщо є така потреба).

Виходимо у робоче поле (клік маніпулятором у будь-яке його місце) – отримаємо потрібний графік перехідної функції.

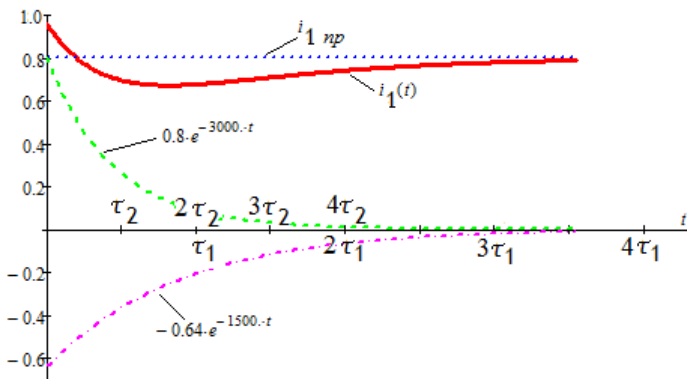


Рисунок 3.3 – Графічні залежності струму першої вітки кола та його складових

Далі можна зробити *форматування* графіка (подвійний клік лівою кнопкою миші на графічному полі відкриє додаткове меню – *Форматирование выбранного графика*). Зміною відповідних параметрів можна отримати найбільш прийнятну картину перехідного процесу, відобразити (або прибрати) сітку, змінити колір та товщину графічних ліній, знайти екстремуми функції (один клік *правою кнопкою* миші на графічному полі відкриє додаткове меню – *Трассировка*), тощо.

3.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи

3.3.1 Вивчити особливості роботи і методи розрахунку перехідних процесів в лінійних електричних колах [1-3], конспектом лекцій та п. 3.2 наданих методичних вказівок.

3.3.2 Завчасно підготувати бланк для проведення лабораторної роботи, в якій буде титульний лист, мета роботи, схема наданого кола, параметри R , L та C - елементів схеми (із завдання до курсової роботи, або за вказівкою викладача, що проводить заняття).

3.4 Контрольні запитання

3.4.1 Що називають перехідним процесом? Які методи існують для їхнього розрахунку?

3.4.2 Який існує порядок розрахунку перехідних процесів?

3.4.3 Що таке початкові умови? Назвіть їхню класифікацію.

3.4.4 Сформулюйте закони комутації.

3.4.5 Що таке примушений і що таке вільний режим роботи?

3.4.6 Що таке постійна часу перехідного процесу, як її знайти?

3.4.7 Яким чином знаходять корені характеристичного рівняння за допомогою пакету *Mathcad*?

3.4.8 Яким чином знаходять залежні початкові умови за допомогою пакету *Mathcad*?

3.4.9 Яким чином знаходять постійні інтегрування за допомогою пакету *Mathcad*?

3.4.10 Яким чином в пакеті *Mathcad* можна побудувати графічні залежності перехідних величин?

3.5 Матеріали, інструмент, прилади, обладнання

Для виконання лабораторної роботи необхідно мати комп'ютер зі встановленим пакетом "*Mathcad*".

3.6 Вказівки з техніки безпеки

Суворо виконувати правила техніки безпеки. Не починати роботу на комп'ютері без дозволу викладача. Не відкривати “Папки” інших студентів, не вносити до них змін, не видаляти їх.

Періодично через 10-15 хвилин зберігати результати роботи. За п'ять хвилин до закінчення занять зробити збереження всіх результатів, записати їх в лабораторний бланк, закрити *Mathcad*.

3.7 Порядок проведення лабораторної роботи

3.7.1 Увійти в пакет “ *Mathcad* ” звичайним шляхом: “Пуск – Програми – Math Soft Apps – *Mathcad* Professional”.

3.7.2 Відкрити текстове поле (**Shift+”** , або через верхнє меню: **Вставка – Text Region**“), перейти на українську мову та зробити запис заголовка: Лабораторна робота №7к "Розрахунок перехідних процесів в електричних колах другого порядку". Вийти в робоче поле; перейти на англійську мову.

