

**Шевченко В.Г., Фурсіна А.Д., Шумикін С.О.,
Кружнова С.Ю.**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА**

Частина 1

Теоретична механіка

**TEXTBOOK
THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**

Part 1

Theoretical mechanics

2022

УДК 531.8 (075.8)

ТЗЗ

Рекомендовано до видання Вченою радою НУ «Запорізька політехніка», протокол № 6 від 24 березня 2022 р.

Рецензенти: Пожуєв В.І., д-р фіз.-мат. наук, професор;
Овчинников О.В., д-р техн. наук, професор;
Лазебна Н.В., д-р філол. наук, доцент.

Автори:

Шевченко В.Г., канд. техн. наук, доцент;
Фурсіна А.Д., канд. техн. наук, доцент;
Шумикін С.О., канд. техн. наук, доцент;
Кружнова С.Ю., ст. викл.

Теоретична та прикладна механіка = Theoretical and Applied Mechanics : навчальний посібник : в 4 ч. Ч. 1 : Теоретична механіка / Шевченко В. Г., Фурсіна А. Д., Шумикін С. О., Кружнова С. Ю. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 188 с.

ISBN 978-966-653-537-8

Книга «Теоретична та прикладна механіка» є навчальним посібником із прикладної механіки для студентів немеханічних спеціальностей. Обсяг матеріалу обумовлений програмою з теоретичної та прикладної механіки для технічних вищих навчальних закладів. Даний навчальний посібник призначений для освоєння студентами програмного матеріалу українською та англійською мовами.

"Theoretical and Applied Mechanics" is a textbook on applied mechanics for students of non-mechanical specialties. The volume of book material corresponds to the programme on theoretical and applied mechanics for technical universities. This textbook focuses on students's skills to master the syllabus content in the Ukrainian and English languages.

ISBN 978-966-653-537-8

© НУ «Запорізька політехніка»
© Шевченко В.Г., Фурсіна А.Д.,
Шумикін С.О., Кружнова С.Ю.
© Видавництво «Просвіта»

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник розрахований на здобувачів вищої освіти (студентів) немеханічних спеціальностей і містить необхідний обсяг знань відповідно програми до дисципліни «Теоретична та прикладна механіка».

Потреба у створенні навчального посібника невеликого об'єму виникла тому, що студенти немеханічних спеціальностей закладів вищої освіти при вивченні «Теоретичної та прикладної механіки» вимушені користуватися великою кількістю джерел, що ускладнює роботу і розпорошує їх увагу при вивченні досить складної технічної дисципліни.

Студенти матимуть в своєму розпорядженні достатньо компактний посібник, в якому об'єднані основні принципи дослідження та розрахунку на міцність елементів машин та механізмів, що відповідає програмі дисципліни «Теоретична та прикладна механіка» для студентів немеханічних спеціальностей. Згідно цієї програми студенти повинні оволодіти основами загальноінженерних дисциплін: «Теоретична механіка», «Теорія механізмів і машин», «Опір матеріалів» та «Деталі машин». Відповідно посібник складається з 4-х частин.

Перша частина підручника з основ теоретичної механіки містить необхідні для формування інженерного мислення загальнотеоретичні розділи: основи статички та кінематики, абстрактні поняття та моделі явищ.

В стандартах вищої освіти України серед багатьох компетентностей та програмних результатів навчання зазначено, що випускники закладів вищої освіти мають володіти іноземною мовою, яка дозволяє вільно спілкуватися з професійних питань усно і письмово як державною так і іноземною мовами, включаючи знання спеціальної термінології та навички міжособистісного спілкування, обговорювати результати професійної діяльності з фахівцями. Виходячи з цього, викладання даної дисципліни планується навчальною програмою українською мовою та англійською, як міжнародною мовою.

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1 Основні поняття теоретичної механіки	8
2 Аксиоми статички. Закони Ньютона	14
1 СТАТИКА	26
1.1 Види в'язей	26
1.2 Система збіжних сил	30
1.3 Поняття пари сил. Момент сили відносно точки	54
1.4 Система сил розташованих в одній площині. Головний вектор та головний момент плоскої системи сил	64
1.5 Умови та рівняння рівноваги плоскої системи сил ...	78
2 КІНЕМАТИКА	88
2.1 Кінематика точки	90
2.2 Вектор швидкості точки	100
2.3 Вектор пришвидчення точки	110
2.4 Визначення швидкості та пришвидчення точки при координатному та натуральному способах задавання руху	114
2.5 Рівномірний та рівнозмінний рух точки	120
2.6 Проекції пришвидчення на натуральні осі	126
2.7 Кінематика твердого тіла	140
2.8 Плоскопаралельний рух тіла	160
ЛІТЕРАТУРА	166
ДОДАТОК А Площі і центри ваги плоских фігур	168
ДОДАТОК Б Міжнародна метрична система одиниць	180
ДОДАТОК В Геометричні характеристики плоских перерізів	182
ДОДАТОК Г Контрольні питання	184

CONTENTS

INTRODUCTION	7
1 Basic concepts of theoretical mechanics	9
2 Axioms of statics. Newton's laws	15
1 STATICS	27
1.1 Types of constraints	27
1.2 System of converging forces	31
1.3 The concept of a pair of forces. Moment of force relative to a point	55
1.4 The system of forces located in one plane. The main vector and the main moment of a flat system of forces ...	65
1.5 Conditions and equations of equilibrium of a flat system of forces	79
2 KINEMATICS	89
2.1 Kinematics of a point	91
2.2 Vector of the velocity of a point	101
2.3 Vector of the acceleration of a point	111
2.4 Determination of velocity and acceleration of a point at coordinate and natural ways of setting the movement	115
2.5 Uniform and equal-variable motion of a point	121
2.6 Projections of acceleration on natural axes	127
2.7 Kinematics of a rigid body	141
2.8 Plane-parallel motion of the body	161
LITERATURE	166
Appendix A Squares and centers of gravity of flat figures	169
Appendix B International metric system of units	181
Appendix C Geometric characteristics of flat sections	183
Appendix D Control questions	185

ВСТУП

Дисципліна «Теоретична та прикладна механіка» представляє собою курс, мета якого – вивчення руху та напруженого стану елементів машин та будівельних конструкцій під дією прикладених до них сил. Перша частина цього підручника є теоретичною базою для інших трьох частин: «Теорія механізмів і машин», «Опір матеріалів», «Деталі машин». Механіку поділяють на теоретичну та прикладну. В теоретичній механіці встановлюють загальні закономірності механічного руху тіл незалежно від їхнього конструктивного призначення. Під терміном «прикладна механіка» розуміють область механіки, присвячену вивченню руху та напруженого стану реальних технічних об'єктів – конструкцій машин, робототехнічних систем, тощо з урахуванням основних закономірностей, встановлених в теоретичній механіці. Прикладна механіка може також розглядатись як частина більш загальної області науки – машинознавства, яка включає крім механіки теорію проектування та технологію виготовлення машин.

В цьому посібнику курс «Теоретична та прикладна механіка» представлено в скороченому вигляді, що передбачено навчальною програмою для немеханічних спеціальностей. Об'єм дисципліни розрахований на те, щоб надати майбутнім інженерам достатні знання в області загальної механіки машин в питаннях машинобудівного проектування, а також служити загальнотехнічною базою при вивченні механічних розділів спеціальних дисциплін на вищих курсах.

Виникнення і розвиток механіки як науки пов'язано з історією розвитку виробничих сил суспільства та рівнем техніки на кожному етапі цього розвитку. В стародавні часи розвиток механіки зводився до задоволення потреб будівельної техніки, а саме: до вивчення так званих найпростіших машин – блок, важіль, нахилена площина та умов рівноваги тіл (статика).

INTRODUCTION

Discipline “Theoretical and applied mechanics” is a course whose purpose is to study the motion and stress state of machine elements and building structures under the action of forces applied to them. The first part of this textbook is the theoretical basis for the other three parts: "Theory of Mechanisms and machines", "Strength of materials", "Machine parts". Mechanics is divided into theoretical and applied. In theoretical mechanics, the general laws of mechanical motion of bodies are established, regardless of their constructive purpose. The term "applied mechanics" means the field of mechanics, devoted to the study of motion and stress of real technical objects – machine structures, robotic systems, etc., taking into account the basic laws established in theoretical mechanics. Applied mechanics can also be considered as part of a more general field of science – mechanical engineering, which includes in addition to mechanics, design theory and technology of machine manufacturing.

In this textbook, the course "Theoretical and Applied Mechanics" is presented in abbreviated form, which is provided by the curriculum for non-mechanical specialties. The scope of the discipline is designed to provide future engineers with sufficient knowledge in the field of general machine mechanics and in mechanical engineering design, as well as to serve as a general technical basis for studying the mechanical sections of special disciplines in higher courses.

The emergence and development of mechanics as a science is associated with the history of the development of the productive forces of society and the level of technology at each stage of this development. In ancient times, the development of mechanics was reduced to meeting the needs of construction equipment, namely: to study the so-called simplest machines – block, lever, inclined plane and equilibrium conditions of bodies (statics).

Обґрунтування основ статички міститься уже в працях видатного вченого стародавності Архімеда (287 – 217 р. до н.е.). Розвиток динаміки починається значно пізніше – в ХУ – ХУІ століттях, що пов'язано з піднесенням торгівлі, ремесел, мореплавання, а також з важливими астрономічними відкриттями. Головні заслуги в створенні основ динаміки належать геніальним дослідникам Галілео Галілею (1564 – 1642) та Ісааку Ньютону (1643 – 1727). В ХУІ-ІІ столітті починається інтенсивний розвиток в механіці аналітичних методів, тобто методів, основаних на застосуванні диференціального та інтегрального обчислення. Дослідниками в цій галузі були Леонард Ейлер (1707 – 1783), Жак Лерон Даламбер (1717 – 1783), Жозеф Луї Лагранж (1736 – 1813). Кінематика, як окремий розділ механіки, виділилась лише в першій половині 19 століття під впливом попиту машинобудування, яке почало бурхливо розвиватися.

1 Основні поняття теоретичної механіки

Теоретична механіка представляє собою ту частину механіки, в якій вивчаються найбільш загальні закони механічного руху. Рух є основна властивість матерії й форма її існування.

Механічним рухом називається найпростіша форма руху матерії, а саме зміна взаємного положення фізичних тіл у просторі з часом.

Механічний рух - не єдина форма руху, що існує в природі. Будь-які зміни, що відбуваються в природі, називають рухом. Інші, більш складні форми руху матерії, наприклад, теплові, хімічні, біологічні, дуже різноманітні. У нашому курсі вони не розглядаються.

У теоретичній механіці поняття руху нерозривно пов'язане з поняттям простору та часу. Простір і час є формами існування матерії.

Основи класичної механіки, які представлені в цьому підручнику, основані на законах Ньютона. Однак ці закони справедливі в межах швидкостей значно менших швидкості світла ($c = 300000 \text{ км/с}$).

The substantiation of the basics of statics is already contained in the works of the eminent scientist of antiquity Archimedes (287 – 217 BC). The development of dynamics begins much later – in the XV – XVI centuries, which is associated with the rise of trade, crafts, navigation, as well as important astronomical discoveries. The main merits in creating the foundations of dynamics belong to the genius researchers Galileo Galilei (1564 – 1642) and Isaac Newton (1643 – 1727). In the eighteenth century began the intensive development of the mechanics of analytical methods, ie methods based on the application of differential and integral calculus. Researchers in this field were Leonard Euler (1707 – 1783), Jacques Leron D'Alembert (1717 – 1783), Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813). Kinematics, as a separate branch of mechanics, stood out only in the first half of the 19th century under the influence of the demand for mechanical engineering, which began to develop rapidly.

1 Basic concepts of theoretical mechanics

Theoretical mechanics is the part of mechanics in which the most general laws of mechanical motion are studied. Movement is the main property of matter and the form of its existence.

Mechanical motion is the simplest form of motion of matter, namely the change in the relative position of physical bodies in space over time.

Mechanical motion is not the only form of motion that exists in nature. Any changes that occur in nature are called movement. Other, more complex forms of motion of matter, such as thermal, chemical, biological, are very diverse. They are not considered in our course.

In theoretical mechanics, the concept of motion is indissoluble linked with the concept of space and time. Space and time are forms of existence of matter.

The basics of classical mechanics presented in this textbook are based on Newton's laws. However, these laws are valid within speeds much lower than the speed of light ($c = 300000 \text{ km/s}$).

Класична механіка може розглядатись як відоме наближення до теорії відносності, однак достатнє для описування порівняно повільних рухів у техніці. За класичною механікою залишаються її переваги - велика розробленість та простота практичного розрахунку при достатньо хорошій точності збігу отримуваних результатів з дослідом.

В теоретичній механіці вихідною точкою досліджень є спостереження, досвід, практика. Але вивчаючи будь-яке явище неможливо відразу охопити його у всій різнобічності. Тому доводиться виділяти в ньому тільки найбільш суттєві для нього риси, абстрагуючись від того, що виявляється менш важливим. Цей метод (метод абстракції) є основним і в теоретичній механіці, де абстракціями є абсолютно тверде тіло та матеріальна точка.

Відволікаючись при спостереженні та вивченні окремих явищ від усього поодинокого й випадкового, ми отримуємо можливість установлювати загальні закономірності та закони. Застосовуючи метод абстракції можна установити деякі прості закони, які служать основою всіх положень класичної механіки. Ці основні закони грають роль постулатів або аксіом. За своєю структурою теоретична механіка нагадує геометрію. В основі її лежать аксіоми, при використанні яких доводяться теореми

Тіло, рух або рівновага якого вивчається в теоретичній механіці, розглядається як абсолютно тверде. ***Абсолютно твердим називається тіло, у якому відстань між будь-якими двома точками завжди залишається незмінною.***

Абсолютно твердих тіл у дійсності не існує, але оскільки деформації реальних твердих тіл у практичних умовах невеликі, є можливість цими деформаціями знехтувати, не вносячи суттєвих помилок у розрахунки.

У ряді випадків виявляється більш зручним вивчати тіло, розміри якого дуже малі. Таке тіло, приймають за матеріальну точку. ***Матеріальною точкою називається точка, у якій зосереджена визначена кількість матерії.*** Отже, матеріальна точка - це тіло, розмірами якого можна знехтувати.

Classical mechanics can be considered as a well-known approximation to the theory of relativity, but it is sufficient to describe relatively slow motions in engineering. Classical mechanics has its advantages - great development and simplicity of practical calculation with a good enough accuracy of coincidence of the obtained results with the experiment.

In theoretical mechanics the starting point of research is observation, experience, practice. But studying any phenomenon, it is impossible to immediately cover it in all its diversity. Therefore it is necessary to allocate in it only the most essential for its features, abstracting from that which appears less important. This method (the method of abstraction) is the main one in theoretical mechanics, where abstractions are an absolutely rigid body and a material point.

Distracting from the observation and study of individual phenomena from all the lonely and accidental, we get the opportunity to establish general patterns and laws. Applying the method of abstraction we can establish some simple laws that form the basis of all the provisions of classical mechanics. These basic laws play the role of postulates or axioms. In its structure, theoretical mechanics resembles geometry. It is based on axioms, which use theorems.

A body whose motion or equilibrium is studied in theoretical mechanics is considered to be absolutely rigid. ***Absolutely rigid is a body in which the distance between any two points always remains the same.***

Absolutely rigid bodies do not really exist, but since the deformations of real rigid bodies are small in practical conditions, it is possible to ignore these deformations without making significant errors in the calculations.

In some cases, it is more convenient to study the body, the size of which is very small. Such a body is taken as a material point. ***A material point is a point at which a certain amount of matter is concentrated.*** Thus, a material point means a body, the size of which can be neglected in some tasks.

Системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення та рух яких взаємно пов'язані між собою.

До числа основних понять механіки відноситься поняття сили.

Силою прикладеною до тіла, вважають таку дію з боку іншого тіла, у результаті якої змінюється рух даного тіла. Знаючи змінення руху тіла, можна визначити діючу силу. Тому **сила є величиною, що характеризує механічну взаємодію матеріальних тіл, виступає як кількісна міра цієї взаємодії.**

Як показує досвід, дія сили на дане тіло повністю визначається такими трьома факторами: точкою прикладення, напрямом, інтенсивністю (величиною – числовим значенням).

Точкою прикладення сили називається точка даного тіла, на яку ця сила діє.

Напрямок сили називають напрямком того руху, який отримує точка під дією сили. Пряма, вздовж якої діє сила, називається **лінією дії сили**.

У системі СІ одиницею сили є 1 ньютон (Н), $1\text{Н} = 0.102\text{ кгс}$.

Сила, як фізична величина характеризується не тільки своїм числовим значенням, або модулем, але й напрямом, а отже є величиною **векторною**. Силу зображують вектором (рис. 1.1). Початок вектора A визначає точку прикладення сили до тіла, його напрямок AB – лінію дії, а стрілка – напрям сили.

Довжина вектора (у певному масштабі) виражає числове значення (модуль) даної сили.

Сукупність сил, прикладених до точки (тіла) називається системою сил.

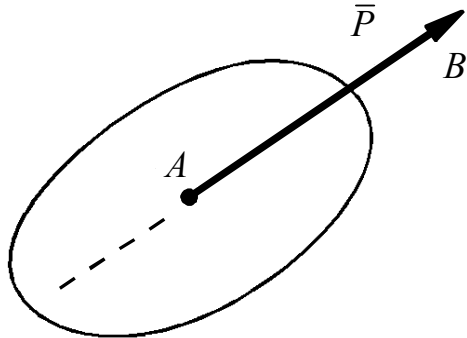


Рис. 1.1. Дія сили на тіло

A system of material points is a set of material points, the positions and motion of which are interconnected.

Among the basic concepts of mechanics is the concept of force.

A force applied to a body is considered to be such an action on the part of another body, as a result of which the movement of the given body changes. Knowing the change in body motion, you can determine the force. Therefore, ***force is a quantity that characterizes the mechanical interaction of material bodies, acts as a quantitative measure of this interaction.***

Experience shows that the effect of force on a given body is completely determined by the following three factors: the point of application, direction, intensity (value – a numerical value).

The point of application of a force is the point of a given body on which this force acts.

The direction of force is called the direction of the movement, which receives the point of application of force under the action of force. The line along which the force acts is called ***the line of force***.

In the SI system, the unit of force is 1 Newton (H), $1\text{H} = 0.102\text{ kgf}$.

Force, as a physical quantity, is characterized not only by its numerical value or modulus, but also by its direction, and is therefore a ***vector*** quantity. The force is represented by a vector (Fig. 1.1).

The beginning of the vector A determines the point of application of force to the body, its direction AB – the line of action, and the arrow – the direction of force.

The length of the vector (to a certain scale) expresses the numerical value (modulus) of a given force.

The set of forces applied to a point (body) is called a system of forces.

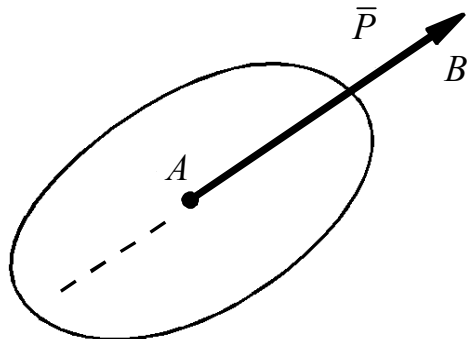


Fig. 1.1. The action of force on the body

Якщо під дією прикладених сил тіло по відношенню до оточуючих тіл знаходиться в спокою або рухається прямолінійно і рівномірно, то цю систему сил називають *зрівноваженою*, а такий стан тіла – *статичною рівновагою*.

Якщо одну систему сил, прикладених до даного тіла, можна замінити іншою, не порушуючи при цьому стану руху тіла, то такі дві системи називаються *еквівалентними*. Звичайно, дві системи, що еквівалентні третій, - еквівалентні між собою. Таким чином, дві системи сил є еквівалентними, якщо кожна з них окремо зрівноважує одну й ту ж третю систему сил.

Якщо дана система еквівалентна одній силі, то така сила називається *рівнодіючою* цієї системи, а сили, сумісну дію яких можна замінити рівнодіючою, називаються її *складовими*.

В основі теоретичної механіки лежать система аксіом статички та закони Ньютона, викладені ним в 1687 році у книзі «Математичні засади природничої філософії».

2 Аксіоми статички. Закони Ньютона

Аксіома 1 (про абсолютно тверде тіло).

Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, утворюють зрівноважену систему, якщо вони рівні за модулем, направлені по одній прямій та протилежні за напрямом (рис. 1.2).

Цю умову рівноваги можна записати так

$$\bar{P}_2 = -\bar{P}_1 \quad \text{або} \quad \bar{P}_2 + \bar{P}_1 = 0.$$

Аксіома 2 (про приєднання або виключення зрівноваженої системи сил)

Приєднання або відкидання сил, взаємно зрівноважених, не змінює рівноваги чи руху твердого тіла.

З першої та другої аксіом витікає наслідок.

Не змінюючи дії сили на тверде тіло, її можна переносити вздовж лінії її дії в будь-яку точку.

Сили, які можна переносити вздовж лінії їх дії, називаються ковзаючими векторами. Отже, *сила є ковзаючим вектором*.

If under the action of applied forces the body in relation to the surrounding bodies is at rest or moves in a straight line and evenly, then this system of forces is called **balanced**, and this state of the body – **static equilibrium**.

If one system of forces applied to a given body can be replaced by another without disturbing the state of motion of the body, then such two systems are called **equivalent**. Of course, two systems that are equivalent to the third are equivalent to each other. Thus, two systems of forces are equivalent if each of them separately balances the same third system of forces.

If a given system is equivalent to one force, then such a force is called **resultant** of this system, and forces, the combined action of which can be replaced by resultant, are called its **components**.

Theoretical mechanics is based on the system of axioms of statics and Newton's laws, set out by him in 1687 in the book "Mathematical Principles of Natural Philosophy".

2 Axioms of statics. Newton's laws

Axiom 1 (about an absolutely rigid body).

Two forces applied to an absolutely solid body form a balanced system if they are equal in modulus, directed in one straight line and opposite in direction (Fig. 1.2).

This equilibrium condition can be written as follows

$$\bar{P}_2 = -\bar{P}_1 \quad \text{or} \quad \bar{P}_2 + \bar{P}_1 = 0.$$

Axiom 2 (on joining or excluding a balanced system of forces).

Joining or rejecting forces that are mutually balanced does not change the balance or motion of a solid body.

From the first and second axioms follows a consequence.

Without changing the action of force on a solid body, it can be transferred along the line of its action to any point.

The forces that can be transferred along the line of action are called sliding vectors. Therefore, **the force is a sliding vector**.

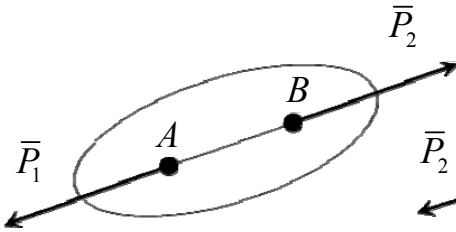


Рис. 1.2. Зрівноважена система сил

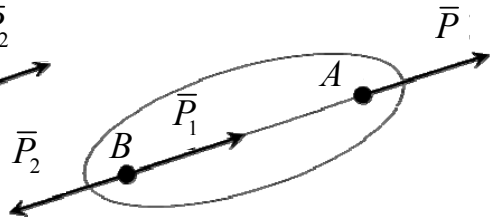


Рис. 1.3. Сила – ковзаючий вектор

Аксиома 3 (аксіома про паралелограм сил)

Рівнодіюча двох сил, прикладених в одній точці під кутом одна до одної, дорівнює їхній векторній сумі, тобто виражається за модулем й напрямом діагоналю паралелограма, побудованого на цих силах.

Якщо позначити через \bar{R} рівнодіючу двох сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 (рис. 1.4), то процес знаходження їх рівнодіючої зрозумілий з рисунка.

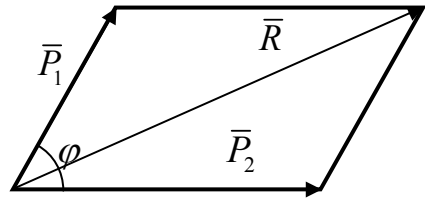


Рис. 1.4. Паралелограм сил

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos(180^\circ - \varphi) = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \varphi,$$

де $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$.

Аксиома 4 (аксіома про звільнення від в'язей)

Не змінюючи руху, а також рівноваги системи (твердого тіла) кожену в'язь, накладену на систему (тверде тіло), можна відкинути, замінивши її дію дією сил, співпадаючих з реакціями відкинутої в'язі.

Аксиома 5 (аксіома про накладення нових в'язей).

Якщо тіло або система перебуває в рівновазі, то рівновага не порушиться при накладенні на тіло або систему нових зв'язків.

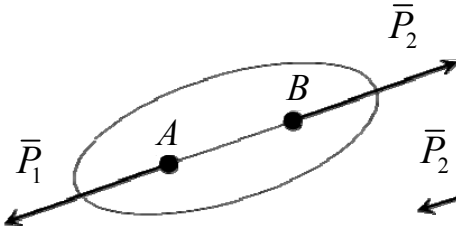


Fig. 1.2. Balanced system of forces

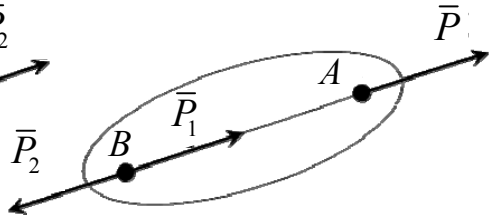


Fig. 1.3. Force – sliding vector

Axiom 3 (axiom about the parallelogram of forces).

The resultant of two forces applied at one point at an angle to each other is equal to their vector sum, ie expressed in modulus and direction by the diagonal of the parallelogram constructed on these forces.

If we denote \bar{R} by the resultant of two forces \bar{P}_1 and \bar{P}_2 (Fig. 1.4), then the process of finding their resultant is clear from the figure.

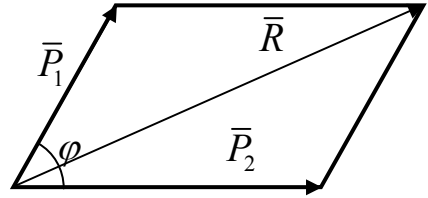


Fig. 1.4. Parallelogram of forces

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos(180^\circ - \varphi) = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \varphi,$$

$$\text{де } \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi.$$

Axiom 4 (axiom about liberation from restraints).

Without changing the motion and balance of the system (solid body), each restraint imposed on the system (solid body) can be discarded, replacing its action by the action of forces coinciding with the reactions of the rejected restraint.

Axiom 5 (axiom about the imposition of new restraints).

If the body or system is in equilibrium, the equilibrium will not be broken when new restraints are imposed on the body or system.

Наприклад, якщо стілець, що стоїть на підлозі, перебуває в рівновазі, то рівновага стільця не порушиться, якщо ніжки стільця прикріпити болтами до підлоги.

Аксіома 6 (аксіома про затвердіння).

Якщо тіло, що може деформуватись, перебуває в рівновазі, то рівновага цього тіла не порушиться, якщо, не змінюючи своєї форми, розмірів, положення в просторі, воно перетвориться в абсолютно тверде тіло, тобто затвердіє.

Затвердіння тут можна розглядати як результат накладення на частки тіла нових в'язей. Мова не йде про фізичне затвердіння, а тільки про уявлюване перетворення реального пружного тіла на абстрактне абсолютно тверде.

Закони Ньютона

Перший закон (закон інерції). *Якщо на матеріальну точку діє зрівноважена система сил, то ця точка перебуває в стані покою або рухається рівномірно й прямолінійно відносно інерціальної системи відліку.*

Це положення можна сформулювати й так: *ізольована матеріальна точка зберігає свою швидкість.*

Отже, ізольована матеріальна точка не може сама по собі змінити свою швидкість, тобто сама собі надати пришвидчення: вона потребує для цього зовнішньої дії. Зазначена властивість ізольованої матеріальної точки зберігати свою швидкість називається *інертністю* або *інерцією*. *Рух прямолінійний і рівномірний називається рухом по інерції* і відповідно до цього перший закон Ньютона називають *законом інерції*.

У природі ми не зустрічаємо тіл ізольованих, тобто не підданих дії яких-небудь сил, і практично рух по інерції відбувається при дії зрівноважених систем сил.

Другий закон. *Сила, що діє на матеріальну точку, надає цій точці пришвидчення, що має напрям сили й за модулем пропорційне модулю сили.*

Це положення може бути записане у вигляді векторного рівняння

For example, if the chair standing on the floor is in balance, the balance of the chair will not be broken if the legs of the chair are bolted to the floor.

Axiom 6 (axiom about hardening).

If a body that can be deformed (elastic body) is in equilibrium, the equilibrium of this body will not be broken, if, without changing its shape, size, position in space, it becomes an absolutely rigid body, ie hardens.

The hardening here can be considered as the result of the imposition of new restraints on the body parts. We are not talking about physical hardening, but only about the imaginary transformation of a real elastic body into an abstract absolutely rigid.

Newton's laws

The first law (the law of inertia). *If a balanced system of forces acts on a material point, then this point is at quiescence or moves uniformly and rectilinearly with respect to the inertial frame of reference.*

This position can be formulated as follows: *an isolated material point retains its velocity.*

Thus, an isolated material point cannot in itself change its velocity, that is, give itself acceleration: it requires external action. This property of an isolated material point to maintain its velocity is called *inertness or inertia*. *Rectilinear and uniform motion is called motion by inertia*, and accordingly Newton's first law is called *the law of inertia*.

In nature, we do not meet bodies of isolated, ie not subject to the action of any forces, and in practice the motion of inertia occurs under the action of balanced systems of forces.

The second law. *The force acting on a material point gives this point an acceleration that has a direction of force and is modulo proportional to the modulus of force.*

This position can be written as a vector equation

$$m\bar{a} = \bar{P}, \quad (1.1)$$

де m – маса матеріальної точки;

\bar{a} – пришвидчення;

\bar{P} – діюча сила, або рівнодіюча декількох прикладених сил.

Рівняння (1.1) називається **основним рівнянням динаміки**.

Його можна представити також у вигляді

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{P}. \quad (1.2)$$

Досвід показує, що для різних матеріальних точок маса m має різні значення, і чим більше m , тим більшу силу треба прикласти до матеріальної точки, щоб надати їй задане пришвидчення.

З сучасних наукових позицій масу слід тлумачити так, що вона властива всім об'єктам і є однією з найважливіших характеристик інертних і гравітаційних властивостей матерії.

Маса матеріальної точки представляє собою скалярну, додатну і в теоретичній механіці сталу для даної матеріальної точки величину, що залишається незмінною при будь-якому русі цієї точки. Тому рівняння (1.2) можна представити у вигляді

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{P}, \quad (1.3)$$

де $m\bar{V}$ – **кількість руху матеріальної точки**.

На підставі рівняння (1.2) отримуємо

$$m = \frac{P}{a}.$$

З досвіду відомо, що при вільному падінні тіла на нього діє сила ваги й що в даному пункті земної кулі всі тіла падають у порожнечі з одним і тим самим пришвидченням g , що дорівнює,

$$m\bar{a} = \bar{P}, \quad (1.1)$$

where m – the mass of the material point;

\bar{a} – acceleration;

\bar{P} – acting force, or resultant force of several applied forces.

Equation (1.1) is called ***the basic equation of dynamics***. It can also be represented as

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{P}. \quad (1.2)$$

Experience shows that for different material points the mass m has different values, and the more m , the more the force must be applied to the material point to give it a given acceleration.

From modern scientific points of view, mass should be interpreted so that it is inherent in all objects and is one of the most important characteristics of the inert and gravitational properties of matter.

The maca of a material point is a scalar, positive, and in theoretical mechanics constant value for a given material point, which remains unchanged at any motion of this point. Therefore, equation (1.2) can be represented as

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{P}, \quad (1.3)$$

where $m\bar{V}$ – the amount of motion of a material point.

Based on equation (1.2) we obtain

$$m = \frac{P}{a}.$$

It is known from experience that when a body falls freely, the force of gravity acts on it and that at a given point of the globe all bodies fall in a void with the same acceleration g , equal,

наприклад, для середніх широт 9.81 м/с^2 . Якщо позначити вагу матеріальної точки через G , то на підставі попередньої рівності отримаємо

$$m = \frac{G}{g}. \quad (1.4)$$

Цією формулою будемо користуватися для визначення мас тіл певної ваги.

Одиницею маси в системі СІ є кг – основна одиниця цієї системи.

Третій закон (закон про рівність дії й протидії). *Всяка дія викликає рівну й протилежно спрямовану протидію.* Якщо два тіла стикаються в точці O (рис. 1.5), то сила \vec{P}_{AB} тиску тіла A на

B дорівнює за числовим значенням і протилежна за напрямом силі \vec{P}_{BA} тиску тіла B на A .

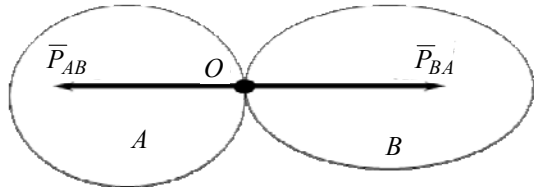


Рис. 1.5. Дія та протидія сил

Таким чином, третій закон установлює, що в природі не може бути однієї дії сили. Необхідно відзначити, що дія й протидія представляють собою дві сили, прикладені до двох різних тіл. Тому не можна вважати, що ці дві сили зрівноважуються в тому сенсі, як це говорять про дві чисельно рівні сили, прикладені до одного й того самого тіла (див. першу аксіому). Виділяючи з декількох взаємодіючих тіл одне й вивчаючи питання про дію сил на це тіло, ми повинні чітко розмежовувати прикладені до виділеного тіла «дії» на нього інших тіл від «протидій» розглянутого тіла, прикладених до цих тіл.

Четвертий закон (закон про незалежність дії сил). *Якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то пришивидчення точки дорівнює векторній сумі пришивидчень, що надають точці кожна із цих сил.*

for example, to average latitudes of 9.81 m/s^2 . If we denote the weight of a material point by G , then on the basis of the previous equality we obtain

$$m = \frac{G}{g}. \quad (1.4)$$

We will use this formula to determine the masses of bodies of a certain weight.

The unit of mass in the SI system is kg – the basic unit of this system.

The third law (the law of equality of action and counteraction).

Every action provokes an equal and oppositely directed counteraction. If two bodies contact at point O (Fig. 1.5), then the force \bar{P}_{AB} of pressure of body A on B is equal in numerical value and opposite in direction to the force \bar{P}_{BA} of pressure of body B on A .

