МІНІМІЗАЦІЯ ЧАСТКОВО ВИЗНАЧЕНИХ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ОБРАЗНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Михайло Соломко
Національний університет водного господарства та природокористування

MINIMIZATION OF PARTIALLY DEFINED BOOLEAN FUNCTIONS BY THE METHOD OF FIGURATIVE TRANSFORMATIONS

Abstract. The conducted studies have established that the method of image transformations makes it possible to reduce the complexity of the minimization procedure of partially defined Boolean functions without loss of functionality, compared to sorting through binary definitions. The interpretation of the result is that the combinatorial systems 2-(n, b)-design, 2-(n, x/b)-design represent logical operations. Therefore, the detection of such combinatorial systems in the truth table of logical functions directly and unambiguously establishes the location for equivalent transformations of Boolean expressions. This, in turn, implies an algorithm for simplifying Boolean functions, including partially defined Boolean functions.

При виготовлені цифрових пристроїв виникають ситуації, коли булева функція не визначена на всіх наборах змінних. Для подолання такого типу невизначеності при створенні аналітичної моделі цифрового пристрою застосовують процедуру довизначення функції на невизначених наборах. Зазначене довизначення є потужним ступенем свободи та ресурсом якісної оптимізації частково визначених булевих функцій.

Існує два способи довизначення функцій:

– $f_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ на всіх невизначених наборах вихідна функція $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ довизначається одиницями;

– $f_0(x_1, x_2, \dots x_n)$ на всіх невизначених наборах вихідна функція $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ довизначається нулями.

Тоді теорема Квайна, на разі, виводить наступне твердження: мінімальна диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) не повністю визначеної булевої функції визначається як диз'юнкція найбільш коротких імплікант функції. Ці імпліканти в сукупності покривають усі мінтерми досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ) функції, причому серед обраних простих імплікант відсутні зайві [1].

Булеві функції є окремим випадком не повністю визначених функцій. Не повністю визначені булеві функції можуть бути представлені за допомогою повністю визначених булевих функцій, які отримуються за допомогою відповідних довизначень (перебираючи всі можливі підстановки 0 або 1 замість «–» don't care – байдуже або невизначене значення) [2]. Тоді процедуру мінімізації частково визначеної булевої функції потрібно проводити на кожній визначеній функції та обрати оптимальний результат.

Зі збільшенням кількості невизначених наборів множина повністю визначених булевих функцій суттєво збільшується. Для семи, наприклад, невизначених наборів змінних існує 2^7=128 різних способів бінарного довизначення частково визначених булевих функцій, і, отже, складність процедури мінімізації функції буде зростати.

Таким чином, актуальним аспектом теоретичних наукових досліджень з мінімізації частково визначених булевих функцій методом образних перетворень є:

– зменшення кількості способів бінарного довизначення частково визначених булевих функцій;

– виявлення можливостей вдосконалення процедури мінімізації та розширення апарату синтезу цифрових компонентів на основі частково визначених булевих функцій для застосування їх у цифрових технологіях.

Виявлення локацій рівносильних перетворень за допомогою комбінаторних систем 2–(n, b)-design, 2–(n, x/b)-design

Існує два типи невизначеності для системи на практиці (рис. 1): за входом і за виходом (або вхідна дія не може надійти ззовні, або реакція системи на вхідну дію неважлива).

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	–
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	–
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Невизначеність
Don't Care

Рис. 1. Невизначеності у системі

Частково визначену булеву функцію можна подати множиною повністю визначених булевих функцій, які отримуються за допомогою відповідних довизначень (перебираючи всі можливі підстановки 0 або 1 замість «–») (рис. 2). Тоді процедуру мінімізації частково визначеної булевої функції потрібно проводити на кожній визначеній функції та обрати оптимальний результат.