3.7.3 Присвоїти параметрам електричного кола числові значення відповідно до Вашого варіанта. Величини параметрів кола набираємо в робочому полі *Mathcad* через знак *присвоєння* (**:=**). Набрати в робочому полі формули для розрахунку Вашого електричного кола, а також необхідні до них коментарі.

3.7.4 Розрахувати незалежні початкові умови.

3.7.5 Розрахувати примушені складові струмів у вітках кола і напруги на конденсаторі.

3.7.6 Скласти рівняння вхідного опору схеми $Z(p)=0$. Визначити корені характеристичного рівняння.

3.7.7 Розрахувати залежні початкові умови.

3.7.8 Розрахувати постійні інтегрування.

3.7.9 Побудувати графічні залежності шуканих величин в графічному полі *Mathcad*.

3.7.10 Зберегти в пам'яті комп'ютера цей файл ("File – Save ") та записати до бланку звіту всі потрібні результати. Завершити сеанс роботи на комп'ютері.

3.8 Зміст звіту

У підготовлений бланк лабораторної роботи записати всі необхідні результати розрахунків. Побудувати графіки.

4. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №8к

Дослідження перехідних процесів в електричних колах операторним методом

4.1 Мета роботи

Набуття навичок у застосуванні пакету *Mathcad* при розрахунках перехідних процесів в лінійних електричних колах операторним методом.

4.2 Загальні теоретичні відомості

Ідея операторного методу полягає в тому, щоб замість розв'язку диференціальних рівнянь в області дійсних змінних перейти до області функцій комплексного змінного $p = \delta + j\omega$, де операції диференціювання та інтегрування замінені відповідно на множення та поділення на оператор Лапласа p .

Таким чином замість інтегрально-диференціальних рівнянь отримаємо *алгебраїчні* рівняння, результатом розв'язку яких будуть *операторні зображення* шуканої функції.

Перехід від *зображення* до *оригіналу* (часової функції) проводять застосовуючи *обернене перетворення* Лапласа.

4.2.1 Порядок розрахунків операторним методом:

– Розраховуємо схему до комутації з метою знаходження незалежних початкових умов: $i_L(0_-)$ та $u_C(0_-)$;

– Складаємо операторну схему заміщення. Для цього у схемі, яка виникла після комутації, формально замінюємо *реальні* елементи на їх *операторні зображення*. Проставляємо на цій схемі напрямки проходження всіх *операторних* струмів;

– Для операторної схеми заміщення складаємо систему операторних рівнянь згідно з методами розрахунку електричних кіл;

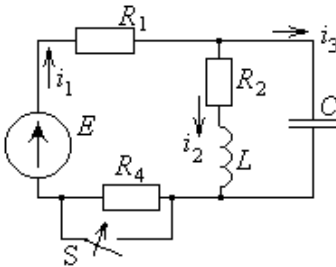
– Розв'язуємо одержані рівняння – знаходимо *операторні зображення* невідомих величин (струмів чи напруги) у вигляді правильних поліномів по ступенях p :

$$I(p) := \frac{N(p)}{M(p)} ; \quad U(p) := \frac{F_1(p)}{F_2(p)} . \quad (4.1)$$

– Перехід від *зображення* до *оригіналу*: за допомогою таблиць Лапласа, формули розкладання або за допомогою символного ключового слова *invlaplace* із комп'ютерного пакета *Mathcad*.

4.2.2 Приклад розрахунку перехідного процесу операторним методом.

Надано схему електричного кола (рис.4.1) і його параметри:



$$E = 36 \text{ В};$$

$$R_1 = 25 \text{ Ом}; \quad R_2 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 15 \text{ Ом};$$

$$L = 40 \text{ мГн} = 0.04 \text{ Гн};$$

$$C = 10 \text{ мкФ} = 10^{-5} \text{ Ф}.$$

Визначити струм $i_1(t)$.

Рисунок 4.1 – Схема електричного кола

4.2.3 Розрахунок схеми до комутації.