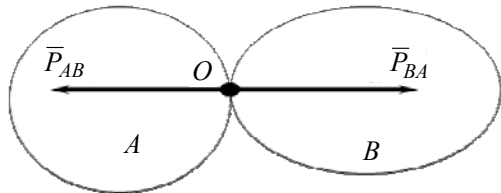


Fig. 1.5. Action and counteraction of forces

Thus, the third law establishes that in nature there can be no one-sided action of force. It should be noted that action and counteraction are two forces applied to two different bodies. Therefore, we cannot assume that these two forces are balanced in the sense of two numerically equal forces applied to the same body (see the first axiom). By distinguishing one from several interacting bodies and studying the question of the action of forces on this body, we must clearly distinguish the “actions” of other bodies applied to the selected body from the “counteractions” of the body in question applied to these bodies.

The fourth law (the law on the independence of forces actions). *If several forces act on a material point, then the acceleration of the point is equal to the vector sum of the accelerations given to the point by each of these forces.*

Із цього закону випливає, що при одночасній дії декількох сил, матеріальна точка одержує таке пришвидчення, яке їй надає рівнодіюча прикладених сил.

Дійсно, якщо на матеріальну точку M маси m діють сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2 \dots \vec{P}_n$ то рівнодіюча \vec{P} дорівнює їхній векторній сумі. За рівнянням (1.1) маємо

$$m\vec{a} = \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$$

або

$$m\vec{a} = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + \dots + m\vec{a}_n.$$

Отже,
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n.$$

Відомо, що всякий механічний рух є *відносним* і що його можна спостерігати й вивчати тільки по відношенню до вибраної системи відліку. Тому в динаміці виникає досить важливе принципове питання, а саме: у якій системі відліку застосовні до механічного руху закони Ньютона? Ці закони *справедливі в інерціальній системі координат, що рухається відносно абсолютного простору поступально, прямолінійно та рівномірно*. Як показують спостереження та досвід, у більшості задач динаміки за систему відліку можна приймати систему осей, пов'язаних із Землею.

It follows from this law that with the simultaneous action of several forces, the material point receives such an acceleration, which the resultant of the applied forces gives it.

Indeed, if forces $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n$ act on a material point M of mass m , then the resultant force \bar{P} is equal to their vector sum. By equation (1.1) we have

$$m\bar{a} = \bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n$$

or

$$m\bar{a} = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 + \dots + m\bar{a}_n.$$

So,
$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n.$$

It is known from kinematics that any mechanical motion is *relative* and that it can be observed and studied only in relation to the selected frame of reference. Therefore, in the dynamics there is a very important fundamental question, namely: in which frame of reference are Newton's laws applicable to mechanical motion? *These laws are valid in an inertial coordinate system that moves relative to absolute space translationally, rectilinearly, and uniformly.* Observations and experience show that in most problems of dynamics, the frame of reference can be taken as a system of axes associated with the Earth.

1 СТАТИКА

1.1 Види в'язей

В'яззю називають зв'язки, що обмежують рух тіла, що розглядається, які здійснюють інші матеріальні об'єкти.

В'язями є матеріальні тіла, тверді або гнучкі. Напрямок реакції в'язі завжди протилежний напрямку того руху, що відібрано в тіла даною в'яззю. Реакція є тією протидією, що виникає з боку в'язі при дії тіла на в'язь. Тому дія тіла на в'язь і реакція в'язі – це сили, рівні за модулем й протилежно спрямовані.

Реакції виникають у результаті дії на тіло зовнішніх сил і передачі їх на в'язі. При відсутності зовнішніх сил будуть відсутні й сили реакцій. Відповідно до цього *реакції в'язей називаються силами пасивними* на відміну від *зовнішніх, прикладених (активних) сил*, що викликають своєю дією виникнення пришвидчень точок системи й реакцій в'язей.

Найпростішим видом в'язі є опора, що здійснюється безпосереднім зіткненням поверхонь тіл.

Залежно від характеру закріплення тіла або від виду опори можна вказати наступні основні типи в'язей.

Гладка опорна поверхня (рис. 1.6 а, б); реакція спрямована по нормалі до поверхні – це положення справедливо при відсутності тертя між тілом і опорною поверхнею. У більшості випадків дією сил тертя в статиці нехтують.

Опорна точка (рис. 1.6, в); реакція спрямована по нормалі до поверхні, що опирається на цю точку.

Ковзаюча муфта або підшипник (рис. 1.6, г); реакція розташовується в площині, нормальній до направляючої осі, але напрямок її в цій площині невідомий.

Нерухома точка, наприклад, шарнір (рис. 1.6, д), підп'ятник (рис. 1.6, е), шаровий шарнір (рис. 1.6, ж); реакція проходить через цю точку, але її напрямок невідомий.

1 STATICS

1.1 Types of constraints

Constraint is called connections that restrict the movement of the body in question and are carried out by other material objects.

Constraints are material bodies, rigid or flexible. The direction of the constraint reaction is always opposite to the direction of the movement taken from the body by the given constraint. The reaction is the counteraction that arises from the constraint when the body acts on the constraint. Therefore, the action of the body on the constraint and the reaction of the constraint are forces equal in modulus and opposite.

Reactions occur as a result of the action of external forces on the body and their transfer to the constraints. Accordingly, ***the constraints reactions are called passive forces*** in contrast to ***the external (active) forces*** that cause the accelerations of the points of the system and the constraints reactions.

The simplest type of constraint is support, which is carried out by direct touching of the surfaces of the bodies.

Depending on the type of body fastening or on the type of support, you can specify the following main types of constraints.

Smooth supporting surface (Fig. 1.6 *a, б*) the reaction is directed normally to the surface - this position is valid in the absence of friction between the body and the support surface. In most cases, the action of friction forces in statics is neglected.

Supporting point ((Fig. 1.6, *в*); the reaction is directed along the normal to the surface that leans on this point.

Sliding coupling or bearing (Fig.1.6, *г*); the reaction is located in a plane normal to the guide axis, but its direction in this plane is unknown.

Motionless point, for example, a hinge (Fig.1.6, *д*), thrust bearing (Fig.1.6, *е*), ball joint (Fig.1.6, *ж*); the reaction passes through this point, but its direction is unknown.

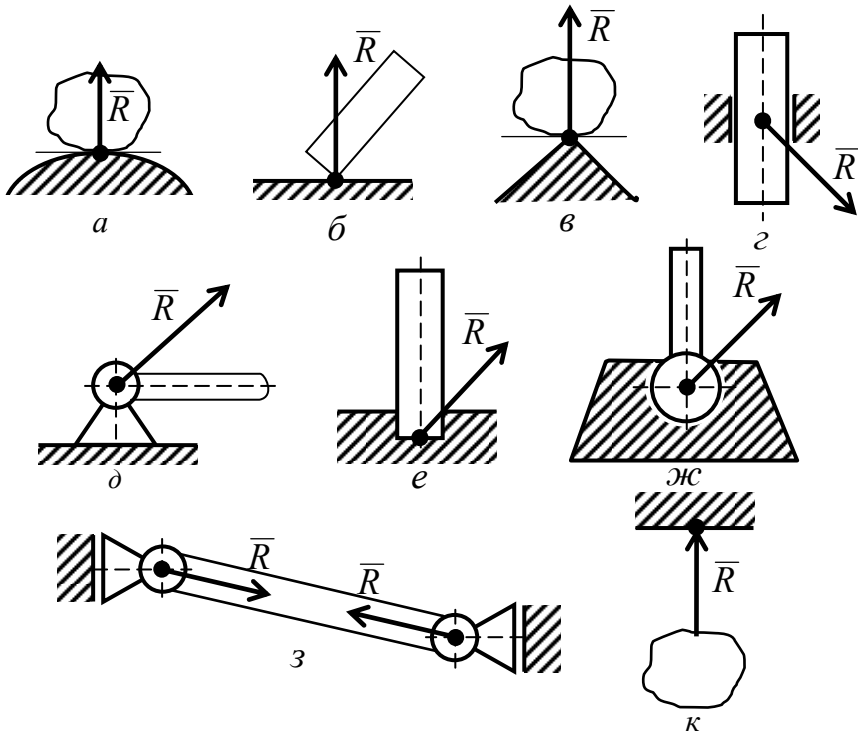


Рис. 1.6. Напрямок реакцій в'язей

Жорсткий стрижень з двошарнірним кріпленням кінців (рис. 1.6, з); якщо навантаження на стрижень діють тільки в шарнірах, то реакції спрямовані по осі, що з'єднує шарніри.

Гнучка в'язь – ланцюг, нитка (рис. 1.6, к); реакція спрямована по осі зв'язку (по нитці, ланцюгу й т.д.). Ця в'язь працює тільки на розтягання.

При практичних розрахунках найчастіше застосовують три види опор: шарнірно рухома опора (1.7, а), шарнірно нерухома опора (рис. 1.7, б) та жорстке затиснення (рис. 1.8).

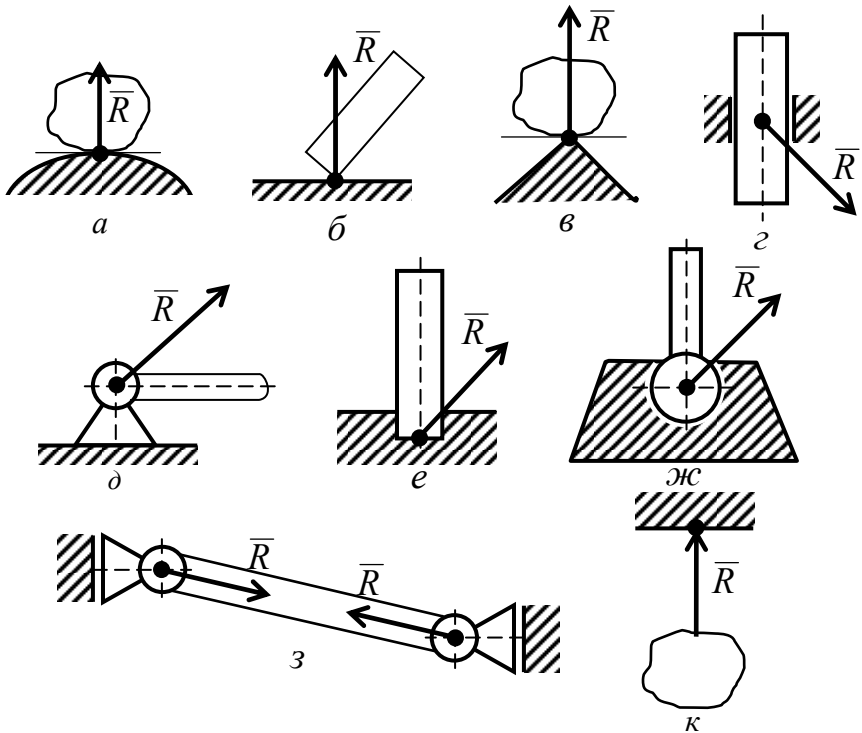
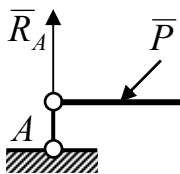


Fig. 1.6. Direction of restraints reactions

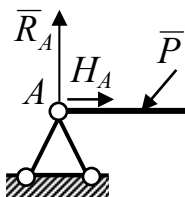
Hard rod with two-hinged fastening of the ends (Fig.1.6, з); if the loads on the rod act only in the hinges, the reactions are directed along the axis connecting the hinges.

Flexible restraint – chain, thread (Fig.1.6, κ); the reaction is directed along the axis of connection (thread, chain, etc.). This constraint only works in tension.

In practical calculations, three types of supports are most often used: hinge movable support (Fig. 1.7, a), hinge fixed support (Fig. 1.7, b) and rigid fastening (Fig. 1.8).



a



б

Рис. 1.7. Шарнірні опори

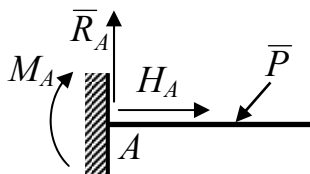


Рис. 1.8. Жорстке затиснення

1.2 Система збіжних сил

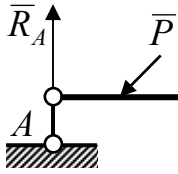
Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається системою збіжних сил. Оскільки точки прикладення збіжних сил можна перенести по лініях дії відповідних сил у точку перетину всіх цих ліній, то систему збіжних сил завжди можна замінити системою сил, прикладених в одній точці.

Знаходження рівнодіючої системи збіжних сил графічним методом

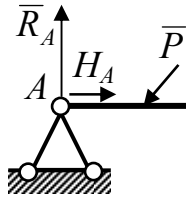
Застосовуючи послідовно правило паралелограма сил, можна знайти рівнодіючу будь-якої кількості сил.

Нехай треба додати чотири сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ прикладені в точці A (рис. 1.9). Складемо спочатку сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , побудувавши паралелограм $ABCK$, діагональ якого $\vec{AC} = \vec{R}_1$ і буде рівнодіючою двох перших сил. Потім, побудувавши паралелограм $ACDL$, знайдемо $\vec{AD} = \vec{R}_2$, яка представляє собою рівнодіючу сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$. Нарешті, з паралелограма $ADEM$ знайдемо $\vec{AE} = \vec{R}$, що і буде рівнодіючою всієї заданої системи.

Якщо проаналізувати рисунок 1.9, то легко дійти висновку, що результат, тобто вектор \vec{AE} , може бути отриманий простішим шляхом. Справді, рівнодіюча буде визначена, якщо ми



a



b

Fig. 1.7. Hinged supports

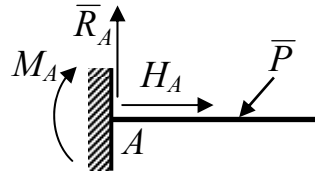


Fig. 1.8. Rigid fastening

1.2 The system of converging forces

A system of forces whose lines of action intersect at one point is called a system of converging forces. Since the points of application of converging forces can be transferred along the lines of action of the corresponding forces to the point of intersection of all these lines, the system of converging forces can always be replaced by a system of forces applied at one point.

Finding a resultant force of system of converging forces by the graphical method.

By consistently applying the rule of parallelograms of forces, you can find an resultant force of any number of forces.

Suppose we add the four forces $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ applied at point A (Fig. 1.9). We first add up forces \bar{P}_1 and \bar{P}_2 , constructing a parallelogram $ABCK$, the diagonal of which $\overline{AC} = \bar{R}_1$ will be resultant force of the first two forces. Then, constructing a parallelogram $ACDL$, we find $\overline{AD} = \bar{R}_2$, which is a resultant force of the forces $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$. Finally, from the parallelogram $ADEM$ we find $\overline{AE} = \bar{R}$ that will be resultant force of the whole given system.

If we analyze the obtained figure, it is easy to conclude that the result, ie the vector \overline{AE} , can be obtained in a simpler way. In fact, the resultant force will be determined if we

знайдемо положення точки E . Знайти цю точку можна послідовною побудовою із точки A відрізків \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} .

Але

$$\overline{AB} = \overline{P}_1;$$

$$\overline{BC} = \overline{P}_2;$$

$$\overline{CD} = \overline{P}_3;$$

$$\overline{DE} = \overline{P}_4.$$

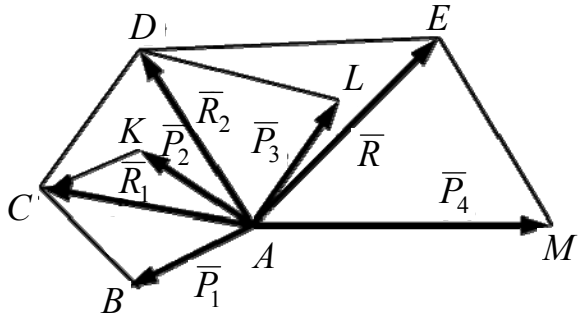


Рис. 1.9. Додавання сил графічним методом

Отже, можна знайти вектор \overline{AE} , побудувавши ламану, що складається з векторів, рівних заданим силам, і замкнувши її вектором \overline{AE} . Така побудова може бути виконана осторонь від основного рисунка тіла, навантаженого силами. Наприклад, в деякій точці O (рис. 1.10).

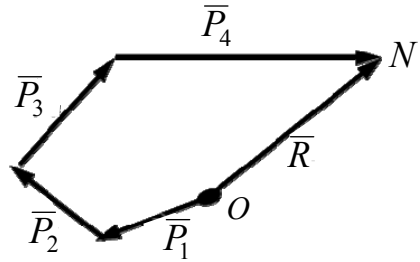


Рис. 1.10. Силувий багатокутник

Отримана фігура називається **силувим багатокутником**, а вектор \overline{ON} , що з'єднує початок першої складової з кінцем останньої й спрямований їй назустріч, – **замикаючим вектором** (замикаючою стороною). Всі вектори-складові мають загальну **течію** (напрямок по периметру багатокутника), а вектор замикаючий – **зустрічну**.

Отже, **рівнодіюча системи збіжних сил визначається за величиною й напрямом замикаючої стороною силового багатокутника, побудованого на заданих силах, як на складових.**

find the position of point E . You can find this point by sequential construction from point A of segments \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} .

But:

$$\overline{AB} = \overline{P}_1;$$

$$\overline{BC} = \overline{P}_2;$$

$$\overline{CD} = \overline{P}_3;$$

$$\overline{DE} = \overline{P}_4.$$

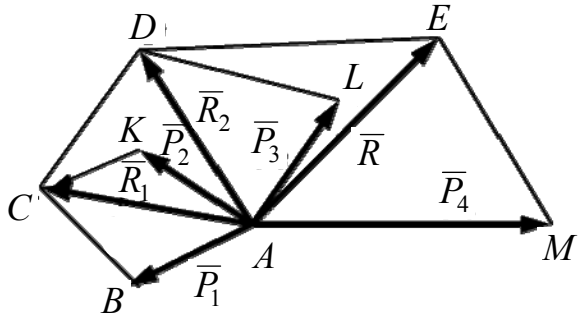


Fig. 1.9. Addition of forces graphically

Therefore, you can find a vector \overline{AE} by constructing a broken line consisting of vectors equal to the given forces, and closing it with a vector \overline{AE} . This construction can be performed away from the main figure of the body loaded with forces, for example, at some point O (Fig. 1.10). The resulting figure is called **a force polygon**, and the vector \overline{ON} connecting the beginning of the first component with the end of the last and directed towards it - the **closing vector** (closing side). All component vectors have a *common flow* (direction along the perimeter of the polygon), and the closing vector has a *countercurrent*.

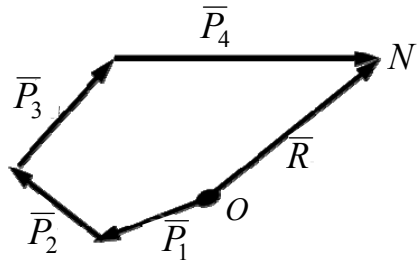


Fig. 1.10. Force polygon

Thus, **the resultant force of a system of converging forces is determined by the magnitude and direction of the closing side of the force polygon, built on given forces as components.**

Лінія дії рівнодіючої проходить через точку перетину ліній дії складових сил.

Додавання сил за правилом силового багатокутника називається *графічним додаванням* і збігається із загальним математичним правилом додавання векторів.

Операцію додавання сил можна записати так:

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots = \sum \bar{P}_i.$$

Завдання визначення *зрівноважуючої* системи збіжних сил вирішується аналогічно знаходженню рівнодіючої, але отриманий вектор треба направити в протилежний бік, тому що, як відомо, зрівноважуюча й рівнодіюча даної системи чисельно рівні одна одній, але спрямовані по одній прямій у протилежні боки.

Проекція сили на вісь

Перш ніж викласти аналітичний метод знаходження рівнодіючої, згадаємо, як визначається проекція сили на вісь.

Нехай є вектор-сила $\overline{AB} = \bar{P}$ та деяка нерухома вісь x (рис. 1.11), до того ж вектор і вісь не лежать в одній площині. Через початок A і кінець B вектора проводимо площини Π і Π_1 , перпендикулярні осі x . Ці площини перетинають вісь у точках a й b , які представляють собою проекції точок A і B на вісь. Довжина відрізка ab , узята з відповідним знаком, називається *проекцією вектора \overline{AB} на вісь x* .

Проекція вектора на вісь представляє собою алгебраїчну скалярну величину зі знак плюс або мінус залежно від того, чи збігається відрізок ab у своєму напрямку з додатним напрямком осі x .

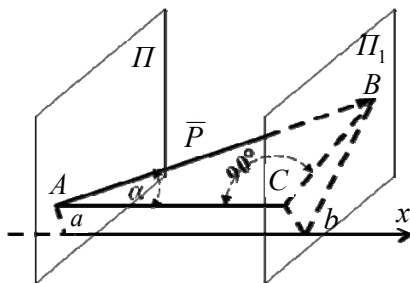


Рис. 1.11. Проекція сили на вісь

The line of action of the resultant force passes through the point of intersection of the lines of action of the component forces.

The addition of forces by the rule of a force polygon is called a ***graphical addition*** and coincides with the general mathematical rule of adding vectors.

The addition operation can be written as follows:

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots = \sum \bar{P}_i.$$

The problem of determining ***the balancing force*** of system of convergent forces is solved analogously to finding a resultant force, but the resulting vector must be directed in the opposite direction, because, as we know, the balancing and resultant forces of this system are numerically equal to each other, but directed in one straight in opposite directions.

Projection of force on the axis

Before set out the analytical method of finding an resultant force, let us recall how the projection of force is determined. Suppose there is a vector-force $\overline{AB} = \bar{P}$ and some fixed x -axis (Fig. 1.11), and the vector and the axis do not lie in the same plane. Through the beginning A and the end B of the vector we draw the planes Π and Π_1 , perpendicular to the x -axis. These planes intersect the axis at points a and b , which are the projections of points A and B on the axis. The length of the segment ab , taken with the corresponding sign, is called ***the projection of the vector \overline{AB} on the x -axis.***

The projection of the vector onto the axis is an algebraic scalar with a plus or minus sign, depending on whether the segment ab coincides in its direction with the positive direction of the x -axis.

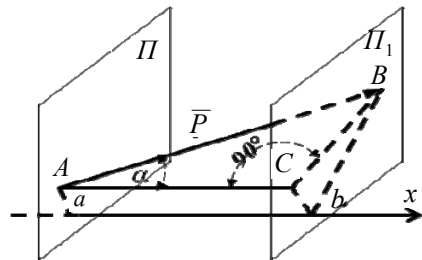


Fig. 1.11. Projection of force on axis

Це записується так

$$P_x = \pm ab,$$

а іноді так

$$X = \pm ab.$$

Для одержання проєкції вектора можна й не будувати площин Π, Π_1 . Досить із точок A і B опустити перпендикуляри Aa й Bb на вісь.

Проведемо через точку A пряму, паралельну осі x проєкцій. Ця пряма перетне площину Π_1 у точці C . Із прямокутного трикутника ABC , у якому α – кут між вектором \vec{P} і віссю x , отримуємо

$$AC = AB \cdot \cos \alpha$$

або

$$X = P \cos \alpha. \quad (1.5)$$

Приходимо, таким чином, до висновку: **проєкція вектора-сили на вісь представляє собою алгебраїчну скалярну величину, що дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між цим вектором і додатним напрямком осі проєкцій.**

Розглянемо два окремих випадки:

1) Вектор паралельний осі. У цьому випадку $\alpha = 0$ або $\alpha = 180^\circ$, отже

$$P_x = P \quad \text{або} \quad P_x = -P.$$

2) Вектор перпендикулярний осі. У цьому випадку $\alpha = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$, отже $P_x = 0$.

Очевидно, проєкція вектора на вісь не зміниться, якщо вектор переносити паралельно самому собі або, якщо проєціювати його на різні, але паралельні й однаково спрямовані осі.

This is written as follows

$$P_x = \pm ab,$$

and sometimes so

$$X = \pm ab.$$

To obtain the projection of the vector, it is possible not to construct planes Π, Π_1 . It is enough to lower the perpendiculars Aa and Bb from the points A and B on axis.

Draw a straight line through point A , parallel to the axis x of the projections; this line intersects the plane Π_1 at point C . From the right triangle ABC , in which α is the angle between the vector \bar{P} and the x -axis, we obtain

$$AC = AB \cdot \cos \alpha$$

or

$$X = P \cos \alpha . \quad (1.5)$$

We thus come to the conclusion that ***the projection of the vector-force on the axis is an algebraic scalar quantity equal to the product of the modulus of the vector on the cosine of the angle between this vector and the positive direction of the axis of the projections.***

Consider two separate cases:

1) Vector parallel to the axis. In this case, $\alpha = 0$ or 180° , then

$$P_x = P \quad \text{or} \quad P_x = -P.$$

2) Vector is perpendicular to the axis. In this case $\alpha = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$, then $P_x = 0$.

Obviously, the projection of the vector on the axis will not change if the vector is transferred parallel to itself or if it is projected on different but parallel and equally directed axes.

Проекції сили на осі координат

Нехай є сила \vec{P} прикладена в точці A та прямокутна система координатних осей $Oxyz$. Положення й напрямок вектора в просторі визначається координатами його точки прикладення A і кутами α, β, γ між вектором \vec{P} і відповідно осями x, y, z (рис. 1.12). При точці A побудуємо паралелепіпед, для якого вектор \vec{P} буде діагоналлю, а ребра спрямовані паралельно осям координат. Очевидно, довжини ребер представляють собою чисельні значення проекцій \vec{P} на осі x, y, z . Позначивши їх P_x, P_y та P_z , отримаємо

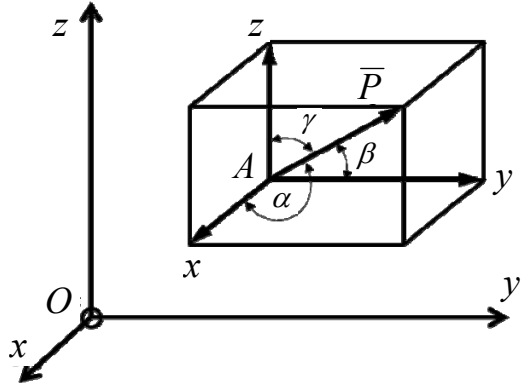


Рис. 1.12. Проекція сили на осі

де $P_x = P \cos \alpha, P_y = P \cos \beta, P_z = P \cos \gamma$.

Звідси

$$\begin{aligned} \cos(\vec{P}, \vec{i}) &= \cos \alpha = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}; \\ \cos(\vec{P}, \vec{j}) &= \cos \beta = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}; \\ \cos(\vec{P}, \vec{k}) &= \cos \gamma = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Projections of force on the coordinate axes

Suppose there is a force \bar{P} applied at point A and some rectangular coordinate system $Oxyz$. The position and direction of the vector in space is determined by the coordinates of its point of application A and the angles α, β, γ between the vector \bar{P} and the axes x, y, z , respectively (Fig. 1.12). At point A we construct a parallelepiped for which the vector \bar{P} will be a diagonal, and the ribs are directed parallel to the coordinate axes.

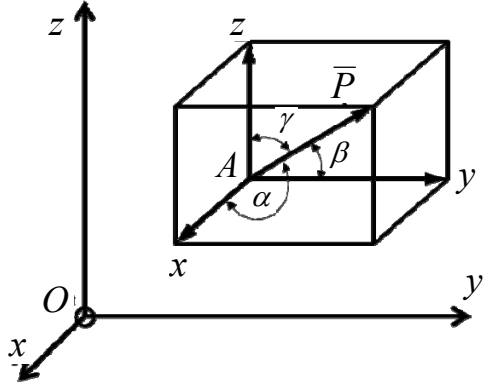


Fig.1.12. Projection of force on the axes

Obviously, the lengths of the ribs are the numerical values of the projections \bar{P} on the axes x, y, z . Denoting them P_x, P_y and P_z , we obtain

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \tag{1.6}$$

where $P_x = P \cos \alpha$, $P_y = P \cos \beta$, $P_z = P \cos \gamma$.

From here

$$\begin{aligned} \cos(\bar{P}, \bar{i}) &= \cos \alpha = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}; \\ \cos(\bar{P}, \bar{j}) &= \cos \beta = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}; \\ \cos(\bar{P}, \bar{k}) &= \cos \gamma = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Тому що модуль вектора \bar{P} – величина додатна, то у формулах (1.6) і (1.7) перед радикалом слід брати знак плюс.

Формули (1.6) та (1.7) дають можливість знайти аналітичним методом модуль та напрям вектора сили за трьома заданими його проєкціями на координатні осі. Але проєкції не визначають точки прикладення сили, вона повинна бути задана своїми координатами.

Проекція сили на площину

Проекцією сили \bar{P} на площину Oxy називається вектор, що міститься між проєкціями початку та кінця сили \bar{P} на цю площину (рис. 1.13).

Отже, на відміну від проєкції сили на вісь, проєкція сили на площину є величина векторна, оскільки вона характеризується не тільки своїм числовим значенням, але й напрямом в площині Oxy .

За модулем

$$P_{xy} = P \cos \beta,$$

де β – кут між напрямом сили \bar{P} та її проєкцією P_{xy} .

У деяких випадках для знаходження проєкції сили на вісь зручно знайти спочатку її проєкцію на площину, в якій ця вісь лежить, а потім спроеціювати знайдену проєкцію на площину – на дану вісь.

В даному випадку

$$P_x = P_{xy} \cos \varphi = P \cos \beta \cos \varphi;$$

$$P_y = P_{xy} \sin \varphi = P \cos \beta \sin \varphi.$$

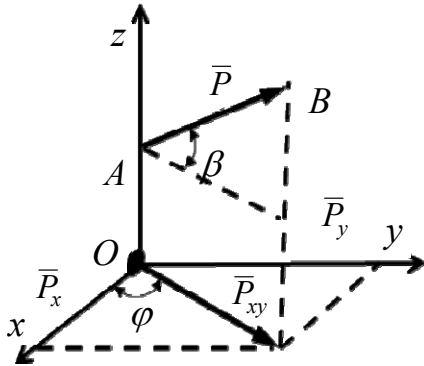


Рис. 1.13. Проекція сили на площину

Because the modulus of the vector \bar{P} is a positive value, in formulas (1.6) and (1.7) before the radical should take a plus sign.

Formulas (1.6) and (1.7) make it possible to find by analytical method the modulus and direction of the force vector by its three given projections on the coordinate axes. But the projections do not determine the point of application of force, it must be given by its coordinates.

Projection of force on the plane

The projection of the force

\bar{P} on the plane Oxy is the vector contained between the projections of the beginning and end of the force \bar{P} on this plane (Fig. 1.13).

Thus, in contrast to the projection of the force on the axis, the projection of the force on the plane is a vector magnitude, because it is characterized not only by its numerical value, but also by the direction in the plane Oxy .

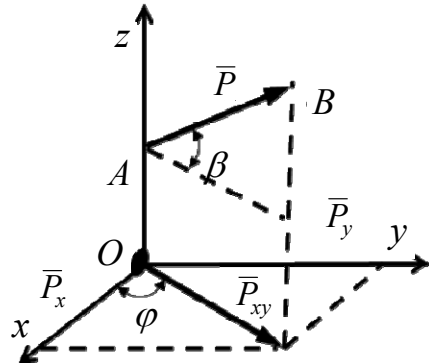


Fig. 1.13. Projection of force on the plane

Behind the module

$$P_{xy} = P \cos \beta,$$

where β – the angle between the direction of force \bar{P} and its projection P_{xy} .

In some cases, to find the projection of the force on the axis, it is convenient to first find its projection on the plane in which this axis lies, and then project the found projection on the plane – on this axis. In this case

$$P_x = P_{xy} \cos \varphi = P \cos \beta \cos \varphi;$$

$$P_y = P_{xy} \sin \varphi = P \cos \beta \sin \varphi.$$

Складові сили по осях координат

У деякій точці (рис. 1.14) прикладена сила \vec{P} . Прийmemo цю точку за початок системи координатних осей x, y, z і при цій точці побудуємо паралелепіпед, для якого вектор \vec{P} буде діагоналю, а ребра спрямовані по координатних осях (рис. 1.14). Цією побудовою розкладемо вектор-силу \vec{P} на три взаємно перпендикулярні складові \vec{X} , \vec{Y} , \vec{Z} , що збігаються з координатними осями, і, виходить,

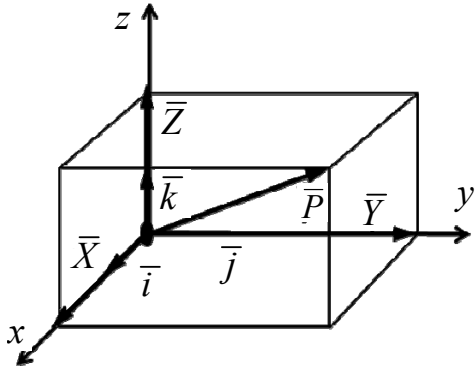


Рис. 1.14. Складові сили по осях координат

$$\vec{P} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}. \quad (1.8)$$

Числове значення кожної складової дорівнює проєкції сили на відповідну вісь. Слід звернути особливу увагу на різницю між *складовою вектора по осі* та *проєкцією його на цю вісь*. Складова вектора є також *вектор*, а його проєкція на вісь – *скаляр*.

Якщо взяти до уваги орти – одиничні вектори координатних осей \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , то можна записати:

$$\vec{X} = \vec{i}X; \quad \vec{Y} = \vec{j}Y; \quad \vec{Z} = \vec{k}Z, \quad (1.9)$$

де $X = P_x$, $Y = P_y$, $Z = P_z$.

Підставивши вираз (1.9) у рівність (1.8), одержимо формулу розкладання вектор-сили на координатні вісі:

$$\vec{P} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z. \quad (1.10)$$

Components of force along the coordinate axes

At some point (Fig. 1.14) a force \vec{P} is applied. Let us take this point as the beginning of the coordinate system xyz . At this point we construct a parallelepiped for which the vector \vec{P} will be a diagonal, and the ribs are directed along the coordinate axes. With this construction we decompose the vector-force \vec{P} into three mutually perpendicular components \vec{X} , \vec{Y} , \vec{Z} , that coincide with the coordinate axes, and, consequently,

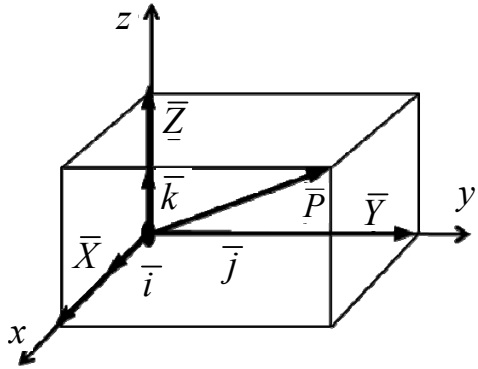


Fig. 1.14. Components of force along the axes

$$\vec{P} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}. \quad (1.8)$$

The numerical value of each component is equal to the projection of the force on the corresponding axis. Particular attention should be paid to the difference between *the component of the vector along the axis* and *its projection on this axis*. The component of the vector is also a vector, and its projection on the axis is a scalar.