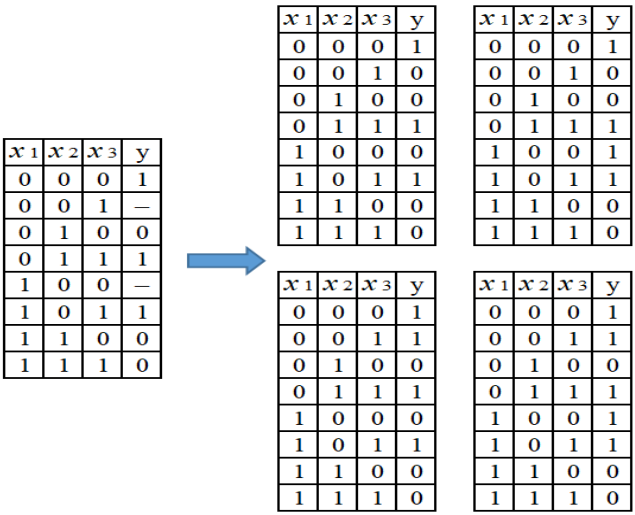


Рис. 2. Частково визначена булева функція $f(x_1, x_2, x_3)$ подана множиною з 2^2=4 повністю визначених булевих функцій $f(x_1, x_2, x_3)$

Зі збільшенням кількості невизначених наборів множина повністю визначених функцій суттєво збільшується. Для шести, наприклад, невизначених наборів змінних існує 2^6=64 різних способів бінарного довизначення частково визначених булевих функцій, і, отже, складність процедури мінімізації функції буде зростати.

Для зменшення кількості способів бінарного довизначення частково визначених булевих функцій потрібно обирати таку бінарну конфігурацію, яка забезпечить умови для проведення операцій супер-склеювання змінних та/або простого склеювання змінних. А також буде включати в себе визначені набори змінних і частину невизначених наборів змінних, зокрема. Для ряду частково визначених булевих функцій оптимальна їх мінімізація буде вимагати використання всіх невизначених наборів змінних.

Комбінаторні системи 2–(*n, b*)-design, 2–(*n, x/b*)-design, які входять до складу бінарних структур таблиць істинності забезпечують однозначне виявлення локацій рівносильних перетворень для спрощення булевих функцій. Встановлене місце рівносильних перетворень імплікує алгоритм мінімізації булевих функцій. Таким чином системи 2–(*n, b*)-design, 2–(*n, x/b*)-design мають інформаційну ємність, що дозволяє з ефектом замінити бінарне довизначення частково визначених булевих функцій, як то на рис. 2, на метод образних перетворень. Це, у свою чергу, дає змогу без втрати функціональності зменшити складність процедури мінімізації, порівняно з перебором бінарних довизначень частково визначених булевих функцій.

Приклад 1. Частково визначена булева функція *f*(*A, B, C, D*) задана таблицею істинності (табл. 1). Знайти мінімальну ДНФ [3].

Таблиця 1

Таблиця істинності частково визначеної булевої функції *f*(*A, B, C, D*)

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	–	–	1	0	–	0	0	0	0	–	1	0	0	0

Розв'язок:

$f_{\text{ТДНФ}}(A,B,C,D) =$

№	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	1
12	1	1	0	0	1
2	0	0	1	0	–
3	0	0	1	1	–
6	0	1	1	0	–
11	1	0	1	1	–

=

A	B	C	D	f
0			0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	1	–
1	0	1	1	–

=

A	B	C	D	f
0			0	1
	1	0	0	1
0	0	1	1	–
1	0	1	1	–

. (1)

Перша матриця виразу (1) представляє таблицю істинності частково визначеної ДНФ функції *f*(*A*, *B*, *C*, *D*) (табл. 1). До блоків 0, 4, 2, 6 застосовано операцію супер-склеювання змінних [4]. Результат логічних операцій першої матриці записано до другої матриці виразу (1).

Мінімальна ДНФ має вигляд:

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{D} + B\overline{C}\,\overline{D}. \qquad (2)$$

Відмічаємо, що невизначені набори змінних 3, 11 під час спрощення функції *f*(*A*, *B*, *C*, *D*) (табл. 1) методом образних перетворень не були використані. Це у підсумку зменшило загальну складність спрощення функції. Результат мінімізації (2) співпадає з [3].