До комутації ключ був *розімкнений*. В схемі існує сталий режим роботи. Тому струми і напруги на всіх елементах будуть *постійними*, оскільки джерело живлення схеми – *постійна е.р.с.* Знаходимо незалежні початкові умови будь-яким методом, зважаючи на те, що постійна напруга на індуктивності L буде відсутня, і струм через ємність C дорівнює нулеві:

$$u_L(0_-) = 0; \quad i_C(0_-) = 0,$$

оскільки похідні від постійних величин дорівнюють нулеві.

Отже, струм через індуктивність до комутації за законом Ома:

$$i_2(0_-) := \frac{E}{R_1 + R_2 + R_4} = 0.6 \text{ (А)}.$$

$$i_L(0_-) := i_2(0_-) = 0.6 \text{ (А)}.$$

Напруга на ємності до комутації (за другим законом Кірхгофа):

$$U_C(0_-) := E - (R_1 + R_4) \cdot i_1(0_-) = 12 \text{ (В)}.$$

Таким чином, знайдено *незалежні початкові умови*.

4.2.4 Розрахунок схеми після комутації.

- Складаємо операторну схему заміщення тієї схеми, яка виникла в наслідок комутації (рис.4.2).

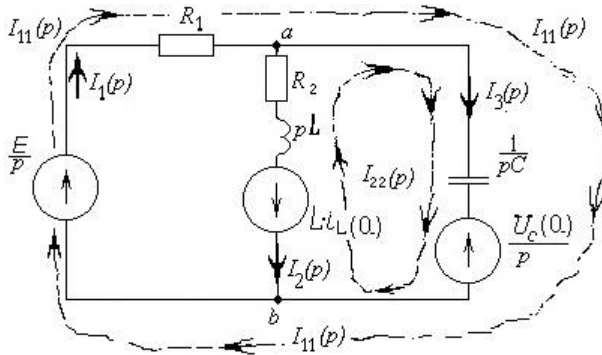


Рисунок 4.2 – Операторна схема заміщення електричного кола

- Складаємо систему *операторних рівнянь* для цієї схеми за методом, наприклад, контурних струмів:

$$\left. \begin{aligned} \left(R_1 + \frac{1}{pC}\right) \cdot I_{11}(p) + \frac{1}{pC} \cdot I_{22}(p) &= \frac{E}{p} - \frac{U_c(0)}{p} \\ \frac{1}{pC} I_{11}(p) + \left(R_2 + pL + \frac{1}{pC}\right) I_{22}(p) &= -Li_L(0) - \frac{U_c(0)}{p} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

- Розрахунок системи операторних рівнянь в *Mathcad*.

Складаємо матрицю коефіцієнтів $H(p)$ і вектор впливу $K(p)$

$$H(p) := \begin{bmatrix} \left(R_1 + \frac{1}{pC}\right) & \frac{1}{pC} \\ \frac{1}{pC} & \left(R_2 + pL + \frac{1}{pC}\right) \end{bmatrix};$$

$$K(p) := \begin{bmatrix} \frac{E - U_c(0)}{p} \\ -\left[Li_L(0) + \frac{U_c(0)}{p}\right] \end{bmatrix};$$

Операторні зображення контурних струмів знаходимо за матричною формулою

$$\begin{bmatrix} I_{11}(p) \\ I_{22}(p) \end{bmatrix} := H(p)^{-1} \cdot K(p) .$$

- Знайдемо найбільш просту форму представлення результатів розв'язку операторних зображень.

За допомогою символьної математики пакета *Mathcad* (*simplify*; *factor*; *expand*; або *collect*) можна отримати різні види представлення операторних зображень. Наприклад:

$$I_{11}(p) \Big|_{\text{float}, 4}^{\text{expand}} \rightarrow \frac{0.8}{p} - \frac{0.64}{p + 1500} + \frac{0.8}{p + 3000} ;$$

$$\text{або: } I_{11}(p) \Big|_{\text{float}, 4}^{\text{collect}, p} \rightarrow \frac{72000 \cdot p + 24 \cdot p^2 + 9 \cdot e7}{1.125e8 \cdot p + 112500 \cdot p^2 + 25 \cdot p^3} ;$$

- Застосуємо зворотне перетворення Лапласа:

$$I_{11}(p) \Big|_{\text{float}, 4}^{\text{invlaplace}, p} \rightarrow 0.8 \cdot e^{-3000 \cdot t} - 0.64 \cdot e^{-1500 \cdot t} + 0.8 ,$$