If we take into account ords – unit vectors of coordinate axes \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} we can write:

$$\vec{X} = \vec{i}X; \quad \vec{Y} = \vec{j}Y; \quad \vec{Z} = \vec{k}Z, \quad (1.9)$$

where $X = P_x$, $Y = P_y$, $Z = P_z$.

Substituting expression (1.9) into equation (1.8), we obtain the formula for the decomposition of the vector-force into coordinate axes:

$$\vec{P} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z \quad (1.10)$$

Знаходження рівнодіючої системи збіжних сил аналітичним методом

Нехай задана система, що складається із трьох збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$. У загальному випадку ці сили не розташовані в одній площині. Побудуємо силовий багатокутник (просторовий) для цієї системи й знайдемо рівнодіючу \bar{R} (рис. 1.15).

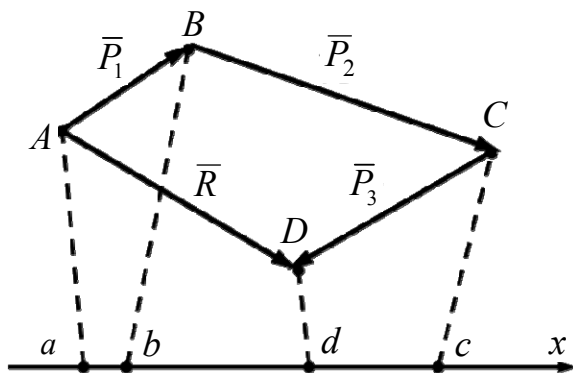


Рис. 1.15. Проекція на вісь рівнодіючої системи збіжних сил

Спроецюємо всі сили на вісь x

$$P_{1x} = ab; \quad P_{2x} = bc; \quad P_{3x} = -cd; \quad R_x = ab.$$

Склавши перші три рівності, отримаємо

$$P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} = ab + bc - cd,$$

але, як видно з рисунка,

$$P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} = R_x,$$

або

$$R_x = \sum P_{ix}.$$

Отже, проекція рівнодіючої системи збіжних сил на яку-небудь вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх складових сил на ту ж вісь.

Нехай ϵ система збіжних сил. Задано проекції всіх її сил на координатні осі

***Finding the resultant force of a system of converging forces
by analytical method***

Suppose a given system consisting of three converging forces $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$. In the general case, these forces are not located in the same plane. Let us construct a power polygon (spatial) for this system and find a resultant force \bar{R} (Fig.1.15).

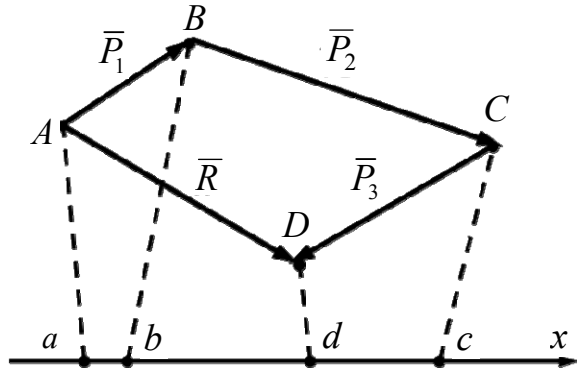


Fig. 1.15. Projection on the axis of the resultant force of the system of converging forces

Let's project all forces on the x -axis

$$P_{1x} = ab; \quad P_{2x} = bc; \quad P_{3x} = -cd; \quad R_x = ab.$$

Adding the first three equations, we obtain

$$P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} = ab + bc - cd,$$

but, as can be seen from the figure,

$$P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} = R_x,$$

or

$$R_x = \sum P_{ix}.$$

Therefore, *the projection of the resultant force of the system of convergent forces on any axis is equal to the algebraic sum of the projections of all components of the forces on the same axis.*

Let there be a system of converging forces. The projections of all its forces on the coordinate axes are given

$$\begin{array}{c}
 P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}; \\
 P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}; \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
 \end{array}$$

Потрібно знайти модуль і напрям рівнодіючої. Як тільки що доведено,

$$R_x = \sum P_{ix}; \quad R_y = \sum P_{iy}; \quad R_z = \sum P_{iz}.$$

Модуль рівнодіючої визначиться за формулою:

$$R = \sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2}.$$

Напрямок \bar{R} знайдемо, визначивши кути між рівнодіючою й координатними осями. Скористаємося формулами для напрямних косинусів

$$\begin{aligned}
 \cos(\bar{R}, \bar{i}) &= \cos \alpha = \frac{\sum P_{ix}}{\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2}}; \\
 \cos(\bar{R}, \bar{j}) &= \cos \beta = \frac{\sum P_{iy}}{\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2}}; \quad (1.11) \\
 \cos(\bar{R}, \bar{k}) &= \cos \gamma = \frac{\sum P_{iz}}{\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2}}.
 \end{aligned}$$

Якщо система збіжних сил розташована в одній площині (рис. 1.16), то

$$R = \sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2}. \quad (1.12)$$

$$\begin{array}{c}
P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}; \\
P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}; \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}$$

You need to find the module and the direction of the resultant force. Once proven,

$$R_x = \sum P_{ix}; \quad R_y = \sum P_{iy}; \quad R_z = \sum P_{iz}.$$

The resultant force module will be determined by the formula:

$$R = \sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2}.$$

We find the direction \bar{R} by determining the angles between the resultant force and coordinate axes. Let's use formulas for directing cosines:

$$\begin{aligned}
\cos(\bar{R}, \bar{i}) &= \cos \alpha = \frac{\sum P_{ix}}{\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2}}; \\
\cos(\bar{R}, \bar{j}) &= \cos \beta = \frac{\sum P_{iy}}{\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2}}; \\
\cos(\bar{R}, \bar{k}) &= \cos \gamma = \frac{\sum P_{iz}}{\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2}}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

If the system of converging forces is located in one plane (Fig. 1.16), then

$$R = \sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2}. \tag{1.12}$$

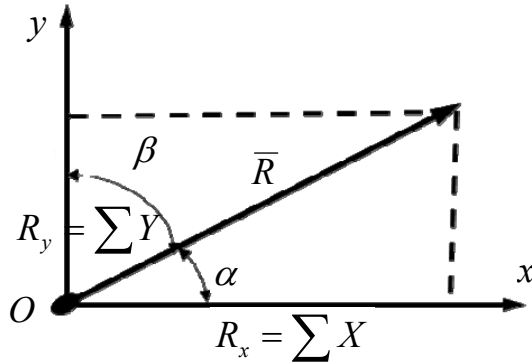


Рис. 1.16. Проекції на вісь координат рівнодіючої плоскої системи збіжних сил

Крім того, очевидно

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

і напрям рівнодіючої може бути знайдено з виразу

$$\operatorname{tg}(\bar{R}, \bar{i}) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum P_{iy}}{\sum P_{ix}} \quad (1.13)$$

або

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \cos \alpha = \frac{\sum P_{ix}}{\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2}}.$$

Умова рівноваги системи збіжних сил у графічній формі

Оскільки у випадку рівноваги пришвидчення a точки дорівнює нулю, то на підставі другого закону Ньютона

$$\bar{R} = 0,$$

тобто, рівнодіюча системи сил, прикладених до точки, дорівнює нулю. Ця умова є необхідною й достатньою умовою рівноваги системи збіжних сил. Отже,

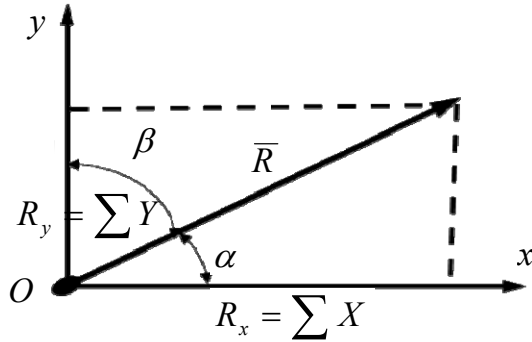


Fig. 1.16. Projections on the coordinate axis of the resultant of plane system of converging forces

Also, obviously

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

and the direction of the equivalent can be found from the expression

$$\operatorname{tg}(\bar{R}, \bar{i}) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum P_{iy}}{\sum P_{ix}} \quad (1.13)$$

or

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \cos \alpha = \frac{\sum P_{ix}}{\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2}}$$

Equilibrium condition of a system of converging forces in graphical form

Since in the case of equilibrium the acceleration \mathbf{a} of point is zero, then on the basis of Newton's second law

$$\bar{R} = 0,$$

that is, the resultant force of the system of forces applied to the point is zero. This condition is a necessary and sufficient condition for the equilibrium of the system of converging forces. So,

$$\sum \bar{P}_i = 0. \quad (1.14)$$

Графічно ця умова виражається вимогою, щоб кінець останнього вектора в силовому багатокутнику співпадав з початком першого, тобто щоб всі сили системи утворювали **замкнутий багатокутник** і, звичайно, з загальною течією (рис. 1.17).

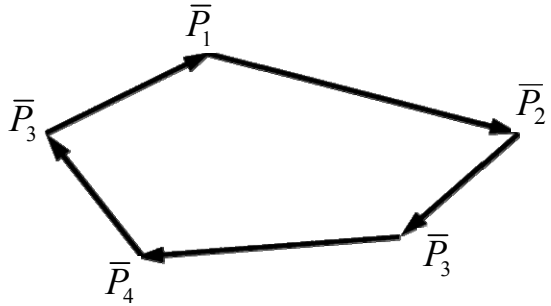


Рис. 1.17. Силовий багатокутник для зрівноваженої системи сил

Отже, *в графічній формі умова рівноваги системи збіжних сил полягає в тому, що силовий багатокутник повинен бути замкнутим.*

Умови рівноваги системи збіжних сил в аналітичній формі

Як було показано вище, якщо система збіжних сил знаходиться в рівновазі, то її рівнодіюча дорівнює нулю

$$\bar{R} = 0.$$

Але якщо вектор дорівнює нулю, то дорівнюють нулю його проєкції на осі координат:

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0$$

або

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0; \quad \sum P_{iz} = 0. \quad (1.15)$$

Ці умови рівноваги, що називають також **рівняннями рівноваги** можна легко одержати, якщо скористатися рівнянням (1.1). Тому що у випадку рівноваги пришвидчення \bar{a} дорівнює нулю, а отже й проєкції пришвидчення на осі координат дорівнюють нулю:

$$\sum \bar{P}_i = 0. \quad (1.14)$$

Graphically, this condition is expressed by the requirement that the end of the last vector in the force polygon coincides with the beginning of the first, ie that all forces of the system form **a closed polygon** and, of course, with the general flow (Fig. 1.17).

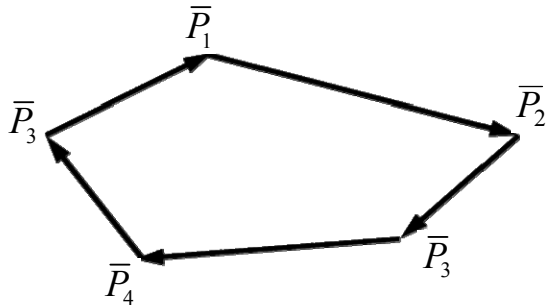


Fig. 1.17. Force polygon for a balanced system of forces

Therefore, **in graphical form, the condition of equilibrium of the system of converging forces is that the force polygon must be closed.**

Equilibrium conditions of a system of converging forces in analytical form

As shown above, if the system of convergent forces is in equilibrium, then its resultant force is zero

$$\bar{R} = 0.$$

But if the vector is zero, then zero is its projection on the coordinate axis:

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0$$

or

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0; \quad \sum P_{iz} = 0. \quad (1.15)$$

These equilibrium conditions, also called **equilibrium equations**, can be easily obtained by using equation (1.1). Because in the case of equilibrium the acceleration \bar{a} is zero, and hence the projections of the acceleration on the coordinate axis are zero:

$$a_x = 0; \quad a_y = 0; \quad a_z = 0.$$

Отже,

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0; \quad \sum P_{iz} = 0.$$

Таким чином, одержимо умови рівноваги матеріальної точки.

Якщо матеріальна точка невільна, то застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, можемо її розглядати як вільну, що знаходиться під дією заданих (активних) сил та реакцій в'язей.

Отже, для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил системи на три координатні осі окремо дорівнювали нулю.

Розглянемо два окремих випадки.

1. Всі сили системи лежать в одній площині. Розташуємо осі x та y в цій площині. Тоді третє із рівнянь (1.15) задовольняється при будь-яких значеннях сил, і умов рівноваги залишається тільки дві:

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0,$$

тобто для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил системи на дві координатні осі, що лежать в площині системи, окремо дорівнювали нулю.

2. Всі сили системи діють по одній прямій. Приймемо лінію дії сил системи за вісь x . Тоді із трьох умов рівноваги залишається тільки одна

$$\sum P_{ix} = 0.$$

Для рівноваги системи сил, що діють по одній прямій, необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій всіх сил системи на вісь, що співпадає з лінією дії сил або їй паралельну, дорівнювала нулю.

$$a_x = 0; \quad a_y = 0; \quad a_z = 0.$$

$$\text{So, } \sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0; \quad \sum P_{iz} = 0.$$

Thus, we obtain the equilibrium conditions of the material point.

If the material point is not free, then applying the axiom of liberation from the restraints, we can consider it as free, which is under the action of given (active) forces and reactions of the restraints. Therefore, *for the equilibrium of the system of converging forces it is necessary and sufficient that the sums of the projections of all the forces of the system on the three coordinate axes separately are equal to zero.* Consider two separate cases..

1. All the forces of the system lie in one plane. We arrange the x and y axes in this plane. Then the third of equations (1.15) is satisfied for any values of forces, and equilibrium conditions only two remain:

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0,$$

that is, *for the equilibrium of a planar system of convergent forces, it is necessary and sufficient that the sums of the projections of all the forces of the system on the two coordinate axes lying in the plane of the system are separately equal to zero.*

2. All forces of the system act on one line. Take the line of action of the system forces along the x -axis. Then only one of the three equilibrium conditions remains

$$\sum P_{ix} = 0.$$

For the equilibrium of a system of forces acting along one line, it is necessary and sufficient that the sum of the projections of all the forces of the system on the axis coinciding with the line of forces or parallel to it is equal to zero.

Отримані умови рівноваги використовуються в статиці, як алгебраїчні рівняння, з яких визначаються невідомі сили, що входять в систему. В більшості задач статики по деяким заданим (активним) силам, прикладеним до матеріальної точки або до твердого тіла, доводиться визначати невідомі реакції в'язей, виходячи із умов рівноваги. Кількість невідомих, які треба визначити при рішенні задач про рівновагу тіла, не повинна перевищувати кількості рівнянь рівноваги, тобто трьох – для просторової системи збіжних сил, двох – для плоскої та одного – для системи сил, що діють по одній прямій.

1.3 Поняття пари сил. Момент сили відносно точки

Перед тим, як ввести поняття пари сил та її моменту, розглянемо правила додавання двох паралельних сил.

У випадку дії двох паралельних сил одного напрямку прикладених до абсолютно твердого тіла (рис. 1.18) їх рівнодіюча паралельна цим силам і діє в той же бік; модуль рівнодіючої дорівнює сумі модулів доданків сил, а лінія її дії поділяє внутрішнім чином відстань між точками прикладення даних сил на відрізки обернено пропорційні модулям цих сил.

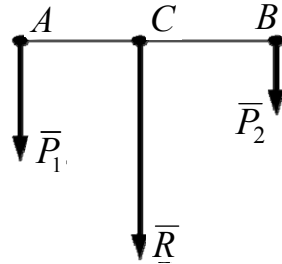


Рис. 1.18. Рівнодіюча двох паралельних сил, спрямованих в один бік

Отже,

$$R = P_1 + P_2 ;$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{P_2}{P_1} .$$

Тепер розглянемо систему двох паралельних сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 ($\bar{P}_1 > \bar{P}_2$), спрямованих у протилежні боки (рис. 1.19).

The obtained equilibrium conditions are used in statics as algebraic equations, from which the unknown forces included in the system are determined. In most tasks of statics on some given (active) forces applied to a material point or to a solid body, it is necessary to determine the unknown reactions of the restraints, based on the conditions of equilibrium. The number of unknowns to be determined when solving equilibrium problems of the body should not exceed the number of equilibrium equations, ie three – for a spatial system of convergent forces, two – for a plane and one – for a system of forces acting along one line.

1.3 The concept of a pair of forces. Moment of force relative to a point

Before introducing the concept of a pair of forces and its moment, consider the rules of addition of two parallel forces.

In the case of two parallel forces of the same direction applied to an absolutely solid body (Fig. 1.18), their resultant force parallel to these forces and acts in the same direction; the module of the resultant force is equal to the sum of the modules of the terms of the forces, and its line of action divides internally the distance between the points of application of these forces into segments inversely proportional to the modules of these forces.

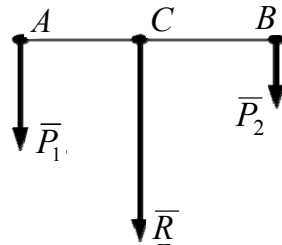


Fig. 1.18. Resultant force of two parallel forces directed in one direction

$$\text{So, } R = P_1 + P_2; \quad \frac{CA}{CB} = \frac{P_2}{P_1}.$$

Now consider a system of two parallel forces \bar{P}_1 and \bar{P}_2 ($\bar{P}_1 > \bar{P}_2$) directed in opposite directions (Fig. 1.19).

Рівнодіюча двох паралельних нерівних сил, спрямованих у протилежні боки, спрямована у бік більшої з них; модуль рівнодіючої дорівнює різниці сил, що складаються, а її лінія дії поділяє зовнішнім чином відстань між точками прикладання заданих сил на відрізки, обернено пропорційні модулям цих сил

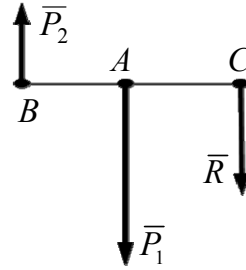


Рис. 1.19. Рівнодіюча двох паралельних сил, спрямованих в протилежні боки

$$R = P_1 - P_2. \quad (1.16)$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{P_2}{P_1}. \quad (1.17)$$

Розглянемо тепер випадок двох рівних за модулем паралельних сил, спрямованих у протилежні боки. З отриманих рівностей (1.16) і (1.17) випливає, що якщо \bar{P}_2 прямує по модулю до \bar{P}_1 , то рівнодіюча їх прямує до нуля, а відрізок CA необмежено зростає. Таким чином, виявляється, що числове значення рівнодіючої двох рівних паралельних сил, спрямованих у протилежні боки перетворюється в нуль, а точка її прикладення віддаляється в нескінченність, тобто фактично рівнодіючої такої системи сил взагалі не існує. **Система двох рівних паралельних сил, спрямованих в протилежні боки, називається парою сил і представляє зовсім особливу систему.** Справді, пару сил не можна замінити однією силою, їй еквівалентною: пара не має рівнодіючої – звідси випливає, що **пару не можна зрівноважити однією силою.**

Геометрична сума сил, що складають пару, дорівнює нулю, але разом з тим, пара сил не представляє системи, статично еквівалентної нулю.

The resultant force of two parallel unequal forces directed in opposite directions, is directed towards to side the larger of them; the module of the resultant force is equal to the difference of the forces, and its line of action externally divides the distance between the points of application of the given forces into segments inversely proportional to the modules of these forces

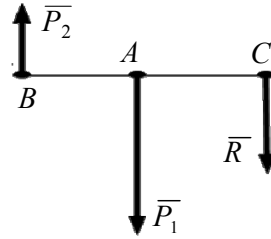


Fig. 1.19. Resultant force of two parallel forces directed in opposite directions

$$R = P_1 - P_2. \quad (1.16)$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{P_2}{P_1}. \quad (1.17)$$

Let us now consider the case of two equal modulo parallel forces directed in opposite directions. From the obtained equations (1.16) and (1.17) it follows that if \overline{P}_2 goes modulo to \overline{P}_1 , then their resultant force goes to zero, and the segment CA increases indefinitely. Thus, it turns out that the numerical value of the resultant force of two equal parallel forces directed in opposite directions turns into zero, and the point of its application is removed to infinity, that is, in fact, the resultant force of such system of forces does not exist at all. ***A system of two equal parallel forces directed in opposite directions is called a pair of forces and represents a very special system.*** In fact, a pair of forces cannot be replaced by one force equivalent to it: the pair has no resultant force – it also follows that ***the pair cannot be balanced by one force.***

The geometric sum of the forces that make up paper is zero, but at the same time, the pair of forces does not represent a system statically equivalent to zero.

Будучи прикладеною до твердого тіла, пара сил змінить стан спокою або руху цього тіла – надасть тілу обертовий рух.

На рис. 1.20 показана пара сил (\bar{P}, \bar{P}') прикладених в точках A і B , що лежать в одній площині. Цю площину називають площиною дії пари \bar{P}, \bar{P}' .

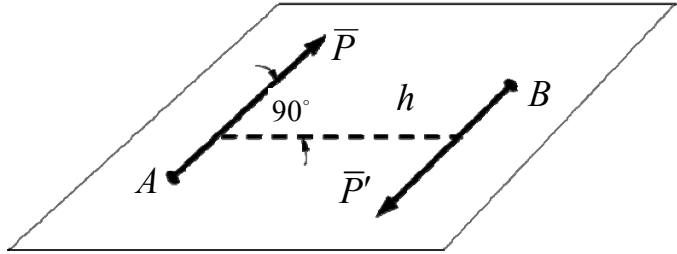


Рис. 1.20. Площина дії пари сил

Відстань h між складовими пари, виміряна по перпендикуляру до лінії дії сил, називається плечем пари. Пари сил на рисунку як правило зображують так, щоб обидві сили мали своїми точками прикладення точки C і D , що лежать на загальному перпендикулярі h до складових пари (рис. 1.21). Ефективність дії на тіло пари сил, що надає йому обертовий рух, визначається не тільки величиною складових пари сил, але й відстанню h між ними – плечем пари.

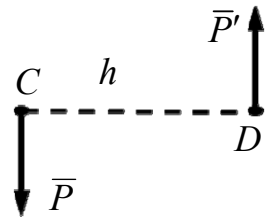


Рис. 1.21. Пара сил на площині

Характеристикою дії пари на тіло є її момент, що представляє добуток модуля однієї із складових на довжину плеча. Момент пари вимірюється в одиницях сили, помножених на одиницю довжини, тобто в системі СІ в $\text{Н} \cdot \text{м}$.

Момент буде **додатним**, якщо пара обертає тіло проти годинникової стрілки, і **від'ємним** – у протилежному випадку (рис. 1.22). Позначаючи момент пари через M або через $M(\bar{P}, \bar{P}')$, маємо

When applied to a solid body, a pair of forces will change the state of rest or movement of this body – will give the body a rotational motion.

In fig. 1.20 shows a pair of forces (\vec{P}, \vec{P}') applied at points A and B lying in one plane. This plane is called the plane of action of the pair \vec{P}, \vec{P}' .

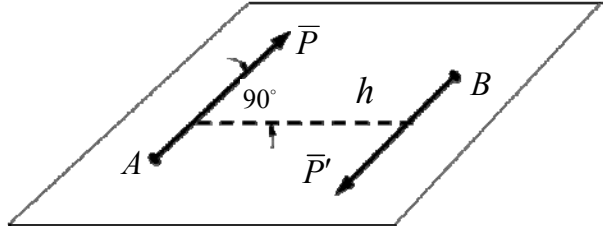


Fig. 1.20. The plane of action of a pair of forces

The distance h between the components of the pair, measured perpendicular to the line of action of forces, is called the arm of the pair. The pairs of forces in the figure are usually depicted so that both forces have their points of application points C and D , which lie on the common perpendicular h to the components of the pair (Fig. 1.21). The efficiency of action of a pair of forces on the body, which gives it a rotational motion, is determined not only by the magnitude of the components of the pair of forces, but also the distance h between them – the arm of the pair.

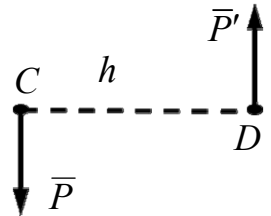


Fig. 1.21. A pair of forces

The characteristic of the action of the pair on the body is its moment, which is the product of the modulus of one of the components on the length of the arm. The moment of the pair is measured in units of force multiplied by a unit of length, ie in the SI system in $N \cdot m$.

The moment will be *positive* if the pair rotates the body counterclockwise, and *negative* - otherwise (Fig. 1.22). Denoting the moment of the pair through M or through $M(\vec{P}, \vec{P}')$, we have

$$M(\bar{P}, \bar{P}') = M = \pm Ph. \quad (1.18)$$

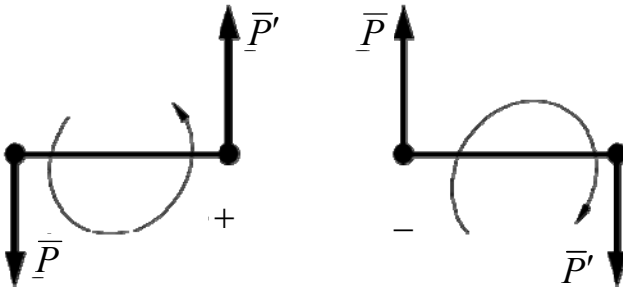


Рис. 1.22. Знак моменту пари

З рис. 1.23 випливає, що абсолютна величина моменту пари дорівнює у відповідному масштабі подвоєної площі трикутника, що має основою одну із складових пари, а вершиною – будь-яку точку (наприклад C), що лежить на лінії дії другої складової

$$M(\bar{P}, \bar{P}') = 2 \text{ пл. } \triangle BDC.$$

Властивості пари

1. Не змінюючи дії пари на тверде тіло, пару сил можна переносити в площині її дії в будь-яке положення.

2. Не порушуючи механічного стану тіла, можна як загодно змінювати величину сили і плече пари, тільки б момент пари залишався незмінним.

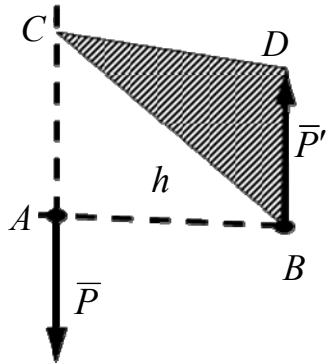


Рис. 1.23. Пара сил на площині

Поняття моменту сили відносно центра

Розглянемо тверде тіло, яке може обертатись навколо нерухомої осі, що перпендикулярна до площини рисунка й перетинає цю площину в точці O (рис. 1.24). В точці A в площині,

$$M(\bar{P}, \bar{P}') = M = \pm Ph. \quad (1.18)$$

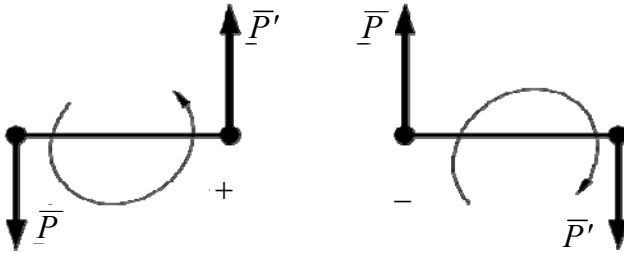


Fig. 1.22. Pair moment sign

From Fig.1.23 it follows that the absolute value of the moment of the pair is equal to the corresponding scale of the doubled area of the triangle, which has a base of one of the components of the pair, and the apex – any point (eg C) lying on the line of the second component

$$M(\bar{P}, \bar{P}') = 2 \text{nl. } \triangle BDC.$$

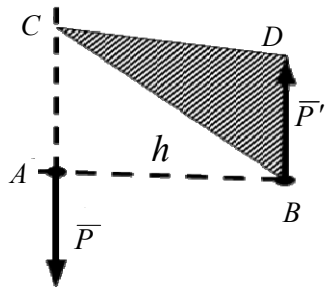


Fig. 1.23. A pair of forces on the plane

Pair properties.

1. Without changing the action of pair on a solid body, a pair of forces can be transferred in the plane of its action in any position.

2. Without violating the mechanical state of the body, you can arbitrarily change the magnitude of the force and arm of the pair, if only the moment of the pair remained unchanged.

The concept of the moment of force relative to the center

Consider a rigid body T , which can rotate around a fixed axis perpendicular to the plane of the figure and intersects this plane at point O (Fig. 1.24). At point A in a plane

перпендикулярній осі O , до тіла прикладено силу \vec{P} , що намагається обертати тіло навколо цієї осі. Як відомо з досвіду, ефективність дії сили визначається в цьому випадку не тільки величиною сили, але і її положенням щодо

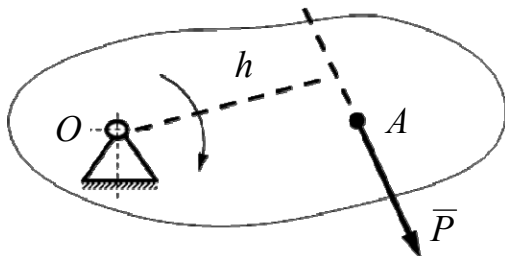


Рис. 1.24. Момент сили відносно центра

точки O , відстанню h лінії дії сили від цієї точки. Характеристикою обертальної дії сили виявляється її момент, тобто величина, що враховує як чисельне значення сили, так і її положення. **Під моментом сили відносно якої-небудь точки (центра) розуміють взятий зі знаком плюс або мінус добуток модуля сили на довжину перпендикуляра, опущеного із цього центра на лінію дії сили.**

Такий центр називається **центром моменту**, а довжина перпендикуляра h – **плечем**. Якщо модуль сили виражений в ньютонках, а плече – в метрах, то момент вимірюється ньютонметрами – $\text{Н} \cdot \text{м}$.

Момент сили \vec{P} щодо центра O будемо позначати таким чином:

$$M(\vec{P}) = M_0 = \pm Ph. \quad (1.19)$$

Знак моменту вказує на напрямок обертання. **Знак плюс відповідає обертанню проти годинникової стрілки, знак мінус – у зворотному.**

Якщо з'єднати початок A і кінець B вектора-сили \vec{P} із центром моменту O , то подвоєна площа отриманого трикутника ABO у відповідному масштабі визначає величину моменту сили відносно центра O (рис. 1.25). Справді

perpendicular to the axis O , a force \bar{P} is applied to the body that tries to rotate the body around this axis. As is known from experience, the effectiveness of the force is determined in this case not only by the magnitude of the force, but also its position relative to the point O , the

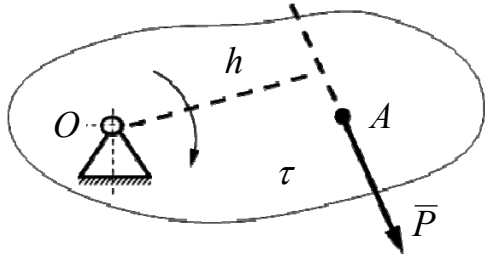


Fig. 1.24. Moment of force relative to the center

distance h of the line of action of the force from this point. The characteristic of the rotational action of a force is its moment, ie a quantity that takes into account both the numerical value of the force and its position. ***Under the moment of force relative to any point (center) are understanding (taken with a plus or minus sign) the product of the modulus of force on the length of the perpendicular was put down from this center to the line action of force.***

Such a center is called the center of the moment, and the length of the perpendicular h is called the arm. If the modulus of force is expressed in Newtons, and the arm – in meters, the moment is measured in Newton-meters – $N \cdot m$.

The moment of force \bar{P} relative to the center O will be denoted as follows:

$$M(\bar{P}) = M_0 = \pm Ph. \tag{1.19}$$

The moment sign indicates the direction of rotation. ***The plus sign corresponds to the counterclockwise rotation, the minus sign – clockwise.***

If we connect the beginning A and the end B of the vector-force \bar{P} with the center of the moment O , then the doubled area of the obtained triangle ABO in the appropriate scale determines the magnitude of the moment of force relative to the center O (Fig.1.25). Really

$$M_o(\bar{P}) = Ph;$$

$$\text{пл. } \triangle AOB = \frac{Ph}{2}.$$

Виходить,

$$M_o(\bar{P}) = 2 \text{ пл. } \triangle AOB.$$

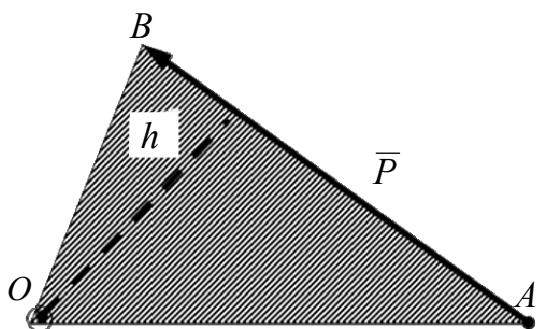


Рис. 1.25. Визначення моменту сили відносно центра

Отже, момент сили відносно точки дорівнює подвоєній площі трикутника, побудованого на силі й центрі моменту. *У цьому полягає геометрична інтерпретація моменту сили відносно точки.*

Момент сили відносно центра дорівнює нулю в випадку, коли лінія дії сили проходить через центр моменту.

1.4 Система сил, розташованих в одній площині. Головний вектор та головний момент плоскої системи сил

Розглянемо теорему про приведення сили до деякого центра, яка часто застосовується при розв'язанні задач статички. Силу, як відомо, можна переносити в яку завгодно точку, що лежить на її лінії дії. Розглянемо можливість переносу сили в будь-яку точку, що не відповідає цій вимозі.