На відміну від бінарних довизначень, в розглянутому прикладі, всього одна комбінаторна система 2–(2, 4)-design встановлює локацію потрібних рівносильних перетворень. Це зменшує складність процедури мінімізації, порівняно з перебором довизначених функцій, дає результат спрощення без втрати функціональності заданої булевої функції та забезпечує ефективність заміни бінарних довизначень на метод образних перетворень.

Точний та евристичний метод спрощення частково визначених булевих функцій

За допомогою точного методу спрощення булевих функцій можна оцінювати якість евристичних методів, і навіть визначати напрямок створення евристичного методу [5].

Приклад 2. Методом образних перетворень спростити ДНФ частково визначеної функції f(x1, x2, x3, x4, x5, x6), яка представлена картою Карно [6].

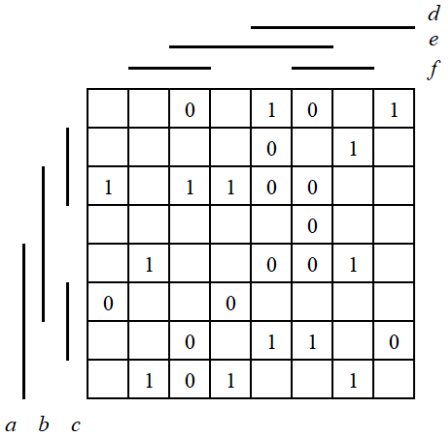


Рис. 3. Частково визначена булева функція шести змінних (карта Карно)

Розв'язок:

Перша матриця виразу (3) представляє таблицю істинності частково визначеної ДНФ функції $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ (рис. 3).

До блоків 13, 33, 37, 49, 53, 1, 5, 9, 17, 21, 25, 29, 41, 45, 57, 61, що складають повну комбінаторну систему 2–(4, 16)-design та до блоків 4, 6, 34, 0, 2, 32, 36, 38, що складають повну комбінаторну систему 2–(3, 8)-design, а також до блоків 46, 47, 62, 63, що складають повну комбінаторну систему 2–(2, 4)-design застосуємо операцію супер-склеювання змінних [4]. До блоків 24, 16 та 26, 18, а також до блоків 27, 19 застосуємо операцію простого склеювання змінних. Результат зазначених логічних операцій записуємо до другої матриці виразу (3). У другій матриці виразу (3) невизначені набори змінних не відображаються, оскільки вони не приймають участь у подальшому спрощенні функції.

У підсумку отримана мінімальна функція

$$f_{\text{мднф}} = \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_6 + \overline{x}_5\overline{x}_6 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 + x_1x_3x_4x_5, \qquad (4)$$

яка містить на два літерали менше, порівняно зі спрощенням за допомогою евристичного методу [6].

Кошт реалізації отриманої мінімальної функції (4) методом образних перетворень складає $k_0 / k_l / k_{in} = 4 / 12 / 6$, де k_0, k_l, k_{in} – кількість кон'юнктермів, літералів та інверторів відповідно.

$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) =$

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f
4	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	1	1	0	1
13	0	0	1	1	0	1	1
24	0	1	1	0	0	0	1
26	0	1	1	0	1	0	1
27	0	1	1	0	1	1	1
33	1	0	0	0	0	1	1
34	1	0	0	0	1	0	1
37	1	0	0	1	0	1	1
46	1	0	1	1	1	0	1
47	1	0	1	1	1	1	1
49	1	1	0	0	0	1	1
53	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	–
1	0	0	0	0	0	1	–
2	0	0	0	0	1	0	–
5	0	0	0	1	0	1	–
8	0	0	1	0	0	0	–
9	0	0	1	0	0	1	–
10	0	0	1	0	1	0	–
11	0	0	1	0	1	1	–
12	0	0	1	1	0	0	–
15	0	0	1	1	1	1	–
16	0	1	0	0	0	0	–
17	0	1	0	0	0	1	–
18	0	1	0	0	1	0	–