або теорему розкладання:

$$N_1(p) := 72000 \cdot p + 24 \cdot p^2 + 9 \cdot e7 ;$$

$$M_1(p) := 1.125e8 \cdot p + 112500 \cdot p^2 + 25 \cdot p^3 ;$$

$$M'_1(p) := \frac{d}{dp} M_1(p) ;$$

$$M'_1(p) \text{ float}, 4 \rightarrow 225000 \cdot p + 75 \cdot p^2 + 1.125e8 .$$

Корені характеристичного рівняння знайдемо із виразу знаменника

$$M_1(p) := 0 ; \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1.125e8 \\ 112500 \\ 25 \end{pmatrix} ; \quad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -3000 \\ -1500 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Отже, з'ясували, що коренів – три. При цьому, нульовий корінь вказує на наявність *примушеної* складової, а два інших – на наявність *вільної* складової перехідного процесу. Зробимо присвоювання, для простоти:

$$p0 := 0 ; \quad p1 := -1500 ; \quad p2 := -3000 .$$

Результат отримаємо за допомогою формули розкладання:

$$i_1(t) := \frac{N_1(0)}{M'_1(0)} + \frac{N_1(p1)}{M'_1(p1)} \cdot e^{p1 \cdot t} + \frac{N_1(p2)}{M'_1(p2)} \cdot e^{p2 \cdot t} ;$$

$$i_1(t) \text{ float}, 4 \rightarrow 0.8 \cdot e^{-3000 \cdot t} + -0.64 \cdot e^{-1500 \cdot t} + 0.8 .$$

Цей результат співпадає із розрахунками класичним методом.

4.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи

4.3.1 Вивчити теоретичний матеріал за темою роботи по [1,2,3].

4.3.2 Завчасно підготувати бланк лабораторної роботи, куди включити: мету роботи, схему і параметри електричного кола.

4.4 Контрольні запитання

4.4.1 В чому полягають основні ідеї операторного методу?

4.4.2 Що таке оператор Лапласа? Який вигляд мають операторні зображення для джерел постійної форми, а який – для джерел енергії синусоїдної форми.

4.4.3 Який вигляд мають операторні зображення R , L , C – елементів електричних кіл?

4.4.4 Який вигляд має таблиця Лапласа, формула розкладання?

4.5 Матеріали, інструменти, прилади, обладнання

Для виконання лабораторної роботи необхідно мати комп'ютер з установленим пакетом *Mathcad*. На "Робочому столі" повинна бути папка під Вашим прізвищем і номером навчальної групи.

4.6 Вказівки з техніки безпеки

Виконувати правила техніки безпеки. Періодично через 10 - 20 хвилин зберігати результати роботи.

4.7 Порядок проведення лабораторної роботи

4.7.1 Відкрити пакет *Mathcad* звичайним шляхом: "Пуск – Програми – MathSoft Apps – *Mathcad* Professional".

4.7.2 Записати в текстовому полі: Лабораторна робота №8к "Дослідження перехідних процесів операторним методом".

4.7.3 Зробити присвоєння уявної одиниці $j := \sqrt{-1}$, а потім комп'ютерним змінним присвоїти вхідні данні (без одиниць виміру).

4.7.4 Набрати у робочому полі формули для розрахунку Вашого електричного кола, а також необхідні до них коментарі. Зробити розрахунки, показати викладачу результати, зберегти у пам'яті комп'ютера та записати до бланку звіту всі потрібні результати.

4.7.5 Зберегти результати розрахунків ("File – Save ") та закрити *Mathcad*. Завершити сеанс роботи на комп'ютері.

4.8 Зміст звіту

Записати результати розрахунків за п. 4.7.4. Побудувати графіки перехідних величин. По роботі зробити висновки.

5. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №9к

Дослідження перехідних процесів методом змінних стану

5.1 Мета роботи

Набуття навичок у застосуванні пакету *Mathcad* при розрахунках перехідних процесів методом змінних стану.