Теорема. *Не змінюючи дії сили на тіло, її можна перенести паралельно самій собі в деяку точку, приєднавши пару сил.*

Нехай дана сила \bar{P} , прикладена в точці A (рис. 1.26). Потрібно перенести цю силу в точку O . Прикладемо в цій точці

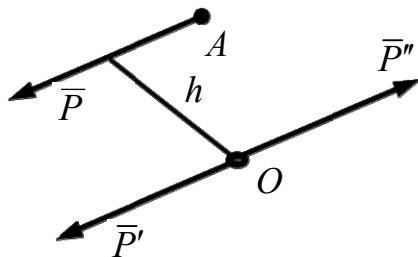


Рис. 1.26. Перенос сили в будь-яку точку

$$M_o(\bar{P}) = Ph;$$

$$\text{плл. } \triangle AOB = \frac{Ph}{2}.$$

it turns out,

$$M_o(\bar{P}) = 2 \text{плл. } \triangle AOB.$$

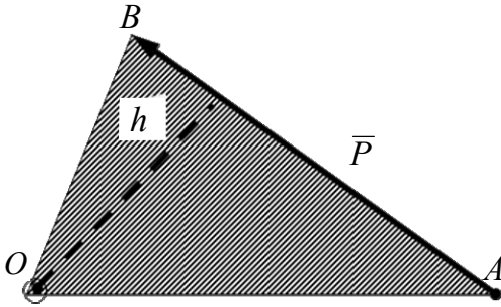


Fig. 1.25. Determining the moment of force relative to the center

Thus, the moment of force relative to a point is equal to twice the area of a triangle built on the force and the center of the moment. ***This is the geometric interpretation of the moment of force relative to the point.***

The moment of force relative to the center is zero in the case where the line of force passes through the center of the moment.

1.4 System of forces located in one plane. The main vector and the main moment of a flat system of forces

Consider the theorem on the bringing of force to a certain center, which is often used in solving statics problems. Force, as we know, can be transferred to any point lying on its line of action. Consider the possibility of transferring force to any point that does not meet this requirement.

Theorem. *Without changing the action of force on the body, it can be transferred parallel to itself at some point, joining a pair of forces.*

Let the given force \bar{P} applied in point A (Fig. 1.26). It is necessary to transfer this force to point O . We will apply at this point

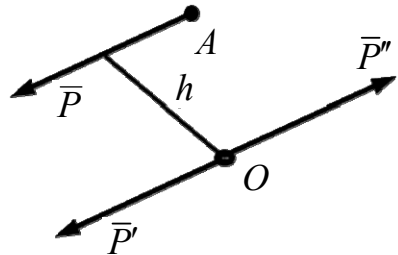


Fig. 1.26. Force transfer to any point

дві взаємно-зрівноважених сили \bar{P}' і \bar{P}'' , причому

$$\bar{P}' = \bar{P} = -\bar{P}''.$$

Тепер ми бачимо, що дана сила \bar{P} замінена силою \bar{P}' і парою (\bar{P}, \bar{P}'') . А тому що

$$\bar{P}' = \bar{P},$$

то силу \bar{P}' можна розглядати як задану силу \bar{P} , але вже перенесену в точку O .

Отже, задачу переносу сили можна вважати вирішеною, однак з тим ускладненням, що при переносі сили доводиться додавати деяку пару.

Заміну даної сили \bar{P} , прикладеної в точці A , такою ж силою, прикладеною в точці O , і відповідною парою, будемо називати **приведенням даної сили до точки O . Пару, одержану при приведенні сили, називають приєднаною парою**, а точку O – **центром приведення**.

Знайдемо момент приєднаної пари. Як видно із рисунка,

$$M(\bar{P}, \bar{P}'') = +Ph,$$

але добуток $+Ph$ дорівнює також моменту заданої сили P відносно центра приведення

$$M_o(\bar{P}) = +Ph, \quad (1.20)$$

виходить,

$$M(\bar{P}, \bar{P}'') = M_o(\bar{P}),$$

тобто, **момент приєднаної пари, одержуваної при приведенні сили до даного центра, дорівнює моменту заданої сили відносно центра приведення**.

Систему сил, лінії дії яких розташовані як завгодно в одній площині, будемо називати **плоскою системної сил**.

two mutually balanced forces \bar{P}' and \bar{P}'' , and

$$\bar{P}' = \bar{P} = -\bar{P}''.$$

Now we see that this force \bar{P} is replaced by force \bar{P}' and pair (\bar{P}, \bar{P}'') . And because

$$\bar{P}' = \bar{P},$$

then the force \bar{P}' can be considered as a given force \bar{P} , but already transferred to the point O .

Therefore, the task of force transfer can be considered solved, but with the complication that when transferring force you have to add some pair.

The replacement of a given force \bar{P} applied at point A by the same force applied at point O and by the corresponding pair will be called ***the bringing of this force to point O. The pair obtained by bringing the force is called the attached pair***, and point O is called ***the center of bringing***.

Let's find the moment of the attached pair. As you can see from the picture,

$$M(\bar{P}, \bar{P}'') = +Ph,$$

but the product $+Ph$ is also equal to the moment of a given force P relative to the center of bringing

$$M_o(\bar{P}) = +Ph, \tag{1.20}$$

it turns out,

$$M(\bar{P}, \bar{P}'') = M_o(\bar{P}),$$

that is, ***the moment of the attached pair obtained by bringing the force to a given center is equal to the moment of a given force relative to the center of bringing***.

A system of forces, the lines of action of which are located arbitrarily in one plane, will be called ***flat system of forces***.

Теорема. Плоску систему сил можна привести в загальному випадку до однієї сили, прикладеної в довільно вибраній точці площини, і до однієї пари, що діє в тій же площині.

Нехай нам задана плоска система сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, прикладених в точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Якщо ця система не є системою зрівноваженою, то застосовуючи метод послідовного додавання сил, її завжди можна привести до однієї рівнодіючої сили або пари. Однак такий спосіб спрощення системи мало зручний і при великій кількості сил стає дуже громіздким.

Більш зручним по своїй універсальності виявляється спосіб запропонований Л. Пуансо в 1803 р. Цей спосіб полягає в приведенні заданої системи до певного центра. Розглянемо систему сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ прикладених в точках A_1, A_2, A_3 (рис. 1.27). Точку O приймемо за центр приведення. Перенесемо в цю точку всі сили системи, користуючись попередніми викладками.

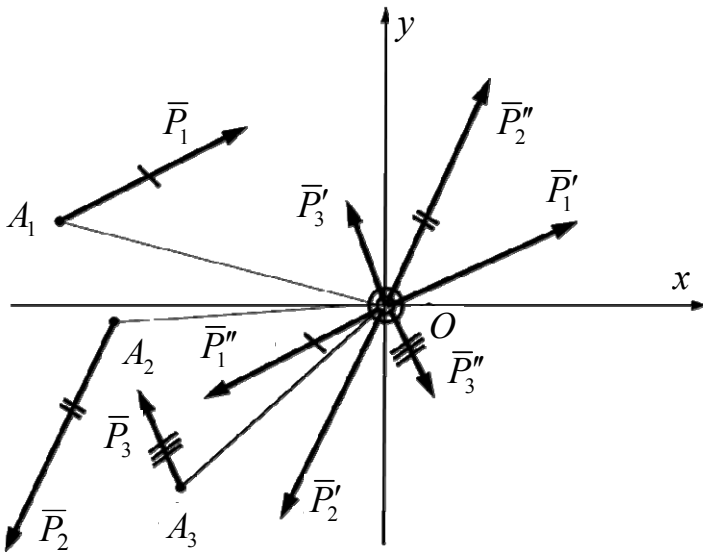


Рис. 1.27. Додавання сил

Theorem. *A flat system of forces can be brought in the general case to one force applied at an arbitrarily selected point of the plane, and to one pair acting in the same plane.*

Let us be given a flat system of forces $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ applied at points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. If this system is not a balanced system, then using the method of sequential addition of forces, it can always be brought to one resultant force or pair. However, this method of simplifying the system is not very convenient and with a large amount of forces becomes very cumbersome.

More convenient in its versatility and relative simplicity is the method proposed by L. Poinso in 1803. This method is to bring a given system to a certain center. Consider the system of forces $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ applied at points A_1, A_2, A_3 (Fig. 1.27). We take point O as the center of bringing. Let's carry over to this point all the forces of the system, using the previously stated.

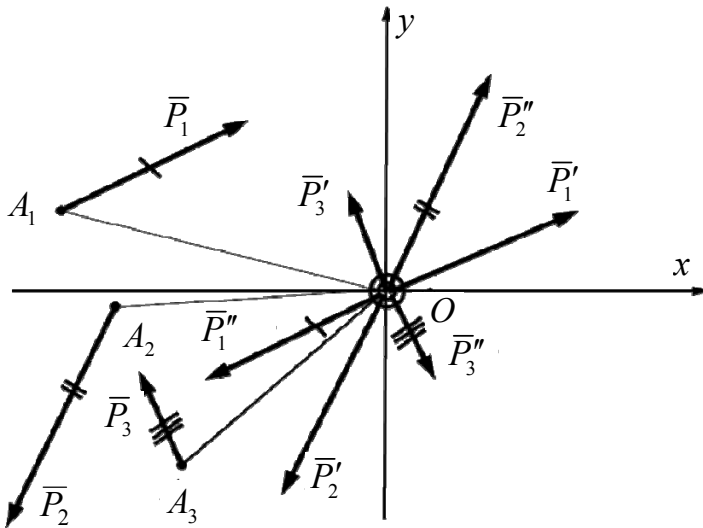
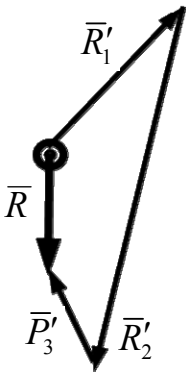


Fig. 1.27. Adding of forces

Отримаємо в центрі O сили $\bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \bar{P}'_3$ й приєднані пари $(\bar{P}_1, \bar{P}_1''), (\bar{P}_2, \bar{P}_2''), (\bar{P}_3, \bar{P}_3'')$. Отже, задана система сил, прикладених у точках A_i , замінюється системою, що складається з тих же сил, але вже прикладених у центрі O , і приєднаних пар.

Сили $\bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \bar{P}'_3$ можна скласти за правилом силового багатокутника. Векторна сума цих сил називається **головним вектором \bar{R}** (рис. 1.28). Таким чином,



або
$$\bar{R} = \bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 + \bar{P}'_3$$

інакше
$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3,$$

інакше
$$\bar{R} = \sum \bar{P}_i \quad (1.21)$$

Приєднані пари також можна скласти, одержавши при цьому рівнодіючу пару з моментом L_O , що називається **головним моментом**. Його величина

Рис. 1.28. Визначення головного вектора плоскої системи збіжних сил

$$L_O = \sum M_{O_i}, \quad (1.22)$$

де M_{O_i} – момент кожної приєднаної пари, рівний, як відомо, моменту сили, що приводиться, відносно центра приведення.

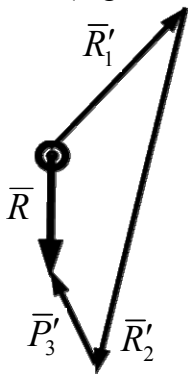
$$M_{O_i} = P_i \cdot h_i.$$

Теорема, таким чином, доведена.

Отриманий результат можна сформулювати так: **плоску систему сил можна привести в загальному випадку до однієї сили, прикладеної в довільно обраній точці, що дорівнює головному вектору системи, і до однієї пари, момент якої**

We obtain in the center O the forces $\bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \bar{P}'_3$ and the attached pairs $(\bar{P}_1, \bar{P}'_1), (\bar{P}_2, \bar{P}'_2), (\bar{P}_3, \bar{P}'_3)$. Therefore, the given system of forces applied at points A_i is replaced by a system consisting of the same forces, but already applied in the center O , and attached pairs.

Forces $\bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \bar{P}'_3$ can be added according to the rule of a force polygon. The vector sum of these forces is called **the main vector \bar{R}** (Fig. 1.28). So,



or

$$\bar{R} = \bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 + \bar{P}'_3$$

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3,$$

otherwise

$$\bar{R} = \sum \bar{P}_i \quad (1.21)$$

The attached pairs can also be added to obtain an resultant pair with the moment L_o , which is called **the main moment**. Its magnitude

Fig. 1.28. Determination of the main vector of a plane system of convergent forces

$$L_o = \sum M_{O_i}, \quad (1.22)$$

where M_{O_i} – the moment of each attached pair, equal to the moment of the brought force, relatively the center of bringing.

$$M_{O_i} = P_i \cdot h_i.$$

The theorem is thus proved.

The result can be formulated as follows: **a flat system of forces can be brought in the general case to one force applied at an arbitrarily chosen point and equal to the main vector of the system,**

дорівнює головному моменту системи відносно центра приведення.

Необхідно відмітити, що головний вектор \bar{R} , прикладений у центрі приведення, не є рівнодіючою заданої системи сил, тому що ця система не еквівалентна одній силі \bar{R} ; вона еквівалентна системі, що складається із сукупності \bar{R} і L_O .

Оскільки, головний вектор дорівнює векторній сумі всіх заданих сил системи, то ні модуль його, ні напрям не залежать від вибору центра приведення. Що ж стосується головного моменту, то його значення в загальному випадку залежить від вибору центра приведення, оскільки зі зміною центра змінюються довжини плечей приєднаних пар.

Визначимо модуль і напрямок головного вектора аналітичним шляхом.

Проведемо через центр приведення O координатні осі Ox і Oy (рис. 1.27). Нехай проєкції сил заданої системи на ці осі будуть:

$$P_{1x}; P_{2x}; P_{3x};$$

$$P_{1y}; P_{2y}; P_{3y};$$

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} = \sum P_{ix};$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} = \sum P_{iy}.$$

Отже модуль і напрямок головного вектора визначаються

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (1.23)$$

$$\operatorname{tg}(\bar{R}, \bar{i}) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}, \quad (1.24)$$

де α – кут між головним вектором і віссю x .

and to one pair whose moment is equal to the main moment of the system relative to the center of bringing.

It should be noted that the main vector \bar{R} applied in the center of the bringing is not resultant force of a given system of forces, because this system is not equivalent to one force \bar{R} ; it is equivalent to a system consisting of the aggregate \bar{R} and L_o .

Since the main vector is equal to the vector sum of all given forces of the system, neither its modulus nor direction does not depend on the choice of the center of bringing. As for the main moment, its value in the general case depends on the choice of the center of bringing, because with the change of the center changes the length of the arms of the attached pairs.

Let's determine the modulus and direction of the main vector analytically.

Draw through the center of reduction O coordinate axes Ox and Oy (Fig.1.27). Let the projections of the forces of a given system on these axes be:

$$P_{1x}; P_{2x}; P_{3x};$$

$$P_{1y}; P_{2y}; P_{3y};$$

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} = \sum P_{ix};$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} = \sum P_{iy}.$$

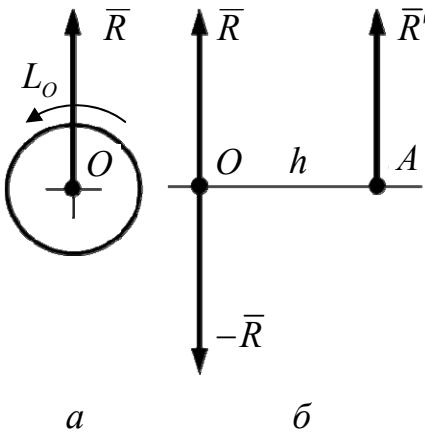
Therefore, the module and direction of the main vector will be:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (1.23)$$

$$tg(\bar{R}, \bar{i}) = tg\alpha = \frac{R_y}{R_x}, \quad (1.24)$$

where α – the angle between the main vector and the x -axis.

Як було показано вище, у результаті приведення довільної плоскої системи сил до деякого центру отримуємо силу \bar{R} , що називається головним вектором, і пару сил, момент якої L_O називається головним моментом системи сил відносно прийнятого центра. Покажемо, що цю систему, яка складається із сили і пари, можна привести до рівнодіючої сили. За величиною й напрямком ця рівнодіюча дорівнює головному вектору, але лінія дії її в загальному випадку не проходить через центр приведення, а відстоїть від нього на відстані h , рівній частці від ділення величини головного моменту L_O на величину головного вектора \bar{R} , тобто



$$h = \frac{L_O}{R}. \quad (1.25)$$

Дійсно, в центрі приведення O маємо головний вектор \bar{R} і головний момент L_O (рис. 1.29, а). Замінімо головний момент L_O парою сил, що складається із сил, за величиною рівних головному вектору \bar{R} . Плече пари буде

$\frac{L_O}{R}$ (рис. 1.29, б). У точці O

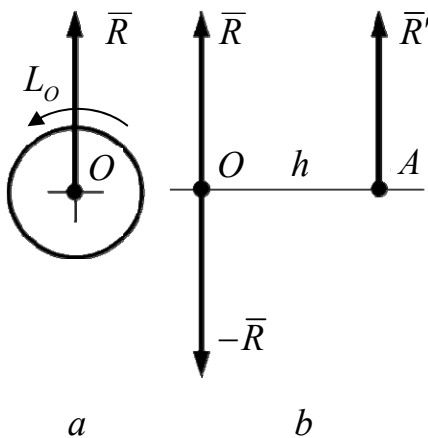
Рис. 1.29. Приведення сили

сили \bar{R} і $-\bar{R}$ взаємно врівноважуються й залишається одна сила – рівнодіюча \bar{R}' , прикладена в новій точці A на відстані h від центра приведення.

Різні випадки приведення, що можуть зустрітися в практиці, такі:

1. $R = 0; L_O = 0$ – система знаходиться в рівновазі.
2. $R = 0; L_O \neq 0$ – система приводиться до однієї пари.

As shown above, as a result of bringing an arbitrary flat system of forces to some center, we obtain a force \bar{R} called the main vector and a pair of forces, the moment of which L_o is called the main moment of the system of forces relative to the accepted center. We show that this system, which consists of force and pair, can be brought to a resultant force. In magnitude and direction this resultant force is equal to the main vector, but its line of action in the general case does not pass through the center of bringing, and is from it at a distance h equal to the quotient of the division of the magnitude of the main moment L_o by the magnitude of the main vector \bar{R} , ie



$$h = \frac{L_o}{R}. \quad (1.25)$$

Indeed, in the center of bringing O we have the main vector \bar{R} and the main moment L_o (Fig. 1.29, a). We replace the main moment L_o with a pair of forces consisting of forces equal in magnitude to the main vector \bar{R} . The arm of the pair will be $\frac{L_o}{R}$ (Fig. 1.29, b). At point O , the forces \bar{R} and $-\bar{R}$

are mutually balanced and there remains one force – resultant \bar{R}' , applied at the new point A at a distance h from the center of bringing.

Various cases of bringing that may occur in practice are:

1. $R = 0; L_o = 0$ – the system is in equilibrium.
2. $R = 0; L_o \neq 0$ – the system is brought to one pair.

Рівнодіючої сили система не має.

3. $R \neq 0$; $L_O = 0$ – система приводиться до рівнодіючої, що проходить через центр приведення.

4. $R \neq 0$; $L_O \neq 0$ – загальний випадок. Система приводиться до сили та пари. Сила й пара можуть бути замінені рівнодіючою з лінією дії, що не проходить через центр приведення.

Теорема про момент рівнодіючої сили

Доведемо тепер ***теорему про момент рівнодіючої сили***, що називається ***теоремою Вариньона***. Як видно з рис. 1.29. б, момент рівнодіючої R' відносно точки O дорівнює Rh . На підставі формули (1.20)

$$Rh = L_O,$$

отже
$$M_O(\bar{R}') = L_O.$$

Але відповідно формулі (1.22)

$$L_O = \sum M_{O_i},$$

отже

$$M_O(\bar{R}') = \sum M_{O_i}, \quad (1.26)$$

тобто *момент рівнодіючої сили відносно деякого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того ж центра*.

На основі теореми Вариньона можна вивести умову рівноваги важеля. Нехай до важеля AB прикладені сили \bar{P} і \bar{Q} точкою опори його є точка O (рис. 1.30). Важіль знаходиться в рівновазі. Рівнодіюча \bar{R} паралельних сил \bar{P} і \bar{Q} дорівнює їх сумі

$$R = P + Q$$

і прикладена в точці опори O , в якій вона зрівноважується реакцією N .

There is no resultant force of the system.

3. $R \neq 0; L_O = 0$ – the system is brought to a resultant force, that passing through the center of bringing.

4. $R \neq 0; L_O \neq 0$ – general case. The system is brought to force and pair. Force and pair can be replaced by a resultant force with the line of action not passing through the center of bringing.

Theorem on the moment of resultant force

We now prove ***the theorem on the moment of resultant force***, which is called ***Varignon's theorem***. As can be seen from Fig. 1.29. b , the moment of resultant force R' relative to the point O is equal to Rh . Based on the formula (1.20)

$$Rh = L_O,$$

so
$$M_O(\bar{R}') = L_O.$$

But according to the formula (1.22)

$$L_O = \sum M_{O_i},$$

so

$$M_O(\bar{R}') = \sum M_{O_i}, \tag{1.26}$$

that is, *the moment of resultant force relatively to some center is equal to the algebraic sum of the moments of the component forces relatively to the same center.*

Based on Varignon's theorem, we can derive the equilibrium condition of the lever. Let the forces \bar{P} and \bar{Q} are applied to the lever AB ; its fulcrum is the point O (Fig. 1.30). The lever is in balance. The resultant force \bar{R} of parallel forces \bar{P} and \bar{Q} is equal to their sum.

$$R = P + Q$$

and is applied in the fulcrum O , at which it is balanced by the reaction N .

За теоремою Вариньона

$$M_o(\bar{R}) = M_o(\bar{P}) + M_o(\bar{Q}).$$

Але $M_o(\bar{R}) = 0,$

оскільки сила R прикладена в цій точці. Отже,

$$M_o(\bar{P}) + M_o(\bar{Q}) = 0$$

або

$$P \cdot AO - Q \cdot OB = 0.$$

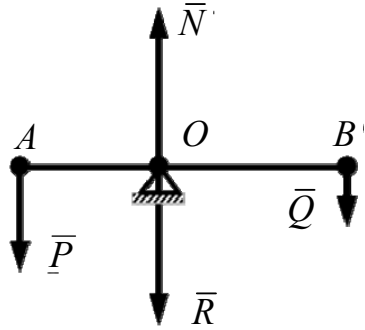


Рис. 1.30. Рівновага важеля

Отже, для рівноваги важеля необхідно й достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів сил, прикладених до нього, відносно точки опори дорівнювала нулю.

1.5 Умови та рівняння рівноваги плоскої системи сил

Якщо розглянути тверде тіло, що перебуває під дією плоскої системи сил, то, очевидно, це тіло буде знаходитись в рівновазі лише в тому випадку, якщо й головний вектор \bar{R} системи сил і її головний момент L_0 будуть дорівнюють нулю

$$\bar{R} = 0; \quad L_0 = 0.$$

Ці рівності є механічними умовами рівноваги довільної плоскої системи сил. Тому що за рівняннями (1.22) і (1.23):

$$L_o = \sum M_{O_i}; \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

то для того, щоб головний вектор і головний момент перетворювались в нуль, необхідно й достатньо, щоб мали місце рівняння:

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0; \quad \sum M_A = 0. \quad (1.27)$$

By Varignon's theorem

$$M_o(\bar{R}) = M_o(\bar{P}) + M_o(\bar{Q}).$$

But $M_o(\bar{R}) = 0,$

since the force R is applied at this point. So,

$$M_o(\bar{P}) + M_o(\bar{Q}) = 0$$

or

$$P \cdot AO - Q \cdot OB = 0.$$

Thus, for the equilibrium of the lever, it is necessary and sufficient that the algebraic sum of the moments of the forces applied to it relatively to the fulcrum be equal to zero.

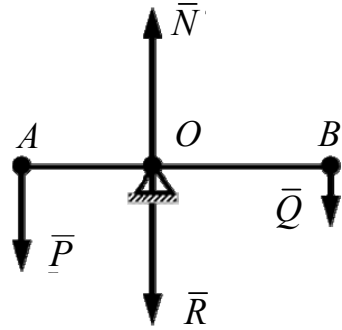


Fig. 1.30. Equilibrium of the lever

1.5 Conditions and equations of equilibrium of a flat system of forces

If we consider a solid body under the action of a flat system of forces, then, obviously, this body will be in equilibrium only if both the main vector \bar{R} of the system of forces and its main moment L_0 will be equal to zero

$$\bar{R} = 0; \quad L_0 = 0.$$

These equations are mechanical conditions for the equilibrium of an arbitrary plane system of forces. Because by equations (1.22) and (1.23):

$$L_0 = \sum M_{O_i}; \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

then in order for the main vector and the main moment to become zero, it is necessary and sufficient that the equations take place:

$$\sum P_{ix} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0; \quad \sum M_A = 0. \quad (1.27)$$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил системи на кожну із двох координатних осей, що лежать в площині системи, порізно дорівнювали нулю і щоб сума їхніх моментів відносно довільно вибраної точки площини також дорівнювала нулю.

Ці рівності в аналітичній формі виражають умови рівноваги довільної плоскої системи сил. Умови (1.27) називають також рівняннями рівноваги довільної плоскої системи сил.

Як осі координат, так і центр моментів лежать у площині дії системи й можуть бути обрані зовсім довільно. Для зручності проєктування сил застосовують декартову систему координат.

Слід зазначити, що отримана форма рівнянь рівноваги (два рівняння проєкцій і одне рівняння моментів) не є єдино можливою. Рівняння можна складати й іншими способами, однак кількість їх завжди дорівнює трьом.

Для пояснення цього доведемо наступну теорему: *якщо сума моментів всіх сил плоскої системи відносно кожного із трьох центрів у цій площині, не лежачих на одній прямій, дорівнює нулю, то система виявляється, зрівноваженою.*

Нехай A, B і C будуть три даних центри, а $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ – сили плоскої системи.

Якщо

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0, \quad (1.28)$$

то, на підставі теореми Вариньона, момент рівнодіючої \bar{R} цієї системи відносно кожної із трьох точок A, B і C також дорівнює нулю.

Момент рівнодіючої відносно будь-якої точки тільки тоді дорівнює нулю, якщо:

- 1) рівнодіюча дорівнює нулю;
- 2) лінія дії рівнодіючої проходить через цю точку.

For the equilibrium of a flat system of forces it is necessary and sufficient that the sums of projections of all forces of the system on each of the two coordinate axes lying in the plane of the system are equal to zero and that the sum of their moments relative to an arbitrarily chosen point of the plane is also zero.

These equations in analytical form express the equilibrium conditions of an arbitrary flat system of forces. Conditions (1.27) are also called *equilibrium equations of an arbitrary flat system of forces*.

Both the coordinate axes and the center of the moments lie in the plane of action of the system and can be chosen completely arbitrarily. A rectangular Cartesian coordinate system is used for the convenience of force design.

It should be noted that the obtained form of equilibrium equations (two equations of projections and one equation of moments) is not the only possible one. Equations can be composed in other ways, but their number is always equal to three.

To explain this, we prove the following theorem: *if the sum of the moments of all the forces of a flat system relatively to each of the three centers in this plane, not lying on one line, is zero, then the system is balanced.*

Let A , B and C be three data centers, and $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ let be the forces of a plane system.

If

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0, \quad (1.28)$$

then, on the basis of Varignon's theorem, the moment of resultant force \bar{R} of this system relatively to each of the three points A , B , and C is also equal to zero.

The moment of the resultant force relatively to any point is zero only if:

- 1) the resultant force is equal to zero;
- 2) the line of action of the resultant force passes through this point.

Якщо рівнодіюча дорівнює нулю, то система перебуває в рівновазі й необхідне доведено. Але, якщо рівнодіюча не дорівнює нулю, то у випадку рівноваги вона повинна одночасно проходити через всі згадані точки A , B , C . Але, оскільки, за умовою ці точки не лежать на одній прямій, то пройти через всі три точки рівнодіюча не може, і, отже, можливий тільки перший випадок, а саме, що рівнодіюча дорівнює нулю.

Таким чином, теорема доведена й рівняння (1.28) також представляє собою умови рівноваги плоскої системи сил.

Рівняння рівноваги можливі й у такій формі:

$$\begin{aligned}\sum P_x &= 0; \\ \sum M_A &= 0; \\ \sum M_B &= 0.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Отже, рівняння рівноваги плоскої системи сил можуть бути представлені в таких трьох формах.

1. Два рівняння проєкцій і одне рівняння моментів.
2. Одне рівняння проєкцій і два рівняння моментів – вісь проєкцій не перпендикулярна прямій, що з'єднує центри моментів.
3. Три рівняння моментів – центри моментів не лежать на одній прямій.

Отримані три рівняння рівноваги відповідають плоскій системі сил у загальному випадку. Але, як відомо, можливі й окремі випадки таких систем. В окремих випадках деякі рівняння рівноваги перетворюються в тотожності, що задовольняються при будь-яких значеннях сил системи. Такі рівняння, природно, втрачають зміст умов рівноваги. Так, наприклад, для плоскої системи паралельних сил сума проєкцій всіх сил на вісь, перпендикулярну силам, при будь-яких даних завжди дорівнює нулю. Тому в окремих випадках кількість рівнянь рівноваги для кожної системи буде менше трьох.

If the resultant force is zero, then the system is in equilibrium and the necessary is proved. But, if the resultant force is not equal to zero, then in the case of equilibrium it must simultaneously pass through all the mentioned points A , B , C . But, since, provided that these points do not lie on one line, the resultant force cannot pass through all three points, and, therefore, only the first case is possible, namely, that the resultant force is zero. Thus, the theorem is proved and equation (1.28) also represents the equilibrium conditions of a flat system of forces. Equilibrium equations are also possible in the following form:

$$\begin{aligned}\sum P_x &= 0; \\ \sum M_A &= 0; \\ \sum M_B &= 0.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Therefore, the equilibrium equations of a flat system of forces can be represented in the following three forms.

1. Two equations of projections and one equation of moments.
2. One equation of projections and two equations of moments – the axis of projections is not perpendicular to the line connecting the centers of moments.
3. Three equations of moments – the centers of moments do not lie on one line.

The obtained three equilibrium equations correspond to a flat system of forces in the general case. But, as is known, some cases of such systems are also possible. In some cases, some equilibrium equations are transformed into identities that are satisfied at any values of the forces of the system. Such equations, of course, lose the meaning of equilibrium conditions. For example, for a planar system of parallel forces, the sum of the projections of all forces on the axis perpendicular to the forces, for any data, is always zero. Therefore, in some cases, the number of equilibrium equations for each system will be less than three.

Умови рівноваги для різних видів плоских систем наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Умови рівноваги		
Сили на одній прямій	$\sum P_x = 0$ Вісь x паралельна силам	
Збіжні сили на площині	$\sum P_x = 0; \sum P_y = 0$	
Паралельні сили на площині		
Перша форма	Друга форма	
$\sum P_y = 0; \sum M_O = 0$	$\sum M_O = 0; \sum M_A = 0$	
Вісь y паралельна силам	OA не паралельна силам	
Довільна плоска система сил		
Перша форма	Друга форма	Третя форма
$\sum P_x = 0$	$\sum P_x = 0$	$\sum M_O = 0$
$\sum P_y = 0$	$\sum M_O = 0$	$\sum M_A = 0$
$\sum M_O = 0$	$\sum M_A = 0$	$\sum M_B = 0$
	OA не перпендикулярна осі x	O, A, B не лежать на одній прямій

Рівняння рівноваги застосовуються головним чином у тих випадках, коли, розглядаючи тіло під дією певної системи сил, доводиться по деяких заданих силах, прикладених до тіла, визначити невідомі реакції зв'язків, зокрема опорні реакції.

Equilibrium conditions for different types of flat systems are given in table. 1.1.

Table 1.1

Equilibrium conditions		
Forces on one line	$\sum P_x = 0$ The x -axis is parallel to the forces	
Convergent forces on the plane	$\sum P_x = 0; \sum P_y = 0$	
Parallel forces on the plane		
The first form	The second form	
$\sum P_y = 0; \sum M_O = 0$	$\sum M_O = 0; \sum M_A = 0$	
The y -axis is parallel to the forces	OA is not parallel to the forces	
Arbitrary flat system of forces		
The first form	The second form	The third form
$\sum P_x = 0$	$\sum P_x = 0$	$\sum M_O = 0$
$\sum P_y = 0$	$\sum M_O = 0$	$\sum M_A = 0$
$\sum M_O = 0$	$\sum M_A = 0$	$\sum M_B = 0$
	OA is not perpendicular to the x -axis	O, A, B do not lie on one line

Equilibrium equations are used mainly in those cases when, considering the body under the action of a certain system of forces, it is necessary to determine unknown reactions of restraints, in particular support reactions.

Загальний аналітичний метод рішення цієї задачі міститься в наступному. Оскільки, розглядуване тіло перебуває в рівновазі, то всі прикладені сили, включаючи й реакції зв'язків, повинні задовольняти умовам рівноваги. Склавши ці умови рівноваги, одержимо рівняння, у які, крім заданих сил, увійдуть і невідомі реакції. Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знайдемо з них невідомі сили.

Спрощення систем рівнянь рівноваги можна досягти правильним вибором форми рівнянь, положення осей і центрів моментів.

Кожному виду плоскої системи сил відповідає цілком певна кількість рівнянь рівноваги. Зрозуміло, що кількість невідомих сил, які можна знайти з розрахунку, не перевищує кількості складених рівнянь. Якщо кількість невідомих сил не більша кількості рівнянь, а отже, рівняння можна розв'язати, то така задача називається *статично визначеною*, а відповідна система сил – *статично визначуваною*. У протилежному випадку задача стає *статично невизначеною* (система сил – *статично невизначуваною*) і методами статички розв'язана бути не може.

The general analytical method for solving this problem is as follows. Since the body in question is in equilibrium, all the applied forces, including the reactions of the restraints, must satisfy the conditions of equilibrium. Adding these equilibrium conditions, we obtain equations, which, in addition to given forces, will include unknown reactions. Solving the obtained system of equations, we find unknown forces from them.

Simplification of systems of equilibrium equations can be achieved by choosing the right form of equations, positions of axes and centers of moments.

Each type of flat system of forces corresponds to a certain number of equilibrium equations. It is clear that the number of unknown forces that can be found from the calculation does not exceed the number of compound equations. If the number of unknown forces is not greater than the number of equations, and therefore the equation can be solved, then such a problem is called *statically definite*, and the corresponding system of forces is called *statically determinable*. Otherwise, the problem becomes *statically indeterminate* and cannot be solved by static methods.

2 КІНЕМАТИКА

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух тіл без урахування їх інертності та діючих на них сил. Кінематику іноді називають „геометрією руху”. Дійсно, до основних понять геометрії – точка, лінія, поверхня в кінематиці додається тільки одна нова, незалежна змінна – час. В класичній механіці час вважають однаковим для будь-яких систем відліку, що є наближенням до дійсності, достатньо точним, якщо швидкості малі в порівнянні зі швидкістю світла.