=

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f
19	0	1	0	0	1	1	–
20	0	1	0	1	0	0	–
21	0	1	0	1	0	1	–
22	0	1	0	1	1	0	–
25	0	1	1	0	0	1	–
28	0	1	1	1	0	0	–
29	0	1	1	1	0	1	–
32	1	0	0	0	0	0	–
36	1	0	0	1	0	0	–
38	1	0	0	1	1	0	–
39	1	0	0	1	1	1	–
40	1	0	1	0	0	0	–
41	1	0	1	0	0	1	–
42	1	0	1	0	1	0	–
45	1	0	1	1	0	1	–
48	1	1	0	0	0	0	–
50	1	1	0	0	1	0	–
51	1	1	0	0	1	1	–
52	1	1	0	1	0	0	–
57	1	1	1	0	0	1	–
59	1	1	1	0	1	1	–
60	1	1	1	1	0	0	–
61	1	1	1	1	0	1	–
62	1	1	1	1	1	0	–
63	1	1	1	1	1	1	–

=

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f
–		0	0			0	1
–					0	1	1
–	0	1		0	0		1
–	0	1		0	1	0	1
–	0	1		0		1	1
–	1		1	1	1		1

=

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f
–		0	0			0	1
–					0	1	1
–	0	1		0	0		1
–	0	1		0	1	0	1
–	0	1		0		1	1
–	1		1	1	1		1

=

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f
–		0	0			0	1
–					0	1	1
–	0	1		0			1
–	1		1	1	1		1

=

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f
–		0	0			0	1
–					0	1	1
–	0	1		0			1
–	1		1	1	1		1

=

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f
–		0	0			0	1
–					0	1	1
–	0	1		0			1
–	1		1	1	1		1

. (3)

Мінімальна функція, отримана евристичним методом [6] має вигляд:

$$f_{\text{мдн}\phi} = \bar{e}f + \bar{b}\bar{c}\bar{f} + \bar{c}\bar{e} + \bar{a}\bar{c}\bar{d} + acde,$$

з коштом реалізації $k_\theta / k_l / k_{in} = 5/14/8$.

Література

1. Савельев А. Я. Прикладная теория цифровых автоматов. – М.: Высшая школа, 1987. – 272 с. URL: https://vdoc.pub/documents/-4o35jbu52gg0 (дата обращения: 20. 06. 2023).

2. Прихожий А. А. Частично определённые логические системы и алгоритмы. – Минск: БНТУ, 2013. – 343 с. URL: https://rep.bntu.by/handle/data/37237 (дата обращения: 20. 06. 2023).

3. Мінімізація неповністю визначених логічних функцій. Дискретна математика / Сумський державний університет. URL: https://studfile.net/preview/14499737/page:17/ (дата звернення: 20. 06. 2023).

4. Різник, В.В., Соломко, М.Т. Застосування алгебричної операції супер-склеювання змінних для мінімізації булевих функцій комбінаторни методом // Технологічний аудит та резерви виробництва. – Вип. 6/2 (38), 2017. С. 60 – 76. URL: http://journals.uran.ua/tarp/article/viewFile/118336/112951 (дата звернення: 20. 06. 2023).

5. Поттосин, Ю. В. Минимизация булевых функций в классе ортогональных дизъюнктивных нормальных форм / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2021. − Т. 18, № 2. – С. 33–47. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-2-33-47. URL: https://inf.grid.by/jour/article/view/1131 (дата обращения: 20. 06. 2023).

6. Закревский, А.Д. Торопов, Н.Р. Романов, В.И. ДНФ-реализация частичных булевых функций многих переменных // Информатика. – 2010. − № 1(25). – С. 102–112. URL: https://inf.grid.by/jour/article/view/461/419 (дата обращения: 20. 06. 2023).