5.2 Загальні теоретичні відомості

5.2.1 Основа чисельних методів

Перехідні процеси в лінійних електричних колах математично описують системою звичайних диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа. Звичайні диференціальні рівняння (ЗДР) – це диференціальні рівняння для функції *однієї змінної*. Ця незалежна змінна (в математиці зазвичай її позначають літерою x) в фізичних і інших наукових задачах часто являє собою **час**, тоді її позначають літерою t . Тому всі електричні величини, які змінюються під час перехідного процесу – струми у вітках, напруги на різних елементах а також їхні похідні – залежать від часу:

$$i(t); u(t); \frac{di}{dt}; \frac{du}{dt}; \dots, \text{ або коротше: } i; u; i'; u'; \dots$$

Для розрахунку диференціальних рівнянь застосовують або *аналітичні* (точні) методи, або *чисельні* методи.

Аналітичні методи розв'язання ДР представляють шукану функцію $y(t)$ у вигляді аналітичного виразу від елементарних функцій (класичний або операторний методи). Для реальних прикладних задач це майже неможливо.

Чисельні методи полягають в знаходженні числових значень функції $y(t)$ та її похідних в деяких заданих точках ($t_1, t_2, \dots, t_n$), які розташовано на деякому відрізку часу, як правило кінцевому. Фактично, чисельний розв'язок – це таблиця чисел вигляду:

Таблиця 5.1 – Результат розв'язку диференціального рівняння

i	t	Y	Y'	...
1	t_1	$y_1(t_1)$	$y'_1(t_1)$	...
2	t_2	$y_2(t_2)$	$y'_2(t_2)$	...
...	...	...	...	...
N	t_N	$y_N(t_N)$	$y'_N(t_N)$	...

Ці результати можна використати, наприклад, для побудови графічної залежності, або для апроксимації шуканої залежності якоюсь функцією (наприклад, у вигляді поліноміальної функції).

Множина всіх значень аргументу $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_N\}$ в яких знаходять значення функції $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_N\}$ називають *сіткою*, на якій визначено функцію $y(t)$. Ці координати називають *вузлами сітки*. Для зручності і простоти зазвичай застосовують *рівномірну сітку*, для якої різниця між сусідніми вузлами є постійною. Цю різницю називають *шагом сітки* (або *шагом інтегрування рівнянь*):

$$h = t_i - t_{i-1} ; \quad \text{де } i = 1, 2, 3, \dots, N . \quad (5.1)$$

5.2.2 Розв'язання задачі Коші для ЗДР першого порядку

Видатний вклад в теорію диференціальних рівнянь зробив Огюстен Коші. З того часу (1816 р.) одна із основних задач теорії диференціальних рівнянь має назву «задача Коші».

Задача Коші полягає в знаходженні розв'язку (інтеграла) диференціального рівняння, яке задовольняє *початковим умовам*. В загальному вигляді, розв'язаному відносно похідної (права частина рівняння не залежить від першої похідної) має загальний вигляд:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y) . \quad (5.2)$$

Треба знайти значення функції y в заданих точках сітки $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, якщо відомі початкові умови: $t_0, y_0 = y(t_0)$.

Перетворимо рівняння (5.2) шляхом помноження на dt , та проведемо інтегрування обох частин між двома сусідніми вузлами сітки:

$$\int_{i-1}^i dy = \int_{i-1}^i f(t, y) \cdot dt .$$

Отримаємо вираз для побудови розв'язку в i -тому вузлу інтегрування через значення x_{i-1}, y_{i-1}

$$y_i = y_{i-1} + \int_{i-1}^i f(t, y) \cdot dt . \quad (5.3)$$

Складність цього розв'язку полягає в тому, що інтеграл в правій частині – є інтегралом від *неявно заданої функції*. Його знаходження в аналітичному вигляді в загальному випадку неможливе. Чисельні методи розв'язку *ЗДР* різними способами апроксимують значення цього інтегралу для побудови формул чисельного інтегрування.