На відміну від статички, яка зародилась ще в античні часи в зв'язку з будівництвом різних споруд, кінематика виділилась в самостійний розділ, досить пізно – на початку 19 століття. Причиною послужив бурхливий розвиток машинобудування, широке застосування багатьох механізмів, таких, наприклад, як кривошипно-повзунний. Французький вчений фізик Ампер (1775 – 1836 р.р.) вперше запропонував в 1834 році виділити розділ механіки, що вивчає закони руху точки і твердого тіла, без врахування причин, що його спонукають в окремий розділ теоретичної механіки і запропонував назвати його кінематикою.

У кінематиці вивчення руху тіл можливо тільки відносно іншого тіла. В фізичному понятті рух має відносний характер, що й викликає необхідність установалення поняття „система відліку”. За систему відліку приймають деяку матеріальну систему, стосовно якої визначається положення даного тіла. Положення тіла в просторі визначиться в тому випадку, якщо буде відомо положення всіх його точок. Так, наприклад, положення кожної точки тіла в просторі можна характеризувати трьома координатами.

Під системою відліку розуміють деяку систему координатних осей, певним, заданим чином розташованих у просторі. Наприклад, при вивченні земних рухів за систему відліку можна прийняти систему осей, пов'язаних із Землею.

Варто мати на увазі, що один і той самий механічний рух тіла буде по-різному визначено в різних системах відліку. Тому,

2 KINEMATICS

Kinematics is a section of theoretical mechanics that studies the motion of bodies without taking into account their inertia (mass) and the forces acting on them. Kinematics are sometimes called "geometry of motion". Indeed, to the basic concepts of geometry – point, line, surface in kinematics, only one new, independent variable is added – time. In classical mechanics, time is considered the same for all reference frames, which is an approximation to reality, quite accurate if the speeds are small compared to the speed of light.

Unlike statics, which originated in ancient times in connection with the construction of various structures, kinematics stood out in a separate section, quite late – in the early 19th century. The reason was the rapid development of mechanical engineering, the widespread use of many mechanisms, such as crank-slider. The French physicist Ampere (1775 – 1836) first proposed in 1834 to allocate a section of mechanics that studies the laws of motion of a point and a rigid body, without taking into account the reasons that motivate it, into a separate section of theoretical mechanics and proposed to call it kinematics.

In kinematics, the study of the motion of bodies is possible only in relation to another body. In the physical concept, motion has a relative character, which necessitates the establishment of the concept of "frame of reference". A certain material system is taken as a frame of reference, in relation to which the position of a given body is determined. The position of the body in space will be determined if the position of all its points is known. So, for example, the position of each point of the body in space can be characterized by three coordinates.

Under the frame of reference understand some system of coordinate axes, in a certain, given way located in space.

For example, in the study of terrestrial motions, the frame of reference can be taken as a system of axes associated with the Earth.

задаючи рух тіла, варто завжди вказувати, якій системі відліку це завдання відповідає. Так, наприклад, предмет, що лежить на палубі корабля, який рухається, буде перебувати в стані спокою стосовно системи відліку, пов'язаної з палубою корабля, і в стані руху – стосовно системи, пов'язаної із Землею.

У теоретичній механіці простір, у якому відбувається рух тіл, розглядається як тривимірний евклідовий простір. Тому властивості простору визначаються системою аксіом і теорем геометрії Евкліда. В теоретичній механіці час вважається однако-вим у будь-яких системах відліку й незалежним від руху цих систем одна відносно одної.

Щоб виміряти час, потрібно розглянути яку-небудь послі-довність подій у часі. За одиницю часу звичайно приймають тривалість одного оберту Землі навколо осі, названу зоряною добою. У кінематиці час позначають буквою t і розглядають як неперервно змінювану величину.

При вимірюванні часу нам доведеться зустрічатися з по-няттями «*проміжок часу t_{m-n}* » і «*момент часу t_n* ».

Проміжком часу t_{m-n} називається час, що протікає між двома фізичними явищами

$$t_{m-n} = t_n - t_m.$$

Моментом часу називається границя між двома суміжни-ми проміжками часу. *Початковим моментом* називають час, з якого починають відлік часу.

Кінематику ділять на кінематику точки й кінематику твердого тіла.

2.1 Кінематика точки

Способи визначення руху точки

Лінія, описана в просторі точкою, що рухається, нази-вається траєкторією точки. У випадку, коли траєкторія пред-ставляє собою плоску криву, рух точки називається *плоским*,

The same mechanical motion of a body will be differently defined in different frames of reference. Therefore, when setting the movement of the body, it is always worthwhile to indicate which frame of reference this task corresponds to.

In theoretical mechanics, the space in which bodies move is considered a three-dimensional Euclidean space. Therefore, the properties of space are determined by a system of axioms and theorems of Euclidean geometry. Time is considered to be the same in any frame of reference and independent of the motion of these systems relative to each other.

To measure time, you need to consider some sequence of events over time. The unit of time is usually taken to be the duration of one revolution of the Earth around an axis called the stellar day.

In kinematics, time is denoted by the letter t and is considered as a continuously variable quantity.

The time interval t_{m-n} is the time that elapses between two physical phenomena

$$t_{m-n} = t_n - t_m.$$

The moment of time t_n is the boundary between two adjacent time intervals. **The initial moment** is the time from which the counting of time begins.

Kinematics is divided into kinematics of a point and kinematics of a rigid body.

2.1 Kinematics of a point

Ways to determine the motion of a point.

A line described in space by a moving point is called the trajectory of the point. In the case where the trajectory is a flat curve, the motion of the point is called **flat**, otherwise – **spatial**. If the

у протилежному випадку – *просторовим*. Якщо траєкторія – *пряма*, то рух буде *прямолінійним*, якщо ж траєкторія – *крива*, то – *криволінійним*.

Рух точки в просторі буде кінематично визначено в тому випадку, якщо є можливість вказати положення точки в будь-який момент часу. Ми розглянемо три способи визначення, задання, руху точки: натуральний, векторний і координатний.

Натуральний спосіб задання руху точки. Нехай точка M рухається по заданій траєкторії (рис. 2.1). Для визначення положення точки в просторі в окремі моменти часу треба знати положення точки на траєкторії в ці моменти.

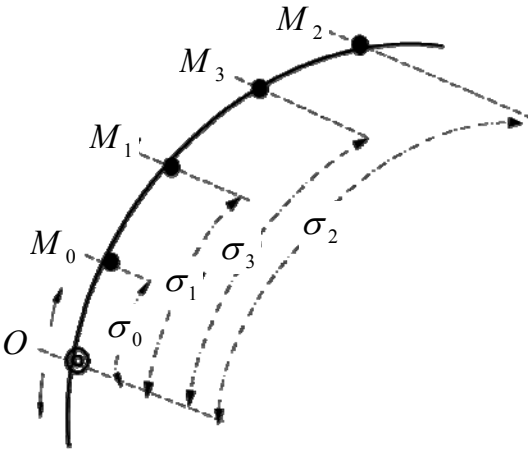


Рис. 2.1. Натуральний спосіб задання руху точки

значення $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$, визначимо не рух точки M у просторі, а лише *окремі положення* точки на її траєкторії в певні моменти часу. Щоб задати *рух*, тобто одержати можливість визначити положення точки в будь-який момент часу, варто задати закон зміни дугової координати в часі, задати функцію

$$\sigma = f(t). \tag{1.30}$$

У моменти часу $t_0, t_1, t_2, t_3 \dots$ точка M займає на траєкторії відповідно положення $M_0, M_1, M_3, M_2 \dots$. Прийmemo на траєкторії довільну точку O за початок відліку. Тоді кожному положенню точки M буде відповідати певне значення дугової координати σ , додатне або від'ємне, залежно від прийнятого напрямку відліку дуг. Задавши

trajectory is *straight*, then the motion will be *rectilinear*, if the trajectory is *curved*, then it will be *curvilinear*.

The motion of a point in space will be kinematically determined if it is possible to specify the position of the point at any time. We will consider three ways of definition, setting, movement of a point: natural, vector and coordinate.

A natural way to set the motion of a point. Let the point M move along a given trajectory (Fig. 2.1). To determine the position of a point in space at certain moments in time you need to know the position of a point on the trajectory at these times.

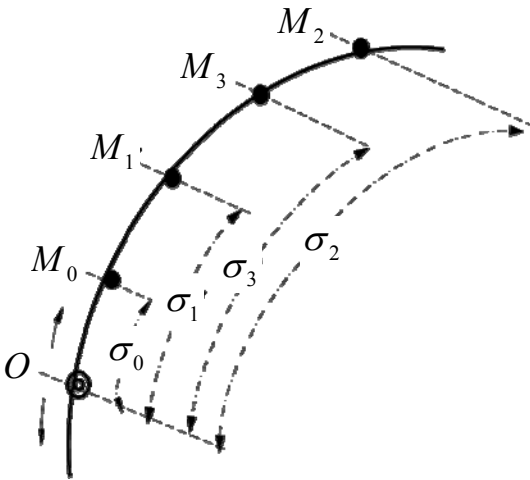


Fig. 2.1. A natural way to set the motion of a point

At times $t_0, t_1, t_2, t_3 \dots$ the point M occupies the positions $M_0, M_1, M_3, M_2 \dots$ on the trajectory, respectively. Let us take an arbitrary point O on the trajectory as the starting point. Then each position of the point M will correspond to a certain value of the arc coordinate σ , positive or negative, depending on the accepted direction of count of the arcs. Given

the values of $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$, we determine not the motion of the point M in space, but only the *individual positions* of the point on its trajectory at certain moments in time. To set the *motion*, ie to be able to determine the position of a point at any time, you should set the law, change the arc coordinate in time, set the function

$$\sigma = f(t). \tag{1.30}$$

Функція (1.30) називається *рівнянням руху точки по траєкторії* або *рівнянням руху в натуральній формі*.

Резюмуючи отриманий результат, можна сказати, що *рух точки буде задано натуральним способом, якщо відомі:*

- 1) *траєкторія точки;*
- 2) *початок відліку на траєкторії із зазначенням додатного та від'ємного напрямів відліку;*
- 3) *закон руху точки по траєкторії.*

При переході точки, наприклад, з положення M_1 в M_2 , що відбувся за проміжок часу t_{1-2} , точка M переміщується на відстань M_1M_2 , причому

$$\cup M_1M_2 = \sigma_2 - \sigma_1.$$

Ця відстань зветься *довжиною шляху* (або, скорочено, просто шлях), пройденого точкою за проміжок часу t_{1-2} і позначається s_{1-2} . Вимірюється s в одиницях довжини, тобто в метрах.

Довжина пройденого шляху є величина додатна, так що, наприклад,

$$S_{2-3} = |\sigma_3 - \sigma_2| = \sigma_2 - \sigma_3.$$

Розглянемо *векторний спосіб* задавання руху точки. Нехай точка M рухається в просторі по якійсь траєкторії й у два послідовних моменти часу t_1 і t_2 займає відповідно положення M_1 і M_2 (рис. 1.32).

З довільно обраної точки O проведемо в точки M_1 і M_2 радіуси-вектори \vec{r}_1 і \vec{r}_2 . Положення точки M у просторі в даний момент часу буде визначено, якщо задано за модулем та напрямом відповідний радіус-вектор. Рух же точки визначається в тому випадку, якщо радіус-вектор задано в його змінюванні за часом, тобто, якщо задано векторну функцію

$$\vec{r} = \vec{f}(t). \quad (1.31)$$

Function (1.30) is called *the equation of motion of a point on a trajectory* or ***the equation of motion in natural form***.

Summarizing the result obtained, we can say that ***the movement of a point will be set in a natural way if the following are known:***

- 1) ***the trajectory of the point;***
- 2) ***the account start on the trajectory indicating the positive and negative directions of the counting;***
- 3) ***the law of motion of a point along the trajectory.***

When moving a point, for example, from the position M_1 to M_2 , which occurred during the time t_{1-2} , the point M moves to the distance M_1M_2 , and

$$\cup M_1M_2 = \sigma_2 - \sigma_1.$$

This distance is called *the length of the path* (or, in abbreviated form, just the path) traversed by the point in the time interval t_{1-2} and is denoted by s_{1-2} . S is measured in units of length, that is, in meters.

The length of the distance traveled is always understood as a positive value, so, for example,

$$S_{2-3} = |\sigma_3 - \sigma_2| = \sigma_2 - \sigma_3.$$

Consider ***a vector way*** to set the motion of a point. Let the point M move in space along some trajectory and at two consecutive times t_1 and t_2 occupies the positions M_1 and M_2 , respectively (Fig. 1.32).

From an arbitrarily chosen point O , we draw radius-vectors \bar{r}_1 and \bar{r}_2 at points M_1 and M_2 . The position of the point M in space at a given moment in time will be determined if the corresponding radius-vector is given by modulus and direction. The motion of a point is determined if the radius-vector is given in its change over time, that is, if a vector function is given

$$\bar{r} = \bar{f}(t). \quad (1.31)$$

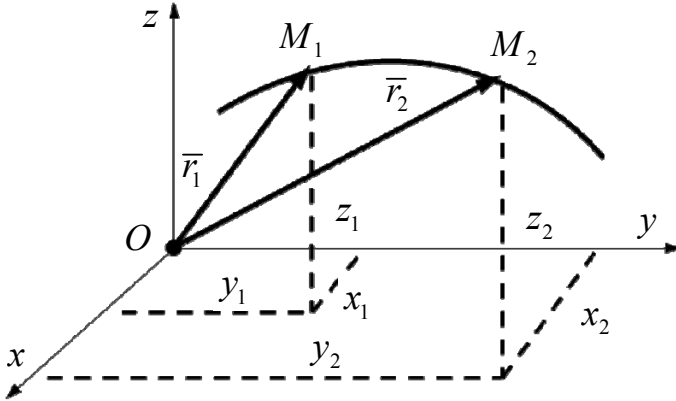


Рис. 2.2. Рух точки по траєкторії

Рівняння (1.31) представляє собою **рівняння руху точки у векторній формі**. Отже, рух точки задано векторним способом, якщо задано радіус-вектор точки як функція часу.

Векторна форма задавання руху точки використовується лише для теоретичних викладок і не може бути застосована для рішення практичних задач.

Переходимо до **координатного способу** задавання руху точки. Розглянемо рух точки по траєкторії і її положення M_1 і M_2 (рис. 2.2) у моменти часу t_1 і t_2 . Виберемо нерухому систему координатних осей $Oxyz$. Положення точки в просторі визначається її координатами, наприклад, координатами x_1, y_1, z_1 у момент часу t_1 або координатами x_2, y_2, z_2 у момент t_2 . При русі точки M по траєкторії ці координати безперервно змінюються в часі й, отже, є однозначними і неперервними функціями часу t тобто

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \quad (1.32)$$

Ці рівняння й будуть **рівняннями руху точки у координатній формі**; вони використовуються при аналітичному рішенні задач кінематики.

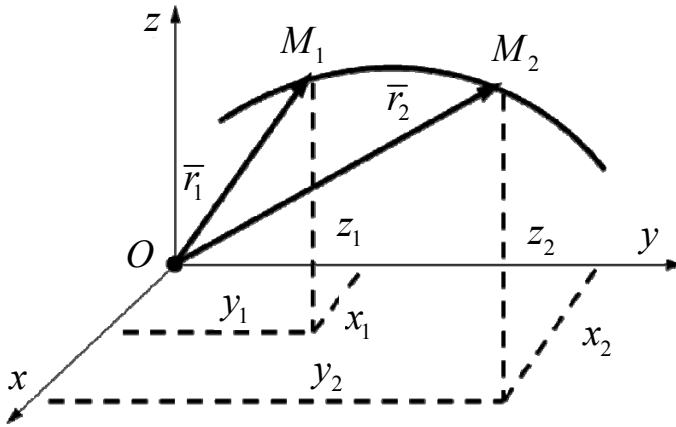


Fig. 2.2. The movement of a point on a trajectory

Equation (1.31) is *the equation of motion of a point in vector form*. Therefore, the motion of a point is given in a vector way, if the radius-vector of a point is given as a function of time.

The vector form of setting the motion of a point is used only for theoretical calculations and cannot be used to solve practical tasks.

We turn to *the coordinate method* of setting the motion of a point. Consider the motion of a point on the trajectory and its position M_1 and M_2 (Fig. 2.2) at times t_1 and t_2 . Choose a fixed coordinate system $Oxyz$. The position of a point in space is determined by its coordinates, for example, coordinates x_1, y_1, z_1 at time t_1 or coordinates x_2, y_2, z_2 at time t_2 . When the point M moves along the trajectory, these coordinates continuously change in time and, therefore, are single-valued and continuous functions of time t is

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \quad (1.32)$$

These equations will be *the equations of motion of a point in coordinate form*; they are used in the analytical solution of kinematics tasks.

Якщо функції f_1, f_2 і f_3 відомі, то з рівняння (1.32) можна знайти координати точки, що рухається, для будь-якого моменту часу, тобто визначити положення точки в просторі.

Рівняння руху точки є в той же час і рівняннями її траєкторії в параметричній формі. Виключивши параметр t , одержимо рівняння траєкторії точки, що рухається, в явній формі.

Якщо траєкторією точки є плоска крива, то рух визначається двома рівняннями:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (1.33)$$

У випадку прямолінійного руху можна прийняти пряму, по якій рухається точка, за координатну вісь x , і число рівнянь руху в цьому випадку скоротиться до одного

$$x = f(t). \quad (1.34)$$

Рівняння руху точки у векторній формі можна перетворити так. З рис. 1.32 видно, що проєкції радіуса-вектора точки на осі координат у випадку, коли радіус-вектор проводиться з початку координат, представляють собою відповідні координати точки. Отже, модуль радіуса-вектора

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.35)$$

де $r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z.$

Напрямок радіуса-вектора визначається за напрямними косинусами

$$\begin{aligned} \cos(\vec{r}, \vec{i}) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \\ \cos(\vec{r}, \vec{j}) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \end{aligned} \quad (1.36)$$

If the functions f_1, f_2 and f_3 are known, then from equation (1.32) we can find the coordinates of a moving point for any moment in time, ie determine the position of a point in space.

The equations of motion of a point are at the same time the equations of its trajectory in parametric form. Excluding the parameter t , we obtain the equation of the trajectory of a moving point in explicit form.

If the trajectory of a point is a flat curve, then the motion is determined by two equations:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (1.33)$$

In the case of rectilinear motion, you can take the line along which the point moves, for the axis x , and the number of equations of motion in this case will be reduced to one

$$x = f(t). \quad (1.34)$$

The equation of motion of a point in vector form can be transformed as follows. From fig. 1.32 it is seen that the projections of the radius-vector of the point on the coordinate axes in the case when the radius-vector is drawn from the origin, are the corresponding coordinates of the point. Therefore, the modulus of the radius-vector

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.35)$$

where $r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z.$

The direction of the radius-vector is determined by the direction cosines

$$\begin{aligned} \cos(\bar{r}, \bar{i}) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \\ \cos(\bar{r}, \bar{j}) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\cos(\bar{r}, \bar{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

або цими ж залежностями у векторній формі

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z, \quad (1.37)$$

де \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} – орти або одиничні вектори, координатних осей (рис. 2.3).

2.2 Вектор швидкості точки

Однією з основних кінематичних характеристик руху точки є векторна величина, що називається **швидкістю точки**. Введемо спочатку поняття про середню швидкість точки за який-небудь проміжок часу.

Нехай точка, що рухається, перебуває у момент часу t у положенні M , що визначається радіусом-вектором \bar{r} , а в момент t_1 приходить у положення M_1 , що визначається радіусом-вектором \bar{r}_1 (рис. 2.4). Тоді переміщення точки за проміжок часу

$\Delta t = t_1 - t$ визначається вектором $\overline{MM_1}$ який будемо називати **вектором переміщення точки**.

Цей вектор спрямований по хорді, якщо точка рухається, криволінійно (рис. 2.4, а), і уздовж самої траєкторії, коли рух є прямолінійним (рис. 2.4, б). Із трикутника OMM_1 видно, що $\bar{r} + \overline{MM_1} = \bar{r}_1$, отже,

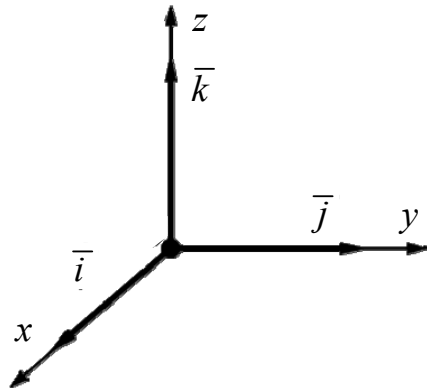


Рис. 2.3. Орти координатних осей

$$\cos(\bar{r}, \bar{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

or the same dependencies in vector form

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z, \quad (1.37)$$

where \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} – ors or unit vectors, coordinate axes (Fig.2.3).

2.2 Vector of the velocity of a point

One of the main kinematic characteristics of the motion of a point is a vector quantity called ***the velocity of the point***. We first introduce the concept of the average velocity of a point over a period of time.

Let the moving point be at the time t in the position M , which is determined by the radius-vector \bar{r} , and at the moment t_1 come to the position M_1 , which is determined

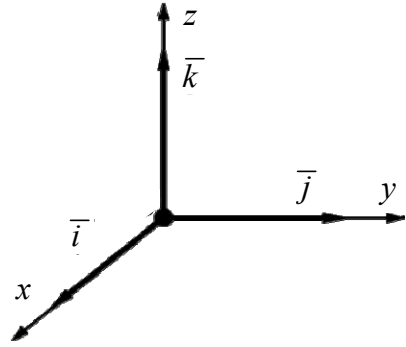


Fig. 2.3. Ors of coordinate axes

by the radius-vector \bar{r}_1 (Fig. 2.4). Then the displacement of the point over time $\Delta t = t_1 - t$ is determined by a vector $\bar{M}\bar{M}_1$ which we will call ***the vector of displacement of the point***.

This vector is directed along the chord if the point moves, curvilinearly (Fig. 2.4, a), and along the trajectory itself, when the motion is rectilinear (Fig. 2.4, b). From the triangle OMM_1 it is seen that $\bar{r} + \bar{M}\bar{M}_1 = \bar{r}_1$; therefore,

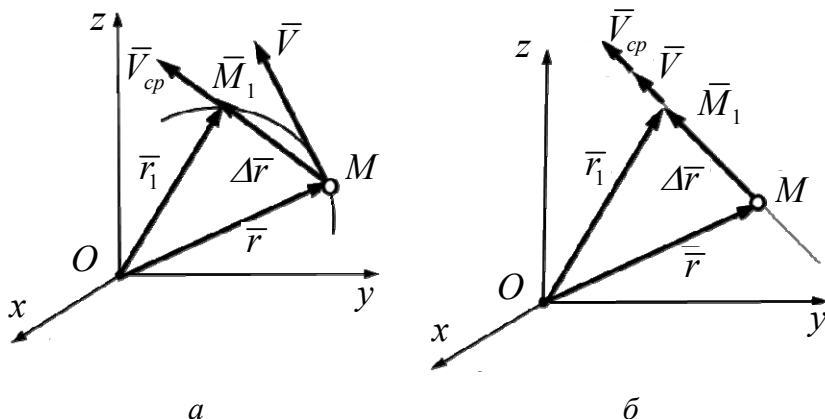


Рис. 2.4. Вектор швидкості точки

$$\overline{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}.$$

Відношення вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу дає векторну величину, що називається середньою за модулем і напрямом швидкістю точки за проміжок часу Δt

$$\vec{V}_{CP} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.38)$$

Спрямований вектор \vec{V}_{cp} так само, як і вектор $\overline{MM_1}$ тобто при криволінійному русі уздовж хорди MM_1 у бік руху точки, а при прямолінійному русі – уздовж самої траєкторії (від ділення на Δt напрям вектора не змінюється).

Очевидно, що чим менше буде проміжок часу Δt , для якого обчислена середня швидкість, тим величина \vec{V}_{cp} буде точніше характеризувати рух точки. Щоб одержати точну характеристику руху, вводять поняття про *швидкість точки в даний момент часу*.

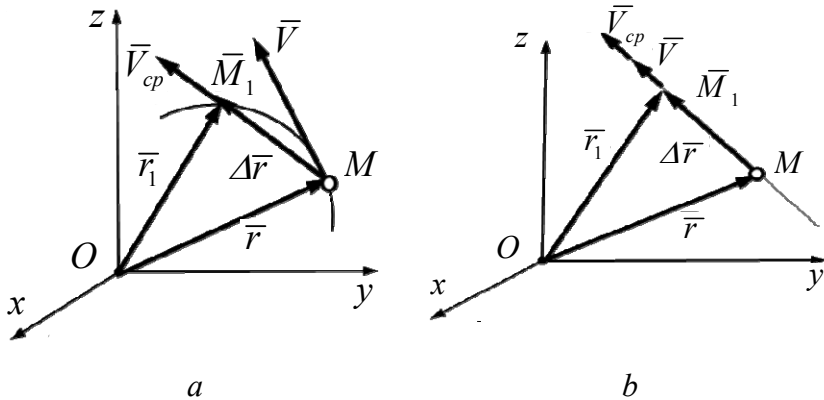


Fig. 2.4. Vector of the velocity of a point

$$\overline{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}.$$

The ratio of the point displacement vector to the corresponding time interval gives a vector value called the mean modulo and the direction of the velocity of the point over time Δt

$$\vec{V}_{CP} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.38)$$

The directional vector \vec{V}_{cp} is the same as the vector $\overline{MM_1}$, ie in the case of curvilinear motion along the chord MM_1 in the direction of point motion, and in the case of rectilinear motion – along the trajectory itself (from division on Δt the direction of the vector does not change).

Obviously, the smaller the time interval Δt for which the average speed is calculated, the more accurately the value \vec{V}_{cp} will characterize the motion of the point. To obtain an accurate description of the movement, introduce the concept of *velocity of a point at a given time*.

Швидкістю точки в даний момент часу називається векторна величина \bar{V} , до якої прямує середня швидкість \bar{V}_{cp} при наближенні проміжку часу Δt до нуля

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\bar{V}_{CP}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Границя відношення $\Delta \bar{r} / \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$ представляє собою першу похідну від вектора \bar{r} по аргументу t і остаточно отримуємо

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (1.39)$$

Отже, **вектор швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від радіуса-вектора точки за часом.**

Оскільки граничним напрямком січної MM_1 є дотична, **то вектор швидкості точки в даний момент часу спрямований по дотичній до траєкторії точки бік руху.**

Формула (1.39) показує також, що вектор швидкості \bar{V} дорівнює відношенню елементарного переміщення точки $d\bar{r}$, спрямованого по дотичній до траєкторії, до відповідного проміжку часу dt .

При прямолінійному русі вектор швидкості \bar{V} увесь час спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка, і може змінюватися лише чисельно; при криволінійному русі крім числового значення весь час змінюється і напрямок вектора швидкості точки. Швидкість вимірюється в одиницях довжини поділених на час, тобто м/с.

Швидкість точки при прямолінійному русі

Розглянемо рух точки по прямолінійній траєкторії. Рух цей може бути або рівномірним, або нерівномірним. **Рівномірним, називається такий рух точки, при якому за рівні проміжки часу проходяться рівні відстані S .**

The velocity of a point at a given moment in time is a vector quantity \bar{V} to which the average velocity goes \bar{V}_{cp} when the time interval Δt is directed to zero:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\bar{V}_{CP}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

The boundary of the ratio $\Delta \bar{r} / \Delta t$ at $\Delta t \rightarrow 0$ represents the first derivative from the vector \bar{r} by the argument t and is finally obtained

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (1.39)$$

Therefore, **the vector of the velocity of a point at a given point in time is equal to the first derivative from the radius-vector of the point in time.**

Since the boundary direction of the secant MM_1 is a tangent, **the velocity vector of the point at a given time is directed along the tangent to the trajectory of the point in the direction of motion.**

Formula (1.39) also shows that the velocity vector \bar{V} is equal to the ratio of the elementary displacement of the point $d\bar{r}$ directed along the tangent to the trajectory to the corresponding time interval dt .

In rectilinear motion, the velocity vector \bar{V} is constantly directed along the line along which the point moves, and can change only numerically; during curvilinear motion, in addition to the numerical value, the direction of the velocity vector of the point also changes all the time. Speed is measured in units of length divided by time, ie m/s.

Velocity of a point at rectilinear motion

Consider the motion of a point on a rectilinear trajectory. This movement can be either uniform or uneven. **Uniform is a motion of a point at which equal distances S pass at equal intervals of time.**

Тоді швидкість рівномірного й прямолінійного руху визначається за відомою формулою

$$V = \frac{S}{t}.$$

Якщо

$$V \neq const,$$

то швидкість виявляється величиною змінною й такий рух називається **нерівномірним**.

Якщо взяти відношення шляху S , пройденого точкою при нерівномірному русі, до проміжку часу t , протягом якого цей шлях пройдений, то таке відношення дасть середню швидкість за даний проміжок часу (або на даному шляху)

$$V_{CP} = \frac{S}{t}.$$

Середньою швидкістю нерівномірного руху називають таку швидкість, маючи яку точка проходить при рівномірному русі той же шлях за той же час, що й при розглянутому нерівномірному русі.

У технічних розрахунках більш важливим виявляється поняття миттєвої (істинної) швидкості точки, або швидкості в даний момент часу. Зазвичай миттєву швидкість називають просто швидкістю точки й позначають V .

Нехай у заданий момент часу t точка, що рухається, займає на траєкторії положення M (рис. 2.5). Через малий проміжок часу Δt , тобто в момент $t + \Delta t$, точка займе положення M' .

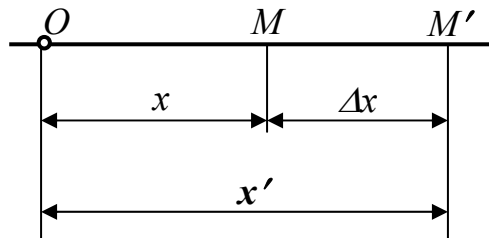


Рис. 2.5. Прямолінійний рух

Then the speed of uniform and rectilinear motion is determined by the known formula

$$V = \frac{s}{t}.$$

If

$$V \neq const,$$

then the velocity is a variable and such motion is called **non-uniform**.

If we take the ratio of the path s traversed by a point in non-uniform motion to the time interval t during which this path is traversed, then this ratio will give the average speed for a given period of time (or on this path)

$$V_{CP} = \frac{s}{t}.$$

The average speed of non-uniform motion is called such speed, having which point passes at uniform movement the same way for the same time, as at the considered uneven movement.

In technical calculations, the concept of instantaneous (true) velocity of a point, or velocity at a given point in time, is more important. Usually the instantaneous velocity is simply called the velocity of a point and is denoted by V .

Suppose that at a given moment in time t , a moving point occupies the position M on the trajectory (Fig. 2.5). After a short period of time Δt , ie at the moment $t + \Delta t$, the point will occupy the position M' .

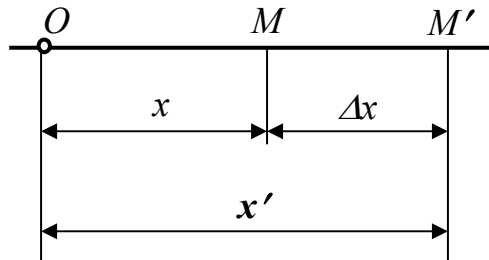


Fig. 2.5. Rectilinear motion

Приймаємо траєкторію точки за вісь x і відмічаємо, що положенням M і M' точки, що рухається, відповідають координати x і x' . Пройдений за час Δt шлях

$$s = x' - x.$$

Різниця $x' - x$ представляє собою зміну координати точки, що рухається. Позначимо його Δx

$$s = \Delta x.$$

Середня швидкість точки за час Δt

$$V_{CP} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Якщо необмежено зменшувати проміжок часу Δt , то межа, до якої прямує середня швидкість, і буде швидкістю точки в даний момент

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{CP} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

або

$$V = \frac{dx}{dt}. \quad (1.40)$$

Якщо ця похідна *додатна*, то абсциса точки з часом *збільшується*, а отже рух відбувається в *додатному напрямку* осі x . Зворотною буде картина при від'ємній похідній. Таким чином, ми приходимо до висновку, що швидкість прямолінійного руху має певний *знак*, який і вказує *напрямок руху* точки.

Оскільки пройдений точкою за проміжок часу Δt шлях Δs чисельно дорівнює зміні абсциси точки, тобто

$$\Delta s = |\Delta x|,$$

Take the trajectory of the point along the axis x and note that the positions M and M' of the moving point correspond to the coordinates x and x' . The path traveled in time Δt by a point

$$s = x' - x.$$

The difference $x' - x$ is a change in the coordinate of a moving point. Let's mark it Δx

$$s = \Delta x.$$

Average speed of a point for time Δt

$$V_{CP} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

If you reduce the time period Δt indefinitely, then the limit to which the average speed goes, and will be the speed of the point at the moment

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{CP} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

or

$$V = \frac{dx}{dt}. \tag{1.40}$$

If this derivative is *positive*, then the abscissa of the point *increases* with time, and therefore the motion occurs in *the positive direction* of the x -axis. The opposite will be the case with a negative derivative. Thus, we come to the conclusion that the speed of rectilinear motion has a certain *sign*, which indicates *the direction of motion* of the point.

Since the path Δs traversed by the point over time Δt is numerically equal to the change in the abscissa of the point, ie

$$\Delta s = |\Delta x|,$$

то величину (але не знак!) , швидкості можна знайти з рівняння

$$|V| = \frac{ds}{dt} \quad (1.41)$$

у тому випадку, коли відомий закон зміни в часі пройденого точкою шляху, тобто функція

$$s = f(t).$$

Хоча залежність (1.41) не дає повного рішення задачі про знаходження швидкості точки, проте вона часто використовується в практичних розрахунках, тому що напрямок руху в більшості випадків відомо з інших міркувань.

2.3 Вектор пришвидчення точки

Пришвидченням точки називається векторна величина, що характеризує змінення за часом модуля й напрямку швидкості точки.