5.2.3 Метод Ейлера для розв'язання *ЗДР* першого порядку

Метод Ейлера – найпростіший чисельний метод розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Вперше його алгоритм започаткував Леонард Ейлер (Інтегральне обчислювання. т.1. 1768). Метод Ейлера є *явним, одно кроковим* методом *першого порядку* точності. Метод базується на апроксимації інтегральної кривої (точного розв'язку) кусково-лінійною функцією (наближені обчислення), яку називають «ломаною Ейлера»:

$$y' = \frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = f(t_{i-1}, y_{i-1})$$

Якщо взяти до уваги рівномірність шагу сітки h (5.1), отримаємо ітераційну формулу, за якою знаходимо значення функції в наступному вузлу сітки, якщо відомі її попередні значення $t_{(i-1)}, y_{(i-1)}$:

$$y_{(i)} = y_{(i-1)} + h \cdot y'_{(i-1)} . \quad (5.4)$$

На основі цієї формули складають *компонентні* рівняння.

Якщо система диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа має похідні більш високого порядку, тоді треба ввести нові невідомі функції, які знижують цей порядок до одиниці. Наприклад:

$$z := \frac{dy}{dt} ; \quad \frac{dz}{dt} := \frac{d^2y}{dt^2} , \quad \text{і т. д.}$$

5.2.4 Метод змінних стану

Для аналізу динамічних режимів роботи електричних кіл в інженерній практиці застосовують розрахунок *методом змінних стану (МЗС)*. Цей метод застосовують для чисельного розрахунку диференціальних рівнянь високого порядку, оскільки аналітичні методи для аналізу складних схем є неприйнятними.

Змінними стану називають струми і напруги, які визначають запас енергії в електричному колі. Енергія накопичується в реактивних елементах (L та C). Тому в якості змінних стану обирають

напругу на ємності (u_c) та струм через індуктивність (i_L). Ці величини однозначно визначають стан роботи електричного кола – вони є основою фундаментальних законів комутації.

Рівняння стану складають за законами Кірхгофа і доповнюють:

- рівняннями зв'язку: $C \frac{du_c}{dt} - i_C = 0$ (5.5)

- та компонентними рівняннями:

$$\begin{aligned} u_C(i) - h \cdot u'_C(i-1) &= u_C(i-1) ; \\ i_L(i) - h \cdot i'_L(i-1) &= i_L(i-1) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ця повна система рівнянь змінних стану буде системою диференціальних рівнянь. Її можна розв'язати аналітично, але тільки для простих електричних схем. Практичний інтерес становлять чисельні методи розв'язку цих рівнянь за допомогою спеціальних програм на ЕОМ (Ейлера, Адамса, Рунге-Кутта та інші.).

Рівняння стану в матричній формі мають таку структуру:

$$[X'(t)] = [A] \cdot [X(t)] + [B] \cdot [F(t)] , \quad (5.7)$$

тут: $[X'(t)]$ – вектор-стовпець похідних від струмів в котушках індуктивності і напруги на ємностях; розмірність $(1 \times n)$ елементів;

$[A]$ – матриця коефіцієнтів при змінних стану; розмірність $(n \times n)$;

$[X(t)]$ – вектор-стовпець змінних стану; розмірність $(1 \times n)$;

$[B]$ – прямокутна матриця зв'язку між $[X(t)]$ і джерелами енергії; розмірність $(n\text{-строк}, m\text{-стовпців})$;

$[F(t)]$ – стовпець незалежних джерел енергії; розмірність $(1 \times n)$.

Алгебраїчні рівняння для вихідних величин в матричній формі:

$$[Y(t)] = [H] \cdot [X(t)] + [D] \cdot [F(t)] , \quad (5.8)$$

тут: $[Y(t)]$ – вектор-стовпець вихідних величин; розмірність $(1 \times k)$;

$[H]$ – прямокутна матриця зв'язку вихідних величин зі змінними стану; розмірність $(k \times n)$ елементів;

$[X(t)]$ – вектор-стовпець змінних стану; розмірність $(1 \times n)$;

$[D]$ – прямокутна матриця зв'язку між $[Y(t)]$ із джерелами енергії; розмірність $(k\text{-строк}, m\text{-стовпців})$;

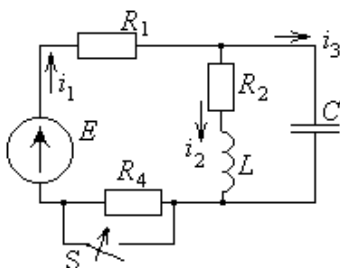
$[F(t)]$ – стовпець незалежних джерел енергії; розмірність $(1 \times n)$.

5.2.5 Порядок розрахунків методом змінних стану

- Розраховуємо схему до комутації з метою знаходження незалежних початкових умов: $i_L(0_-)$ та $u_C(0_-)$;
- Для схеми, яка виникла внаслідок комутації складаємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь за законами Кірхгофа і додаємо до них рівняння зв'язку і компонентні рівняння;
- Знаходимо залежні початкові умови $i'_L(0)$ та $u'_C(0)$ обов'язково, а всі інші – в разі потреби;
- Складаємо матрицю коефіцієнтів повної системи рівнянь і стовпець незалежних джерел енергії;
- Складаємо ітераційний блок за методом Ейлера, розв'язуємо одержані рівняння в середовищі *Mathcad* і будуємо графічні залежності шуканих величин.

5.2.6 Приклад розрахунку методом змінних стану

Надано схему електричного кола (рис.5.1) і його параметри:



$$E = 36 \text{ В};$$

$$R_1 = 25 \text{ Ом}; \quad R_2 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 15 \text{ Ом};$$

$$L = 40 \text{ мГн} = 0.04 \text{ Гн};$$

$$C = 10 \text{ мкФ} = 10^{-5} \text{ Ф}.$$

Визначити: струм $i_L(t)$ і напругу на ємності $u_C(t)$.

Рисунок 5.1 – Схема електричного кола

Розрахунок схеми до комутації, як і в класичному методі (див. розд. 3.2.4 на стр. 25) дає такі результати: $i_L(0_-) = 0.6 \text{ А}$; $u_C(0_-) = 12 \text{ В}$.

Знаходимо залежні початкові умови (див. розд. 3.2.4 на стр. 26):

$$i'_L(0) = 0 \text{ А/с}; \quad u'_C(0) = 3.6 \cdot 10^4 \text{ В/с}; \quad i_1(0) = 0.96 \text{ А}; \quad i_3(0) = 0.36 \text{ А}.$$

Відкриємо новий файл в середовищі *Mathcad* і в робочому полі внесемо всі вихідні данні.

Складемо рівняння для наданої схеми за законами Кірхгофа і сформуємо матриці, які пов'язують вихідні величини зі змінними стану і джерелами живлення.

Приклад *Mathcad*-файлу, призначеного для розрахунку чисельним методом перехідного процесу в лінійному електричному колі другого порядку наведено далі.

Метод змінних стану

Крок інтегрування : $h := 0.00002$

Кількість інтервалів: $N := 200$

$u'_C \quad i'_L \quad u_C \quad i_L \quad i_I \quad i_C$ - Вектор вихідних величин

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & L & -1 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & R_I & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -h & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{- матриця коефіцієнтів}$$

$$F_{kir} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- Вектор джерел енергії}$$

Розв'язання системи рівнянь змінних стану методом Ейлера

$M_{-1} := M^{-1}$ - зворотна матриця коефіцієнтів

$$Y := \left| Y^{(0)} \leftarrow \begin{pmatrix} 3.6 \times 10^4 \\ 0 \\ u_{C_0} \\ i_{L_0} \\ 0.96 \\ 0.36 \end{pmatrix} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- Вектор} \\ \text{Початкових} \\ \text{умов} \end{array}$$

for $k \in 1..N$

$$\left| \begin{array}{l} F_{met} \leftarrow \text{submatrix}(Y, 2, 3, k-1, k-1) \\ F \leftarrow \text{stack}(F_{kir}, F_{met}) \\ Y^{(k)} \leftarrow M_{-1} \cdot F \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Блок ітерацій} \\ Y \end{array}$$

Результати розв'язку представлено у графічному вигляді на наступній сторінці.