Нехай у деякий момент часу t точка, що рухається, перебуває в положенні M і має швидкість \vec{V} , а в момент t_1 приходить в положення M_1 і має швидкість \vec{V}_1 (рис. 2.6). Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ швидкість точки одержує

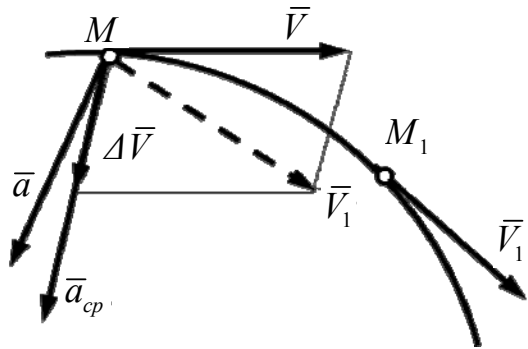


Рис. 2.6. Вектор пришвидчення

прирощення $\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$. Для побудови вектора $\Delta \vec{V}$ відкладемо від точки M вектор, рівний \vec{V}_1 , і побудуємо паралелограм, у якому діагоналлю буде \vec{V}_1 а однієї зі сторін \vec{V} . Тоді, очевидно,

then the magnitude (but not the sign!) of the velocity can be found from the equation

$$|V| = \frac{ds}{dt} \tag{1.41}$$

in the case when the law of change in time of the way passed by a point, ie function is known

$$s = f(t).$$

Although the dependence (1.41) does not give a complete solution to the problem of finding the velocity of a point, but it is often used in practical calculations, because the direction of motion in most cases is known for other reasons.

2.3 Vector of the acceleration of a point

The acceleration of a point is a vector quantity that characterizes the change in modulus time and direction of the velocity of the point.

Suppose that at some point in time t the moving point is in the position M and has a velocity \vec{V} , and at the moment t_1 it comes to the position M_1 and has a velocity \vec{V}_1 (Fig. 2.6). Then over time $\Delta t = t_1 - t$ the velocity

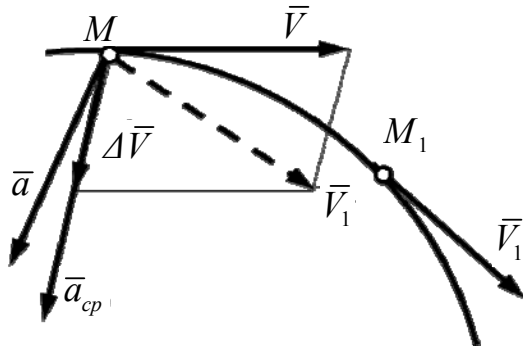


Fig. 2.6. Acceleration vector

of the point increases $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$. To construct a vector $\Delta\vec{V}$, we set aside from the point M a vector equal to \vec{V}_1 , and construct a parallelogram in which the diagonal is \vec{V}_1 and of one of the sides \vec{V} . Then, obviously,

друга сторона й буде зображати вектор $\Delta\vec{V}$. Відмітимо, що вектор $\Delta\vec{V}$ завжди спрямований у бік угнутості траєкторії.

Відношення прирощення вектора швидкості $\Delta\vec{V}$ до відповідного проміжку часу Δt визначає *вектор середнього пришвидчення точки за цей проміжок часу*.

$$\bar{a}_{cp} = \Delta\vec{V} / \Delta t. \quad (1.42)$$

Вектор середнього пришвидчення має той же напрямок, що й вектор $\Delta\vec{V}$, тобто спрямований у бік угнутості траєкторії.

Пришвидченням точки в даний момент часу t називається векторна величина \bar{a} , до якої прямує середнє пришвидчення \bar{a}_{cp} при прямуванні проміжку часу Δt до нуля

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

або, з урахуванням рівності (1.39),

$$\bar{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.43)$$

Отже, *вектор пришвидчення точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом*.

Розмірність пришвидчення L/T^2 , тобто довжина / (час)²; в системі СІ одиницями виміру є м/с².

З формули (1.43) випливає також, що вектор пришвидчення точки \bar{a} дорівнює відношенню елементарного прирощення вектора швидкості $d\vec{V}$ до відповідного проміжку часу dt .

Знайдемо, як розташовується вектор \bar{a} по відношенню до траєкторії точки. При прямолінійному русі вектор \bar{a} спрямований уздовж прямиї, по якій рухається точка. Якщо траєкторією точки є плоска крива, то вектор пришвидчення \bar{a} , так само як і

the other side will represent the vector $\Delta\vec{V}$. Note that the vector $\Delta\vec{V}$ is always directed towards the concavity of the trajectory.

The ratio of the increment of the velocity vector $\Delta\vec{V}$ to the corresponding time interval Δt determines *the vector of the average acceleration of the point for this time interval*.

$$\bar{a}_{cp} = \Delta\vec{V} / \Delta t. \quad (1.42)$$

The vector of average acceleration has the same direction as the vector $\Delta\vec{V}$, ie directed towards the concavity of the trajectory.

The acceleration of a point at a given moment in time t is called the vector quantity \bar{a} to which the average acceleration \bar{a}_{cp} goes when directing the time interval Δt to zero

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

or, taking into account equality (1.39),

$$\bar{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.43)$$

Therefore, ***the acceleration vector of the point at a given time is equal to the first derivative of the velocity vector or the second derivative of the radius-vector of the point in time.***

The dimension of acceleration L/T^2 , ie length / (time)²; in the SI system the units are m/s².

From the formula (1.43) it also follows that the acceleration vector of the point \bar{a} is equal to the ratio of the elementary increment of the velocity vector $d\vec{V}$ to the corresponding time interval dt .

Find how the vector \bar{a} is positioned relative to the trajectory of the point. In rectilinear motion, the vector \bar{a} is directed along the line along which the point moves. If the trajectory of a point is a flat curve, then the acceleration vector \bar{a} , as well as

вектор \bar{a}_{cp} , лежить в площині цієї кривої й спрямований убік її угнутої.

Якщо траєкторія не є плоскою кривою, то вектор \bar{a}_{cp} спрямований убік увігнутості траєкторії й лежить у площині, що проходить через дотичну до траєкторії в точці M і пряму, паралельну дотичній у сусідній точці M_1 (рис. 2.6). У межах, коли точка M_1 прямує до M , ця площина займає положення так званої **стичної площини**, тобто площини, у якій відбувається нескінченно малий поворот дотичної до траєкторії при елементарному переміщенні точки, що рухається. Отже, у загальному випадку **вектор пришвидчення \bar{a} лежить у стичній площині й спрямований убік увігнутості кривої.**

2.4 Визначення швидкості та пришвидчення точки при координатному та натуральному способах задавання руху

Знайдемо, як обчислюються швидкість і пришвидчення точки, якщо її рух заданий рівняннями

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t)$$

або

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t).$$

Формули $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ і $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, що визначають значення \bar{V} і \bar{a} , містять похідні за часом від векторів \bar{r} і \bar{V} .

У рівностях, що містять похідні від векторів, перехід до залежностей між їхніми проєкціями здійснюється за допомогою наступної теореми: *проєкція похідної від вектора на вісь, нерухому в даній системі відліку, дорівнює похідній від проєкції цього вектора на ту ж вісь, тобто, якщо*

the vector \bar{a}_{cp} , lies in the plane of this curve and is directed towards its concavity.

If the trajectory is not a flat curve, then the vector \bar{a}_{cp} is directed towards the concavity of the trajectory and lies in a plane passing through the tangent to the trajectory at the point M and a line parallel to the tangent at the neighboring point M_1 (Fig. 2.6). At the limit when the point M_1 goes to M , this plane occupies the position of the so-called **contact plane**, ie the plane in which there is an infinitesimal rotation of the tangent to the trajectory during the elementary movement of the moving point. Thus, in the general case, ***the acceleration vector \bar{a} lies in the contact plane and is directed towards the concavity of the curve.***

2.4 Determination the velocity and acceleration of a point at coordinate and natural ways of setting of the movement

Find how the velocity and acceleration of a point are calculated if its motion is given by equations:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t)$$

or

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t).$$

Formulas $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ and $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, defining values \bar{V}

and \bar{a} , contain time derivatives of the vectors \bar{r} and \bar{V} . In equations containing derivatives of vectors, the transition to the dependences between their projections is carried out using the following theorem: *the projection derived from a vector on an axis fixed in this frame of reference is equal to the derivative of the projection of this vector on the same axis, ie if*

$$\bar{q} = \frac{d\bar{p}}{dt}, \text{ то } q_x = \frac{dp_x}{dt}; \quad q_y = \frac{dp_y}{dt}; \quad q_z = \frac{dp_z}{dt}. \quad (1.44)$$

1. Визначення швидкості точки.

Вектор швидкості точки $\bar{V} = d\bar{r} / dt$. Звідси на підставі формул (1.44), враховуючи, що $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ і беручи до уваги рівняння

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z,$$

знайдемо

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.45)$$

або
$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z}.$$

Таким чином, **проекції швидкості точки, на координатні осі дорівнюють першим похідним від відповідних координат точки за часом.**

Знаючи проекції швидкості, знайдемо її модуль і напрямок (тобто кути α , β , γ , які вектор \bar{V} утворює з координатними осями) за формулами

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos \alpha = V_x / V; \quad \cos \beta = V_y / V; \quad \cos \gamma = V_z / V. \quad (1.46)$$

2. Визначення пришвидчення точки.

Вектор пришвидчення точки $\bar{a} = d\bar{V} / dt$. Звідси на підставі формул (1.44) отримуємо:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1.47)$$

Або

$$\bar{q} = \frac{d\bar{p}}{dt}, \text{ то } q_x = \frac{dp_x}{dt}; \quad q_y = \frac{dp_y}{dt}; \quad q_z = \frac{dp_z}{dt}. \quad (1.44)$$

1. *Determining the velocity of a point.*

Вектор швидкості точки $\bar{V} = d\bar{r} / dt$. Звідси на підставі формул (1.44), враховуючи, що $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ і беручи до уваги рівняння

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z,$$

we find:

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.45)$$

or
$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z}.$$

Thus, *the projections of the velocity of the point on the coordinate axes are equal to the first derivative of the corresponding coordinates of the point in time.*

Knowing the velocity projections, we find its modulus and direction (ie the angles α , β , γ , which the vector \bar{V} forms with the coordinate axes) by the formulas

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos \alpha = V_x / V; \quad \cos \beta = V_y / V; \quad \cos \gamma = V_z / V. \quad (1.46)$$

2. *Determination the acceleration of point.*

Vector acceleration point $\bar{a} = d\bar{V} / dt$. From here on the basis of formulas (1.44) we receive:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1.47)$$

or

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z},$$

тобто, *проекції пришвидчення точки на координатні осі дорівнюють першим похідним від проекцій швидкості або других похідних від відповідних координат точки за часом*. Модуль і напрямок пришвидчення визначаються за формулами

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos \alpha_1 = a_x / a; \quad \cos \beta_1 = a_y / a; \quad \cos \gamma_1 = a_z / a, \quad (1.48)$$

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – кути, утворені вектором пришвидчення з координатними осями.

Отже, якщо рух точки заданий у декартових координатах, то швидкість точки визначається за формулах (1.45) і (1.46), а пришвидчення – за формулах (1.47) і (1.48). При цьому у випадку руху, що відбувається в одній площині, у всіх формулах повинна бути відкинута проекція на вісь z .

У випадку ж прямолінійного руху, що задається одним рівнянням $x = f(t)$, буде

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.49)$$

Рівності (1.49) і визначають значення швидкості й пришвидчення точки в цьому випадку.

Якщо рух задано натуральним способом, тобто траєкторією й рівнянням

$$\sigma = f(t),$$

то визначити вектор швидкості можна з таких міркувань. На підставі формули (1.39)

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z},$$

that is, *the projections of the acceleration of the point on the coordinate axes are equal to the first derivative of the velocity projections or the second derivatives of the corresponding coordinates of the point in time.* The modulus and direction of acceleration are determined by formulas

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos \alpha_1 = a_x / a; \quad \cos \beta_1 = a_y / a; \quad \cos \gamma_1 = a_z / a, \quad (1.48)$$

where $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – angles formed by the acceleration vector with coordinate axes.

Therefore, if the motion of a point is given in Cartesian rectangular coordinates, then the velocity of the point is determined by formulas (1.45) and (1.46), and the acceleration is determined by formulas (1.47) and (1.48). In the case of motion occurring in one plane, the projection on the z axis must be rejected in all formulas.

In the case of rectilinear motion, given by one equation $x = f(t)$ will be

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.49)$$

Equations (1.49) determine the values of velocity and acceleration of the point in this case.

If the motion is given in a natural way, ie by a trajectory and an equation

$$\sigma = f(t),$$

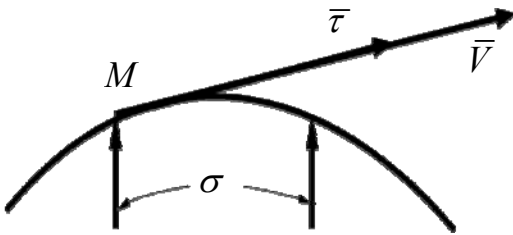
then the velocity vector can be determined for the following reasons. Based on the formula (1.39)

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

або
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \quad (1.50)$$

Як відомо з математики, модуль $\left| \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \right| = 1$, а спрямований цей

вектор по дотичній; отже, $\frac{d\vec{r}}{d\sigma}$ є орт дотичної. Він позначається буквою $\vec{\tau}$ (рис. 2.7)



$$\frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \vec{\tau}.$$

Таким чином,

$$\vec{V} = \vec{\tau} \frac{d\sigma}{dt}$$

Рис. 2.7. Визначення швидкості точки при натуральному способі задавання руху

або

$$\vec{V} = \vec{\tau} \dot{\sigma}, \quad (1.51)$$

де $\dot{\sigma}$ – називається

проекцією швидкості на напрямок дотичної і позначається V_τ

$$V_\tau = \dot{\sigma}.$$

Отже,

$$\vec{V} = \vec{\tau} V_\tau, \quad (1.52)$$

а тому що

$$V_\tau = \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}, \quad (1.53)$$

то можна сказати, що проекція швидкості на дотичну дорівнює першій похідній від дугової координати за часом.

2.5 Рівномірний та рівнозмінний рух точки

Нехай задана точка, що рухається нерівномірно по прямо-лінійній траєкторії (рис. 2.8).

or
$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt}. \tag{1.50}$$

As is known from mathematics, the module $\left| \frac{d\bar{r}}{d\sigma} \right| = 1$, and directed this vector tangent; hence, $\frac{d\bar{r}}{d\sigma}$ is an ort tangent. It is denoted by the letter $\bar{\tau}$ (Fig. 2.7)

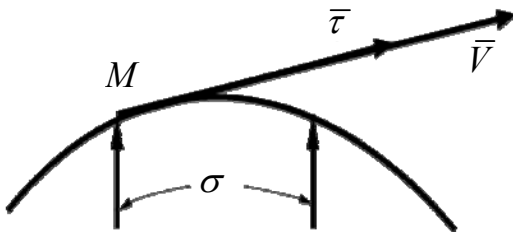


Fig. 2.7. Determination of velocity of a point at natural way of setting the movement

$$\frac{d\bar{r}}{d\sigma} = \bar{\tau}.$$

So,

$$\bar{V} = \bar{\tau} \frac{d\sigma}{dt}$$

or

$$\bar{V} = \bar{\tau} \dot{\sigma}, \tag{1.51}$$

where \bar{V}' is called the velocity projection on the

tangent direction and is denoted V_τ

$$V_\tau = \dot{\sigma}.$$

Therefore,

$$\bar{V} = \bar{\tau} V_\tau, \tag{1.52}$$

but because

$$V_\tau = \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}, \tag{1.53}$$

then we can say that the velocity projection on the tangent is equal to the first derivative of the arc coordinate in time.

2.5 Uniform and equal-variable motion of a point

Let a given point move unevenly along a straight trajectory (Fig. 2.8).

Її траєкторію приймаємо за вісь x , а рух задаємо рівнянням

$$x = f(t).$$

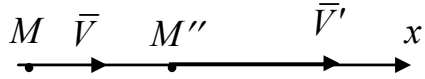


Рис. 2.8. Визначення пришвидчення при прямолінійному русі точки

В момент часу t точка перебуває в положенні M і має швидкість \bar{V} . Через малий проміжок часу Δt , тобто в момент $t + \Delta t$, точка перебуває в положенні M' і її швидкість тепер уже буде \bar{V}' .

Як відомо (рівність 1.43)

$$a = \frac{dV}{dt} = \dot{V}. \quad (1.54)$$

Але тому що

$$V = \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

то

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}. \quad (1.55)$$

Пришвидчення – похідна $\frac{dV}{dt}$ – має певний знак, і спів-

відношення знаків швидкості й пришвидчення визначає характер руху точки. Якщо швидкість і пришвидчення мають **однакові знаки**, то швидкість із часом за абсолютною величиною **зростає** (такий рух називають **пришвидченням**), якщо ж швидкість і пришвидчення мають **різні знаки**, то швидкість із часом за абсолютною величиною **зменшується** (такий рух називають **сповільненням**). Очевидно, при пришвидченні, **рівному нулю**, швидкість стала й **рух рівномірний**.

Якщо пришвидчення **стале**, то такий рух називається **рівнозмінним**. Він може бути або **рівнопришвидченням**, або **рівносповільненням**. Оскільки ці види руху є досить розповсюдженими, зупинимося на них докладніше.

Its trajectory is taken as the axis x , and the motion is given by the equation

$$x = f(t).$$

At time t , the point is in position M and has a velocity

\bar{V} . After a short period of time Δt , ie at time $t + \Delta t$, the point is in position M' and its speed will now be \bar{V}' .

As you know (equation 1.43)

$$a = \frac{dV}{dt} = \dot{V}. \quad (1.54)$$

But because
$$V = \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

then
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}. \quad (1.55)$$

Acceleration – a derivative $\frac{dV}{dt}$ – has a certain sign, and the ratio of signs of velocity and acceleration determines the nature of the motion of a point. If velocity and acceleration have **the same signs**, then velocity **increases** with absolute value over time (such motion is called **accelerated**), if velocity and acceleration have **different signs**, then velocity **decreases** with absolute value over time (such motion is called **slowed down**). Obviously, at an acceleration *equal to zero*, the velocity is constant and **the motion is uniform**.

If the acceleration is **constant**, then such a motion is called **equal-variable**. It can be either **uniformly accelerated** or **uniformly decelerated**. Since these types of movement are quite common, we will dwell on them in more detail.

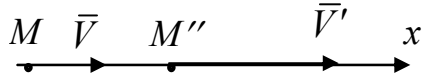


Fig. 2.8. Determination of acceleration in rectilinear motion of a point

Розглянемо рівнозмінний рух точки, що здійснюється протягом проміжку часу t . На початку цього проміжку точка має швидкість V_0 наприкінці його V . Рух відбувається з постійним пришвидченням a , і точка за розглянутий проміжок часу проходить шлях s .

З рівності $a = \frac{dV}{dt}$ отримуємо $dV = a \cdot dt$.

Інтегруючи цю рівність у відповідних межах, знаходимо

$$\int_{V_0}^V dV = \int_0^t a \cdot dt ;$$

$$V = V_0 + at . \tag{1.56}$$

Після перетворення й інтегрування формули $|V| = \frac{ds}{dt}$, де V – абсолютна величина швидкості точки, отрмуємо

$$ds = V \cdot dt ;$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t V \cdot dt = \int_0^t (V_0 + at) dt ;$$

$$s = V_0 t + \frac{at^2}{2} . \tag{1.57}$$

При рівносповільненому русі V і a мають різні знаки й тому доданки, що стоять у правій частині формул (1.56) і (1.57), виявляться також з різними знаками.

Формули (1.56) і (1.57) показують, що п'ять кінематичних параметрів рівнозмінного руху V_0 , V , t , a , s пов'язані двома залежностями. Отже, для повного розрахунку такого руху повинні бути задані три із цих параметрів.

Consider the equal-variable motion of a point carried out over a period of time t . At the beginning of this interval, the point has a velocity V_0 at the end of it V . The motion occurs with a constant acceleration a , and the point for the considered period of time passes the path s .

From equality $a = \frac{dV}{dt}$ we receive $dV = a \cdot dt$.

Integrating this equality within the corresponding limits, we find

$$\int_{V_0}^V dV = \int_0^t a \cdot dt ;$$

$$V = V_0 + at . \tag{1.56}$$

After conversion and integration of the formula $|V| = \frac{ds}{dt}$, where V – the absolute value of the velocity of the point, we obtain

$$ds = V \cdot dt ;$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t V \cdot dt = \int_0^t (V_0 + at) dt ;$$

$$s = V_0 t + \frac{at^2}{2} . \tag{1.57}$$

With uniformly decelerated motion, V and a have different signs, and therefore the terms in the right-hand side of formulas (1.56) and (1.57) will also appear with different signs.

Formulas (1.56) and (1.57) show that the five kinematic parameters of equal-variable motion V_0 , V , t , a , s are related by two dependencies. Therefore, to fully calculate such motion, three of these parameters must be specified.

Вираз (1.57) можна представити й так

$$s = \frac{t}{2}(2V_0 + at)$$

або, беручи до уваги рівність (1.56),

$$s = \frac{V_0 + V}{2}t. \quad (1.58)$$

Дріб $\frac{V_0 + V}{2}$ представляє собою середню швидкість рівнозмінного руху

$$V_{cp} = \frac{V_0 + V}{2}. \quad (1.59)$$

2.6 Проекції пришвидчення на натуральні осі

Розглянемо рух точки по плоскій траєкторії. У моменти часу t і $t + \Delta t$ точка займає положення відповідно M і M' (рис. 2.9). Зміна дугової координати точки M за проміжок часу Δt позначимо через $\Delta\sigma$.

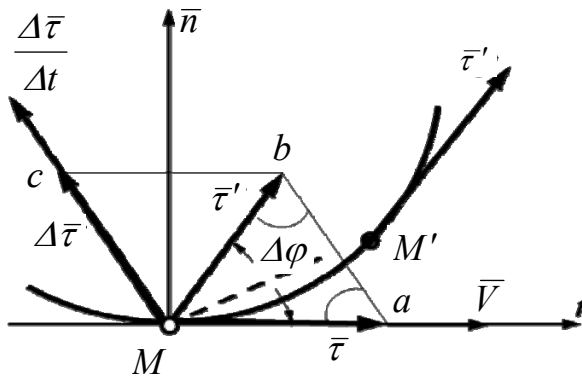


Рис. 2.9. Визначення пришвидчення

Expression (1.57) can be represented as follows

$$s = \frac{t}{2}(2V_0 + at)$$

or, taking into account equality (1.56),

$$s = \frac{V_0 + V}{2}t. \quad (1.58)$$

The quantity $\frac{V_0 + V}{2}$ is obviously the average velocity of equal-variable motion

$$V_{cp} = \frac{V_0 + V}{2}. \quad (1.59)$$

2.6 Projections of acceleration on natural axes

Consider the motion of a point on a flat trajectory. At times t and $t + \Delta t$ the point occupies the position of M and M' , respectively (Fig. 2.9). The change in the arc coordinate of the point M over time Δt is denoted by $\Delta\sigma$.

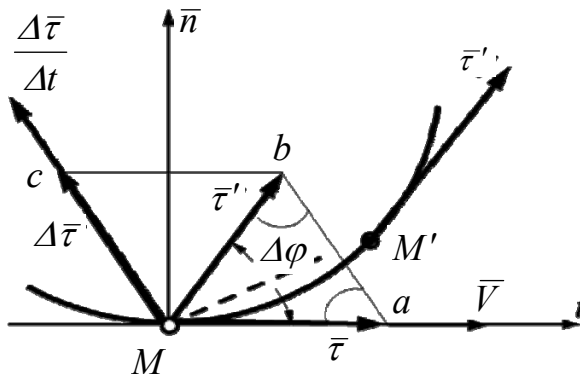


Fig. 2.9. Determination of acceleration

Якщо \vec{V} представляє собою швидкість точки в момент t , то можна записати

$$\vec{V} = \bar{\tau} V_{\tau},$$

де τ – орт дотичної до траєкторії, проведеної в точці M ;
 V_{τ} – проєкція вектора швидкості на дотичну.

Напрямок осі $\bar{\tau}$ збігається з напрямком швидкості.
 Диференціюючи за часом цю рівність, отримуємо

$$\bar{a} = \bar{\tau} \frac{dV_{\tau}}{dt} + V_{\tau} \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (1.60)$$

При диференціюванні варто мати на увазі, що орт $\bar{\tau}$ представляє собою вектор, змінний за напрямком, тому що напрямки осі дотичної будуть різними в різних точках траєкторії.

У вираз (1.60) входить вектор $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$, що не зустрічався до цих пір. Визначимо його напрямок і модуль.

Оскільки

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t},$$

то для полегшення поставленого завдання знайдемо спершу на-

прямок $\frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t}$.

Побудуємо орт дотичної $\bar{\tau}'$ в точці M' , перенесемо цей вектор у точку M і побудуємо паралелограм $Mabc$, у якому $\bar{\tau}'$ буде діагоналлю, а $\bar{\tau}$ – однієї зі сторін. Тоді $\bar{Mc} = \Delta \bar{\tau}$, тому що $\bar{Mc} = \bar{\tau}' - \bar{\tau}$. Розділивши $\Delta \bar{\tau}$ на Δt , одержимо вектор $\frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t}$, що лежить у площині траєкторії й спрямований по прямій Mc .

If \bar{V} it is the velocity of a point at a time t , you can write:

$$\bar{V} = \bar{\tau}V_{\tau},$$

where τ – ort tangent to the trajectory drawn at point M ;

V_{τ} – projection of the velocity vector on the tangent.

The direction of the axis $\bar{\tau}$ is taken to coincide with the direction of velocity.

Differentiating this equality over time, we obtain

$$\bar{a} = \bar{\tau} \frac{dV_{\tau}}{dt} + V_{\tau} \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (1.60)$$

When differentiating, it should be borne in mind that the ort $\bar{\tau}$ is a vector that varies in direction, because the directions of the tangent axis will be different at different points in the trajectory.

Expression (1.60) includes a vector $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$ that has not been encountered so far. Define its direction and module.

Because

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t}$$

then to facilitate the task, we first find the direction $\frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t}$.

Construct the ort of the tangent $\bar{\tau}'$ at the point M' , transfer this vector to the point M and construct a parallelogram $Mabc$, in which $\bar{\tau}'$ will be a diagonal, and $\bar{\tau}$ – one of the sides. Then $\bar{Mc} = \Delta \bar{\tau}$, because $\bar{Mc} = \bar{\tau}' - \bar{\tau}$. Dividing $\Delta \bar{\tau}$ by Δt , we obtain a vector $\frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t}$ that lies in the plane of the trajectory and is directed along the line Mc .

У межі при $\Delta t \rightarrow 0$ точка M' необмежено наближається до M , кут $\Delta\varphi$ між векторами $\vec{\tau}'$ і $\vec{\tau}$ прямує до нуля, а кут $\angle Ma$ – до 90° .

Отже, вектор $\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$

у межі, тобто вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$, перпендикулярний

дотичній, а отже, збігається з додатним напрямком нормалі n до траєкторії в точці M (за додатний приймається напрямком до центра кривизни траєкторії, тобто убік увігнутості кривої).

Напрямок $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ збігається, відповідно, з напрямком орта \vec{n} осі нормалі.

Осі τ і n називаються *натуральними* осями. У випадку просторової кривої *натуральними* осями є дотична τ , головна нормаль n і бінормаль b (рис. 2.10). Площина, у якій лежать осі τ і n , називається *стичною площиною*.

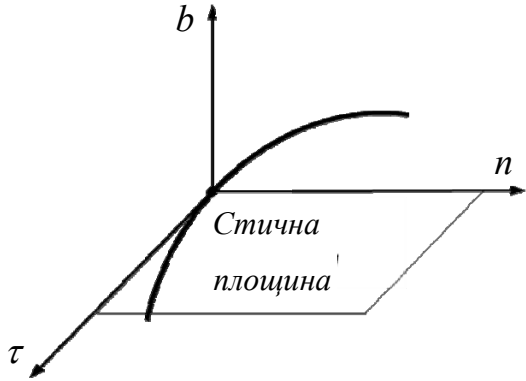


Рис. 2.10. Сточна площина

Знайдемо модуль вектора $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. З рівнобедреного трикутника aMb (рис. 2.9)

$$\frac{\Delta\tau / 2}{\tau} = \sin \frac{\Delta\varphi}{2};$$

$$\Delta\tau = 2\tau \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2Ma \sin \frac{\Delta\varphi}{2};$$

In the boundary at $\Delta t \rightarrow 0$ the point M' is indefinitely close to M , the angle $\Delta\varphi$ between vectors $\vec{\tau}'$ and $\vec{\tau}$ goes to zero, and the angle cMa – up to 90° .

Therefore, the vector $\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$ in the boundary, ie the vector $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ perpendicular to the tangent, and therefore coincides with the positive direction of the normal n to the trajectory

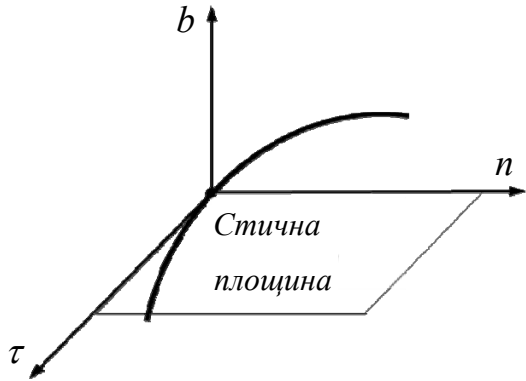


Fig. 2.10. Contact plane

at the point M (the positive is the direction to the center of curvature of the trajectory, ie towards the concavity of the curve). The direction $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ coincides, respectively, with the direction of the ort \vec{n} axis of the normal.

Axes τ and n are called **natural** axes. In the case of a spatial curve, the natural axes are tangent τ , principal normal n , and binormal b (Fig. 2.10). The plane in which the axes τ and n lie is called the *contact plane*.

Find the modulus of the vector $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. From the isosceles triangle aMb (Fig. 2.9):

$$\frac{\Delta\tau / 2}{\tau} = \sin \frac{\Delta\varphi}{2};$$

$$\Delta\tau = 2\tau \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2Ma \sin \frac{\Delta\varphi}{2};$$

$$|\Delta \bar{\tau}| = ab = 2Ma \sin \frac{\Delta \varphi}{2},$$

а тому що $Ma = |\bar{\tau}| = 1,$

то $|\Delta \bar{\tau}| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$

або $\left| \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t} \right| = \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta t}.$

Переходячи до граничного значення й помноживши в правій частині чисельник і знаменник на $\Delta \varphi \cdot \Delta \sigma$, отримуємо

$$\left| \frac{d\bar{\tau}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta \sigma} \cdot \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \right) = 1 \cdot \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta \sigma} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}.$$

Як відомо,

$$\lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta \sigma} = \frac{1}{\rho},$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії в точці M , і

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = V,$$

отже, $\left| \frac{d\bar{\tau}}{dt} \right| = \frac{V}{\rho}$ і $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \bar{n} \frac{V}{\rho}.$

Підставимо отриману залежність у формулу (1.60)

$$|\Delta \bar{\tau}| = ab = 2Ma \sin \frac{\Delta \varphi}{2},$$

but because $Ma = |\bar{\tau}| = 1,$

then $|\Delta \bar{\tau}| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$

or $\left| \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta t} \right| = \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta t}.$

Going to the limit value and multiplying in the right part of the numerator and denominator by $\Delta \varphi \cdot \Delta \sigma$, we obtain

$$\left| \frac{d\bar{\tau}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta \sigma} \cdot \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \right) = 1 \cdot \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta \sigma} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}.$$

As you know,

$$\lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta \sigma} = \frac{1}{\rho},$$

where ρ – the radius of curvature of the trajectory at the point M , and

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = V,$$

therefore, $\left| \frac{d\bar{\tau}}{dt} \right| = \frac{V}{\rho}$ and $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \bar{n} \frac{V}{\rho}.$

Substitute the obtained dependence into the formula (1.60)

$$\bar{a} = \bar{\tau} \frac{dV_{\tau}}{dt} + \bar{n} \frac{V^2}{\rho}, \quad (1.61)$$

де $V^2 = V_{\tau}^2$.

Цей вираз дає розкладання пришвидчення точки, що рухається, по дотичній та нормалі до траєкторії.

У випадку, коли траєкторією є просторова крива, пришвидчення точки розкладається по напрямку дотичної і головної нормалі, тобто перебуває в стичній площині.

Вектор $\bar{\tau} \frac{dV_{\tau}}{dt}$ – спрямований по дотичній до траєкторії, і називається *дотичним* або *тангенціальним* пришвидченням (рис. 2.11), і позначається

$$\bar{a}_{\tau} = \bar{\tau} \frac{dV_{\tau}}{dt}.$$

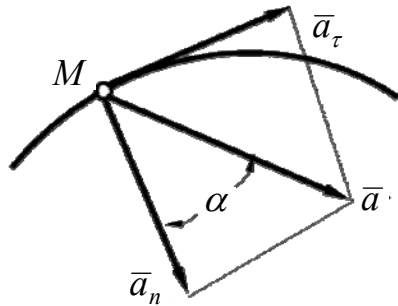


Рис. 2.11. Складові пришвидчення

Вектор $\bar{n} \frac{V^2}{\rho}$ – спрямований по нормалі до траєкторії, називається *нормальним*, або *доцентровим* пришвидченням, і позначається $\bar{a}_n = \bar{n} \frac{V^2}{\rho}$.

Отже, можна записати вираз для повного пришвидчення точки так

$$\bar{a} = \bar{a}_{\tau} + \bar{a}_n. \quad (1.62)$$

Повне пришвидження точки дорівнює геометричній або векторній сумі дотичного й нормального пришвидчень.

$$\bar{a} = \bar{\tau} \frac{dV_\tau}{dt} + \bar{n} \frac{V^2}{\rho}, \quad (1.61)$$

where $V^2 = V_\tau^2$.

This expression gives the decomposition of the acceleration of a moving point along the tangent and normal to the trajectory.

In the case where the trajectory is a spatial curve, the acceleration of the point decomposes in the direction of the tangent and principal normal, ie is in the contact plane.

The vector $\bar{\tau} \frac{dV_\tau}{dt}$ is

directed along the tangent to the trajectory, and is called *the tangent* or *tangential* acceleration (Fig. 2.11), and is denoted

$$\bar{a}_\tau = \bar{\tau} \frac{dV_\tau}{dt}.$$

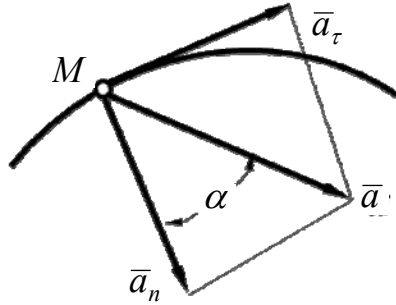


Fig.2.11. Components of acceleration

Vector $\bar{n} \frac{V^2}{\rho}$ – directed along the normal to the trajectory, is called **normal**, or **centripetal** acceleration, and is denoted

$$\bar{a}_n = \bar{n} \frac{V^2}{\rho}.$$

You can, therefore, write an expression to fully accelerate the point as follows

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (1.62)$$

The total acceleration of a point is equal to the geometric or vector sum of tangential and normal accelerations.