Результати розрахунку перехідного процесу:

$$k := 0..N$$

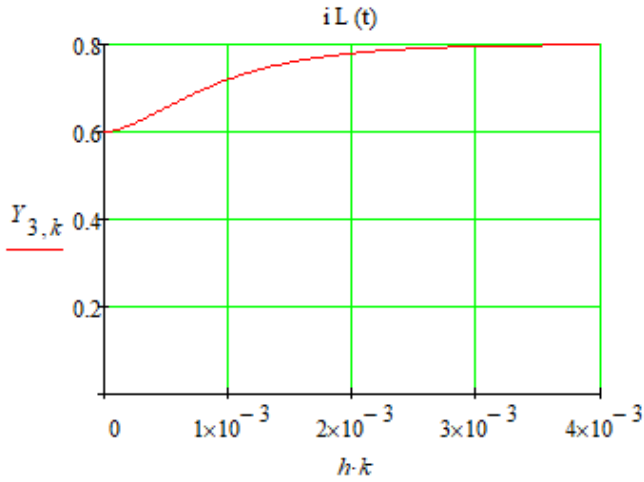


Рисунок 5.2 – Графічна залежність $i_L(t)$

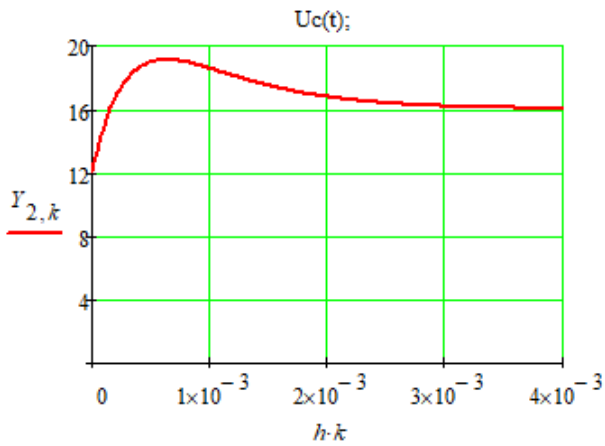


Рисунок 5.3 – Графічна залежність $u_C(t)$

5.3 Завдання на підготовку до лабораторної роботи

5.3.1 Вивчити теоретичний матеріал за темою роботи по [1,2,3].

5.3.2 Завчасно підготувати бланк лабораторної роботи, куди включити: мету роботи, схему і параметри кола, результати знаходження незалежних і залежних початкових умов Вашого кола.

5.4 Контрольні запитання

5.4.1 В чому полягають основні ідеї метода змінних стану?

5.4.2 В чому полягають основні ідеї метода Ейлера для розв'язання *ЗДР* першого порядку.

5.4.3 Яку структуру мають матричні рівняння для розрахунку перехідних процесів методом змінних стану?

5.5 Матеріали, інструменти, прилади, обладнання

Для виконання лабораторної роботи необхідно мати комп'ютер з установленим пакетом *Mathcad*.

5.6 Вказівки з техніки безпеки

Виконувати правила техніки безпеки. Періодично через 10 - 20 хвилин зберігати результати роботи.

5.7 Порядок проведення лабораторної роботи

5.7.1 Відкрити пакет *Mathcad* звичайним шляхом. Записати в текстовому полі: Лабораторна робота №9к "Дослідження ...".

5.7.2 Комп'ютерним змінним присвоїти вхідні данні.

5.7.3 Скласти у робочому полі *Mathcad*-програму для розрахунку Вашого електричного кола. Зробити розрахунки, показати викладачу результати. Зберегти у пам'яті комп'ютера та записати до бланку звіту всі результати. Завершити сеанс роботи на комп'ютері.

5.8 Зміст звіту

Побудувати графіки. По роботі зробити висновки.

6. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

6.1 Бойко В.С. Теоретичні основи електротехніки. – К., Высшая школа, 2005. – 496 с. Ил.

6.2 Л.А.Бессонов Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1984.–528 с.

6.3 Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учебное пособие для вузов/ Под ред. проф. П.А. Ионкина.– М.: Энергоиздат, 1982.–768 с., ил.

6.4 Кирьянов Д.В. Mathcad 15/ Mathcad Prime 1.0 – СПб.: БХВ – Петербург, 2012. – 432 с.