Проекції пришвидчення на дотичну й нормаль запишуться так

$$a_{\tau} = \frac{dV_{\tau}}{dt} = \dot{V}_{\tau} = \ddot{\sigma}, \quad (1.63)$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (1.64)$$

Проекція повного пришвидчення на бінормаль a_b дорівнює нулю. Модуль повного пришвидчення визначається по формулі

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{V}_{\tau}^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}. \quad (1.65)$$

Напрямок повного пришвидчення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{\tau}}{a_n}, \quad (1.66)$$

де α – кут між повним пришвидченням і нормаллю.

Якщо модуль швидкості точки з часом зростає, тобто якщо точка рухається пришвидчено, то вектор дотичного пришвидчення спрямований у *той же бік*, що й вектор швидкості. У випадку сповільненого руху вектор дотичного пришвидчення спрямований *убік*, *протилежний* напрямку вектора швидкості.

Що ж стосується *нормального пришвидчення*, то його вектор *завжди* спрямований до *центру кривизни траєкторії по радіусу кривизни*.

Значення пришвидчень в окремих випадках руху точки зведені в табл. 2.1.

Projections of acceleration on tangent and normal will be written down so

$$a_{\tau} = \frac{dV_{\tau}}{dt} = \dot{V}_{\tau} = \ddot{\sigma}, \quad (1.63)$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (1.64)$$

The projection of full acceleration on the binormal a_b is zero. The modulus of full acceleration is determined by the formula

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{V}_{\tau}^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}. \quad (1.65)$$

Direction of full acceleration

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{\tau}}{a_n}, \quad (1.66)$$

where α – the angle between full acceleration and normal.

If the modulus of velocity of a point increases with time, ie if the point moves accelerating, then the vector of tangent acceleration is directed in *the same direction* as the velocity vector. In the case of slow motion, the tangent acceleration vector is directed in the direction *opposite* to the direction of the velocity vector.

As for *the normal acceleration*, its vector is *always* directed to *the center of curvature of the trajectory along the radius of curvature*. The values of accelerations in some cases of point motion are summarized in table 2.1.

Таблиця 2.1

Вид руху	Пришвидчення		
	дотичне \bar{a}_τ	нормальне \bar{a}_n	повне \bar{a}
Рівномірний, прямолінійний	$= 0$	$= 0$	$= 0$
Рівномірний, криволінійний	$= 0$	$\neq 0$	$= \bar{a}_n$
Нерівномірний, прямолінійний	$\neq 0$	$= 0$	$= \bar{a}_\tau$
Нерівномірний, криволінійний	$\neq 0$	$\neq 0$	$= \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$

Таким чином, *дотичне пришвидчення виникає* в тих випадках, коли змінюється *модуль швидкості*, тобто при нерівномірному русі, а *нормальне пришвидчення* — у тому випадку, коли змінюється *напрямок швидкості*. Дотичне пришвидчення характеризує зміну швидкості за величиною, а нормальне пришвидчення — за напрямком. У загальному випадку руху дотичне пришвидчення перетворюється в нуль у тих точках траєкторії, де швидкість приймає максимальне або мінімальне значення $\left(\frac{dV_\tau}{dt} = 0\right)$. Нормальне пришвидчення дорівнює нулю в точках перегину траєкторії ($\rho = \infty$), а також у тих точках, де змінюється *напрямок руху* ($V = 0$).

Якщо *дотичне пришвидження* при криволінійному русі *залишається сталим*, то такий рух називається *рівнозмінним (рівнопришвидченим або рівносповільненим)*, і формули для визначення швидкості та пройденого шляху запишуться в цьому випадку так

$$V = V_0 + a_\tau t, \quad (1.67)$$

$$s = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (1.68)$$

Table 2.1

Type of movement	Acceleration		
	tangential \bar{a}_τ	normal \bar{a}_n	full \bar{a}
Uniform, rectilinear	$= 0$	$= 0$	$= 0$
Uniform, curvilinear	$= 0$	$\neq 0$	$= \bar{a}_n$
Uneven, rectilinear	$\neq 0$	$= 0$	$= \bar{a}_\tau$
Uneven, curvilinear	$\neq 0$	$\neq 0$	$= \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$

Thus, *tangential acceleration occurs* when the modulus of velocity changes, ie with uneven motion, and *normal acceleration occurs* when the direction of velocity changes.

The tangential acceleration characterizes the change in velocity in magnitude, and the normal acceleration - in the direction. In the general case of motion, the tangential acceleration becomes zero at those points of the trajectory where the velocity takes a maximum or minimum value $\left(\frac{dV_\tau}{dt} = 0\right)$. Normal acceleration is zero at the points of inflection of the trajectory ($\rho = \infty$), as well as at those points where the direction of movement changes ($V = 0$).

If *the tangential acceleration* in curvilinear motion *remains constant*, then such motion is called *equal-variable (uniformly accelerated or uniformly slowed down)*, and the formulas for determining the velocity and distance traveled will be written in this case as follows

$$V = V_0 + a_\tau t, \quad (1.67)$$

$$s = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (1.68)$$

2.7 Кінематика твердого тіла

Наведемо теорему, яка показує, що при поступальному русі твердого тіла задача кінематики твердого тіла зводиться до задачі кінематики точки.

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається весь час паралельною своєму початковому положенню.

Теорема. При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії й у кожний даний момент часу мають рівні за модулем і напрямом швидкості та прискорення.

Розглянемо тіло, що рухається поступально (рис. 2.12). Візьмемо в тілі дві довільно обрані точки A і B і побудуємо радіус-вектори \vec{r}_A та \vec{r}_B цих точок, що йдуть із нерухомого центра O .

Побудувавши вектор $\vec{AB} = \vec{r}'$, установлюємо, що, відповідно до визначення поступального руху, цей вектор при русі тіла залишається постійним, оскільки ні модуль, ні напрямок його не змінюються.

З рівності

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}'$$

ми заключаємо, що траєкторію точки B дістанемо із траєкторії точки A паралельним перенесенням її на постійний за величиною й напрямом вектор \vec{r}' .

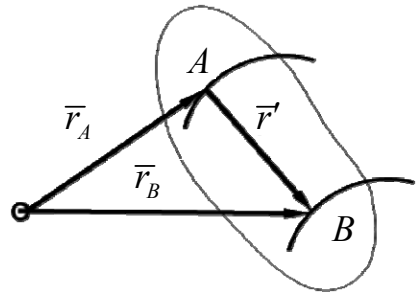


Рис. 2.12. Поступальний рух

Отже, траєкторії точок твердого тіла, що рухається поступально, представляють однакові криві, які отримують одна з одної паралельним перенесенням.

2.7 Kinematics of a rigid body

We give a theorem that shows that at the translational motion of a rigid body the problem of the kinematics of a rigid body is reduced to the task of the kinematics of a point.

Translational is the motion of a rigid body in which any line drawn in the body remains parallel to its initial position at all times.

Theorem. *In the translational motion of a rigid body, all its points describe the same trajectories and at each given moment of time have equal modulus and direction of velocity and acceleration.*

Consider a body moving translationally (Fig. 2.12). Take in the body two arbitrarily chosen points A and B and construct radius-vectors \vec{r}_A and \vec{r}_B these points coming from the fixed center O .

Having constructed the vector $\vec{AB} = \vec{r}'$, we establish that, according to the definition of translational motion, this vector remains constant when the body moves, because no module, nor its direction does not change.

From equality

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}'$$

we conclude that we obtain the trajectory of point B from the trajectory of point A by transferring it in parallel to a constant in magnitude and direction vector \vec{r}' .

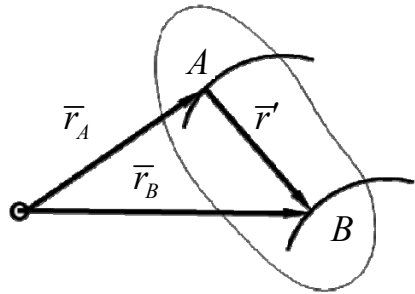


Fig. 2.12. Translational motion

Therefore, the trajectories of the points of a rigid body moving translationally represent the same curves, which are obtained from each other by parallel transfer.

Диференціюючи отриману рівність за часом і беручи до уваги сталість вектора \vec{r}' , знаходимо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

або

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A.$$

Отже,

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A. \quad (1.69)$$

Диференціюючи цю рівність, одержимо

або
$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt}.$$

Отже,

$$\dot{\vec{V}}_B = \dot{\vec{V}}_A;$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (1.70)$$

Таким чином, теорема доведена. З неї випливає, що поступальний рух тіла буде повністю визначено, якщо відомий рух всього однієї якої-небудь його точки. Тому вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху однієї його точки, тобто до задачі кінематики точки.

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Якщо тверде тіло рухається таким чином, що дві які-небудь його точки залишаються нерухомими, то через, ці точки можна провести пряму, яка також виявиться нерухомою при русі тіла.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, при якому які-небудь дві його точки залишаються під час руху нерухомими. Пряма, що проходить через ці точки називається віссю обертання.

Differentiating the obtained equality over time and taking into account the constancy of the vector \vec{r}' , we find

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

or

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A.$$

Therefore,

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A. \quad (1.69)$$

Differentiating this equality, we obtain

or

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt}.$$

Therefore,

$$\dot{\vec{V}}_B = \dot{\vec{V}}_A;$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (1.70)$$

Thus, the theorem is proved. It follows that the translational motion of a body will be completely determined if the motion of only one of its points is known. Therefore, the study of the translational motion of a rigid body is reduced to the study of the motion of one of its points, ie, to the task of the kinematics of a point.

Rotational motion of a solid body around a fixed axis

If a rigid body moves in such a way that any two of its points remain stationary, then through these points you can draw a straight line, which will also be stationary when the body moves.

The rotational motion of a rigid body around a fixed axis is its motion in which any two of its points remain motionless during motion. The line passing through these points is called the axis of rotation.

Обертання вважається *додатним*, якщо, дивлячись із боку стрілки, привласненій осі обертання, ми будемо бачити поворот тіла проти годинникової стрілки.

Нехай тіло обертається навколо осі z у напрямку, зазначеному стрілкою (рис. 2.13). Проведемо через цю вісь нерухому площину Πn і, крім того, площину Πn , незмінно пов'язану з тілом і, отже, таку, що обертається разом з ним. Кут між цими площинами, відлічуваний у напрямку обертання тіла від нерухомої площини, позначимо φ . Вимірюється кут φ у радіанах. Величина цього кута, що називається **кутом повороту**, цілком визначає положення площини Πn у просторі, а отже, і обертового тіла. При обертанні тіла навколо осі z кут φ є неперервною й однозначною функцією часу

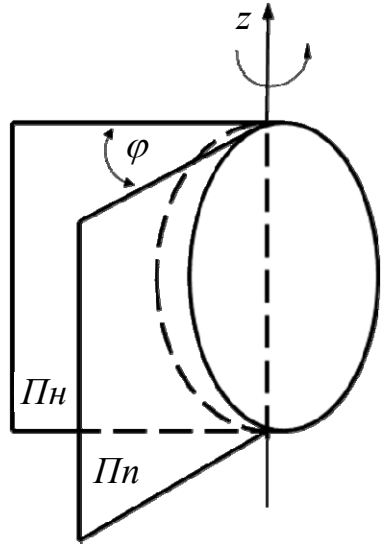


Рис. 2.13. Обертальний рух

$$\varphi = f(t). \quad (1.71)$$

Вираз (1.71) називається **рівнянням обертального руху тіла**.

Кутова швидкість

Нехай у якийсь момент часу t кут повороту тіла складе φ , а в момент $t + \Delta t$ – має значення φ' . Тоді різниця $\varphi' - \varphi = \Delta\varphi$ представляє собою зміну кута повороту за проміжок часу Δt . Відношення цієї зміни кута до відповідного проміжку часу характеризує швидкість зростання кута повороту тіла в часі й називається **середньою кутовою швидкістю** тіла, що обертається.

Rotation is considered *positive* if, looking from the side of the arrow assigned to the axis of rotation, we see a counterclockwise rotation.

Let the body rotate around the z axis in the direction indicated by the arrow (Fig. 2.13). Draw through this axis a fixed plane Π_H and, in addition, the plane Π_n , invariably connected with the body and, therefore, one that rotates with it. The angle between these planes, calculated in the direction of rotation of the body from the stationary plane, is denoted by φ . The angle φ in radians is measured.

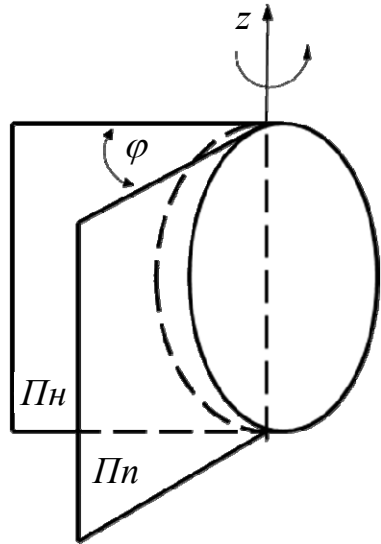


Fig. 2.13. Rotational motion

The magnitude of this angle, called ***the angle of rotation***, completely determines the position of the plane Π_n in space, and hence the rotating body. When the body rotates around the z axis, the angle φ is a continuous and unambiguous function of time

$$\varphi = f(t). \tag{1.71}$$

Expression (1.71) is called ***the equation of rotational motion of a body***.

Angular velocity

Let at some point in time t the angle of rotation of the body be φ , and at the moment $t + \Delta t$ – it matters φ' . Then the difference $\varphi' - \varphi = \Delta\varphi$ is a change in the angle of rotation over time Δt . The ratio of this change in angle to the corresponding period of time characterizes the rate of increase of the angle of rotation of the body in time and is called ***the average angular velocity*** of the rotating body.

Оскільки ця характеристика знайдена за кінцевий проміжок часу, то отримане значення кутової швидкості буде середнім на проміжку часу Δt , і, позначаючи кутову швидкість через ω , можна записати

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Значення кутової швидкості ω у даний момент часу визначиться так

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

або

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (1.72)$$

При вимірі кута φ у радіанах кутова швидкість вимірюється радіанами в секунду.

Якщо тіло обертається в напрямку зростання φ , тобто проти годинникової стрілки, то похідна $\frac{d\varphi}{dt}$, а виходить, і кутова швидкість, буде додатна; у протилежному випадку кутова швидкість від'ємна. Таким чином, *знак кутової швидкості визначає напрямок обертання тіла навколо даної осі.*

Якщо кутова швидкість тіла постійна, то таке обертання називається **рівномірним**, у противному випадку – **нерівномірним**.

Для рівномірного руху, очевидно

$$\omega = const; \quad \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt,$$

отже $\varphi = \omega t$,

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \quad (1.73)$$

де φ – кут повороту тіла за час t .

Since this characteristic is found for a finite period of time, the obtained value of the angular velocity will be the average over the period of time Δt , and, denoting the angular velocity by ω , we can write

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

The value of the angular velocity ω at this time is defined as follows

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

or

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (1.72)$$

When measuring the angle φ in radians, the angular velocity is measured in radians per second.

If the body rotates in the direction of growth φ , ie counterclockwise, then the derivative $\frac{d\varphi}{dt}$, and hence the angular velocity, will be positive; otherwise the angular velocity is negative. Thus, *the sign of the angular velocity determines the direction of rotation of the body around this axis.*

If the angular velocity of the body is constant, then such rotation is called **uniform**, otherwise – **uneven**.

For uniform movement, it is obvious

$$\omega = const; \quad \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt,$$

therefore $\varphi = \omega t$,

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \quad (1.73)$$

where φ – the angle of rotation of the body over time t .

У технічних розрахунках швидкість при рівномірному обертанні тіла часто оцінюється тією кількістю n повних обертів, які тіло робить за одну хвилину. Знайдемо залежність між ω та n .

Якщо тіло робить n обертів у хвилину, то за одну хвилину воно повернеться на кут $\varphi_{1\text{ хв}}$

$$\varphi_{1\text{ хв}} = 2\pi n.$$

Кутова швидкість тіла при цьому ω рад/с і, виходить,

$$\varphi_{1\text{ хв}} = 60\omega,$$

звідки

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0.1n. \quad (1.74)$$

При нерівномірному обертанні, коли кутова швидкість є величиною змінною, характеристикою зміни кутової швидкості в часі служить кутове пришвидчення ε . Якщо в момент часу t кутова швидкість тіла дорівнює ω , а в момент $t + \Delta t$ вона дорівнює ω' , то різниця $\omega' - \omega = \Delta\omega$ представляє собою зміну кутової швидкості за проміжок часу Δt . Отже,

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

тобто

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad (1.75)$$

або

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (1.76)$$

In technical calculations, the velocity of uniform rotation of the body is often estimated by the number of n total revolutions that the body makes in one minute. Find the relationship between ω and n .

If the body makes n revolutions per minute, then in one minute it will return to the angle $\varphi_{1 \text{ x6}}$

$$\varphi_{1 \text{ x6}} = 2\pi n .$$

The angular velocity of the body while ω rad / s and, it turns out,

$$\varphi_{1 \text{ x6}} = 60\omega ,$$

whence

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0.1n . \quad (1.74)$$

In non-uniform rotation, when the angular velocity is a variable, the characteristic of the change in angular velocity over time is the angular acceleration ε . If at time t the angular velocity of the body is equal to ω , and at time $t + \Delta t$ it is equal ω' , then the difference $\omega' - \omega = \Delta\omega$ is the change in angular velocity over time Δt . Therefore,

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} ,$$

that is

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad (1.75)$$

or

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} . \quad (1.76)$$

Розмірністю кутового пришвидчення є с^{-2} .

Похідна $\frac{d\omega}{dt}$ може бути як додатною, так і від'ємною. До-

пустимо, що тіло обертається в додатному напрямку, тобто $\omega > 0$, тоді, якщо $\varepsilon > 0$, кутова швидкість зростає в часі й обертання тіла буде *пришвидченим*; якщо $\varepsilon < 0$, то кутова швидкість зменшується – обертання сповільнене. Якщо ж обертання тіла відбувається в від'ємному напрямку, отже, і $\omega < 0$, то при $\varepsilon > 0$ абсолютна величина кутової швидкості в часі зменшується – тіло обертається сповільнено; при $\varepsilon < 0$ числове значення кутової швидкості зростає – обертання буде *пришвидченим*.

Таким чином, якщо ω і ε *мають однакові знаки*, то тіло обертається *пришвидчено*; якщо ω і ε *мають різні знаки*, обертання тіла буде *сповільненим*. При рівномірному обертанні $\varepsilon = 0$.

Якщо кутове пришвидчення *стале* ($\varepsilon = \text{const}$), то такий рух називається *рівнозмінним* обертанням (*рівнопришвидченим* або *рівносповільненим*).

Нехай тіло обертаючись із постійним пришвидченням ε , за проміжок часу t повернулося на кут φ . Позначимо кутову швидкість тіла на початку цього проміжку часу – початкову кутову швидкість – через ω_0 , наприкінці його – кінцеву кутову швидкість – через ω . З формули (1.75) витікає $d\omega = \varepsilon \cdot dt$.

Проінтегруємо цей вираз за проміжок часу t , беручи до уваги, що $\varepsilon = \text{const}$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt ;$$
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t . \quad (1.77)$$

The dimension of angular acceleration is s^{-2} .

The derivative $\frac{d\omega}{dt}$ can be both positive and negative. Assume

that the body rotates in the positive direction, ie $\omega > 0$; then, if $\varepsilon > 0$, the angular velocity increases in time and the rotation of the body will be accelerated; if $\varepsilon < 0$, then the angular velocity decreases - the rotation is slowed down. If the rotation of the body occurs in the negative direction, hence $\omega < 0$, then at $\varepsilon > 0$ the absolute value of the angular velocity decreases in time – the body rotates slowly; at $\varepsilon < 0$ the numerical value of the angular velocity increases – the rotation will be *accelerated*.

Thus, if ω and ε *have the same signs*, then the body rotates *accelerated*; if ω and ε *have different signs*, the rotation of the body will be *slowed down*. At uniform rotation $\varepsilon = 0$.

If the angular acceleration is *constant* ($\varepsilon = const$), then such a motion is called *equal-variable* rotation (*uniformly accelerated* or *uniformly decelerated*).

Let the body, rotating with constant acceleration ε , return to the angle φ over the period of time t . Let us denote the angular velocity of the body at the beginning of this period of time – the initial angular velocity – by ω_0 , at the end of it - the final angular velocity – by ω . From formula (1.75) it follows: $d\omega = \varepsilon \cdot dt$.

Integrate this expression over time t , taking into account that $\varepsilon = const$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt ;$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t . \quad (1.77)$$

Заміняючи ω через $\frac{d\varphi}{dt}$, отримуємо

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t ;$$
$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt .$$

Після інтегрування

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} . \quad (1.78)$$

Формулу (1.78) можна представити й у такому виді

$$\varphi = \frac{t}{2} (\omega_0 + \omega_0 + \varepsilon t)$$

або, на підставі формули (1.77),

$$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t . \quad (1.79)$$

Формули (1.77) і (1.78), що виражають кутову швидкість і кут повороту тіла залежно від часу при рівнозмінному обертанні, цілком аналогічні формулам (1.67) і (1.68) для швидкості й пройденого шляху при рівнозмінному русі точки.

***Траєкторії, швидкості, пришвидчення точок тіла,
що обертається навколо нерухомої осі***

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω й кутовим пришвидченням ε (рис. 2.14). Візьмемо яку-небудь точку M , що належить цьому тілу. При обертанні тіла точка M , як і будь-яка інша, що не лежить на осі обертання, описує коло, розташоване в площині, перпендикулярній осі обертання. Центр цього кола лежить на осі обертання, а її радіус R дорівнює відстані від точки M до осі обертання.

Substituting ω through $\frac{d\varphi}{dt}$, we obtain

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon t; \\ d\varphi &= \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt.\end{aligned}$$

After integration

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.78)$$

Formula (1.78) can be represented as follows

$$\varphi = \frac{t}{2}(\omega_0 + \omega_0 + \varepsilon t)$$

or, based on formula (1.77),

$$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t. \quad (1.79)$$

Formulas (1.77) and (1.78), which express the angular velocity and the angle of rotation of the body as a function of time at equal-variable rotation, are quite similar to formulas (1.67) and (1.68) for velocity and path traveled at equal-variable movement of a point.

Trajectories, velocities, accelerations of points of a body rotating around a fixed axis

Let a rigid rotate around a fixed axis z with an angular velocity ω and an angular acceleration ε (Fig. 2.14). Take any point M belonging to this body. When the body rotates, the point M , like any other that does not lie on the axis of rotation, describes a circle located in a plane perpendicular to the axis of rotation. The center of this circle lies on the axis of rotation, and its radius R is equal to the distance of the point M from the axis of rotation.

Вектор швидкості точки лежить в площині траєкторії, на-направлений перпендикулярно радіусу обертання R у відповідній точці убік обертання тіла.

Знайдемо модуль вектора швидкості точки M . На рис. 2.15 представлена траєкторія цієї точки. За проміжок часу Δt тіло повернулося на кут $\Delta\varphi$, а точка M перемістилася в положення M' , описавши по траєкторії дугу $\Delta\sigma$. При цьому

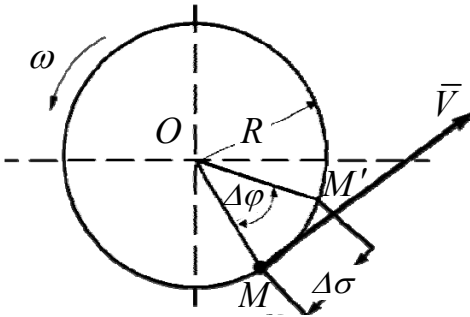


Рис. 2.15. Визначення швидкості точки
в межи, коли $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

або

$$V = \omega R. \tag{1.80}$$

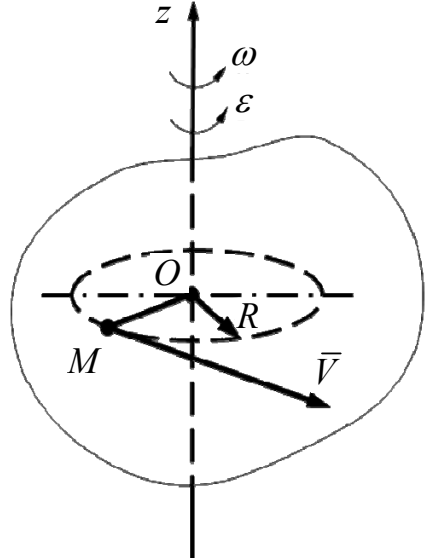


Рис. 2.14. Обертання твердого тіла

$$\Delta\sigma = R \cdot \Delta\varphi,$$

звідки, розділивши обидві частини на Δt , отримуємо

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Розглянувши цей вираз

The velocity vector of the point lies in the plane of the trajectory, directed perpendicular to the radius of rotation R at the corresponding point towards the rotation of the body.

Find the modulus of the velocity vector of point M . Figure 2.15 shows the trajectory of this point. Over time Δt , the body returned to an angle $\Delta\varphi$, and the point M moved to position M' , describing the trajectory of the arc $\Delta\sigma$. Wherein

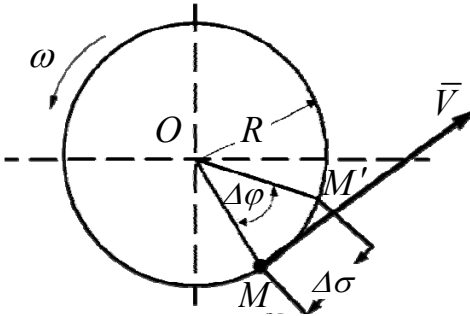


Fig. 2.15. Determination of the velocity of a point

Considering this expression in the limit when $\Delta t \rightarrow 0$, we obtain

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

or

$$V = \omega R. \tag{1.80}$$

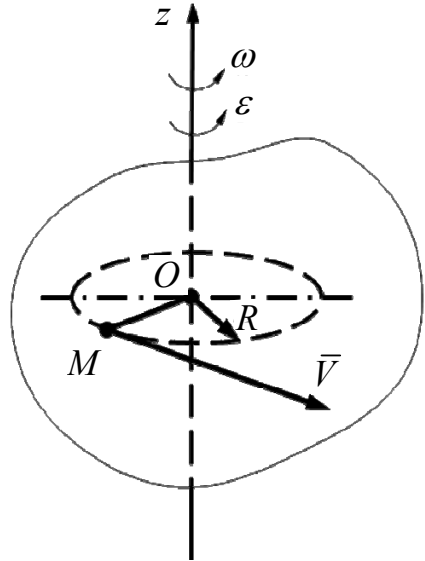


Fig. 2.14. Rotation of a rigid body

$$\Delta\sigma = R \cdot \Delta\varphi,$$

whence, having divided both parts on Δt , we will receive

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Ця швидкість точки називається *лінійною швидкістю*. Як видно з виразу (1.80), швидкості точок пропорційні їх відстаням до осі обертання. *Лінійна швидкість направлена перпендикулярно радіусу убік обертання.*

У технічних розрахунках часто доводиться визначати лінійну швидкість точки, яка лежить на поверхні обертового тіла, наприклад, махового колеса і, отже, найбільш віддалена від осі обертання тіла. Така швидкість називається *коловою швидкістю* тіла.

Нехай тіло, що має діаметр D метрів, обертається з кутовою швидкістю n обертів у хвилину. Тоді на підставі формул (1.74) і (1.80)

$$V = \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{D}{2}$$

або

$$V = \frac{\pi D n}{60}. \quad (1.81)$$

Варто пам'ятати, що V тут виражено в метрах у секунду.

Визначимо пришвидчення точки M (рис. 2.16).

Як відомо,

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \dot{V}_\tau.$$

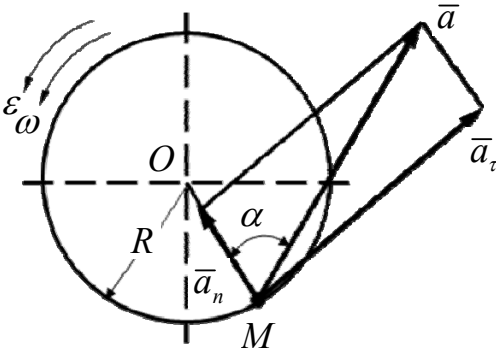


Рис. 2.16. Пришвидчення точки

Тоді по формулі (1.80)

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt}$$

або

$$a_\tau = \epsilon R. \quad (1.82)$$

This velocity of a point is called **the linear velocity**. As can be seen from expression (1.80), the velocities of the points are proportional to their distances to the axis of rotation. **The linear velocity is directed perpendicular to the radius towards the rotation.**

In technical calculations, it is often necessary to determine the linear velocity of a point that lies on the surface of a rotating body having the shape of a body of rotation (eg, a flywheel), and therefore the furthest from the axis of rotation of the body. This speed is called **the circular velocity** of the body.

Let a body having a diameter of D meters rotate at an angular velocity of n revolutions per minute. Then based on formulas (1.74) and (1.80)

$$V = \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{D}{2}$$

or

$$V = \frac{\pi D n}{60}. \quad (1.81)$$

V is expressed in meters per second.

Determine the acceleration of the point M (Fig. 2.16).

As you know,

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \dot{V}_\tau.$$

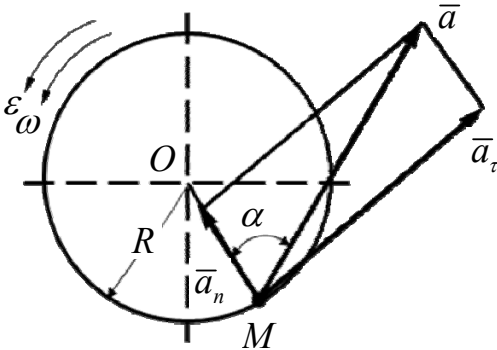


Fig. 2.16. Acceleration of the point

Then by the formula (1.80)

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt}$$

or

$$a_\tau = \varepsilon R. \quad (1.82)$$

Отже, дотичне (тангенціальне) пришвидчення дорівнює добутку кутового пришвидчення ε на радіус обертання R .

Нормальне пришвидчення

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\omega R)^2}{\rho},$$

а оскільки в розглянутому випадку $\rho = R$, то

$$a_n = \omega^2 R \quad (1.83)$$

нормальне (доцентрове) пришвидчення дорівнює добутку квадрата кутової швидкості ω на радіус обертання R .

Для модуля повного пришвидчення знайдемо наступний вираз

$$a = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2};$$

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.84)$$

Напрямок пришвидчення визначиться кутом α між вектором пришвидчення і нормальним пришвидченням. Отримаємо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (1.85)$$

В окремому випадку, коли тіло обертається рівномірно (при $\omega = \text{const}$ і $\varepsilon = 0$),

$$a = \omega^2 R; \quad \alpha = 0.$$

З формул (1.80), (1.81), (1.83), (1.84) і (1.85) випливає, що

Therefore, the tangent (tangential) acceleration is equal to the product of the angular acceleration ε and the radius of rotation R .

Normal acceleration

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\omega R)^2}{\rho},$$

and since in this case $\rho = R$, then

$$a_n = \omega^2 R \quad (1.83)$$

normal (centripetal) acceleration is equal to the product of the square of the angular velocity ω and the radius of rotation R .

For the module of full acceleration we find the following expression

$$a = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2};$$

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.84)$$

The direction of acceleration will be determined by the angle α between the acceleration vector and the normal acceleration. We obtain

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (1.85)$$

In the special case when the body rotates uniformly (at $\omega = \text{const}$ and $\varepsilon = 0$),

$$a = \omega^2 R; \quad \alpha = 0.$$

From formulas (1.80), (1.81), (1.83), (1.84) and (1.85) it follows that

в кожний момент часу чисельні значення швидкостей і пришвидчень точок обертового тіла *пропорційні* відстаням цих точок від осі обертання, а кути між векторами повних пришвидчень точок обертового тіла й нормальними, проведеними до траєкторій у відповідних точках, мають те саме значення.

2.8 Плоскопаралельний рух тіла

Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Плоскопаралельним або *плоским* називають такий рух твердого тіла, при якому всі його точки переміщуються паралельно деякій фіксованій площині.

Плоский рух часто здійснюють частини механізмів і машин, наприклад, колесо, що котиться по прямолінійній ділянці шляху, шатун в кривошипно-шатунному механізмі та ін. Окремим випадком плоскопаралельного руху є обертальний рух твердого тіла.

Рух плоскої фігури можна розглядати як такий, що складається з поступального руху, при якому всі точки фігури рухаються зі швидкістю \vec{V}_A полюса A , і з обертового руху навколо цього полюса. Покажемо, що швидкість будь-якої точки M фігури складається геометрично зі швидкостей, які точка одержує в кожному із цих рухів. Справді, положення будь-якої точки M фігури визначається стосовно осей

Oxy радіусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$ (рис. 2.17), де \vec{r}_A – радіус-вектор полюса A , $\vec{r}' = \overline{AM}$ – вектор, що визначає положення точки M щодо осей $Ax'y'$, що переміщуються разом з полюсом A поступально (рух фігури по відношенню до цих осей представляє собою обертання навколо полюса A). Тоді

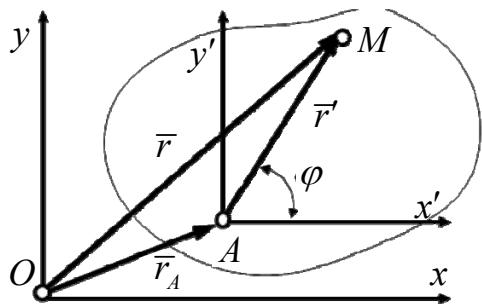


Рис. 2.17. Плоскопаралельний рух

at each moment the numerical values of velocities and accelerations of the points of the rotating body are *proportional* to the distances of these points from the axis of rotation, and the angles between the vectors of full accelerations points of a rotating body and the normals drawn to the trajectories at the corresponding points have the same meaning.

2.8 Plane-parallel motion of the body

Determination of velocities of points of a flat figure

Plane-parallel or *flat* is a motion of a rigid body in which all its points move parallel to some fixed plane.

Flat movement is often carried out by parts of mechanisms and machines, for example, a wheel rolling on a straight section of the road, a connecting rod in a crank mechanism, and others. A special case of plane-parallel motion is the rotational motion of a rigid body.

The motion of a flat figure can be considered as consisting of a translational motion in which all points of the figure move with the

speed \overline{V}_A of the pole A , and the rotational motion around this pole. We show that the velocity of any point M of the figure consists geometrically of the velocities that the point receives in each of these motions. In fact, the position of any point M of the figure is determined relative to the

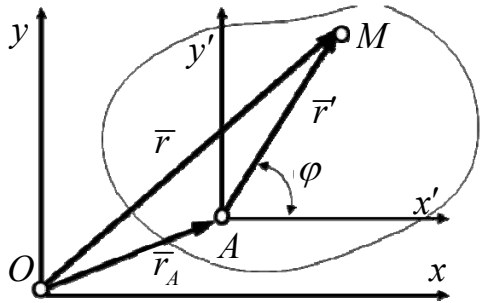


Fig. 2.17. Plane-parallel motion

axes Oxy by the radius-vector $\overline{r} = \overline{r}_A + \overline{r}'$ (Fig. 2.17), where \overline{r}_A is the radius vector of the pole A , $\overline{r}' = \overline{AM}$ is the vector that determines the position of the point M relative to the axes $Ax'y'$ moving together with pole A translationally (the movement of the figure relative to these axes is a rotation around the pole A). Then

$$\bar{V}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt}.$$

В отриманій рівності величина $d\bar{r}_A / dt = \bar{V}_A$ є швидкістю полюса A ; величина ж $d\bar{r}' / dt$ дорівнює швидкості \bar{V}_{MA} , яку точка M отримує при $\bar{r}_A = const$, тобто відносно осей $Ax'y'$, або, інакше кажучи, *при обертанні фігури навколо полюса A* . Таким чином, з попередньої рівності випливає, що

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}. \quad (1.86)$$

При цьому швидкість \bar{V}_{MA} , яку точка M одержує при обертанні фігури навколо полюса A , буде

$$V_{MA} = \omega \cdot MA \quad (\bar{V}_{MA} \perp \bar{MA}), \quad (1.87)$$

де ω – кутова швидкість фігури.

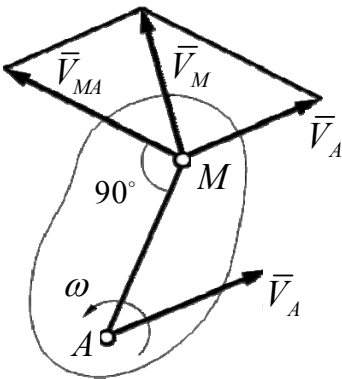


Рис. 2.18. Геометричне додавання швидкостей

Таким чином, швидкість будь-якої точки M плоскої фігури геометрично складається із швидкості якої-небудь іншої точки A , прийнятої за полюс, і швидкості, яку точка M одержує при обертанні фігури навколо цього полюса. Модуль і напрямок швидкості \bar{V}_M визначаються побудовою відповідного паралелограма.

Плоске переміщення фігури може бути будь-яким, але його завжди можна замінити двома простими плоскими переміщеннями – поступальним та обертальним.

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}.$$

In the obtained equality, the value $d\vec{r}_A / dt = \vec{V}_A$ is the velocity of the pole A ; the value $d\vec{r}' / dt$ is equal to the speed \vec{V}_{MA} that the point M receives at $\vec{r}_A = const$, ie relative to the axes $Ax'y'$, or, in other words, when the figure rotates around the pole A . Thus, it follows from the previous equality that

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \quad (1.86)$$

Wherein the speed \vec{V}_{MA} that the point M receives when rotating the figure around the pole A will be

$$V_{MA} = \omega \cdot MA \quad (\vec{V}_{MA} \perp \vec{MA}), \quad (1.87)$$

where ω – angular velocity of the figure.

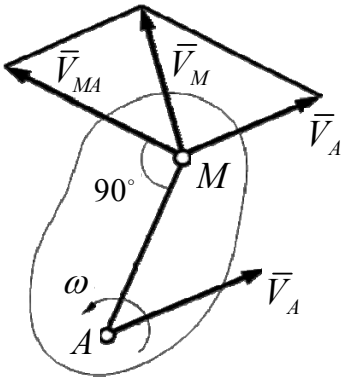


Fig. 2.18. Geometric addition of velocities

Thus, the speed of any point M of a flat figure geometrically consists of the speed of any other point A , taken as a pole, and the speed that point M receives when the figure rotates around this pole. The modulus and direction of velocity \vec{V}_M are determined by constructing the corresponding parallelogram.

The flat movement of the figure can be any, but it can always be replaced by two simple flat movements – translational and rotational.

При цьому поступальний рух фігури разом з якою-небудь її точкою є переносним рухом плоскої фігури, а обертання фігури навколо осі перпендикулярної площині фігури і такій, що проходить через вибрану точку, – відносним рухом.

Поступальне переміщення залежить від вибору точки фігури (полюса), а кут повороту навколо цього полюса не залежить від вибору самого полюсу.

Плоский рух твердого тіла має велике значення в техніці, оскільки ланцюги більшості механізмів та машин, які застосовуються в техніці, здійснюють плоский рух.

In this case, the translational motion of the figure together with any of its points is a figurative motion of a flat figure, and the rotation of the figure around the axis perpendicular to the plane of the figure and passing through the selected point – relative motion.

The translational movement depends on the choice of the point of the figure (pole), and the angle of rotation around this pole does not depend on the choice of the pole itself.

Flat motion of a solid body is of great importance in technology, because the chains of most mechanisms and machines used in technology, make a flat motion.

ЛІТЕРАТУРА / LITERATURE

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 1990. – 605 с.
2. Айзенберг Т.Б. Руководство к решению задач по теоретической механике / Т.Б. Айзенберг, И.М. Воронцов, В.М. Осецкий. – М. : Высшая школа, 1988. – 419 с.
3. Тарг С.М. Курс теоретической механики / С.М. Тарг М. : Наука, 1967. – 480 с.
4. Бать М.И. Теоретическая механика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М. : Наука, 1964. – 664 с.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под общей редакцией А.А. Яблонского. – М. : Интеграл-пресс, 2002. – 384 с.
6. Свердан П.Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірності / П.Л. Свердан. – К. : Знання, 2008. – 450 с.
7. Targ S.M. Theoretical Mechanics.Short Course. Third printing / S.M. Targ. – Moscow: Mir Publishers, 1988. – 530 p.
8. Rattan S.S. Theory of Machines. – New Delhi: Tata McGaw Hill Education Private Limited, 2009. – 732 p.
9. Ткаченко Н.Д. Англо-український словник з інженерної механіки / Н.Д. Ткаченко. – К. : НУХТ, 2011. – 55 с.
10. Російсько-український-англійський словник з механіки / Укл. : В. Бастун, Я. Григоренко, В. Широков. – К. : Наукова думка, 2008. – 512 с.

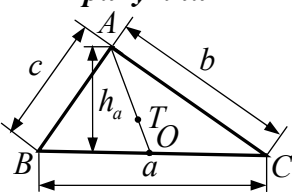
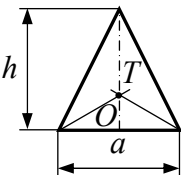
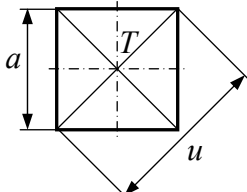
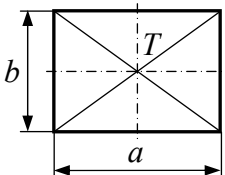
ДОДАТКИ

APPLICATIONS

ДОДАТОК А

Площі і центри ваги плоских фігур

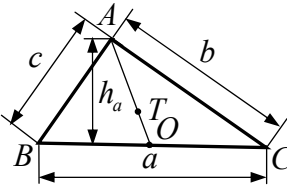
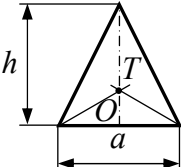
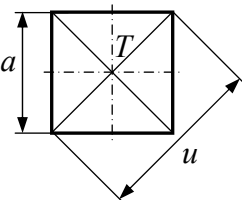
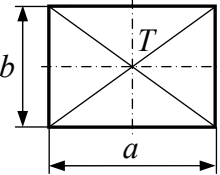
Таблиця А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p>Трикутник</p> 	$F = \frac{1}{2}ah_a$	$BO = OC ;$ $TO = \frac{1}{3}AO .$ Центр ваги – в точці перетину медіан
<p>Рівнобічний трикутник</p> 	$F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} ;$ $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$	$TO = \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$
<p>Квадрат</p> 	$F = a^2 = \frac{1}{2}u^2 ;$ $a = 0.7071u = \sqrt{F} ;$ $u = 1.414a = 1.414\sqrt{F}$	Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей
<p>Прямокутник</p> 	$F = ab = a\sqrt{u^2 - a^2} =$ $= b\sqrt{u^2 - b^2} ;$ $u = \sqrt{a^2 + b^2}$	Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей

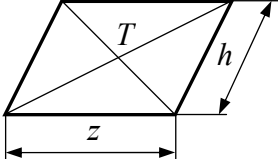
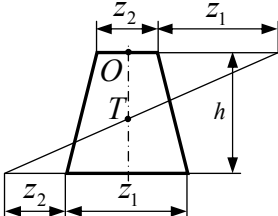
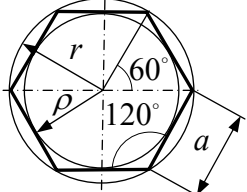
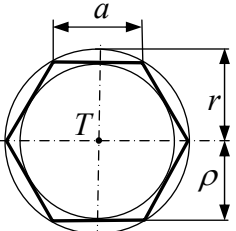
Appendix A

Squares and centers of gravity of flat figures

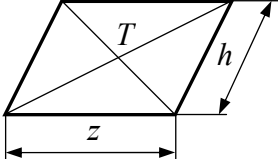
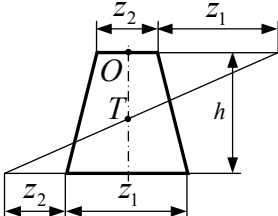
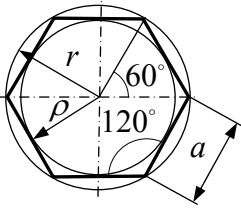
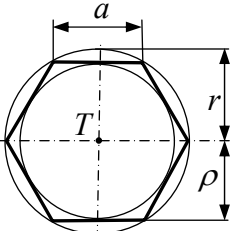
Table A.1

Figure	Area	Center of gravity
<p style="text-align: center;">Triangle</p> 	$F = \frac{1}{2}ah_a$	$BO = OC ;$ $TO = \frac{1}{3}AO .$ <p style="text-align: center;">Center of gravity - at the point of intersection median</p>
<p style="text-align: center;">Equilateral triangle</p> 	$F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} ;$ $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$	$TO = \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$
<p style="text-align: center;">Square</p> 	$F = a^2 = \frac{1}{2}u^2 ;$ $a = 0.7071u = \sqrt{F} ;$ $u = 1.414a = 1.414\sqrt{F}$	<p style="text-align: center;">Center of gravity - at the point of intersection of axes and diagonals</p>
<p style="text-align: center;">Rectangle</p> 	$F = ab = a\sqrt{u^2 - a^2} =$ $= b\sqrt{u^2 - b^2} ;$ $u = \sqrt{a^2 + b^2}$	<p style="text-align: center;">Center of gravity - at the point of intersection of axes and diagonals</p>

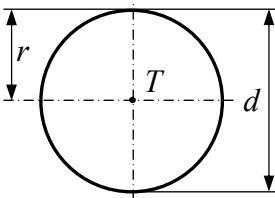
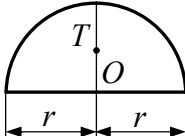
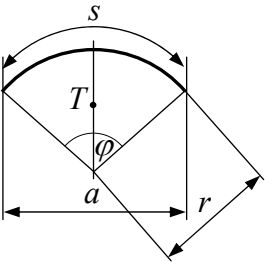
Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p>Паралелограм</p> 	$F = zh$	<p>Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей</p>
<p>Трапеція</p> 	$F = \frac{z_1 + z_2}{2} h$	$TO = \frac{1}{3} h \frac{2z_1 + z_2}{z_1 + z_2}$
<p>Правильний шестикутник</p> 	$F = 2.5981a^2 = 3.4641\rho^2;$ $r = a = 1.1547\rho;$ $\rho = 0.8660a$	<p>Центр ваги – у центрі шестикутника</p>
<p>Правильний n-кутник</p> 	$F = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} =$ $= n\rho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} =$ $= n \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$	<p>Центр ваги – у центрі багатокутника, тобто у точці перетину осей і діагоналей</p>

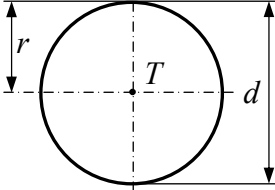
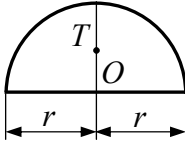
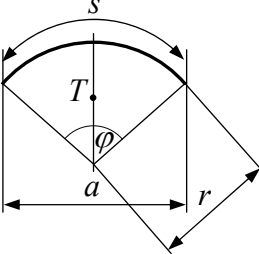
Continuation of table A.1

Figure	Area	Center of gravity
<p>Parallelogram</p> 	$F = zh$	<p>Center of gravity - at the point of inter- ?ection of axes and diagonals</p>
<p>Trapezium</p> 	$F = \frac{z_1 + z_2}{2} h$	$TO = \frac{1}{3} h \frac{2z_1 + z_2}{z_1 + z_2}$
<p>Correct hexagon</p> 	$F = 2.5981a^2 =$ $= 3.4641\rho^2;$ $r = a = 1.1547\rho;$ $\rho = 0.8660a$	<p>Center of gravity - in the center hexagon</p>
<p>Correct n-angle</p> 	$F = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} =$ $= n\rho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} =$ $= n \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$	<p>The center of gravity is in the center polygon, ie at the point of inter- ?ection axes and diagonals</p>

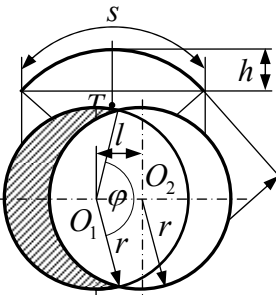
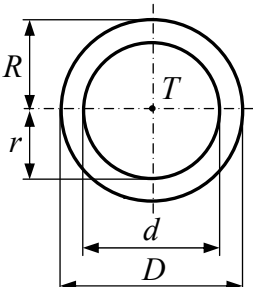
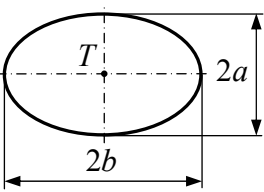
Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p>Коло</p> 	$F = \pi r^2 = 3.1416r^2 =$ $= \frac{1}{4} \pi d^2 = 0.7854d^2;$ <p>периметр:</p> $2\pi r = 6.2832r =$ $= \pi d = 3.1416d.$	<p>Центр ваги – у центрі кола, тобто в точці перетину осей (діаметрів)</p>
<p>Напівколо</p> 	$F = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{8} \pi d^2 =$ $= 0.393d^2$	$TO = \frac{4r}{3\pi} = 0.4244r$
<p>Круговий сектор φ – центральний кут; a – довжина хорди</p> 	$F = \frac{1}{2} sr = \frac{1}{360} \varphi \pi r^2;$ $s = r \varphi \frac{\pi}{180} =$ $= 0.01745r \varphi;$ $\varphi = \frac{57.296s}{r};$ $r = \frac{2F}{s} = \frac{57.296s}{\varphi}$	$TO = \frac{2}{3} r \sin \frac{\varphi}{2} =$ $= \frac{2ra}{3s} = \frac{r^2 a}{3F} =$ $= 38.197r \sin \frac{\varphi}{2}.$ <p>При $\varphi = 90^\circ$: $TO = 0.600r$;</p> <p>при $\varphi = 60^\circ$: $TO = 0.6366r$.</p>

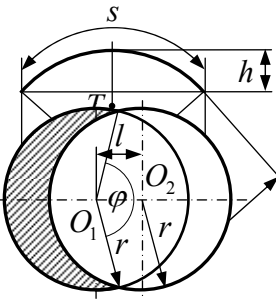
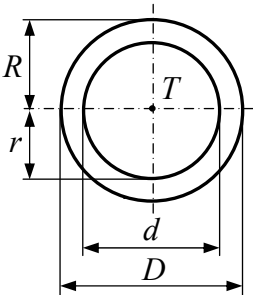
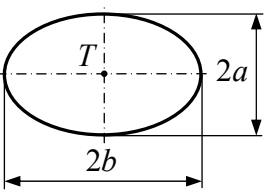
Continuation of table A.1

Figure	Area	Center of gravity
<p style="text-align: center;">Circle</p> 	$F = \pi r^2 = 3.1416r^2 =$ $= \frac{1}{4} \pi d^2 = 0.7854d^2;$ <p style="text-align: center;">периметр:</p> $2\pi r^2 = 6.2832r =$ $= \pi d = 3.1416d.$	<p>Center of gravity - in the center of the circle, that is, at the point intersection of axes (diameters)</p>
<p style="text-align: center;">Semicircle</p> 	$F = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{8} \pi d^2 =$ $= 0.393d^2$	$TO = \frac{4r}{3\pi} = 0.4244r$
<p style="text-align: center;">Circular sector</p> <p>φ – central corner; a – length chord chord</p> 	$F = \frac{1}{2} sr = \frac{1}{360} \varphi^\circ \pi r^2;$ $s = r \varphi^\circ \frac{\pi}{180} =$ $= 0.01745r \varphi^\circ;$ $\varphi^\circ = \frac{57.296s}{r};$ $r = \frac{2F}{s} = \frac{57.296s}{\varphi^\circ}$	$TO = \frac{2}{3} r \sin \frac{\varphi^\circ}{2} =$ $= \frac{2ra}{3s} = \frac{r^2 a}{3F} =$ $= 38.197r \sin \frac{\sin \frac{\varphi^\circ}{2}}{\frac{\varphi^\circ}{2}}.$ <p>At $\varphi^\circ = 90^\circ$: $TO = 0.600r$;</p> <p>At $\varphi^\circ = 60^\circ$: $TO = 0.6366r$.</p>

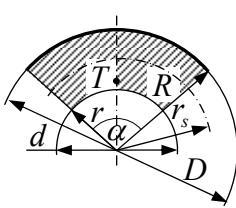
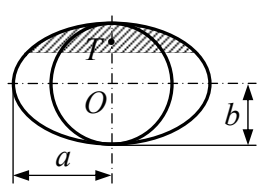
Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа										Центр ваги		
<p>Круговий сегмент</p> <p>φ – центральний кут;</p> 	$F = \frac{r(s-a)+ah}{2};$ $a = 2\sqrt{h(2r-h)};$ $h = r - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}$										$TO = \frac{a^3}{12F} =$ $= \frac{2}{3} r^3 \frac{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}{F}$		
	$F = r^2 \left(\pi + \sin \varphi - \frac{\varphi \pi}{180} \right) = r^2 \eta$												
	$\frac{l}{d}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9			
η	0.4	0.79	1.18	1.56	1.91	2.25	2.55	2.81	3.02				
<p>Кругове кільце</p> 	$F = \pi(R^2 - r^2) =$ $= \frac{1}{4} \pi(D^2 - d^2) =$ $= 0.7854(D^2 - d^2)$										<p>Центр ваги – у центрі кіл, що обмежують кругове кільце, тобто в точці перетину осей (діаметрів)</p>		
<p>Еліпс</p> 	$F = \pi \cdot a \cdot b = 3.1416a \cdot b =$ $= 3.1416 \times$ $\times \sqrt{2(a^2 + b^2)} \frac{(a-b)^2}{2.2}$										<p>Центр ваги – у середині еліпса, тобто в точці перетину його осей</p>		

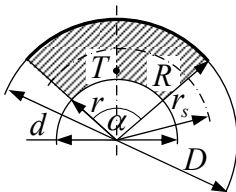
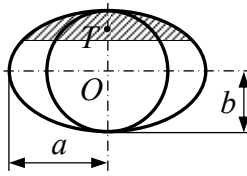
Continuation of table A.1

Figure	Area	Center of gravity																				
<p>Circular segment</p> <p>φ – central corner;</p> 	$F = \frac{r(s-a)+ah}{2};$ $a = 2\sqrt{h(2r-h)};$ $h = r - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}$	$TO = \frac{a^3}{12F} =$ $= \frac{2}{3} r^3 \frac{\sin^3 \frac{\varphi^\circ}{2}}{F}$																				
	$F = r^2 \left(\pi + \sin \varphi - \frac{\varphi^\circ \pi}{180} \right) = r^2 \eta$	<table border="1" data-bbox="415 625 999 775"> <tr> <td>$\frac{l}{d}$</td> <td>0.1</td> <td>0.2</td> <td>0.3</td> <td>0.4</td> <td>0.5</td> <td>0.6</td> <td>0.7</td> <td>0.8</td> <td>0.9</td> </tr> <tr> <td>η</td> <td>0.4</td> <td>0.79</td> <td>1.18</td> <td>1.56</td> <td>1.91</td> <td>2.25</td> <td>2.55</td> <td>2.81</td> <td>3.02</td> </tr> </table>	$\frac{l}{d}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	η	0.4	0.79	1.18	1.56	1.91	2.25	2.55	2.81	3.02
$\frac{l}{d}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9													
η	0.4	0.79	1.18	1.56	1.91	2.25	2.55	2.81	3.02													
<p>Circular ring</p> 	$F = \pi(R^2 - r^2) =$ $= \frac{1}{4} \pi(D^2 - d^2) =$ $= 0.7854(D^2 - d^2)$	<p>Center of gravity - in the center of the bounding circles circular ring, that is, at the point intersection of axes (diameters)</p>																				
<p>Ellipse</p> 	$F = \pi \cdot a \cdot b = 3.1416a \cdot b =$ $= 3.1416 \times$ $\times \sqrt{2(a^2 + b^2)} \frac{(a-b)^2}{2.2}$	<p>The center of gravity is in the middle of the ellipse, ie at a point intersection of its axes</p>																				

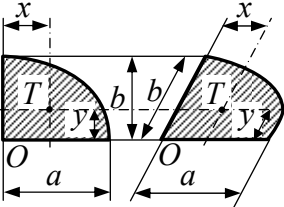
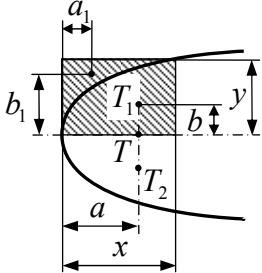
Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p style="text-align: center;">Сектор кругового кільця</p> 	$F = \frac{\alpha \cdot \pi}{360} (R^2 - r^2) =$ $= 0.00873\alpha (R^2 - r^2).$ <p>При $\alpha = 180^\circ$</p> $F = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{2} =$ $= 1.5708 (R^2 - r^2).$	$OT = 38.197 \times$ $\times \frac{(R^3 - r^3) \sin \frac{\alpha}{2}}{(R^2 - r^2) \frac{\alpha}{2}}.$ <p>При $\alpha = 180^\circ$</p> $OT = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)} =$ $= 0.424 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$
<p style="text-align: center;">Еліптичний сегмент</p> 	<p>Площа еліптичного сегмента визначається добутком відношення a/r на площу відповідного кругового сегмента</p> $F_{ел} = \frac{a}{r} F_{кр}$	<p>Центр ваги еліптичного сегмента співпадає з центром ваги кругового сегмента при $d = 2b$</p>
<p>Аналогічне правило справедливо і для еліпсоїда обертання</p>		

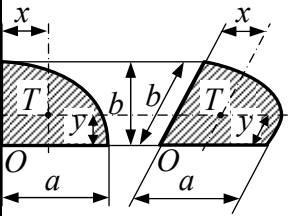
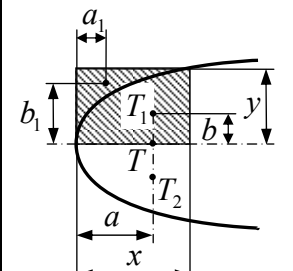
Continuation of table A.1

Figure	Area	Center of gravity
<p style="text-align: center;">Sector circular ring</p> 	$F = \frac{\alpha \cdot \pi}{360} (R^2 - r^2) =$ $= 0.00873\alpha (R^2 - r^2).$ <p>При $\alpha = 180^\circ$</p> $F = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{2} =$ $= 1.5708 (R^2 - r^2).$	$OT = 38.197 \times$ $\frac{(R^3 - r^3) \sin \frac{\alpha}{2}}{(R^2 - r^2) \frac{\alpha}{2}}.$ <p>При $\alpha = 180^\circ$</p> $OT = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)} =$ $= 0.424 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$
<p style="text-align: center;">Elliptic segment</p> 	<p>The area of the elliptical segment is determined product ratio to the area of the corresponding circular segment</p> $F_{el} = \frac{a}{r} F_{cp}$	<p>Center of gravity elliptical segment coincides with the center of gravity of the circular segment at $d = 2b$</p> <p>A similar rule applies to the ellipsoid of rotation</p>

Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p>Квадрант (четвертина) еліпса</p> 	<p>F – площа квадранта:</p> $F = \frac{1}{4} \pi ab.$ <p>F' – площа доповнення до квадранта:</p> $F' = ab \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$	<p>координати центра ваги квадранта:</p> $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{ba}{\pi}; \quad y = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi};$ <p>координати центра ваги доповнення до квадранта:</p> $x_1 = \frac{a}{6} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right);$ $y_1 = \frac{b}{6} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$
<p>Параболічний напівсегмент</p> 	$F = \frac{2}{3} xy$	<p>відстань центра ваги параболічного напівсегмента від вершини:</p> $a = \frac{3}{5} x; \quad b = \frac{3}{8} y;$ <p>центр ваги доповнення до параболічного напівсегмента:</p> $a_1 = 0.3x; \quad b_1 = 0.75y.$
<p>Справедливо також і для випадку, коли хорда утворює із віссю косий кут.</p>		

Continuation of table A.1

Figure	Area	Center of gravity
<p style="text-align: center;">Quadrant (quarter) ellipse</p> 	<p>F – area quadrant:</p> $F = \frac{1}{4} \pi ab.$ <p>F' – area addition to the quadrant:</p> $F' = ab \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$	<p>coordinates of the center of gravity of the quadrant:</p> $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{ba}{\pi}; \quad y = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi};$ <p>coordinates of the center of gravity of the addition to the quadrant:</p> $x_1 = \frac{a}{6} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right);$ $y_1 = \frac{b}{6} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$
<p style="text-align: center;">Parabolic semi-segment</p> 	$F = \frac{2}{3} xy$	<p>center distance the weight of the parabolic half-segment from the top:</p> $a = \frac{3}{5} x; \quad b = \frac{3}{8} y;$ <p>center of gravity addition to parabolic half segment:</p> $a_1 = 0.3x; \quad b_1 = 0.75y.$
<p style="text-align: center;">It is also true for the case when the chord forms an oblique angle with the axis.</p>		

ДОДАТОК Б

Міжнародна метрична система одиниць

Міри довжини

Назва	Скорочене позначення	Величина	Відношення до см	Відношення до основної одиниці (м)
Пікометр	<i>пм</i>	0.001 <i>нм</i>	10^{-10}	10^{-12}
Нанометр	<i>нм</i>	0.001 <i>мк</i>	10^{-7}	10^{-9}
Мікрон (мікрометр)	<i>мк</i>	0.000001 <i>м</i> = 0.001 <i>мм</i>	10^{-4}	10^{-6}
Міліметр	<i>мм</i>	1000 <i>мк</i>	10^{-1}	10^{-3}
Сантиметр	<i>см</i>	0.01 <i>м</i> = 10 <i>мм</i>	1	10^{-2}
Дециметр	<i>дм</i>	0.1 <i>м</i> = 10 <i>см</i> = 100 <i>мм</i>	10	10^{-1}
Метр	<i>м</i>	100 <i>см</i> = 1000 <i>мм</i>	10^2	1
Кілометр	<i>км</i>	1000 <i>м</i> = 1 000 000 <i>мм</i>	10^5	10^3
Мегаметр	<i>Мм</i>	1 000 000 <i>м</i>	10^8	10^6

Appendix B

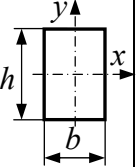
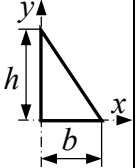
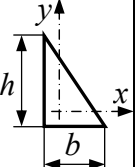
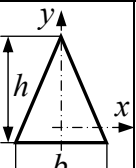
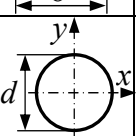
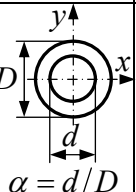
International metric system of units

Measures of length

Name	Abbreviated notation	Magnitude	Relation to cm	Relation to the basic unit (m)
Picometer	pm	0.001 <i>nm</i>	10^{-10}	10^{-12}
Nanometer	nm	0.001 μ	10^{-7}	10^{-9}
Micron (micrometer)	μ	0.000001 <i>m</i> = 0.001 <i>mm</i>	10^{-4}	10^{-6}
Millimeter	mm	1000 <i>mm</i>	10^{-1}	10^{-3}
Centimeter	cm	0.01 <i>m</i> = 10 <i>mm</i>	1	10^{-2}
Decimetre	dm	0.1 <i>m</i> = 10 cm = 100 <i>mm</i>	10	10^{-1}
Meter	m	100 <i>cm</i> = 1000 <i>mm</i>	10^2	1
Kilometer	km	1000 <i>m</i> = 1 000 000 <i>mm</i>	10^5	10^3
Megameter	Mm	1 000 000 <i>m</i>	10^8	10^6

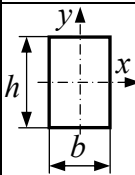
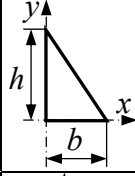
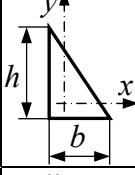
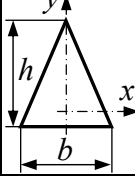
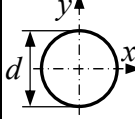
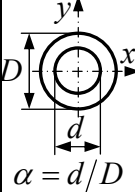
ДОДАТОК В

Геометричні характеристики плоских перерізів

Форма перерізу	Позначення геометричних характеристик							
	F	I_x	I_y	I_{xy}	I_p	W_x	W_y	W_p
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	—	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{b^2h^2}{24}$	—	—	—	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$	—	—	—	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0	—	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{hb^2}{24}$	—
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0	0	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	
	$\frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)$	$\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$	0	0	$\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$	

Appendix C

Geometric characteristics of flat sections

Form cross section	Designation of geometrical characteristics							
	F	I_x	I_y	I_{xy}	I_p	W_x	W_y	W_p
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	$-$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	$-$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{b^2h^2}{24}$	$-$	$-$	$-$	$-$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$	$-$	$-$	$-$	$-$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0	$-$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{hb^2}{24}$	$-$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0	0	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
 $\alpha = d/D$	$\frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)$	$\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$	0	0	$\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$

ДОДАТОК Г

Контрольні питання

1. Дати визначення дисципліни “Теоретична механіка” та назвати її підрозділи.
2. Що вивчається в статиці?
3. Дати визначення сили, назвати, якими факторами вона визначається.
4. Що таке рівнодіюча та зрівноважуюча сили?
5. Сформулювати аксіоми статики та наслідки з них.
6. Що називається в’яззю, накладеною на тіло?
7. Назвати види в’язей.
8. Дати визначення реакції в’язі та вказати основні випадки визначення напрямку реакцій в’язей.
9. Що означає розкласти силу на дві складові, прикладені в одній точці?
10. Що означає скласти дві або декілька сил, прикладених в одній точці?
11. Що називається проекцією сили на вісь; як визначається величина і знак проекції сили на осі координат?
12. В якому випадку проекція сили на вісь дорівнює нулю?
13. Як визначається величина і напрям сили по її проекціям на осі координат?
14. Сформулювати геометричну умову рівноваги плоскої системи збіжних сил.
15. Сформулювати аналітичну умову рівноваги системи збіжних сил.
16. Записати рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил.
17. Дати визначення пари сил. Яку дію вона чинить на тверде тіло?
18. Що називається моментом пари; правило знаків для пари сил?

Appendix D

Control questions

1. Define the discipline "Theoretical Mechanics" and name its sub-sections.
2. What is studied in statics?
3. Give a definition of force, name what factors determine it.
4. What is resultant and balancing force?
5. Formulate axioms of statics and their consequences.
6. What is called a restraint applied to the body?
7. What are the types of restraints.
8. Give a definition of the reaction of the restraint and indicate the main cases of determining the direction of the reactions of the restraint.
9. What does it mean to decompose a force into two components applied at one point?
10. What does it mean to add two or more forces applied at one point?
11. What is called the projection of force on the axis; how is the magnitude and sign of the projection of the force on the coordinate axis determined?
12. In which case the projection of the force on the axis is zero?
13. How to determine the magnitude and direction of force on its projections on the coordinate axis?
14. Formulate the geometric condition of equilibrium of a plane system of converging forces.
15. Formulate an analytical condition for the equilibrium of a system of convergent forces.
16. Write the equation of equilibrium of a plane system of convergent forces.
17. Give a definition of a pair of forces. What effect does it have on a solid body?
18. What is called the moment of steam; rule of signs for a pair of forces?

19. Що називається моментом сили відносно точки? Які його знаки і розмірність?
20. В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
21. Що означає привести силу до даної точки?
22. Чому дорівнює момент приєднаної пари?
23. Що називається головним вектором і головним моментом плоскої системи сил та як вони визначаються?
24. Сформулювати теорему Вариньона.
25. Записати рівняння рівноваги плоскої системи сил (три види).

19. What is the moment of force relative to a point? What are its signs and dimensions?
20. In which case the moment of force relative to the point is zero?
21. What does it mean to bring force to this point?
22. Why is the moment of the connected pair?
23. What is the main vector and main moment of a plane system of forces and how are they determined?
24. Formulate Varignon's theorem.
25. Write the equation of equilibrium of a plane system of forces (three types).

Навчальне видання

Шевченко Володимир Григорович
Фурсіна Анна Дмитрівна
Шумикін Сергій Олександрович
Кружнова Світлана Юріївна

ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА
Частина 1
Теоретична механіка

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS
Part 1
Theoretical mechanics

Навчальний посібник

Видавництво «Просвіта»
Тираж 50 прим.